

313

Radon-mål.

§0.	<u>Indledning.</u>	s. 1
§1.	<u>Abstrakte mål.</u>	
1.1.	Målelighed og mål	s. 3
1.2.	Integral af positive funktioner	s. 8
1.3.	Monoton konvergens og Fatou's lemma	s. 9
1.4.	Integrable funktioner	s. 13
1.5.	L^p -rummene og deres duale rum	s. 15
1.6.	Produktmål	s. 18
1.7.	Øvelser	s. 19
§2.	<u>Positive Radon-mål.</u>	
2.1.	Indledning	s. 21
2.2.	Radon-mål og Radon-indhold	s. 22
2.3.	Riesz' repræsentationssætning	s. 26
2.4.	Lebesgue-målet i $\mathbb{R}^n$	s. 31
2.5.	Øvelser	s. 34
§3.	<u>Topologier på $C_c(X)$ og det duale til $C_c(X)$.</u>	
3.1.	Reelle Radon-mål	s. 36
3.2.	Vektor-topologier på $C_c(X)$	s. 39
3.3.	Komplekse Radon-mål	s. 43
3.4.	Øvelser	s. 44
	<u>Litteraturhenvisninger</u>	s. 50
supp.	Topologi og Net	s. 1

§0. Indledning. Dette sæt noter udgør sammen med (store dele af) kapitel 1-9 i bogen:

W. Rudin: "Functional Analysis" - McGraw-Hill, 1973

indholdet af kurset Mat 313.

Stoffet i disse noter tænkes at skulle indpasses i gennemgangen af bogen mellem kap. 3 og kap. 4.

De kontinuerte reelle (resp. komplekse) funktioner med kompakt støtte $C_c(X)$ (resp. $C_c(X)_{\mathbb{C}}$) på et lokalkompakt topologisk rum, udgør et vektorrum over $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Hovedformålet med disse noter er, at beskrive det duale rum $C_c(X)^*$, når $C_c(X)$ udstyres med passende vektortopologier. Dette gøres ved hjælp af teorien for Radon-mål på X .

For ikke at skulle forudsætte kendskab til abstrakt målteori har vi indføjet §1. For den, der har kendskab til kurset Mat 212 (Mål og integralteori), vil indholdet af §1 være velkendt.

I §2 indføres de positive Radon-mål, som et abstrakt mål på Borellegemet med en vis regularitets egenskab m.h.t. de kompakte delmængder. Vi viser Riesz' repræsentationssætning, der giver en bijektiv forbindelse mellem positive Radon mål på X og positive lineære funktionaler på $C_c(X)$.

Som et vigtigt eksempel på et Radon-mål indføres Lebesgue-målet i $\mathbb{R}^n$. Dette mål, og det tilsvarende integral, spiller en væsentlig rolle i Rudin's bog kapitel 6 og 7. (Distributioner og Fourier transformation).

I §3 indføres reelle (og komplekse) Radon-mål og de duale rum til $C_c(X)$ (og $C_c(X)_{\mathbb{C}}$) beskrives ved hjælp heraf.

Jeg vil gerne takke Flemming Topsøe for idéer og vejledning til udarbejdelse af §2.

Nærværende udgave er i det væsentlige et genoptryk af 1974-udgaven. Dog er rettelleslisten indarbejdet i teksten. Dette giver sig især udslag i ændringer side 34 opg. 3 og side 40-50.

Juni 1975,

Mogens Flensted-Jensen

§1. Abstrakte mål.

1.1. Målelighed og mål. Lad i det følgende X betegne en vilkårlig mængde. Et mål på X skal, løst sagt, være en forskrift, hvorved vi kan beskrive "størrelsen", "vægten" eller "ladningen" af en given delmængde. Det viser sig at give visse vanskeligheder, hvis vi vil måle alle delmængder. Vi starter derfor med at præcisere, hvilke delmængder af X og hvilke funktioner $X \rightarrow \mathbb{R}$, vi vil betragte som målelige.

Definition 1.1. En familie $\hat{B}$ af delmængder af X kaldes en σ -algebra, hvis

$$(1.1) \quad \emptyset, X \in \hat{B},$$

$$(1.2) \quad \text{Hvis } A \in \hat{B}, \text{ så gælder } X \setminus A \in \hat{B},$$

$$(1.3) \quad \text{Hvis for alle } n \in \mathbb{N} \quad A_n \in \hat{B}, \text{ så gælder}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \hat{B}.$$

Parret $(X, \hat{B})$ kaldes et målbart rum.

En funktion $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ kaldes $\hat{B}$ -målelig, hvis

$$(1.4) \quad \text{For alle } \alpha \in \mathbb{R} : \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \in \hat{B}.$$

$M(X, \hat{B})$ betegner mængden af $\hat{B}$ -målelige funktioner, og $M^+(X, \hat{B})$ de ikke negative funktioner i $M(X, \hat{B})$. En funktion $\varphi \in M(X, \hat{B})$ kaldes simpel, hvis den er endelig

og kun antager endelig mange forskellige værdier.

Bemærk, at $M = M(X, \hat{B})$ ikke er et vektorrum, da det for $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in M$ kun giver mening at tale om $\lambda f + g$, såfremt f og g kun antager endelige værdier. Defineres

$$\lambda \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{for } 0 < \lambda \leq \infty \\ 0 & \text{for } \lambda = 0 \\ \mp\infty & \text{for } -\infty \leq \lambda < 0 \end{cases}$$

og for $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \pm \infty = \pm \infty$

så giver det rimelig mening at danne λf og $f \cdot g$.

Når vi skriver et udtryk af formen $f + g$, vil vi stillende forudsætte, at der ikke gælder $f(x) = -g(x) = \pm\infty$ for noget $x \in X$.

Vi får brug for de følgende to lemmaer.

Lemma 1.2.

(1.5) Hvis for alle $n \in \mathbb{N}$ $A_n \in \hat{B}$, så gælder $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \hat{B}$.

(1.6) Hvis for alle $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in M(X, \hat{B})$, så vil funktionerne $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ og $\liminf f_n$ tilhøre $M(X, \hat{B})$. Specielt gælder for $f \in M(X, \hat{B})$ at

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{og} \quad f^- = \max\{-f, 0\} \quad \text{tilhører} \quad M^+(X, B).$$

(1.7) Hvis $f, g \in M(X, \hat{B})$ og $\lambda \in \mathbb{R}$ så vil

$$\lambda f + g \in M(X, \hat{B}) \quad \text{og} \quad f \cdot g \in M(X, \hat{B}).$$

Bevis: (1.5) følger af (1.1), (1.2) og (1.3) idet

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) .$$

Lad $\alpha \in \mathbb{R}$ da gælder

$$\{x \in X \mid \sup_n f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid f_n(x) > \alpha\} ,$$

$$\{x \in X \mid \inf_n f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid f_n(x) > \alpha + \frac{1}{m}\} ,$$

Heraf ses, at $\sup f_n$ og $\inf f_n$ er $\hat{B}$ -målelige. Ved at benytte dette fås at $\limsup f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{\sup_{m \geq n} f_m\}$ er $\hat{B}$ -målelig, tilsvarende for $\liminf f_n$. Hermed er (1.6) vist.

Det set let, at λf er $\hat{B}$ -målelig. $f + g$ er $\hat{B}$ -målelig idet

$$\{x \in X \mid f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in X \mid f(x) > r\} \cap \{x \in X \mid g(x) > \alpha - r\}) .$$

For at vise af $f \cdot g$ er målelig, antages først, at f og g kun antager endelige værdier. Da $f \cdot g = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$ er det nok, at vise at f^2 er $\hat{B}$ -målelig, og dette følger af

$$\{x \in X \mid f(x)^2 > \alpha\} = \begin{cases} X & \text{for } \alpha < 0 \\ \{x \in X \mid f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X \mid -f(x) > \sqrt{\alpha}\} & \text{for } \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Hvis f og g antager uendelige værdier, defineres

$f_n, g_n \in M(X, \hat{B})$ ved

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } |f(x)| \leq n \\ n & \text{for } f(x) > n \\ -n & \text{for } f(x) \leq -n \end{cases}$$

og tilsvarende for g . $f \cdot g$ er da $\hat{B}$ -målelig ifølge

$$(1.6) \text{ idet } f \cdot g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} f_n(x) \cdot g_m(x)). \quad \text{Q.e.d.}$$

Lemma 1.3. Hvis $f \in M^+(X, \hat{B})$ så findes en voksende følge af simple funktioner $\varphi_n \in M^+(X, \hat{B})$, således at

$$\lim \varphi_n = f.$$

Bevis. Følgende funktioner ses klart at opfylde kravene:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & \text{hvis } f(x) \geq n \\ k \cdot 2^{-n}, & \text{hvis } k \cdot 2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n} \leq n \end{cases}$$

Q.e.d.

Definition 1.4. Et mål μ på et målbart rum $(X, \hat{B})$ er en afbildning $\mu : \hat{B} \rightarrow [0, \infty]$, således at $\mu(\emptyset) = 0$ og μ er tællelig-additiv d.v.s. hvis $E_n \in \hat{B}$ er en følge af indbyrdes disjunkte mængder så gælder

$$(1.8) \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Triplet $(X, \hat{B}, \mu)$ kaldes et målrum. μ siges at være endeligt, hvis $\mu(X) < +\infty$, og μ siges at være

σ -endeligt, hvis der findes en følge $E_n \in \hat{B}$, således at $\mu(E_n) < +\infty$ og $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Eksempel 1.5. $X = \mathbb{N}$, $\hat{B}$ = alle delmængder. Lad μ_1 , μ_2 og μ_3 være givet ved $\mu_1(n) = 1$, $\mu_2(n) = 2^{-n}$ og $\mu_3(n) = \infty$. Da er μ_1 σ -endeligt, "tællemålet" på $\mathbb{N}$; μ_2 er endeligt, idet $\mu(\mathbb{N}) = 1$; og μ_3 er ikke σ -endeligt.

Lemma 1.6. Lad $(X, \hat{B}, \mu)$ være et målrum, da gælder

(1.9) Hvis $E, F \in \hat{B}$, $E \subseteq F$ og $\mu(F) < +\infty$, da er $\mu(E) \leq \mu(F)$ og $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

(1.10). Hvis $E_n, F_n \in \hat{B}$, (E_n) voksende og (F_n) dalende og $\mu(F_1) < +\infty$ da gælder

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_n \mu(E_n), \quad \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_n \mu(F_n).$$

Beviset gives som øvelse nr. 1.

Definition 1.7. $N \in \hat{B}$ siges at være en nulmængde, hvis $\mu(N) = 0$. Lad $p(x)$ være et åbent udsagn, $p(x)$ siges at gælde næsten overalt (μ -n.o.), hvis der findes en nulmængde N således, at $p(x)$ er sandt for alle $x \in X \setminus N$. $f \in M(X, \hat{B})$ siges at være en nulfunktion, hvis $f(x) = 0$ μ -n.o.

Eksempel 1.8. $f, g \in M(X, \hat{B})$, $f = g$ μ -n.o., hvis $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ er en nulmængde.

$f_n, f \in M(X, \hat{B})$, $f_n \rightarrow f$ μ -n.o. hvis $\{x \in X \mid \limsup f_n(x) \neq f(x) \text{ eller } \liminf f_n(x) \neq f(x)\}$ er en nulmængde.

