Matematik 3, 1965–68

Werner Fenchel
Forelæsninger over Geometri

Kapitel III: Projektiv geometri

Københavns Universitets Matematiske Institut

Noter til matematik 3.

1966-67, nr. 30.

Indhold:

Kap. III: Projektiv geometri.

Kap.III. Projektiv geometri.

§ 1. Indledning.

Den projektive geometri er en gren af geometrien, der er fremgået af studiet af egenskaber ved geometriske figurer, som bevares ved centralprojektion. Enkelte herhen hørende sætninger findes allerede hos Pappos (ca. 300).

Lad der i planen være givet et punkt Ø samt to rette linier l og l', som ikke går gennem Ø. Ved til hvert punkt P på l at lade svare skæringspunktet P' af linien ØP med l' fås en afbildning af l på l', som kaldes en centralprojektion fra Ø af l på l' eller kort en <u>perspektivitet</u>. Her optræder imidlertid to undtagelser: skæringspunktet mellem l og den med l' parallelle linie gennem Ø har ikke noget billedpunkt, og skæringspunktet mellem l' og den med l parallelle linie gennem Ø har ikke noget originalpunkt. Bortset herfra er afbildningen bijektiv. Afstanden mellem to punkter A og B på l er almindeligvis forskellig fra afstanden mellem deres billedpunkter A' og B' på l'. Det forhold, hvori et tredie punkt C på l deler liniestykket AB er almindeligvis forskelligt fra det forhold, hvori billedpunktet C' deler liniestykket A'B'. Længder og delingsforhold bevares altså ikke ved centralprojektion.

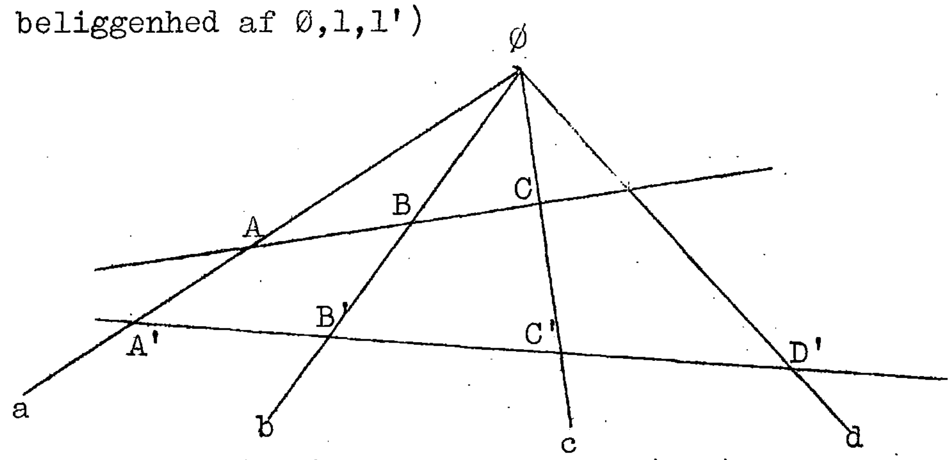
Man kan imidlertid til et sæt A,B,C,D af fire forskellige punkter på linien l knytte en "projektiv invariant", det såkaldte <u>dobbeltforhold</u>

$$\mathrm{df}(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD} ,$$

hvor AC,BC,... betegner længderne af de pågældende liniestykker regnet med fortegn svarende til en vilkårlig valgt orientering af linien l. At der for billedpunkterne A',B',C',D' gælder

$$df(A'B'C'D') = df(ABCD)$$

(Pappos) ses således: Med figurens betegnelser fås ved hjælp af sinusrelationen (med passende fortegnsregning for enhver indbyrdes Ø beliggenhed af Ø,l,l')



$$\frac{AC}{BC} = \frac{ØA\ \sin(a,c)}{ØB\ \sin(b,c)}, \qquad \frac{AD}{BD} = \frac{ØA\ \sin(a,d)}{ØB\ \sin(b,d)}$$

og heraf ved division

$$df(ABCD) = \frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} : \frac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)} .$$

Tallet på højre side afhænger kun af de fire linier a,b,c,d gennem Ø, ogheraf følger påstanden.

At punktparrene A,B og C,D er <u>harmonisk forbundne</u>, altså at C og D deler AB i modsatte forhold, er ensbetydende med, at

$$df(ABCD) = -1.$$

Ved centralprojektion afbildes altså harmoniske punktpar på harmoniske punktpar.

Lad der være givet en linie ø og to punkter L og L', som ikke ligger på den. Man kan da definere en afbildning af liniebundtet med toppunkt L på liniebundtet med toppunkt L' ved til hver linie p gennem L at lade svare linien p', som forbinder L' med skæringspunktet mellem p og ø. Herved optræder igen undtagelser: linien gennem L parallel med ø har ikke noget billede, og linien gennem L' parallel med ø har ikke nogen originallinie. Bortset herfra er afbildningen bijektiv. Den kaldes en <u>perspekti-</u>