1.2. Integral af positive funktioner.

Definition 1.9. Lad $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{E_i}$ være en simpel funktion i $M^+(X, \hat{B})$. Vi definerer integralet af φ med hensyn til et mål μ ved

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i) .$$

En kort overvejelse viser, at $\int \varphi \, d\mu$ er veldefineret, at $\int \varphi \, d\mu \in [0, \infty]$, samt at følgende gælder

(1.11) Hvis $\varphi, \psi \in M^+(X, \hat{B})$, φ, ψ er simple og $\lambda \geq 0$,

da er $\int (\lambda \varphi + \psi) \, d\mu = \lambda \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$.

(1.12) Hvis $\varphi \in M^+(X, \hat{B})$ er simple, da defineres et mål μ_φ på $\hat{B}$ ved

$$\mu_\varphi(E) = \int \varphi \cdot X_E \, d\mu \text{ for } E \in \hat{B} .$$

Definition 1.10. Lad $f \in M^+(X, \hat{B})$. Vi definerer integralet af f m.h.t. μ ved

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu \mid \varphi \in M^+(X, \hat{B}), \varphi \text{ simpel} \right\} \\ \text{og } \varphi \leq f$$

Hvis $E \in \hat{B}$ defineres integralet af f over E ved

$$\int_E f \, d\mu = \int f \cdot X_E \, d\mu .$$

Lemma 1.11. Hvis $f, g \in M^+(X, \hat{B})$ og $E, F \in \hat{B}$ da gælder:

$$(1.13) \quad f \leq g \text{ medfører at } \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu .$$

$$(1.14) \quad E \subseteq F \text{ medfører at } \int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu .$$

Bevis. Lad $\varphi \in M^+(X, \hat{B})$ være simpel og $\varphi \leq f$, da gælder også $\varphi \leq g$, hvoraf (1.13) følger.

(1.14) følger af (1.13) idet $f \cdot X_E \leq f \cdot X_F$. Q.e.d.

1.3. Monoton Konvergens og Fatou's lemma.

Sætning 1.12. Hvis $f_n \in M^+(X, \hat{B})$ er en monotant voksende følge af funktioner, og $f = \lim f_n$ da gælder

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu .$$

Bevis: Ifølge (1.6) er $f \in M^+(X, \hat{B})$. Da det for alle n gælder at $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ fås af (1.13) at $\int f_n \, d\mu \leq \int f_{n+1} \, d\mu \leq \int f \, d\mu$. Hvilket viser at $\lim \int f_n \, d\mu$ eksisterer og $\lim \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$. For at vise den modsatte ulighed vælges en simpel funktion φ i $M^+(X, \hat{B})$, $\varphi \leq f$ og et

α , $0 < \alpha < 1$. Sæt

$$A_n = \{x \in X \mid f_n(x) \geq \alpha \varphi(x)\}.$$

Det er klart, at $A_n \in \hat{B}$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ og $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Det følger nu af (1.13) og (1.14) at

$$(1.15) \quad \int_{A_n} \alpha \varphi \, d\mu \leq \int_{A_n} f_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu.$$

Ifølge (1.12) og (1.10) gælder da

$$\lim \int_{A_n} \varphi \, d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \varphi \, d\mu = \int \varphi \, d\mu.$$

Ved at benytte dette i (1.15) fås

$$\alpha \int \varphi \, d\mu \leq \lim \int f_n \, d\mu.$$

Da dette gælder for alle $0 < \alpha < 1$ fås

$$\int f \, d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi \, d\mu \leq \lim \int f_n \, d\mu.$$

Q.e.d.

Korollar 1.13. Hvis $f, g, g_n \in M^+(X, \hat{B})$ og $\lambda \geq 0$ så gælder

$$(1.16) \quad \int (\lambda f + g) \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

$$(1.17) \quad \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

(1.18) Der defineres et mål μ_f på $\hat{B}$ ved

$$\mu_f(E) = \int_E f \, d\mu \quad \text{for } E \in \hat{B}.$$

Bevis. (1.16) følger af sætning 1.12, lemma 1.3 og (1.11).

(1.17) følger af (1.16) og sætning 1.12 med $f_n = \sum_{i=1}^n g_i$.

For (1.18) er det klart, at $\mu_f: \hat{B} \rightarrow [0, \infty]$ og

$\mu_f(\emptyset) = 0$. Vi mangler at vise, at μ_f er tællelig additiv.

Lad $E_n \in \hat{B}$ være indbyrdes disjunkte, da følger af (1.17):

$$\mu_f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \int f \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_{E_n}\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f \cdot X_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(E_n) .$$

Q.e.d.

Fatou's lemma 1.14: Hvis (f_n) er en følge fra $M^+(X, \hat{B})$, da gælder

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu .$$

Bevis. Definer $g_m = \inf_{n \geq m} f_n$. Da gælder for $m \leq n$

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu ,$$

og derfor $\int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$.

(g_m) er en voksende følge og $\lim g_m = \liminf f_n$, sætningen 1.12 giver derfor

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \lim \int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu .$$

Q.e.d.

Korollar 1.15. Lad $f \in M(X, \hat{B})$, da er f en nulfunktion hvis og kun hvis $\int |f| d\mu = 0$.

Bevis: Vi kan gerne antage, at f er positiv.

Hvis f er en nulfunktion, er $E = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ en nulmængde. Definer $f_n = n \cdot \chi_E$. Da $f \leq \liminf f_n$ følger af Fatou's lemma at $0 \leq \int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu = 0$, altså at $\int f \, d\mu = 0$.

Antag omvendt at $\int f \, d\mu = 0$.

Definer $E_n = \{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$, da er (E_n) voksende og

$$0 = \int f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n) \geq 0,$$

altså er $\mu(E_n) = 0$, og dermed er

$$\{x \in X \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

en nulmængde.

Q.e.d.

Bemærkning 1.16. Det er ofte praktisk at identificere funktioner, der er identiske μ -n.o. Det vil sige, at vi danner ækvivalensrelationen i $M(X, \mathcal{B})$:

$$f \sim g \stackrel{\text{defn.}}{\Leftrightarrow} f = g \text{ } \mu\text{-n.o.}$$

I mange tilfælde vil vi benytte samme skrivemåde for en funktion f , og dens ækvivalensklasser. For eksempel kan $f = 0$ betyde, at f er en nulfunktion, altså at $f \sim 0$.

1.4. Integrable funktioner. Vi skal nu udvide integralbegrebet til også at gælde funktioner, der antager negative værdier. Af praktiske grunde indskrænker vi os til funktioner, der ikke antager værdierne $\pm \infty$.

(Det ville være nok, at forudsætte at funktionerne var forskellige fra $\pm \infty$ μ -n.o.). Vi minder om at, for $f \in M(X, \hat{B})$ er $f^+, f^- \in M^+(X, \hat{B})$ og $f = f^+ - f^-$.

Definition 1.17. $f \in M(X, \hat{B})$ siges at være integrabel, hvis f ikke antager værdierne $\pm \infty$, og $\int f^+ d\mu$ og $\int f^- d\mu$ begge er endelige. Integralet af f defineres i så tilfælde ved

$$\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x) = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Med $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \hat{B}, \mu)$ betegnes samlingen af integrable funktioner

Lemma 1.18. Lad $f \in M(X, \hat{B})$. Da gælder at $f \in \mathcal{L}$ hvis og kun hvis $|f| \in \mathcal{L}$. I bekræftende fald gælder

$$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu.$$

Bevis. Hvis $f \in \mathcal{L}$ er $f^+, f^- \in \mathcal{L}$ og $|f| = f^+ + f^-$, hvorfor $\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < +\infty$. Omvendt hvis $|f| \in \mathcal{L}$, så er $0 \leq f^+, f^- \leq |f|$, og dermed er f integrabel ifølge lemma 1.11. Q.e.d.

Korollar 1.19. Hvis $f \in M(X, \hat{B})$, $g \in \mathcal{L}$ og $|f| \leq |g|$ så gælder $f \in \mathcal{L}$ og $|\int f d\mu| \leq \int |g| d\mu$.

Korollar 1.20. $\mathcal{L}$ er et vektorrum over $\mathbb{R}$ og integralet er en lineær funktional på $\mathcal{L}$.

Lebesgues sætning om domineret konvergens. 1.21. Lad (f_n) være en følge af integrable funktioner, der konvergerer μ -n.o. mod en reel, målelig funktion f . Hvis der findes en integrabel funktion g , således at $|f_n| \leq g$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så er f integrabel og

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Bevis. Ifølge korollar 1.15 ændres integralerne ikke ved, at funktionerne ændres på en nulmængde. Vi kan derfor antage, at $f = \lim f_n$. Ifølge korollar 1.19 er $f \in \mathcal{L}$. Da $g + f_n \geq 0$ og $g - f_n \geq 0$ gælder, ifølge Fatou's lemma,

$$\begin{aligned} \int g \, d\mu \pm \int f \, d\mu &= \int (g \pm f) \, d\mu \leq \liminf \int (g \pm f_n) \, d\mu = \\ &= \int g \, d\mu + \liminf \int \pm f_n \, d\mu. \end{aligned}$$

Heraf ses, at

$$\limsup \int f_n \, d\mu = - \liminf \int -f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Altså er $\int f_n \, d\mu$ konvergent med grænseværdi $\int f \, d\mu$

Q.e.d.

Bemærkning 1.22. En funktion $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ kaldes målelig, henholdsvis integrabel, hvis realdelen $\operatorname{Re} f$ og imaginærdelen $\operatorname{Im} f$ hver for sig opfylder egenskaben.

Vi benytter også betegnelserne $M(X, B)$, $\mathcal{L}$ etc.

(evt. $M_{\mathbb{C}}(X, B)$, $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ etc.) for komplekse funktioner. For $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ defineres

$$\int f \, d\mu = \int \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int \operatorname{Im} f \, d\mu .$$

Herved bliver integralet en lineær funktional på det komplekse vektorrum $\mathcal{L}$. På nær mindre omformuleringer er alt det tidligere viste gyldigt for komplekse funktioner også. F.eks. gælder:

$$(1.19) \quad \text{For alle } f \in M_{\mathbb{C}}(X, B) : \quad f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}} .$$

1.5. L^p -rummene og deres dual rum. Med hensyn til de følgende paragraffer, behøver vi ikke gå videre med den abstrakte målteori. Vi vil dog i afsnit 1.5 og 1.6, uden fuldstændige beviser, indføre en række begreber og citere en række sætninger fra målteorien. Det er praktisk især med henblik på eksempler og opgaver i Rudin's bog, at have kendskab til disse. Angående beviser henvises til Mat 212.

Eksempel 1.23. Det er klart, at $f \rightarrow \int |f| \, d\mu$ definerer en seminorm på $\mathcal{L}$. Ifølge Rudin 1.43, bliver herved $L = \mathcal{L}/\mathcal{N}$ et normeret rum, hvor $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L} \mid \int |f| \, d\mu = 0\}$. Vi ser, at kvotient afbildningen $\mathcal{L} \rightarrow L$ er givet ved, at en funktion går over i dens ækvivalensklasse (se bemærkning 1.16).