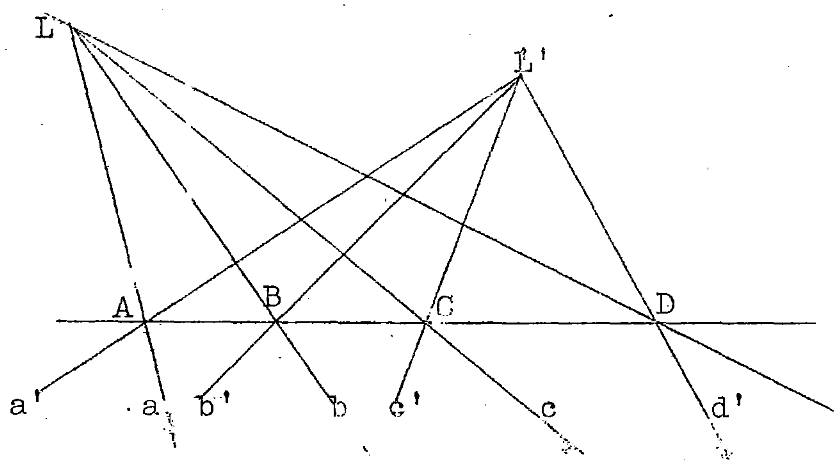
vitet eller perspektiv afbildning af det ene liniebundt på det andet.

Defineres dobbeltforholdet af et sæt a,b,c,d af linier tilhørende et liniebundt ved

$$\mathrm{df}(abcd) = \frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} : \frac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)} \quad ,$$

kan man af ovenstående slutte, at der for linierne a,b,c,d i liniebundtet med toppunkt L og deres billeder a',b',c',d' i liniebundtet med toppunkt L' gælder

$$\mathrm{df}(a'b'c'd') = \mathrm{df}(abcd).$$



De omtalte undtagelser forsvinder, når man tilskriver hver ret linie et "uendelig fjernt" eller <u>uegentligt punkt</u> og fastsætter, at to linier har dette fælles, hvis og kun hvis de er parallelle. Dette kan gøres ved at definere: Ved et uegentligt punkt forstås et parallelbundt af linier; en linie siges at gå gennem et uegentligt punkt, hvis den tilhører det pågældende parallelbundt. Hver linie bliver derved udvidet med netop ét uegentligt punkt og kaldes da en <u>projektiv linie</u>. Mængden af planens uegentlige punkter kaldes planens <u>uegentlige linie</u> og den med denne udvidede plan den <u>projektive plan</u>. Det er let at se, at der i denne gælder:

<u>Gennem hvilkesomhelst to forskellige punkter går netop én linie</u>.

<u>Hvilkesomhelst to forskellige linier har netop ét punkt fælles</u>.

Heraf sluttes, at de to omtalte perspektiviteter bliver bijektive afbildninger, når de uegentlige elementer inddrages. Er Ø et uegentligt punkt fås en parallelprojektion. Er ø den uegentlige linie, vil tilsvarende linier i de to liniebundter være parallelle.

Definitionen af dobbeltforholdet for et sæt A,B,C,D af fire forskellige punkter på en linie l kan udvides til det tilfælde, at et af punkterne, f.eks. D, er det uegentlige. Man sætter da

$$df(ABCD) = df(abcd),$$

hvor a,b,c, $d \parallel l$ er linierne, der forbinder et punkt uden for l med punkterne A,B,C,D. Dette dobbeltforhold bliver lig med delingsforholdet AC/BC. Det samme fås som grænseværdi for dobbeltforholdet for egentlige punkter A,B,C,D, når A,B,C holdes fast og D fjerner sig ubegrænset til den ene eller anden side. To punktpar A,B og C,D på en linie, hvor D er dennes uegentlige punkt, er harmonisk forbundne, når og kun når C er midtpunktet af liniestykket AB.

Fire linier a,b,c,d, som har et uegentligt punkt L fælles, er enten indbyrdes parallelle, eller tre af dem er indbyrdes parallelle og den fjerde er den uegentlige linie. Dobbeltforholdet df(abcd) defineres her som dobbeltforholdet for de punkter, hvori linierne skæres af en vilkårlig linie, som ikke går gennem L.

Med disse definitioner gælder sætningerne om dobbeltforholdenes invarians ved perspektiviteter i alle tilfælde.

Man lægger mærke til, at disse sætninger fremgår af hinanden ved ombytning af "punkt" og"linie","forbindelseslinie" og "skæringspunkt". Dette er et specielt tilfælde af det i planens projektive geometri gyldige dualitetsprincip, hvorefter hver gyldig sætning vedrørende "projektive egenskaber" ved de nævnte ombytninger går over i en ligeledes gyldig sætning. Principets nøjagtige formulering, og et bevis for det vil blive givet senere.

Også det euklidiske rum udvides ved tilføjelse af uegentlige elementer til det projektive rum. Ved et uegentligt punkt forstås et parallelknippe af linier, dvs. en mængde bestående af alle med en bestemt linie parallelle linier. At en linie går gennem et uegentligt punkt, skal betyde, at den tilhører det pågældende parallelknippe. Ved en uegentlig linie forstås et parallelbundt af planer, dvs. en mængde bestående af alle med en bestemt plan parallelle planer. Et punkt siges at ligge på en uegentlig linie, når og kun når det er uegentligt, og linierne i parallelknippet, som bestemmer det, er parallelle med planerne i planbundtet, som bestemmer den uegentlige linie. At en plan indeholder eller går igennem en uegentlig linie, skal betyde, at den tilhører parallelbundtet, som bestemmer denne. Mængden af uegentlige punkter kaldes den uegentlig plan.

Ved at gennemgå de forskellige muligheder ses, at der i det projektive rum gælder de følgende simple sætninger vedrørende "incidens" af punkter, linier og planer.

Gennem to forskellige punkter går én linie.

To forskellige planer skærer hinanden i én linie.

Gennem en linie og et punkt, som ikke ligger på den, går én plan.

En linie og en plan, som ikke indeholder den, skærer hinanden i ét punkt.

Gennem tre punkter, som ikke ligger på samme linie, går én plan.

<u>Tre planer, som ikke går gennem samme linie, har ét punkt fælles.</u>

<u>To linier har et punkt fælles, hvis og kun hvis de ligger i samme plan.</u>

Ved ombytning af "punkt" og "plan", "forbindelse" og "skæring" (og passende verbale ændringer) fremgår de første seks sætninger parvis af hinanden, og den sidste går over i sig selv. Dette er kernen i det for den projektive geometri i rummet gyldige <u>dualitetsprincip</u>.

Lad der i det projektive rum være givet to planer π og π' samt et punkt Ø uden for begge. Ved til hvert punkt $P \in \pi$ at lade svare skæringspunktet P' mellem π' og linien ØP, fås ifølge ovenstående sætninger en bijektiv afbildning af π på π', som kaldes en <u>centralprojektion</u> eller <u>perspektivitet</u> fra Ø. Er π og π' parallelle, vil de to planers uegentlige punkter svare til hinanden. Antag, at π og π' ikke er parallelle. Billedet U' af et uegentligt punkt U af π er da skæringspunktet mellem π' og den linie gennem Ø, som går gennem U, som altså tilhører det parallelknippe, der bestemmer U. Parallelbundtet af linier i π gennem U afbildes på liniebundtet med toppunkt U'. Den uegentlige linie af π afbildes på skæringslinien mellem π' og den med π parallelle plan gennem Ø. Disse forhold har en velkendt anskuelig fortolkning i perspektive billeder. Repræsenterer π jordoverfladen (betragtet som plan), π' billedplanen og Ø "øjepunktet", fra hvilket π betragtes, vil den uegentlige linie af π "ses" som horizonten og parallelle linier i π som linier, der skærer hinanden på denne.

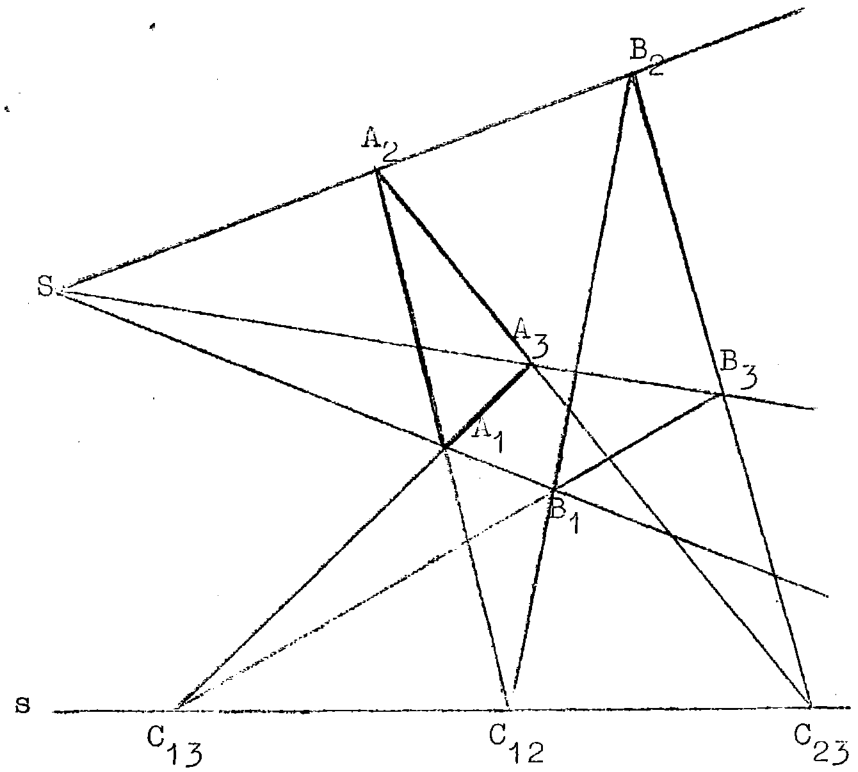
Et bevis for, at en plan figur har en projektiv egenskab, kan ofte føres ved, at figuren underkastes en passende centralprojektion, ved hvilken den overføres i en mere speciel figur, for hvilken den pågældende egenskab er lettere at udlede. Med benyttelse af de uegentlige elementer har G. Desargues (Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan, 1639) på denne måde bevist flere for den projektive geometri grundlæggende sætninger, deriblandt adskillige om keglesnit. Ved de sidstnævnte benyttes, at hvert keglesnit ved passende centralprojektion kan afbildes på en cirkel. (Dette er blot en anden måde at formulere på, at hvert keglesnit kan fås som snitkurve af en omdrejningskegle og en plan.) Om en egenskab, som cirklen har, og som bevares ved centralprojektion, kan man derfor slutte, at hvert keglesnit har den. Med benyttelse heraf har B. Pascal (1640) bevist en fundamental sætning om keglesnit, som vil blive omtalt senere.