Definition 1.24. For $1 \leq p < \infty$ defineres

$$\mathcal{L}^p = \{f \in M(X, \mathcal{B}) \mid |f|^p \in \mathcal{L}\}.$$

For $p = \infty$ defineres

$$\mathcal{L}^\infty = \{f \in M(X, \mathcal{B}) \mid \exists \alpha \in [0, \infty[: |f| \leq \alpha \text{ } \mu\text{-n.o.}\}$$

For $1 \leq p \leq \infty$ defineres "p-normen" af $f \in \mathcal{L}^p$ ved

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{for } p < +\infty$$

$$\|f\|_\infty = \inf \{ \alpha \in [0, \infty[\mid |f| \leq \alpha \text{ } \mu\text{-n.o.} \}.$$

Hölders ulighed 1.25.

Lad $p, q \in [1, \infty]$ og

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Hvis $f \in \mathcal{L}^p$ og $g \in \mathcal{L}^q$, så vil

$f \cdot g \in \mathcal{L}^1$ og

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

for $p = q = 2$ er denne ulighed også kendt under navnet:

Cauchy-Schwarz' ulighed. 1.26. Hvis $f, g \in \mathcal{L}^2$, så

vil $f \cdot \bar{g}$ være integrabel og

$$\left| \int f \cdot \bar{g} d\mu \right| \leq \int |f \cdot \bar{g}| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Minkowski's ulighed 1.27.

Lad $p \in [1, \infty]$ og $f, g \in \mathcal{L}^p$,

da er $f + g \in \mathcal{L}^p$ og

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Bemærkning 1.28. For $p = 1$ eller $p = \infty$ er Hölders og Minkowski's uligheder oplagte at vise. For $p = 2$ følger Minkowski's ulighed af Cauchy-Schwarz', idet

$$\|f + g\|_2^2 = \int |f + g|^2 d\mu = \int |f|^2 d\mu + \int |g|^2 d\mu + \int f \cdot \bar{g} d\mu + \int \bar{f} \cdot g d\mu \leq$$

$$\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2 \|f\|_2 \|g\|_2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2.$$

Hölders ulighed viser, at $\|\cdot\|_p$ er en semi-norm på $\mathcal{L}^p$.

Som i eksempel 1.23, defineres de normerede rum

$$L^p = L^p(X, \mathcal{B}, \mu) = \mathcal{L}^p / \mathcal{N}.$$

Riesz - Fishers sætning 1.29. For $1 \leq p \leq \infty$ er L^p et Banach rum.

Bevis. Se øvelse nr. 3.

Vælg nu $p, q \in [1, \infty]$ således at $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ og vælg $\varphi \in L^q$. Ifølge Hölders ulighed vil afbildningen

$$(1.20) \quad S\varphi: f \mapsto \int f \cdot \varphi d\mu$$

være et element i det duale rum $(L^p)^*$ til L^p .

For $p < \infty$ kan vi sige mere:

Riesz' repræsentationssætning for L^p . 1.30.

Hvis $1 \leq p < \infty$ og $(X, \mathcal{B}, \mu)$ er σ -endeligt så er $\varphi \mapsto S\varphi$ en isometrisk, isomorfi af L^q på $(L^p)^*$.

1.6. Produktmål. Lad $(X_1, \hat{B}_1, \mu_1)$ og $(X_2, \hat{B}_2, \mu_2)$ være to σ -endelige målrum. Lad $\hat{B}$ være den mindste σ -algebra i $X = X_1 \times X_2$ således, at $\hat{B}$ indeholder alle delmængder $A_1 \times A_2$, hvor $A_1 \in \hat{B}_1$ og $A_2 \in \hat{B}_2$.

Sætning 1.31. Der findes et éntydigt mål μ på $\hat{B}$, således at $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2)$ for alle $A_1 \in \hat{B}_1$ og $A_2 \in \hat{B}_2$.

Om produktmål skal vi blot citere en sætning, der viser, at vi for integrable funktioner kan integrere "efter de variable hver for sig", og at der gælder, løst sagt:

$$(1.21) \quad \int_{X_1 \times X_2} F(x_1, x_2) d\mu(x_1, x_2) = \int_{X_1} \int_{X_2} F(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1) = \\ \int_{X_2} \int_{X_1} F(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) .$$

Fubinis sætning 1.32. Lad μ være produktmålet af to σ -endelige mål $(X_1, \hat{B}_1, \mu_1)$ og $(X_2, \hat{B}_2, \mu_2)$.

Hvis $F \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2, \mu)$, defineres $F_{x_1}(x_2) = F(x_1, x_2)$ og der gælder: $F_{x_1} \in \mathcal{L}(X_2, \mu_2)$ μ_1 -n.o., således at $f(x_1) = \int F_{x_1} d\mu_2$ er defineret μ_1 -n.o.

Der gælder, at $f \in \mathcal{L}(X_1, \mu_1)$ og $\int F d\mu = \int f d\mu_1$.

1.7. Øvelser

1. Bevis lemma 1.6.

2. Lad $(X, \tilde{B}, \mu)$ være et målrum. Lad $\tilde{N}$ være samlingen af nulmængder, og $\tilde{N}_1 = \{A \subseteq X \mid \exists N \in \tilde{N}: A \subseteq N\}$.
Vis, at følgende familie $\tilde{B}_1$ er en σ -algebra

$$\tilde{B}_1 = \{(A \cup N_1) \setminus N_2 \mid A \in \tilde{B}, N_1, N_2 \in \tilde{N}_1\}.$$

Vis, at $\mu_1((A \cup N_1) \setminus N_2) = \mu(A)$ definerer et mål μ_1 på $\tilde{B}_1$. $(X, \tilde{B}_1, \mu_1)$ kaldes fuldstændiggørelsen af $(X, \tilde{B}, \mu)$. Vis, at hvis $f_1 \in M(X, \tilde{B}_1)$ så findes $f \in M(X, \tilde{B})$ således at $f_1 = f$ μ_1 -n.o.

3. Bevis Riesz-Fischers sætning 1.29 efter følgende skitse:

Lad f_n være Cauchy-følge i L^p . For $p < \infty$:
vælg delfølge g_k således at $\|g_{k+1} - g_k\|_p < 2^{-k}$.

Vis, ved hjælp af Fatou's lemma og Minkowski's ulighed, at rækken $g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x))$ er
absolut konvergent μ -n.o., samt at grænsefunktionen

f opfylder $[\int |f|^p d\mu]^{\frac{1}{p}} \leq \|g_1\|_p + 1$. Benyt

Lebesgues sætning om domineret konvergens til at vise,
at g_k er konvergent i L^p . Slut heraf at f_n er
konvergent i L^p . For $p = \infty$: vælg en nulmængde
 N således at f_n konvergerer uniformt i $X \setminus N$, slut
heraf at f_n er konvergent i L^∞ .

4. Vis, at $L^2(X, \mu)$ er et Hilbertrum (se Rudin 12.1) med skalarproduktet $(f, g) = \int f \cdot \bar{g} \, d\mu$.

5. Betragt målene μ_1 og μ_2 på $\mathbb{N}$ i Eksempel 1.5.

Hvad betyder det, at en talfølge $(n \mapsto a_n)$ er integrabel m.h.t. μ_1 og μ_2 .

Formuler Fubinis sætning for produkt målet af μ_1 med sig selv, som en sætning om konvergens af talfølger.

2. Positive Radon-mål.

2.1. Indledning. Lad i det følgende X være et Hausdorff, topologisk rum. Lad $\hat{B} = \hat{B}(X)$ betegne σ -algebraen af Borelmængder, d.v.s., at $\hat{B}$ er den mindste σ -algebra der indeholder alle afsluttede (eller ækvivalent hermed alle åbne) delmængder af X . Lad $\hat{K} = \hat{K}(X)$ være familien af kompakte delmængder af X . Bemærk at $\hat{K} \subset \hat{B}$, at $\hat{K}$ ikke er en σ -algebra, men at $\hat{K}$ tillader endelig foreningsmængde-, og vilkårlig fællesmængde-dannelse. Et Radon-mål er, løst sagt, et mål på $\hat{B}$, der er bestemt ved sine værdier på kompakte delmængder. Vi definerer også et Radon-indhold, som et "mål" på $\hat{K}$. I afsnit 2.2 viser vi, at der en én-én-tydig korrespondance mellem Radon-mål og Radon-indhold. I afsnit 2.3 indskrænker vi os til at betragte lokalkompakte rum X . I denne paragraf betegner $C_c(X)$ de kontinuerte, reelle funktioner med kompakt støtte. En lineær afbildning $T: C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes positiv, hvis $f \geq 0$ medfører at $Tf \geq 0$. Vi viser, at en sådan lineær afbildning bestemmer et Radon-indhold λ ved

$$(2.1) \quad \lambda(K) = \inf \{Tf \mid f \in C_c(X), X_K \leq f\} \quad \text{for } K \in \hat{K}.$$

Det herved bestemte Radon-mål, giver anledning til et integral, hvis restriktion til $C_c(X)$ giver os T tilbage.

Læg mærke til, at vi i §1 ikke har påvist eksistensen af andre mål end "diskrete mål" (jvf. Eksempel 1.15). Ved hjælp af ovennævnte kan vi i 2.4 indføre Lebesgue-målet i $X = \mathbb{R}^n$, der er et mål hvor "massen er jævnt fordelt" og ingen punkter har positivt mål.

2.2. Radon-mål og Radon-indhold. Lad X være et Hausdorff, topologisk rum.

Definition 2.1. Et (Positivt) Radon-mål på X er et mål μ på $\hat{B}(X)$, således at

$$(2.2) \quad \mu(K) < +\infty \text{ for alle } K \in \hat{K}$$

$$(2.3) \quad \mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \in \hat{K}, K \subset A\} \text{ for alle } A \in \hat{B}.$$

Et (Positivt) Radon-indhold på X er en afbildning $\lambda: \hat{K} \rightarrow [0, \infty[$, der opfylder

$$(2.4) \quad \lambda(K_2) - \lambda(K_1) = \sup\{\lambda(K) \mid K \in \hat{K}, K \subseteq K_2 \setminus K_1\}$$

for alle $K_1, K_2 \in \hat{K}$, med $K_1 \subseteq K_2$.

Bemærkning 2.2. Det følger let af (2.2) og (2.3), at restriktionen af et Radon-mål til $\hat{K}$ er et Radon-indhold. Desuden er det klart, at hvis λ er et Radon-indhold, så kan det højst være restriktionen af ét Radon-mål, der i så fald er givet ved:

$$(2.5) \quad \lambda_*(A) = \sup\{\lambda(K) \mid K \in \hat{K}, K \subseteq A\} \text{ for } A \in \hat{B}.$$

Vi skal nu vise, at (2.5) definerer et Radon-mål for ethvert Radon-indhold. Men først drager vi nogle lette konsekvenser af (2.4). Bemærk, at modularitet (2.7) medfører at λ er endelig additiv: Hvis $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ så er $\lambda(K_1 \cup K_2) = \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$.

Lemma 2.3. Lad λ være et Radon-indhold på X , da er λ monoton, modulær og glat d.v.s. for alle $K_1, K_2, \dots \in \hat{K}$:

$$(2.6) \quad K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow \lambda(K_1) \leq \lambda(K_2).$$

$$(2.7) \quad \lambda(K_1 \cup K_2) + \lambda(K_1 \cap K_2) = \lambda(K_1) + \lambda(K_2).$$

$$(2.8) \quad K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq \dots \Rightarrow \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \inf \lambda(K_n).$$

Bevis: (2.6): $\lambda(\emptyset) = 0$ fås af (2.4) med $K_1 = K_2$.