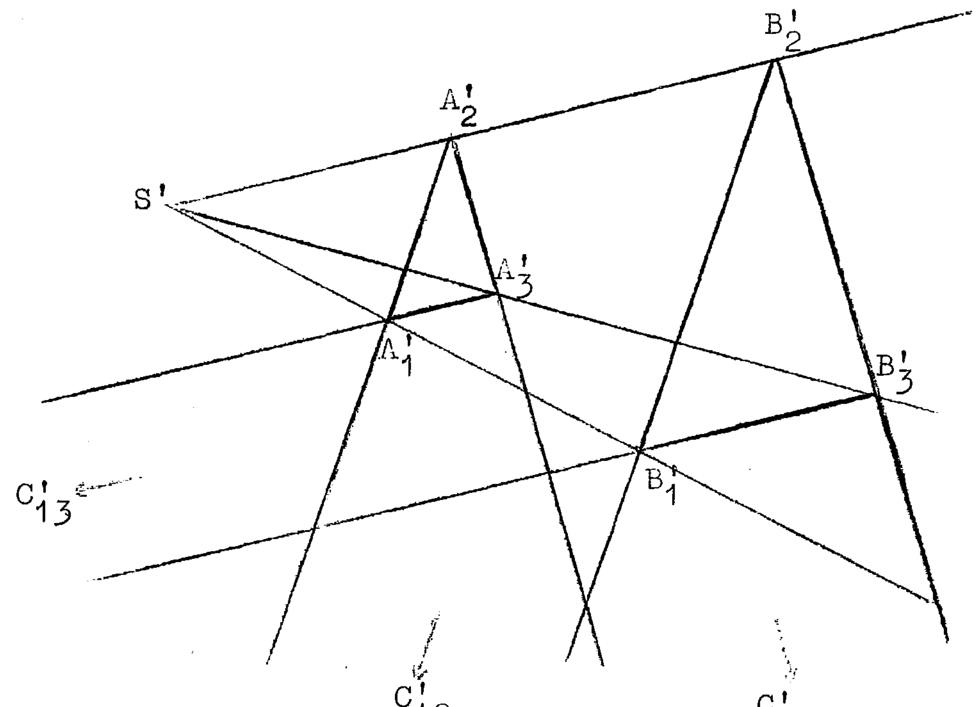
Som eksempel på metodens anvendelse bevises <u>Desargues' trekantssætning</u> for planen:

<u>Om to trekanter</u> $A_1A_2A_3$ <u>og</u> $B_1B_2B_3$ <u>i en plan</u> π <u>forudsættes, at</u> $A_i \neq B_i$, $i = 1,2,3$, <u>at der for siderne gælder</u> $A_iA_j \neq B_iB_j$, $i,j = 1,2,3$, $i \neq j$, <u>og at tilsvarende vinkelspidsers forbindelseslinier</u> A_iB_i, $i = 1,2,3$, <u>går gennem samme punkt</u> S. <u>Da ligger skæringspunkterne</u> C_{ij} <u>mellem tilsvarende sider</u> A_iA_j <u>og</u> B_iB_j <u>på samme rette linie</u> s.

Bevis: Der benyttes, at man til en plan π og en given linie s i denne kan finde et øjepunkt $Ø$ og en plan π', således at s ved centralprojektion fra $Ø$ af π på π' afbildes på den uegentlige linie i π'. Vælges nemlig $Ø$ vilkårligt uden for π, vil en plan π' parallel med, men ikke sammenfaldende med den ved $Ø$ og s bestemte plan opfylde kravet.

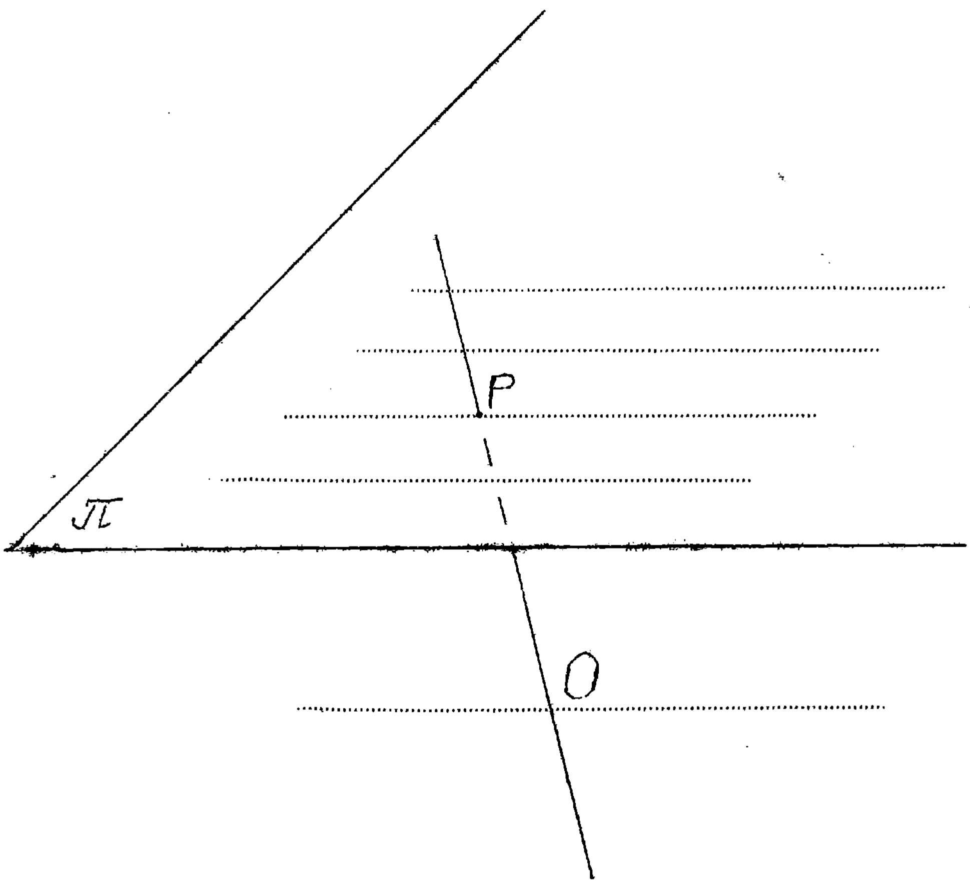
Påstanden går ud på, at linien $C_{12}C_{13}$ går gennem punktet C_{23}


B₂
A₂
S
A₃
B₃
A₁
B₁
s
C₁₃
C₁₂
C₂₃


B'₂
A'₂
S'
A'₃
A'₁
B'₃
C'₁₃
B'₁
C'₁₂
C'₂₃

(jfr. den øverste figur på side 8). Underkastes figuren en centralprojektion af den omtalte art, ved hvilken linien $s = C_{12}C_{13}$ afbildes på billedplanens uegentlige linie, fås en figur (jfr. den nederste på side 8), hvori der for billederne A_i', B_i' af A_i, B_i gælder $A_1'A_2' \parallel B_1'B_2'$ og $A_1'A_3' \parallel B_1'B_3'$, og påstanden går ud på, at $A_2'A_3' \parallel B_2'B_3'$. Dette bevises let ved hjælp af sætninger om ensvinklede trekanter.

Lad π være en plan i rummet og O et punkt, der ikke ligger i π. Til et punkt P i π kan vi da knytte en linie gennem O, nemlig linien OP. Herved fås en injektiv afbildning af mængden af punkter i π ind i mængden af linier gennem O. De linier gennem O, som er parallele med π, kommer ikke med ved denne tilordning. De kan imidlertid



sættes i enentydig korrespondance med parallelbundterne i π, idet man til en linie gennem O parallel med π lader svare bundtet af linier i π, som er parallele med linien. Det ses, at vi herved får en enentydig korrespondance mellem linierne gennem O og punkterne i den til π hørende projektive plan.

En linie l i π er skæringslinie mellem π og en plan gennem O, som er entydigt bestemt herved. Her kommer alle planer gennem O på tale pånær den, der er parallel med π. Lader vi denne svare til den uegentlige linie i π, får vi en enentydig korrespondance mellem linierne i den til π hørende projektive plan og planerne gennem O.

Ved at gå de forskellige tilfælde efter verificerer man let, at hvis der er givet et punkt P og en linie l i den til π hørende projektive plan, da ligger P på l når og kun når den til P svarende linie gennem O ligger i den til l svarende plan gennem O.

Rummet kan opfattes som et 3-dimensionalt vektorrum V over $\mathbf{R}$, idet vi til et punkt Q knytter dets stedvektor $\underline{v} = \overrightarrow{OQ}$. Linierne og planerne gennem O bliver herved at opfatte som 1-og 2-dimensionale underrum i V. Disse overvejelser motiverer nedenstående algebraiske definition af den projektive plan.

. Denne definition vil blive lagt til grund for den følgende fremstilling.

<u>Definition: Givet er et 3-dimensionalt vektorrum V over de reelle tals legeme $\mathbf{R}$. Ved den til V hørende projektive plan $\Pi^2 = \Pi(V)$ forstås mængden af 1-dimensionale underrum i V. Er U et 2-dimensionalt underrum i V, kaldes mængden $\Pi(U) \subset \Pi(V)$ af 1-dimensionale underrum i U den til U hørende projektive linie i $\Pi(V)$.</u>

Vi vil i det følgende bestandig opfatte vektorrummet V som mængden af geometriske vektorer i rummet afsat ud fra et valgt begyndelsespunktet O. Dette muliggør nemlig en rumgeometrisk anskueliggørelse af de algebraske fænomener, som knytter sig til vektorrummet V.

Ud fra en sætning om den projektive plan $\Pi(V)$ kan man få en sætning om den euklidiske plan. Har man nemlig en konfiguration af punkter og linier i $\Pi(V)$, altså af 1- og 2-dimensionale underrum i V og hermed af linier og planer gennem O i rummet, vil denne ved skæring give en tilsvarende konfiguration i en euklidisk plan π, der ikke går gennem O.

Definitionen af den projektive plan giver nærliggende muligheder for generalisation. Man kan betragte vektorrum af højere dimension, hvorved man får projektive rum af højere dimension. En yderligere mulighed for generalisation er at betragte vektorrum over andre legemer. I det følgende vil vi dog udelukkende studere den ovenfor definerede projektive plan.

Lad A være et punkt i den projektive plan $\Pi(V)$, altså et 1-dimensionalt underrum $A \subset V$. En vektor $\underline{a} \in A \setminus \{\underline{0}\}$ kaldes en <u>repræsentant</u> for A, Idet A er 1-dimensionalt, er vektorerne $\lambda \underline{a}$, $\lambda \in \mathring{R} \setminus \{0\}$ samtlige repræsentanter for A.