$\lambda(K_1) \leq \lambda(K_2)$ fås af (2.4), idet højre siden er ≥ 0 .

$$\begin{aligned} (2.7): \lambda(K_1 \cup K_2) - \lambda(K_2) &= \sup \{ \lambda(K) \mid K \in \hat{K}, K \subseteq (K_1 \cup K_2) \setminus K_2 \} = \\ &= \sup \{ \lambda(K) \mid K \in \hat{K}, K \subseteq K_1 \setminus (K_1 \cap K_2) \} = \lambda(K_1) - \lambda(K_1 \cap K_2). \end{aligned}$$

(2.8): Lad $K_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ og $K' \subseteq K_1 \setminus K_0$. Følgen

$K' \cap K_n$ går dalende mod $\emptyset$. På grund af kompakthed findes et N så $K' \cap K_N = \emptyset$, og vi har ifølge (2.6) og (2.7):

$$\inf \lambda(K_n) + \lambda(K') \leq \lambda(K_N) + \lambda(K') = \lambda(K_N \cup K') + 0 \leq \lambda(K_1)$$

da dette gælder for alle K' , $K' \subset K_1 \setminus K_0$ fås ifølge (2.4), at

$$\lambda(K_1) - \lambda(K_0) = \sup \lambda(K') \leq \lambda(K_1) - \inf \lambda(K_n)$$

og derfor $\inf \lambda(K_n) \leq \lambda(K_0)$. Den modsatte ulighed følger af (2.6). Q.e.d.

Sætning 2.4. Lad λ være et Radon-indhold på X . Der findes et éntydigt bestemt Radon-mål μ på X , således at μ 's restriktion til $\hat{K}$ er lig med λ .

Bevis: Ifølge bemærkningen ovenfor mangler vi blot at vise, at (2.5) definerer et Radon-mål $\mu = \lambda_*$. For en vilkårlig delmængde $D \subseteq X$ defineres $\lambda_*(D)$ ved (2.5). Vi danner nu et mængde system

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \{D \subseteq X \mid \lambda_*(K \cap D) + \lambda_*(K \setminus D) = \lambda_*(K) \text{ for alle } K \in \hat{K}\} = \\ &= \{D \subseteq X \mid \lambda_*(K \cap D) + \lambda_*(K \setminus D) \geq \lambda_*(K) \text{ for alle } K \in \hat{K}\}. \end{aligned}$$

Det er klart, at hvis $D \in \hat{D}$ så vil også $X \setminus D \in \hat{D}$. Hvis D er afsluttet, så er $D \cap K$ kompakt, og derfor $D \in \hat{D}$ ifølge (2.4).

Påstand: Hvis (D_n) er en følge fra $\hat{D}$, så er

$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \hat{D}$. Påstanden medfører altså, at $\hat{D}$ er en σ -algebra, der indeholder de afsluttede delmængder, og dermed $B(X)$.

Bevis for påstand: Lad $K \in \hat{K}$ og $\varepsilon > 0$ være givet.

Vælg to følger (K'_n) og (K''_n) i $\hat{K}$ således at

$$K'_n \subseteq K \cap D_n, \quad K''_n \subseteq K \setminus D_n \quad \text{og} \quad (2.9)$$

$$\lambda(K) \leq \lambda(K'_n) + \lambda(K''_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}$$

Ved at benytte (2.7) fås følgende for alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} K'_i\right) + \lambda\left(K'_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^n K'_i\right) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^n K'_i\right) + \lambda(K'_{n+1}) \quad (2.10)$$

$$\lambda\left(\bigcap_{i=1}^n K''_i \cup K''_{n+1}\right) + \lambda\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} K''_i\right) = \lambda\left(\bigcap_{i=1}^n K''_i\right) + \lambda(K''_{n+1}) .$$

Bemærk, at $L' = K'_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^n K'_i$ og $L'' = \bigcap_{i=1}^n K''_i \cup K''_{n+1}$ er disjunkte, kompakte mængder indeholdt i K , hvorfor $\lambda(L') + \lambda(L'') \leq \lambda(K)$. Ved at benytte dette og (2.9), og ved at addere de to ligninger i (2.10) fås

$$(2.11) \quad \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} K'_i\right) + \lambda\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} K''_i\right) \geq \lambda\left(\bigcup_{i=1}^n K'_i\right) + \lambda\left(\bigcap_{i=1}^n K''_i\right) - \varepsilon \cdot 2^{-(n+1)} .$$

Af (2.11) fås for alle n , ved induktion, at

$$(2.12) \quad \lambda\left(\bigcup_{i=1}^n K'_i\right) + \lambda\left(\bigcap_{i=1}^n K''_i\right) \geq \lambda(K) - \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^n 2^{-i} .$$

Lader vi her $n \rightarrow \infty$ og benytter vi (2.6) og (2.8) fås

$$(2.13) \quad \lambda(K) - \varepsilon \leq \sup_n \lambda\left(\bigcup_{i=1}^n K'_i\right) + \lambda\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} K''_i\right) \leq \\ \leq \lambda_*(K \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i) + \lambda_*(K \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i) .$$

Da $K \in \hat{K}$ og $\varepsilon > 0$ er valgt vilkårligt fås $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_n \in \hat{D}$.

Hermed er påstanden vist.

Vi kan benytte (2.13) til at vise, at λ_* er σ -additiv på $\hat{D}$. Antag at (D_n) er indbyrdes disjunkte, og at $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, da er ifølge (2.7)

$$\sup_n \lambda\left(\bigcup_{i=1}^n K_i^*\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(K_i^*) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(D_i), \text{ og desuden}$$

er $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i^* = \emptyset$. Vi får da af (2.13):

$$\lambda_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \sup \{ \lambda(K) \mid K \in \hat{K}, K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(D_i).$$

Den modsatte ulighed er klart opfyldt.

Sættes til sidst $\mu = \lambda_*|_{\hat{B}}$ fås, at μ er et Radon-mål på X . Q.e.d.

2.3. Riesz' repræsentationssætning. Vi antager fra nu af, at X er lokalkompakt. Lad μ være et Radon-mål på X . Ifølge §1 kan μ udvides til et integral på $\mathcal{L}^1(X, \hat{B}, \mu)$.

Lemma 2.5. $C_c(X) \subset \mathcal{L}^1(X, \hat{B}, \mu)$.

Bevis. Det er klart, at enhver kontinuert funktion på X er målelig. Lad $f \in C_c(X)$ og $K = \text{st}(f) = \text{støtten for } f$. Da gælder $|f| \leq \sup \{|f(x)| \mid x \in X\} \cdot \chi_K$ og dermed

$$\int |f| d\mu \leq \sup \{|f(x)| \mid x \in X\} \cdot \mu(K) < +\infty. \quad \text{Q.e.d.}$$

Vi ser altså, at et Radon-mål μ , eller ækvivalent hermed et Radon-indhold λ , giver anledning til en positiv, lineær funktional på $C_c(X)$: $T_\lambda = T_\mu : f \mapsto \int f d\mu$. Vi skal nu vise det modsatte. Vi får brug for følgende lemma fra den generelle topologi:

Lemma 2.6. Lad X være et lokalkompakt rum.

(2.14) Hvis K er kompakt, G er åben og $K \subseteq G \subseteq X$, så findes en kontinuert funktion $f: X \rightarrow [0,1]$ med kompakt støtte, således at $f(x) = 1$ for $x \in K$ og $f(x) = 0$ for $x \in X \setminus G$.

(2.15) Hvis K_1, K_2 er kompakte, disjunkte delmængder, og $f \in C_c(X)$ opfylder $f \geq X_{K_1} + X_{K_2}$, da findes $f_1, f_2 \in C_c(X)$ således at $f = f_1 + f_2$, $f_1 \geq X_{K_1}$ og $f_2 \geq X_{K_2}$.

(2.16) Hvis $f, f_1, f_2 \in C_c(X)$ og $0 \leq f \leq f_1 + f_2$, $0 \leq f_1$, $0 \leq f_2$, da findes $g_1, g_2 \in C_c(X)$ således at $f = g_1 + g_2$, $0 \leq g_1 \leq f_1$ og $0 \leq g_2 \leq f_2$.

Bevis: (2.14): er sætning 12.6 i Mat 222's noter om topologi.

(2.15): Vælg f_1' ifølge (2.14) med $K = K_1$ og $G = X \setminus K_2$.
Vælg $f_1 = \min \{f, f_1'\}$ og $f_2 = f - f_1$.

(2.16): Vælg $g_2 = \max \{0, f - f_1\}$ og $g_1 = f - g_2$. Q.e.d.

Korollar 2.7. Lad μ være et Radon-mål på et lokal-kompakt rum X , og K en kompakt delmængde. Da gælder

$$(2.17) \quad \mu(K) = \inf \{ \mu(G) \mid G \text{ åben, } G \supseteq K \}.$$

$$(2.18) \quad \mu(K) = \inf \{ \int f \, d\mu \mid f \in C_c(X), f \geq X_K \}$$

$$(2.19) \quad C_c(X) \text{ er tæt i } L^1(X, \mu).$$

Bevis: Vælg $\varepsilon > 0$ og $K_1 \in \hat{K}$, således at $K_1^0 \supseteq K$. Vælg dernæst $K_2 \in \hat{K}$, $K_2 \subseteq K_1^0 \setminus K$ således at $\mu(K_2) + \varepsilon \geq \mu(K_1^0 \setminus K) = \mu(K_1^0) - \mu(K)$. Det er nu klart, at $G = K_1^0 \setminus K_2$ er åben, $G \supseteq K$ og $\mu(G) \leq \mu(K) + \varepsilon$.

Heraf fås (2.17). (2.18) følger nu let af det lige viste, idet vi ifølge (2.14) kan vælge f således at $X_K \leq f \leq X_G$. Lad nu $A \in \hat{B}$ og $\mu(A) < +\infty$, da $\mu(A) = \sup \{ \mu(K) \mid K \in \hat{K}, K \subseteq A \}$ følger det at for $\varepsilon > 0$ findes $f \in C_c(X)$ således at $\|X_A - f\|_1 < \varepsilon$.

Da de simple funktioner ligger tæt følger (2.19). Q.e.d.

Sætning 2.8. Lad T være en positiv lineær funktional på $C_c(X)$. $\lambda_T = \lambda$ defineret ved (2.1) er et Radon-indhold på X .

Bevis: Af (2.14) følger let, at $\lambda(K)$ er veldefineret og tilhører $[0, \infty[$ for alle $K \in \hat{K}$. Det er klart at λ er monoton. Vi skal nu vise (2.4). Lad $K_1, K_2 \in \hat{K}$ $K_1 \subseteq K_2$ og vælg vilkårligt $K \in \hat{K}$, $K \subset K_2 \setminus K_1$. Ifølge

$$(2.15) \text{ er } \{f_1 + f_2 \mid f_1, f_2 \in C_c(X), f_1 \geq X_{K_1}, f_2 \geq X_K\} = \\ = \{f \in C_c(X) \mid f \geq X_{K_1 \cup K}\} .$$

Dette viser at $\lambda(K_1) + \lambda(K) = \lambda(K_1 \cup K) \leq \lambda(K_2)$, og dermed, at $\lambda(K_2) - \lambda(K_1) \geq \sup \{\lambda(K) \mid K \in \hat{K}, K \subseteq K_2 \setminus K_1\}$.