For underrum U og U' af vektorrummet V gælder som bekendt dimensionsformlen:

$$\dim (U+U') + \dim (U \cap U') = \dim U + \dim U'.$$

Da U + U' er det mindste underrum af V, som indeholder både U og U', idet ethvert andet underrum af V med denne egenskab indeholder $U + U'$ (og dermed har større dimension end dette), giver dimensionsformlen, at hvis U og U' er forskellige 1-dimensionale underrum af V, altså $\dim U = 1$, $\dim U' = 1$, $\dim (U \cap U') = 0$, da findes præcis ét 2-dimensionalt underrum af V, nemlig $U + U'$, som indeholder både U og U'. Hermed er bevist:

<u>Gennem to forskellige punkter i $\Pi(V)$ går en og kun en linie.</u>

Er U og U' forskellige 2-dimensionale underrum af V, har vi $U + U' = V$ og dermed $\dim(U \cap U') = 1$. Hermed er bevist:

<u>To forskellige linier i $\Pi(V)$ har et og kun et punkt fælles.</u>

Vi har hermed samtidig set, at forbindelse af punkter og skæring af linier er givet ved de algebraiske operationer $+$ og $\cap$ med de tilhørende underrum i V.

Det følger umiddelbart, at tre punkter $A, B, C \in \Pi(V)$ ligger på linie, når og kun når vilkårlige repræsentanter $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ er lineært afhængige.

Den tidligere omtalte <u>Desargue's sætning</u> kan let bevises ved regning med repræsentanter:

(For kortheds skyld angives, at tre punkter X, Y, Z ligger på ret linie, ved at skrive XYZ).

Lad $\underline{a}_i, \underline{b}_i$, $\underline{s}$ være repræsentanter for henholdsvis A_i, B_i, S. Da $A_i \neq B_i$, er $\underline{a}_i$ og $\underline{b}_i$ for hvert $i = 1,2,3$ lineært uafhængige, medens $\underline{a}_i$, $\underline{b}_i$ og $\underline{s}$ på grund af A_iB_iS er lineært afhængige. Vektoren $\underline{s}$ er altså for hvert $i = 1,2,3$ en linearkombination af $\underline{a}_i$ og $\underline{b}_i$:

$$\underline{s} = \lambda_1\underline{a}_1 + \mu_1\underline{b}_1 = \lambda_2\underline{a}_2 + \mu_2\underline{b}_2 = \lambda_3\underline{a}_3 + \mu_3\underline{b}_3 .$$

Heraf fås

$$\lambda_2\underline{a}_2 - \lambda_3\underline{a}_3 = \mu_3\underline{b}_3 - \mu_2\underline{b}_2 = \underline{c}_{23}$$

$$\lambda_3\underline{a}_3 - \lambda_1\underline{a}_1 = \mu_1\underline{b}_1 - \mu_3\underline{b}_3 = \underline{c}_{31}$$

$$\lambda_1\underline{a}_1 - \lambda_2\underline{a}_2 = \mu_2\underline{b}_2 - \mu_1\underline{b}_1 = \underline{c}_{12}$$

hvor $\underline{c}_{23},\underline{c}_{31},\underline{c}_{12}$ er betegnelser for de pågældende vektorer på de venstre sider. Ifølge forudsætning er $\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3$ og $\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3$ lineært uafhængige to og to, og dette medfører, at vektorerne $\underline{c}_{23},\underline{c}_{31},\underline{c}_{12}$ er forskellige fra $\underline{0}$, altså repræsentanter for punkter C_{23},C_{31},C_{13} i Π^2. Da øjensynlig

$$\underline{c}_{23} + \underline{c}_{31} + \underline{c}_{12} = \underline{0},$$

ligger disse punkter på ret linie. Endvidere ses af ovenstående ligninger, at såvel $A_jA_kC_{jk}$ som $B_jB_kC_{jk}$ for jk = 23,31,12. Dermed er sætningen bevist.

Lad A,B,C,D være fire punkter på samme linie $\mathbb{l} = \Pi(U)$ med $A \neq B$, $A \neq C$ og $B \neq C$. <u>Det er da muligt at vælge repræsentanter $\underline{a}$ og $\underline{b}$ for A og B, så $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ er en repræsentant for C; et sådant par af repræsentanter for A og B er entydigt bestemt pånær en fælles talfaktor fra 0.</u> Lad nemlig $\underline{a}',\underline{b}'$ og $\underline{c}$ være repræsentanter for A,B og C. Idet $A \neq B$ er $\underline{a}'$ og $\underline{b}'$ lineært uafhængige og danner derfor en basis for vektorrummet U. Der gælder følgelig en relation $\underline{c} = \lambda\underline{a}' + \mu\underline{b}'$. Her kan hverken λ eller μ være 0 da dette ville betyde, at $\underline{c}$ var proportional med $\underline{b}'$ eller $\underline{a}'$, altså at C = B eller C = A. Vektorerne $\underline{a} = \lambda\underline{a}'$, $\underline{b} = \lambda\underline{b}'$ og $\underline{c}$ er følgelig repræsentanter med den ønskede egenskab. Lad nu også $\underline{\tilde{a}}$, $\underline{\tilde{b}}$ og $\underline{\tilde{c}}$ være repræsentanter for A, B og C med $\underline{\tilde{a}} + \underline{\tilde{b}} = \underline{\tilde{c}}$. Der findes så reelle tal α, β og γ forskellige fra 0, med $\underline{\tilde{a}} = \alpha\underline{a}$, $\underline{\tilde{b}} = \beta\underline{b}$ og $\underline{\tilde{c}} = \gamma\underline{c}$ og der gælder derfor

$$\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{c} = \gamma \underline{c} = \gamma \underline{a} + \gamma \underline{b}$$

og hermed

$$(\alpha - \gamma)\underline{a} + (\beta - \gamma)\underline{b} = 0.$$

Idet $\underline{a}$ og $\underline{b}$ er lineært afhængige følger heraf, at $\alpha = \beta = \gamma$. Hermed er den understregede påstand bevist.

Lad nu $\underline{a}$ og $\underline{b}$ være repræsentanter for A og B, så $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ er en repræsentant for C. Idet $(\underline{a},\underline{b})$ er en basis for U kan en vilkårlig repræsentant $\underline{d}$ for D skrives som linearkombination af $\underline{a}$ og $\underline{b}$:

$$\underline{d} = \rho \underline{a} + \sigma \underline{b}.$$

Her er $\underline{d}$ bestemt pånær en talfaktor forskellig fra 0 og $\underline{a},\underline{b}$ pånær en fælles talfaktor forskellig fra 0. Talparret $(\rho,\sigma) \neq (0,0)$ er altså bestemt pånær en talfaktor forskellig fra 0 og kvotienten ρ/σ er derfor entydigt fastlagt ved punkterne A,B,C og D. Vi definerer nu

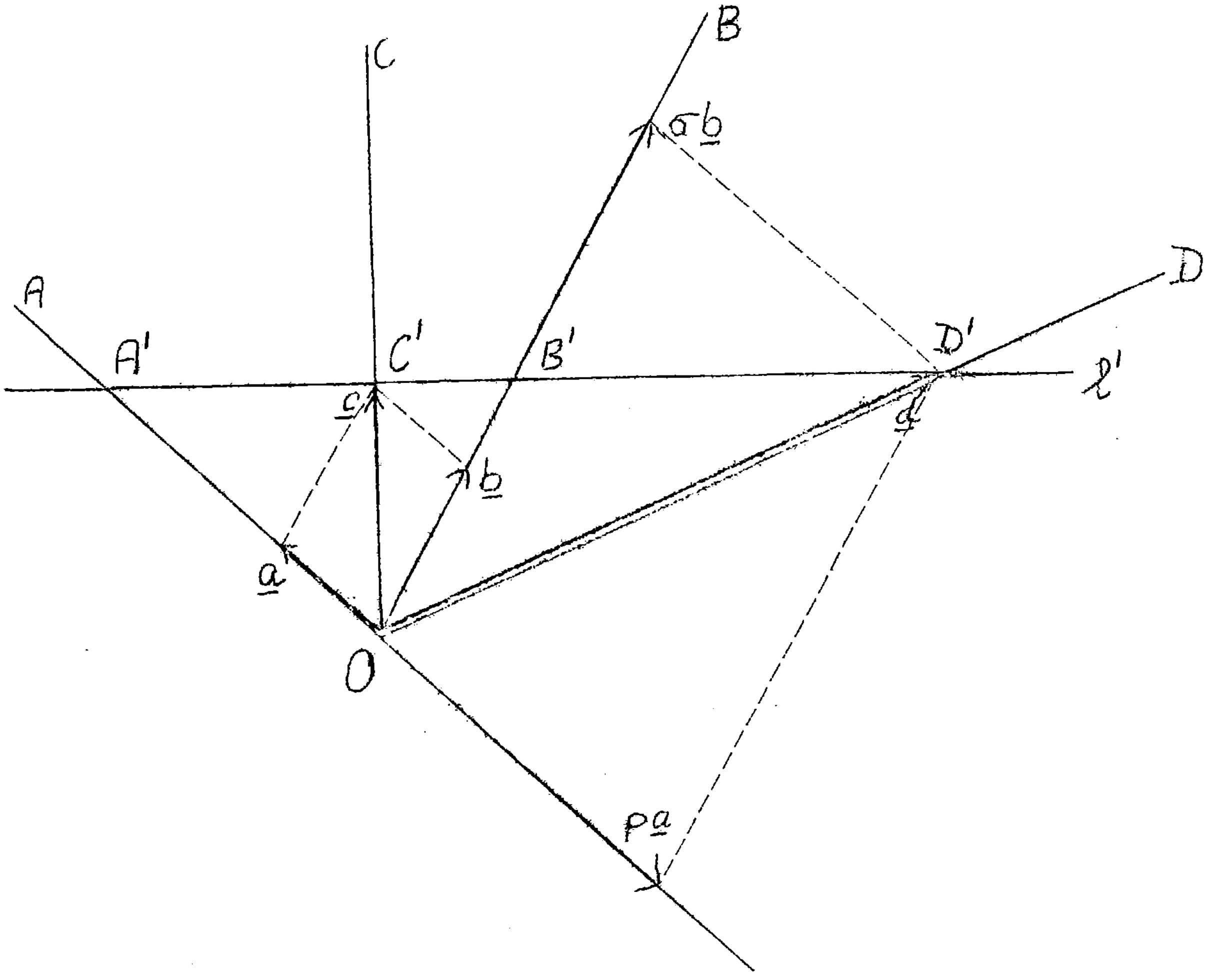
$$\mathrm{df}(A\ B\ C\ D) = \rho/\sigma.$$

Hvis D = A bliver $\sigma = 0$ og i dette tilfælde tillægges dobbeltforholdet værdien ∞.