For at vise den modsatte ulighed vælger vi $\varepsilon > 0$,

$0 < \alpha < 1$ og $f_1 \in C_c(X)$ således at $f_1 \geq X_{K_1}$ og

$\lambda(K_1) \geq Tf_1 - \varepsilon$. Vi definerer $K_\alpha \in \hat{K}$, $K_\alpha \subseteq K_2 \setminus K_1$

ved $K_\alpha = \{x \in K_2 \mid f_1(x) \leq \alpha\}$. For ethvert $f \in C_c(X)$

der opfylder $f \geq X_{K_\alpha}$ gælder $X_{K_2} \leq f + \alpha^{-1} f_1$.

Heraf slutter vi at

$$(2.20) \quad \lambda(K_2) \leq \lambda(K_\alpha) + \alpha^{-1} Tf_1 \leq$$

$$\leq \sup \{\lambda(K) \mid K \in \hat{K}, K \subseteq K_2 \setminus K_1\} + \alpha^{-1}(\lambda(K_1) + \varepsilon) .$$

Da dette gælder for alle $\varepsilon > 0$ og $0 < \alpha < 1$, slutter

vi at $\lambda(K_2) - \lambda(K_1) \leq \sup \{\lambda(K) \mid K \in \hat{K}, K \subseteq K_2 \setminus K_1\}$. Q.e.d.

Riesz' repræsentationssætning. 2.9. X er et lokalkompakt rum. Der er én-éntydige korrespondancer mellem følgende tre mængder:

1. De positive Radon-indhold λ på X .
2. De positive Radon-mål μ på X .
3. De positive lineære funktionaler T på $C_c(X)$,

således at følgende gælder

$$(2.21) \quad \begin{cases} \mu(A) = \sup \{ \lambda(K) \mid K \in \tilde{K}, K \subseteq A \} & \text{for } A \in \tilde{B} . \\ Tf = \int f d\mu & \text{for } f \in C_c(X) . \\ \lambda(K) = \inf \{ Tf \mid f \in C_c(X), f \geq X_K \} & \text{for } K \in \tilde{K} . \end{cases}$$

Bevis: Sammenhængen mellem Radon-indhold λ og Radon-mål μ er vist i sætning 2.4. Desuden har vi til hvert λ knyttet et $T = T_\lambda$ (lemma 2.5.) og til hvert T knyttet et $\lambda = \lambda_T$ (sætning 2.8). Afbildningen $\lambda \rightarrow T_\lambda$ er injektiv ifølge (2.18). Lad nu T være givet, og μ det til λ_T svarende mål. Vi er færdige, når vi har vist, at $Tf = \int f d\mu$ for alle $f \in C_c(X)$. Det er nok, at vise dette for $f \geq 0$. Vælg $\varepsilon > 0$ og en simpel funktion $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{K_i}$, hvor alle α_i er positive og alle K_i er indbyrdes disjunkte kompakte mængder, således at

$$\varphi \leq f \quad \text{og} \quad \int \varphi d\mu \geq \int f d\mu - \varepsilon .$$

Vælg disjunkte, åbne mængder G_i , således at $K_i \subset G_i$, og funktioner f_i ifølge (2.14) således, at $X_{K_i} \leq f_i \leq \alpha_i^{-1} f$. Da gælder idet $f_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \leq f$

$$\int f d\mu - \varepsilon \leq \int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(K_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i Tf_i = T(f_0) \leq T(f) .$$

da dette gælder for alle $\varepsilon > 0$, slutter vi at

$$\int f d\mu \leq T(f) .$$

For at vise den modsatte ulighed, kan vi gerne antage at $0 \leq f < 1$. Sæt $K = \text{st}(f) \in \hat{K}$, vælg et $\varepsilon > 0$ og et $h \in C_c(X)$, hvor $h \geq \chi_K$ og $h(x) = 1$ for $x \in K$. Vælg $n \in \mathbb{N}$ så stort at $T(h) \leq n\varepsilon$. For $v = 0, 1, \dots, n-1$ defineres

$$K_v = \{x \in K \mid f(x) \geq \frac{v}{n}\}.$$

Da gælder $f \geq \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{n} \chi_{K_v}$, hvorfor

$$(2.22) \quad \int f \, d\mu \geq \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{n} \mu(K_v).$$

Vælg nu ifølge (2.14) for $v = 1, \dots, n-1$ f_v svarende til $K = K_v$ og $G = K_{v-1}^0$. Vi kan desuden ifølge (2.1) vælge f_v således at $\mu(K_v) \geq T f_v - \varepsilon$. Indsættes dette i (2.22) fås med $h_1 = \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{n} f_v$

$$\int f \, d\mu \geq T(h_1) - \varepsilon.$$

Da $f - h_1 \leq \frac{1}{n} h$ (overvej dette) fås at

$$\int f \, d\mu \geq T(h_1) - \varepsilon \geq T(f) - \frac{1}{n} T(h) - \varepsilon \geq Tf - 2\varepsilon.$$

Dette gælder for alle $\varepsilon > 0$, og den ønskede ulighed følger. Q.e.d.

2.4. Lebesgue-målet i $\mathbb{R}^n$. I dette afsnit vil vi indføre Lebesgue-målet (og Lebesgue-integralet) som det Radon-mål der er bestemt ud fra Riemann-integralet.

Lemma 2.10. Der defineres en positiv lineær funktional på $C_c(\mathbb{R}^n)$ ved for $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, at sætte

$$(2.23) \quad I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n .$$

Hvor de successive integrationer er Riemann-integrationer.

Bevis: Vi bemærker først, at hvis $f \in C_c(\mathbb{R}^2)$ så tilhører $x_2 \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \in C_c(\mathbb{R})$, idet f er ligelig kontinuert. Benyttes dette successivt, ses at I er veldefineret. I er da klart positiv og lineær.

Q.e.d.

Definition 2.11. Det Radon-mål m , eller blot dx , der svarer til den positive lineære funktional I , kaldes Lebesgue-målet, og det tilsvarende integral kaldes Lebesgue-integralet.

Bemærkning 2.12. Det ses umiddelbart af definitionen af Lebesgue-målet m i $\mathbb{R}^n$, at målet af et interval er produktet af kantlængderne, d.v.s. for

$$A = [x_1, y_1] \times \cdots \times [x_n, y_n] \quad \text{er} \quad m(A) = (y_1 - x_1) \cdots (y_n - x_n) .$$

Det følger også let, at m er translationsinvariant, d.v.s. hvis $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ og $x \in \mathbb{R}^n$ så er $m(x+B) = m(B)$.

Sætning 2.13. Lebesgue-målet m på $\mathbb{R}^n$ er entydigt bestemt ved

- a) m er et mål på $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
- b) $m([0,1]^n) = 1$
- c) m er translationsinvariant.

Beviset for $n = 1$ skitseres i øvelse 3.-5. For vilkårligt n går det tilsvarende.

Korollar 2.14: Lebesgue-målet er uafhængig af den valgte integrations rækkefølge i (2.23).

Korollar 2.15. Hvis $n = k + 1$ og m_n, m_k, m_1 er Lebesgue-målet i $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k$ og $\mathbb{R}^1$. Så er m_n produkt-målet af m_k og m_1 i $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^1$.

2.5. Øvelser.

1. Lad $\hat{B}$ være Borellegemet på et topologisk rum X .
Lad $Y \subseteq X$ være en vilkårlig delmængde. Vis at

$$\hat{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \hat{B}\}$$

er Borellegemet på Y med delrumstopologien.

2. Lad X være lokalkompakt. For $a \in X$ defineres
 $T_a: C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ ved $T_a f = f(a)$. Beskriv det til-
hørende Radon-mål ϵ_a .
3. Lad Ω være et åbent interval i $\mathbb{R}$. Lad μ være
et endeligt mål på $\hat{B}(\Omega)$, vis at μ er et Radon-
mål.

Vink: $f \mapsto \int f d\mu$ er positiv lineær funktional
på $C_c(\Omega)$. Lad μ_1 være det tilhørende Radon-mål.

Vis for G åben, at $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, hvor $K_n \in \hat{K}$ og
 $\{K_n\}$ er en voksende følge. Vælg for hvert n

$f_n \in C_c(\Omega)$, således at $\chi_{K_n} \leq f_n \leq \chi_G$, og $f_n \nearrow \chi_G$.

Vis herved, at $\mu(G) = \mu_1(G)$.

Vis dernæst at $\mu(B) = \mu_1(B)$ for alle $B \in \hat{B}$.

4. Lad μ være et mål på $\hat{B}(\mathbb{R})$, der opfylder (2.2).
Vis, at μ er et Radon-mål.
Vink: Benyt forrige øvelse.

5. Vis sætning 2.13 for $n = 1$.

Vink: Benyt øvelse 4 til, at vise, at m er et Radon-mål. Benyt b) og c) til at vise, at målet af et vilkårligt åbent interval er intervallængden. Slut heraf, at målets værdier på de åbne mængder er entydigt fastlagt. Benyt korollar 2.7.

6. Benyt Fubinis sætning 1.32 til at vise, at ethvert ægte underrum i $\mathbb{R}^n$ har mål nul m.h.t. Lebesgue-målet.

§3. Topologier på $C_c(X)$, og det duale til $C_c(X)$.

3.1. Reelle Radon-mål. Lad (λ_1, μ_1, T_1) og (λ_2, μ_2, T_2) være sammenhørende tripler ifølge Riesz' repræsentations sætning 2.9. Det giver god mening, at danne

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(K) = \lambda_1(K) - \lambda_2(K) \quad \text{for } K \in \hat{K} \text{ og}$$

$$(T_1 - T_2)(f) = T_1(f) - T_2(f) \quad \text{for } f \in C_c(X),$$

mens $(\mu_1 - \mu_2)(B) = \mu_1(B) - \mu_2(B)$ for $B \in \hat{B}(X)$ kun giver rimelig mening, hvis både $\mu_1(B) < +\infty$ og $\mu_2(B) < +\infty$.

Definition 3.1. Ved et reelt Radon-indhold, vil vi forstå en differens mellem to positive Radon-indhold. Ved et reelt Radon-mål, vil vi forstå en differens mellem to positive Radon-mål. (Dette sidste er en noget formel og upræcis definition. Den kan gøres mere præcis ved at sætte definitions mængden for et reelt Radon-mål til $\hat{B}_0 = \{B \in \hat{B} \mid \bar{B} \text{ er kompakt}\}$.).

Bemærkning 3.2. Det er klart, at korrespondancen mellem positive Radon-indhold, positive Radon-mål og positive lineære funktionaler på $C_c(X)$, udvides til bijektive korrespondancer mellem reelle Radon-indhold, reelle Radon-mål og differenser mellem positive lineære funktionaler på $C_c(X)$. Dog bevarer formlerne (2.21) ikke deres gyldighed.

Vi skal nu give en alternativ karakterisering af mængden af differenser af positive lineære funktionaler på $C_c(X)$. Lad stadig X være lokalkompakt. Lad for $K \in \hat{K}(X)$

$C_c(X;K) = \{f \in C_c(X) \mid \text{st}(f) \subseteq K\}$. Da er

$C_c(X) = \bigcup \{C_c(X;K) \mid K \in \hat{K}\}$. På $C_c(X;K)$ defineres normen p_K ved

$$(3.1) \quad p_K(f) = \sup \{|f(x)| \mid x \in K\}.$$

$C_c(X;K)$ bliver herved et normeret vektorrum over $\mathbb{R}$.

For et positivt Radon-mål μ er $f \mapsto \int f d\mu$ en kontinuert lineær funktional på $C_c(X;K)$, idet

$$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu \leq p_K(f) \cdot \mu(K).$$

For et reelt Radon-mål $\mu = \mu_1 - \mu_2$ er således også $f \mapsto \int f d\mu = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2$ en kontinuert lineær funktional på $C_c(X;K)$. Vi skal nu vise det modsatte:

Sætning 3.3. Lad $T: C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ være en lineær afbildning med den egenskab, at restriktionen til $C_c(X;K)$ er kontinuert for alle $K \in \hat{K}$. Da findes to positive lineære funktionaler T^+ og T^- på $C_c(X)$, således at $T = T^+ - T^-$.

T^+ og T^- er éntydigt bestemt ved, at T^+ er den mindste positive lineære funktional således at

$$T(f) \leq T^+(f) \quad \text{for alle } f \in C_c(X), f \geq 0.$$

Bevis: For $f \in C_c(X)$ $f \geq 0$ defineres

$$T^+(f) = \sup \{T(\varphi) \mid \varphi \in C_c(X) \quad 0 \leq \varphi \leq f\}$$

$T^+(f) \geq 0$, idet $T(0) = 0$. Lad $K = \text{st}(f)$, da er $f \in C_c(X; K)$. Da T 's restriktion til $C_c(X; K)$ er kontinuert findes en konstant M , således at

$$|T(\varphi)| \leq M p_K(\varphi) \leq M p_K(f)$$

for $\varphi \in C_c(X)$ og $0 \leq \varphi \leq f$. Hvilket viser at $T^+(f) < +\infty$.

Påstand: T^+ opfylder for $f, g \in C_c(X)$, $f \geq 0$, $g \geq 0$

$$(3.2) \quad T^+(\lambda f) = \lambda T^+(f) \quad \text{for } \lambda \geq 0$$

$$(3.3) \quad T^+(f + g) = T^+(f) + T^+(g)$$

Bevis for påstand: (3.2) er oplagt. (3.3) følger af (2.16), der viser at

$$\{\varphi \in C_c(X) \mid 0 \leq \varphi \leq f+g\} = \{\varphi_1 + \varphi_2 \mid 0 \leq \varphi_1 \leq f, 0 \leq \varphi_2 \leq g$$

$$\text{og } \varphi_1, \varphi_2 \in C_c(X)\}$$

Hermed er påstanden vist.

Det ses nu let, at T^+ udvides til en positiv lineær funktional på hele $C_c(X)$. Af definitionen af T^+ følger, at for $f \geq 0$ er $T^+(f) \geq T(f)$. Altså er $T^- = T^+ - T$ en positiv lineær funktional på $C_c(X)$.

Antag endelig, at T_1 er en positiv lineær funktional på $C_c(X)$, således at $T(\varphi) \leq T_1(\varphi)$ for alle $\varphi \geq 0$, $\varphi \in C_c(X)$. Af definitionen på $T^+(f)$ ses at for $f \geq 0$, $f \in C_c(X)$ er

$$T^+(f) \leq \sup \{T_1(\varphi) \mid \varphi \in C_c(X), 0 \leq \varphi \leq f\} \leq T_1(f).$$

Q.e.d.

Bemærkning 3.4. Hvis μ er et reelt Radon-mål, viser sætningen at der findes en éntydig opspaltning som differens af to positive Radon-mål $\mu = \mu^+ - \mu^-$, når der kræves, at μ^+ er mindst muligt. Målet $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ kaldes den totale variation af μ .

3.2. Vektortopologier på $C_c(X)$. Vi vil nu angive fire familier $P_1 - P_4$ af semi-normer på $C_c(X)$. Hver af dem skiller punkter. De tilsvarende lokalkonvekse topologier (Rudin 1.37) på $C_c(X)$ betegnes $\tau_1 - \tau_4$.

$$P_1 : p_{x_1, \dots, x_n}(f) = \max \{|f(x_1)|, \dots, |f(x_n)|\}, \\ n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X.$$

τ_1 kaldes topologien for punktvis konvergens.

$$P_2 : p_K(f) = \sup \{|f(x)| \mid x \in K\}, \quad K \in \hat{K}$$

τ_2 kaldes topologien for ligelig kongergens på kompakte mængder.

$P_3 : p_\infty(f) = \sup \{ \|f(x)\| \mid x \in X \} .$

τ_3 kaldes den ligelige topologi.

P_4 : mængden af semi-normer på $C_c(X)$, for hvilke restriktionen til $C_c(X;K)$ er kontinuert for alle $K \in \hat{K}$.

τ_4 kaldes den induktive topologi.

Bemærkning 3.5. En semi-norm p på $C_c(X)$ er med i P_4 hvis og kun hvis:

$$\forall K \in \hat{K} \exists M_K > 0 \forall f \in C_c(X;K) : p(f) \leq M_K p_\infty(f) .$$

Heraf følger let, at $P_i \subset P_4$ for $i = 1, 2$ og 3 . Det er heraf klart, at topologien τ_4 er finere end τ_1, τ_2 og τ_3 .

På den anden side ses det, at for $K \in \hat{K}$ er delrums topologien på $C_c(X;K)$ den samme for τ_2, τ_3 og τ_4 . Og dermed er $\tau_2 = \tau_3 = \tau_4$, hvis X er kompakt.

Baggrunden for at kalde τ_4 den induktive topologi er, at τ_4 er den fineste lokalkonvekse topologi på $C_c(X)$, for hvilken alle indlejringerne $C_c(X;K) \rightarrow C_c(X)$ er kontinuerte. Man kan også beskrive τ_4 ved en lokal basis

$$(3.4) \quad \beta_4 = \left\{ W \subset C_c(X) \mid \begin{array}{l} W \text{ konveks, balancerende og} \\ W \cap C_c(X;K) \text{ åben i } C_c(X;K) \\ \text{for alle } K \in \hat{K} \end{array} \right\} .$$

Se iøvrigt øvelse 9 og 10.

Vi skal nu beskrive de duale rum til $(C_c(X), \tau_i)$,

$i = 1, \dots, 4$.

Men først et lemma.

Lemma 3.6. Lad μ være positivt Radon-mål. Der findes en største, åben nulmængde G_μ .

Bevis: Definer $G_\mu = \bigcup \{G \subseteq X \mid G \text{ åben og } \mu(G) = 0\}$.

Da er $\mu(G_\mu) = \sup \{\mu(K) \mid K \subseteq G_\mu, K \in \tilde{K}\} = 0$, idet et $K \in \tilde{K}$, $K \subseteq G_\mu$, på grund af kompakheden kan overdækkes med endelig mængde, åbne nulmængder og dermed selv er en nulmængde. Q.e.d.

Definition 3.7. Støtten, $st(\mu)$ for et positivt Radon-mål μ , defineres som $X \setminus G_\mu$. Støtten, $st(\mu)$, for et reelt Radon-mål μ , defineres som $st(|\mu|)(= st(\mu^+) \cup st(\mu^-))$.

Sætning 3.8. Idet et reelt Radon-mål og den tilhørende lineære funktional på $C_c(X)$ identificeres, fås følgende beskrivelse af de duale rum til $(C_c(X), \tau_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$(C_c(X), \tau_1)^* = \{\text{Reelle Radon-mål med endelig støtte}\}$$

$$(C_c(X), \tau_2)^* = \{\text{Reelle Radon-mål med kompakt støtte}\}$$

$$(C_c(X), \tau_3)^* = \{\text{Reelle Radon-mål } \mu \text{ med } |\mu|(X) < +\infty\}$$

$$(C_c(X), \tau_4)^* = \{\text{Reelle Radon-mål.}\}$$

Bevis: I alle fire tilfælde er inklusionen $\supseteq$ let at se ud fra definitionen af topologien. Antag nu for $i = 1, 2, 3$ eller 4, at $T \in (C_c(X), \tau_i)^*$. Da T er kontinuert (se Rudin, Chap. 1, øvelse 8) findes en seminorm $p \in P_i$ og en konstant $M > 0$, således at

$$(3.5) \quad |T(f)| \leq M p(f) \quad \text{for alle } f \in C_c(X).$$

Dette viser, i alle fire tilfælde, at for $K \in \hat{K}$ er restriktionen af T til $C_c(X; K)$ kontinuert. Altså er T et reelt Radon-mål, og $T = T^+ - T^-$ ifølge sætning 3.3. For $i = 4$ er vi færdige.

Alle semi-normer p i P_1, P_2 og P_3 opfylder for $\varphi, f \in C_c(X)$ og $|\varphi| \leq |f|$ at

$$p(\varphi) = p(|\varphi|) \leq p(|f|) = p(f) \leq p_\infty(f)$$

Ifølge definitionen af T^+ og ved hjælp af (3.5) fås derfor for $f \in C_c(X)$:

$$\begin{aligned} |T^+(f)| &= |T^+(f^+) - T^+(f^-)| \leq T^+(|f|) = \\ &= \sup \{T(\varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq |f|, \varphi \in C_c(X)\} \leq \\ &= \sup \{Mp(\varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq |f|, \varphi \in C_c(X)\} \leq Mp(f). \end{aligned}$$

Da $T^- = (-T)^+$ fås tilsvarende $|T^-(f)| \leq Mp(f)$. Vi ser altså, at vi kan benytte (3.5) med T^+ og T^- istedet for T . Dette giver os for $K \in \hat{K}$:

$$\mu^\pm(K) = \inf \{T^\pm(f) \mid X_K \leq f \leq 1, f \in C_c(X)\} \leq M,$$

og dermed $\mu^{\pm}(X) = \sup \{\mu^{\pm}(K) \mid K \in \hat{K}\} \leq M$.

Dette viser, at μ^+ , μ^- og $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ er endelige mål. For $i = 3$ er vi færdige.

For $i = 2$ (resp. $i = 1$) er semi-normen p_i (3.5) af form p_{K_0} , hvor $K_0 \in \hat{K}$ (resp. K_0 endelig). Formel (3.5) med $T^{\pm}$ giver derfor for $f \in C_c(X)$:

$$\text{st}(f) \cap K_0 = \emptyset \Rightarrow T^{\pm}(f) = 0.$$

Hvilket viser at $\text{st}(\mu) \subset K_0$.

Q.e.d.

3.3. Komplekse Radon-mål. I dette afsnit betegner $C_c(X) = C_c(X)_{\mathbb{C}}$ det komplekse vektorrum af kontinuerte, komplekse funktioner med kompakt støtte.

Lad μ være et reelt Radon-mål og $f \in C_c(X)$.

Vi definerer integralet $\int f d\mu$ ved

$$\int f d\mu = \int \text{Re} f d\mu + i \int \text{Im} f d\mu.$$

Det er nu naturligt at definere et komplekst Radon-mål μ som $\mu = \mu_1 + i \mu_2$, hvor μ_1 og μ_2 er reelle Radon-mål. ($\mu(B)$ er kun veldefineret for visse Borelmængder, men integralet $\int f d\mu$ er veldefineret for alle $f \in C_c(X)$.) Det er nu ikke svært at gentage ræsonnementerne i de foregående afsnit, og opnå sætning 3.8 med komplekse Radon-mål i stedet for reelle.

3.4. Øvelser.

1. Lad μ være et reelt Radon-mål på et lokalkompakt rum X . Vis, at der for $f \in C_c(X)$ og $f \geq 0$ gælder

$$(3.6) \quad \int f d|\mu| = \sup \{ |\int \varphi d\mu| \mid |\varphi| \leq f, \varphi \in C_c(X) \}.$$

2. Lad μ være et komplekst Radon-mål på et lokal kompakt rum X . Vis at formlen (3.6) i øvelse 1. definerer et positivt Radon-mål $|\mu|$ på X .
 $|\mu|$ kaldes μ 's totale variation.

Vink: Lad $\rho(f)$ være defineret ved højresiden i (3.6). Det vanskelige er at vise at
 $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$. For " $\geq$ " benyt, at for $g \in C_c(X)$ findes et $\alpha \in \mathbb{C}$, så $|\alpha| = 1$ og
 $|\int g d\mu| = \int \alpha g d\mu$.

For " $\leq$ " benyt, at hvis $|h| \leq f_1 + f_2$ så er
 $h = h_1 + h_2$, hvor for $i = 1, 2$

$$h_i(x) = \begin{cases} h(x) f_i(x) (f_1(x) + f_2(x))^{-1} & \text{for } f_1(x) + f_2(x) \neq 0 \\ 0 & \text{for } f_1(x) + f_2(x) = 0 \end{cases}$$

3. Lad μ være et Radon-mål på et lokal-kompakt rum X (f.eks. $X = \mathbb{R}^n$).

Definer de lokalt integrable funktioner ved

$$\mathcal{L}_{lok}^1 = \{f \in M(X, \hat{B}) \mid f \cdot X_K \in \mathcal{L}^1, \text{ for alle } K \in \hat{K}\}.$$

a) Vis at $\mathcal{L}_{lok}^1$ er et vektorrum.

b) Lad $B \in \hat{B}$ og $\varphi = X_B$, vis at μ_φ givet ved

$$\mu_\varphi(A) = \mu(A \cap B) \text{ for } A \in \hat{B}$$

er et Radon-mål.

c) Lad $\varphi \in \mathcal{L}_{lok}^1$ og $\varphi \geq 0$, vis at μ_φ givet ved

$$\mu_\varphi(A) = \int_A \varphi \, d\mu \text{ for } A \in \hat{B}$$

er et Radon-mål. (Benyt f.eks. b) og lemma 1.3).

d) Lad φ være som i c) og lad $f \in M^+(X, \hat{B})$, vis at

$$\int f \, d\mu_\varphi = \int f \cdot \varphi \, d\mu.$$

e) Lad $\varphi \in \mathcal{L}_{lok}^1$. Vis at μ_φ givet ved

$$\int f \, d\mu_\varphi = \int f \cdot \varphi \, d\mu \text{ for } f \in C_c(X)$$

er et reelt Radon-mål; og at

$$(\mu_\varphi)^\pm = \mu_{\varphi^\pm} \text{ og } |\mu_\varphi| = \mu_{|\varphi|}.$$

f) Lad $\varphi, \varphi_1 \in \mathcal{L}_{lok}^1$, vis at $\mu_\varphi = \mu_{\varphi_1}$ hvis og kun hvis

$$\varphi = \varphi_1 \text{ } \mu\text{-n.o.}$$

4. Lad ν og μ være endelige Radon-mål på et lokal kompakt rum X .

Antag at $\nu \leq \mu$ (d.v.s. at for alle $A \in \hat{B}$ er $\nu(A) \leq \mu(A)$). Vis at der findes et $\varphi \in L^1(\mu)$, $0 \leq \varphi \leq 1$ således at $\nu = \mu_\varphi$, altså at $\nu(A) = \int_A \varphi d\mu$ for $A \in \hat{B}$.

Vink: Vis ved hjælp af Cauchy-Schwartz' ulighed 1.26 at $f \rightarrow \int f d\nu$ er kontinuert: $L^2(\nu) \rightarrow \mathbb{R}$. Benyt sætning 1.30 for $p = q = 2$. (Sætning 1.30 er iøvrigt let at vise for $p = q = 2$, idet L^2 er et Hilbertrum, se øvelse 4 i §1 og Rudin 12.5). Benyt til slut, at $L^2(\nu) \subseteq L^1(\mu)$, da μ er endeligt.

5. Lad $(X, \hat{B})$ være et målrum. Lad ν og μ være mål på X . ν siges at være absolut kontinuert m.h.t. μ ($\nu \ll \mu$), hvis det for alle $A \in \hat{B}$ gælder, at $\mu(A) = 0$ medfører at $\nu(A) = 0$.

Vis følgende sætning:

Radon-Nikodym's sætning. Hvis ν og μ er endelige Radon-mål på et lokal kompakt rum X og $\nu \ll \mu$, da findes $\varphi \in L^1(\mu)$ således at $\nu = \mu_\varphi$. (For definition af μ_φ se øvelse 3).

Vink: Benyt øvelse 4 til at vise, at der findes $\psi \in L^1(\mu + \nu)$, således at $0 \leq \psi < 1$ og $\nu = (\mu + \nu)_\psi$. Definér $\varphi = \frac{\psi}{1-\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n$.

Vis ved induktion efter n , at

$$\int f \, d\nu = \int f \psi^n \, d\nu + \int f \sum_{i=1}^n \psi^i \, d\mu, \text{ for } f \in C_c(X).$$

Slut det ønskede ved grænseovergangen $n \rightarrow \infty$.

6. Lad μ være et endeligt, reelt Radon-mål på et lokalkompakt rum X . Vis at der findes en Borelmængde A således at.

$$\mu^+(B) = \mu(B \cap A) \text{ og } \mu^-(B) = \mu(B \setminus A)$$

for alle $B \in \hat{B}$.

Vink: benyt øvelse 4, til at vise at der findes $f_1, f_2 \in L^1(|\mu|)$, således at $\mu^+ = |\mu|_{f_1}$ og $\mu^- = |\mu|_{f_2}$. Benyt øvelse 3 til at vise at $(f_1 - f_2)^+ = f_1$ og $(f_1 - f_2)^- = f_2$ $|\mu|$ -n.o.

Sæt endelig $A = \{x \in X \mid f_1(x) > 0\}$.

Bemærkning. Øvelserne 4, 5 og 6 generaliseres let til σ -endelige mål, (ikke nødvendigvis Radon-mål). Dog skal i 4 og 5 $L^1(\mu)$ erstattes af $\mathcal{L}_{lok}^1(\mu)$.

7. Beskriv en omegnsbasis om 0 for topologierne $\tau_1, -, \tau_3$. Hvad er polaren til en typisk basis omegn i disse tilfælde. Se Banach-Alaoglu's sætning (Rudin 3.15).

8. Lad X være kompakt. Et sandsynlighedsmål på X er et positivt Radon-mål μ på X , med masse 1 d.v.s. $\mu(X) = 1$.

Vis, at mængden $M_1(X)$ af sandsynlighedsmål på X er ω^* -kompakt og konveks som delmængde af $(C_c(X), \tau_3)^*$.

Vis, at ekstremalpunkterne i $M_1(X)$ netop er punktmålene ε_a , $a \in X$.

Vink: For at vise at et ekstremalpunkt μ i $M_1(X)$ er et punktmål, kan man f.eks. begynde med at vise, at $st(\mu)$ ikke kan deles i to disjunkte dele, begge med positivt mål.

9. Lad X være lokalkompakt. Lad for $K \in \hat{\mathbb{K}}$ $C_c(X; K)$ have den ligelige topologi (induceret af normen p_K), og lad $C_c(X)$ have topologien τ_4 .

- a) Vis, at β_4 (3.4) er en lokal basis for τ_4 .

Vink: Vis at en semi-norm p tilhører P_4 hvis og kun hvis $W_p = \{f \in C_c(X) \mid p(f) < 1\}$ tilhører β_4 .

- b) Lad $j_K : C_c(X; K) \rightarrow C_c(X)$ være den identiske afbildning for alle $K \in \hat{\mathbb{K}}$. Vis, at j_K er kontinuert. Antag at τ er en lokalkonveks topologi på $C_c(X)$, og at alle j_K er kontinuerte m.h.t. τ . Vis, at τ er grovere end τ_4 ($\tau \subset \tau_4$).

Vink: Lad G være en balancerende, konveks omegn af 0 i τ -topologien. Vis at $G \in \beta_4$.

10. Lad $X = \mathbb{R}$ (eller blot X σ -kompakt).

Vis, at en lokal basis for topologien τ_4 på $C_c(X)$ er

givet ved

$$V_f = \{g \in C_c(X) \mid |g| < f\} ,$$

hvor f gennemløber de strengt positive, kontinuerte funktioner på X .

Vink: Vis først, at $V_f \in \beta_4$ (se (3.4) og øvelse 9).

Lad dernæst $V \in \beta_4$. Vælg en dalende følge c_n af positive tal, således at der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\{g \in C_c(X) \mid \text{st}(g) \subset [-n, n], |g| \leq 2^n c_n\} \subset \frac{1}{4} V .$$

Vælg $f: X \rightarrow]0, \infty[$, kontinuert og således at

$f(x) < c_n$ for alle $x \notin [-(n-1), n-1]$ og alle $n \in \mathbb{N}$.

Vis at $V_f \subset V$ f.eks. på følgende måde:

Lad $g \in V_f$ og antag først at $g \geq 0$. Vælg $n \in \mathbb{N}$ således at $\text{st}(g) \subset [-n, n]$.

Definer succesivt:

$$g_n = \inf\{g, c_n\}, \quad g_{n-1} = \inf\{g - g_n, c_{n-1}\}, \dots,$$

$$g_2 = \inf\{g - (g_n + \dots + g_3), c_2\} \quad \text{og} \quad g_1 = g - (g_n + \dots + g_2) .$$

Vis, at $2^i g_i \in \frac{1}{4} V$. Da V er konveks og $0 \in V$ slttes heraf at $g \in \frac{1}{4} V$.

Lad endelig $g \in V_f$ være vilkårlig. Skriv g som en sum af højst 4 positive funktioner fra V_f . Slut deraf at $g \in V$.

Litteraturhenvisninger.

§1 Noter til Mat. 212 (Mål og integralteori) og

Bartle: The Elements of Integration.

John Wiley and Sons, 1966.

§2 og 3.

W. Rudin: Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, 1966.

J. Dieudonné: Treatise on Analysis, vol. II. Academic
Press, 1970.

Halmos: Measure Theory. Van Nostrand, 1950.

N. Bourbaki: Intégration, Chap. 1-9. Hermann, 1952-69.

Topologi og Net

Et net i et topologisk rum X er en afbildning $\lambda \rightarrow x_\lambda$ fra en mængde Λ , der er partielt ordnet og opad filtrerende ved en relation $\prec$, ind i rummet X . Vi benytter den korte notation $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ eller blot $\{x_\lambda\}$. Net kaldes også generaliserede følger.

Et net $\{x_\lambda\}$ er efterhånden i en mængde V , hvis der findes et μ i Λ så $\{x_\lambda \mid \lambda \succ \mu\} \subset V$. Nettet er ofte i V , hvis der til ethvert μ i Λ findes et $\lambda \succ \mu$ så $x_\lambda \in V$. Bemærk at $\{x_\lambda\}$ er ofte i V , hvis og kun hvis der ikke efterhånden er i $X \setminus V$.

Et net $\{x_\lambda\}$ siges at konvergere mod et punkt x i X , hvis det efterhånden er i enhver omegn af x .

For ethvert net $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ vil mængdesystemet $F_\lambda = \{x_\mu \mid \mu \succ \lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$ udgøre en filterbasis. Omvendt vil enhver filterbasis indeholde et net. Ud fra dette (eller direkte) viser man let følgende sætninger:

1. Et punkt x ligger i afslutningen af en mængde V , hvis og kun hvis der findes et net i V som konvergerer mod x .

2. En funktion $f: X \rightarrow Y$ mellem topologiske rum X og Y er kontinuert hvis og kun hvis den afbilder konvergente net i X til konvergente net i Y . Altså hvis $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ og $x_\lambda \rightarrow x$ (dette er den korte skrivemåde for at $\{x_\lambda\}$ konvergerer mod x) da vil $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$.
3. Et topologisk rum X er Hausdorff hvis og kun hvis intet net konvergerer mod mere end ét punkt.

Et delnet af et net $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ er et net $\{x_\mu \mid \mu \in M\}$ som tillader en funktion $f: M \rightarrow \Lambda$ der opfylder:

- (i) $\{x_\mu\} \subset \{x_\lambda\}$;
- (ii) $\mu_1 \prec \mu_2 \Rightarrow f(\mu_1) \prec f(\mu_2)$;
- (iii) $\forall \lambda \exists \mu : f(\mu) \succ \lambda$.

Sammenlign denne noget besværlige definition med begrebet delfølge (og indrøm at det er den korrekte generalisering). En følge kan have delnet, der ikke er delfølger. Et trivielt delnet af $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ fås ved at fixere μ og definere $M = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda \succ \mu\}$ og delnettet $\{x_\lambda \mid \lambda \in M\}$. Sammenlign dette med begrebet afsnitsfølge.

Et net $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ er universelt hvis det for enhver mængde V i X gælder at nettet efterhånden helt ligger i enten V eller $X \setminus V$. Et sådant net er naturligvis svært at visualisere (medmindre det efterhånden er konstant). Siger vi, at et punkt x er et grænsepunkt for et net, hvis nettet kommer ofte i enhver omegn af x , ser man let, at et universalnet må konvergere mod ethvert af sine grænsepunkter.

Sætning. Ethvert net indeholder et universelt delnet.

Bevis. Lad $\mathcal{A}$ betegne systemet af mængder $A \subset X$ således at nettet $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ efterhånden ligger i A . Da er $\mathcal{A}$ et filter på X (hvis $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2$, findes λ_i så $\{x_\lambda \mid \lambda \succ \lambda_i\} \subset A_i$. Vælg $\lambda_3 \in \Lambda$ så $\lambda_3 \succ \lambda_1$, $\lambda_3 \succ \lambda_2$. Da vil $\{x_\lambda \mid \lambda \succ \lambda_3\} \subset A_1 \cap A_2$). Lad $\mathcal{B}$ være et ultrafilter på X som forfiner $\mathcal{A}$. For ethvert $B \in \mathcal{B}$ vil $\{x_\lambda\}$ komme ofte i B . Thi ellers var $\{x_\lambda\}$ efterhånden i $X \setminus B$, d.v.s. $X \setminus B \in \mathcal{A}$. Da $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ er dette umuligt ($\emptyset \in \mathcal{B}$).

Hvis $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ sættes $B_1 \prec B_2$ hvis $B_2 \subset B_1$. Da er $\mathcal{B}$ en partielt ordnet mængde og vi definerer

$$M = \{(\lambda, B) \in \Lambda \times \mathcal{B} \mid x_\lambda \in B\}.$$

Med produktordningen $(\lambda_1, B_1) \prec (\lambda_2, B_2)$ hvis $\lambda_1 \prec \lambda_2$ og $B_1 \prec B_2$ bliver M en partielt ordnet mængde. Ordningen er endvidere opad filtrerende: thi hvis (λ_i, B_i) , $i = 1, 2$ er givet vælges λ_0 i Λ og B_3 i $\mathcal{B}$ så $\lambda_0 \succ \lambda_i$ og $B_3 \succ B_i$ for $i = 1, 2$. Da $\{x_\lambda\}$ kommer ofte i B_3 findes $\lambda_3 \succ \lambda_0$ så $x_{\lambda_3} \in B_3$; d.v.s. $(\lambda_3, B_3) \in M$. Vi definerer et net $\{x_\mu \mid \mu \in M\}$ ved at sætte $x_\mu = x_\lambda$ hvis $\mu = (\lambda, B)$. Lader vi nu $f: M \rightarrow \Lambda$ være givet ved $f(\lambda, B) = \lambda$ ser vi at $\{x_\mu \mid \mu \in M\}$ er et delnet af $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ (delnetsbetingelserne (i) og (ii) er oplagt opfyldt og (iii) følger af at $\{x_\lambda\}$ kommer ofte i ethvert B fra $\mathcal{B}$).

Givet $B_0 \in \mathcal{B}$ vælg et $\lambda_0 \in \Lambda$ så $(\lambda_0, B_0) \in M$. Hvis nu $\mu = (\lambda, B) \succ (\lambda_0, B_0)$ så vil $B \subset B_0$ hvormed $x_\mu \in B_0$. Nettet $\{x_\mu \mid \mu \in M\}$ er derfor efterhånden i B_0 . For enhver mængde $V \subset X$ har vi enten $V \in \mathcal{B}$ eller $X \setminus V \in \mathcal{B}$, da $\mathcal{B}$ er et ultrafilter. Dette viser at $\{x_\mu \mid \mu \in M\}$ efterhånden ligger enten i V eller i $X \setminus V$, d.v.s. er et universalnet.

Sætning. Et topologisk rum X er kompakt hvis og kun hvis ethvert universalnet i X er konvergent.

Bevis. Antag at X er kompakt og lad $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ være et universalnet. Sæt

$$F_\lambda = \{x_\mu \mid \mu \succ \lambda\}^-.$$

Da er $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ et nedad filtrerende system af lukkede ikke tomme delmængder af X . Da X er kompakt findes der et punkt x i deres gennemsnit. For enhver omegn V af x og ethvert λ vil

$$\{x_\mu \mid \mu \succ \lambda\} \cap V \neq \emptyset,$$

idet $x \in F_\lambda$. Dette viser at nettet $\{x_\lambda\}$ kommer ofte i V , og da det er universelt må det efterhånden ligge i V . Argumentet går for ethvert V og viser at $x_\lambda \rightarrow x$.

Antag omvendt at alle universalnet konvergerer i X og lad $X = \bigcup O_i$ være en åben overdækning. Lad Λ betegne systemet af endelige delmængder λ af $\{O_i\}$, partielt ord-

net ved inklusion. Hvis ingen mængde $\bigcup_{i \in \lambda} O_i$ overdækker X (altså hvis X ikke er kompakt) kan vi ved brug af udvalgsaksiomet for ethvert λ i Λ finde

$$(*) \quad x_\lambda \in X \setminus \bigcup_{i \in \lambda} O_i.$$

Nettet $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ har ifølge foregående sætning et universelt delnet $\{x_\mu \mid \mu \in M\}$ som ifølge forudsætningen konvergerer mod et x i X . Lad $f: M \rightarrow \Lambda$ betegne indlejringen af $\{x_\mu\}$ i $\{x_\lambda\}$ og, for et givet O_i , vælg et λ i Λ så $O_i \in \lambda$. For ethvert μ i M så $f(\mu) \succ \lambda$ vil da $x_\mu \notin O_i$ ifølge (*). Da $x_\mu \rightarrow x$ og $X \setminus O_i$ er lukket ser vi at $x \notin O_i$. Men argumentet afhænger ikke af i og viser at $x \notin \bigcup_{i \in \Lambda} O_i$ i modstrid med at X var overdækket.

Korollar (Tychonoff) Produktet af kompakte mængder er kompakt (når det udstyres med produkttopologien).

Bevis. Lad $X = \prod X_i$. Hvis $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ er et universalnet i X så vil $\{x_\lambda(i) \mid \lambda \in \Lambda\}$ være et universalnet i X_i , for ethvert i . Følgelig vil $x_\lambda(i) \rightarrow x(i)$. Dette giver et element x i $\prod X_i$ og $x_\lambda \rightarrow x$ (thi dette er ækvivalent med $x_\lambda(i) \rightarrow x(i)$ for alle i).

Sætning. (Ascoli) Lad X være et kompakt rum og F en lukket delmængde af $C(X)$ (med norm topologien) som opfylder:

- (a) For ethvert x vil $\sup\{|f(x)| \mid f \in F\} = M_x < \infty$;
- (b) For ethvert x og ethvert $\varepsilon > 0$ findes en omegn V

af x således at

$$\sup\{|f(y) - f(x)| \mid y \in V, f \in F\} \leq \varepsilon.$$

Da er F kompakt i $C(X)$.

Bevis. (a) kaldes punktvis begrænsning, (b) er ækvikontinuitet. Lad $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ være et universalnet i F . For ethvert x i X er da $\{f_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda\}$ et universalnet i den kompakte mængde $\{t \in \mathbb{Q} \mid |t| \leq M_x\}$, idet F er punktvis begrænset. Nettet er derfor konvergent og definerer et tal $f(x)$. Vi har vist at $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ konvergerer punktvis mod en funktion f .

Givet $\varepsilon > 0$ kan vi udnytte ækvikontinuiteten samt rummets kompakthed til at finde punkter $x_1, \dots, x_n$ med tilsvarende omegne $V_1, \dots, V_n$ så $X = \bigcup V_k$ og $|f_\lambda(y) - f_\lambda(x_k)| \leq \varepsilon$ for alle λ i Λ og alle y i V_k . Da $f_\lambda \rightarrow f$ punktvis ser vi at også $|f(y) - f(x_k)| \leq \varepsilon$ for alle y i V_k . Vælger vi nu λ_0 så $|f(x_k) - f_{\lambda_0}(x_k)| \leq \varepsilon$ for alle $k = 1, \dots, n$ såfremt $\lambda \succ \lambda_0$ kan vi vurdere

$$\begin{aligned} & |f(y) - f_\lambda(y)| \\ & \leq |f(y) - f(x_k)| + |f(x_k) - f_{\lambda_0}(x_k)| + |f_{\lambda_0}(x_k) - f_\lambda(y)| \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

for ethvert y i V_k . Men vurderingen afhænger ikke af k og da $\bigcup V_k = X$ ser vi at $\|f - f_\lambda\| \leq 3\varepsilon$ for $\lambda \succ \lambda_0$. Dette viser at $f_\lambda \rightarrow f$ i norm, hvormed $f \in C(X)$. Da F er lukket vil $f \in F$, og derfor er F kompakt idet ethvert universalnet er konvergent.