<u>Denne definition af dobbeltforholdet harmonerer med den på side 1.</u> Linien l er nemlig en plan gennem O og punkterne A,B,C og D linier gennem O i denne plan. Det der skal bevises er, at hvis π' er en vilkårlig plan, der ikke går gennem O og A',B',C',D' betegner den pågældende linies skæringspunkt med π', da er det på side 1 definerede dobbeltforhold

$$\mathrm{df}(A'\ B'\ C'\ D') = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$$

lig det ovenfor definerede. Dette følger af en simpel geometrisk betragtning. Figuren viser situationen i planen 1



Som repræsentanter for C og D har wi valgt vektorerne $\underline{c} = \overrightarrow{OC'}$ og $\underline{d} = \overrightarrow{OD'}$. Ved parallelprojektion af linie A på linien l' i retningen $\underline{b}$ afbildes vektorerne $\underline{a}$ og $\rho\underline{a}$ på $\overrightarrow{B'C'}$ og $\overrightarrow{B'D'}$, hvorfor der gælder

$$\rho = \frac{B'D'}{B'C'}.$$

Ved parallelprojektion af linien B på linien l' i retningen $\underline{a}$ fås analogt

$$\sigma = \frac{A'D'}{A'C'},$$

altså

$$\frac{\rho}{\sigma} = \frac{B'D'}{B'C'} : \frac{A'D'}{A'C'} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'},$$

hvilket er påstanden.

<u>For et sæt</u> (A,B,C,D) <u>af indbyrdes forskellige punkter på en projektiv linie gælder</u>

(1) $\mathrm{df}(BACD) = 1/\mathrm{df}(ABCD)$,

(2) $\mathrm{df}(ACBD) = 1 - \mathrm{df}(ABCD)$,

(3) $\mathrm{df}(CDAB) = \mathrm{df}(ABCD)$.

Bevis: Lad $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$, $\underline{d} = \rho\underline{a} + \sigma\underline{b}$ være repræsentanter for A, B, C, D, altså $\mathrm{df}(ABCD) = \rho/\sigma$. Den første påstand følger da af, at ombytning af $\underline{a}$ og $\underline{b}$ kommer ud på, at ρ og σ bytter rolle. Den anden påstands rigtighed indses således: $\underline{a}' = -\underline{a}$ og $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ er repræsentanter for A og C, således at $\underline{a}' + \underline{c} = \underline{b}$ er en repræsentant for B, og da

$$\underline{d} = -\rho\underline{a}' + \sigma(\underline{a}' + \underline{c}) = (\sigma - \rho)\underline{a}' + \sigma\underline{c},$$

er $\mathrm{df}(ACBD) = (\sigma - \rho)/\sigma = 1 - \rho/\sigma$. Den tredje påstand følger af, at

$$\underline{c}' = \frac{\sigma}{\sigma - \rho}(\underline{a}+\underline{b}) \quad \text{og} \quad \underline{d}' = \frac{-1}{\sigma-\rho}(\rho\underline{a} + \sigma\underline{b})$$

er repræsentanter for C og D, for hvilke $\underline{c}' + \underline{d}' = \underline{a}$ er en repræsentant for A, samt

$$\underline{b} = -\frac{1}{\sigma}(\rho c' + \sigma d'),$$

altså $\mathrm{df}(CDAB) = \rho/\sigma = \mathrm{df}(ABCD)$.

Vi har ovenfor defineret $\mathrm{df}(ABCD) = \infty$, hvis D = A. Vi fastsætter følgende regler for regning med symbolet ∞ og reelle tal λ:

$$\lambda + \infty = \infty + \lambda = \infty$$

$$\lambda \infty = \infty \lambda = \infty \text{ for } \lambda \neq 0, \text{ specielt } (-1)\infty = -\infty = \infty$$

$$\lambda / \infty = 0$$

$$\lambda / 0 = \infty \text{ for } \lambda \neq 0$$

Vi kan nu benytte (3) til at definere dobbeltforholdet i de øvrige tilfælde, hvor tre af de fire punkter er indbyrdes forskellige og det fjerde falder sammen med et af disse. Der findes tre sådanne tilfælde, nemlig $B = C$, $A = C$, $A = B$, der fremgår af de allerede behandlede, $A = D$, $B = D$, $C = D$ ved ombytning af parrene (A,B) og (C,D). For at være i overensstemmelse med (3) sættes

$$df(ABCD) = \infty \quad \text{for } B = C \text{ eller } A = D,$$

$$df(ABCD) = 0 \quad \text{for } A = C \text{ eller } B = D,$$

$$df(ABCD) = 1 \quad \text{for } A = B \text{ eller } C = D.$$

Det er let at se, at (1) og (2) bevarer gyldigheden i de her betragtede tilfælde. Eksempelvis har man for $B = C$

$$\infty = df(ABCD) = 1 - df(ACBD) = 1 - \infty = \infty.$$

(Det fører heller ikke til modstrid med (1) og (2), når man opretholder definitionerne i tilfældene $B = C \neq A = D$, o.s.v. Det er derimod ikke muligt at tillægge dobbeltforholdet en fornuftig mening, når tre af de fire punkter falder sammen.)

<u>For et sæt</u> (A,B,C,D,E) <u>af fem punkter på en projektiv linie gælder</u>

(4) $$\mathrm{df}(ABCD)\,\mathrm{df}(ABDE)\,\mathrm{df}(ABEC) = 1$$

dersom $A \neq B$ og punkterne C, D, E er forskellige fra A og B.

Bevis: Man kan vælge repræsentanter $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, $\underline{e}$ for A, B, C, D, E, således at

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b},\ \underline{d} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{b},\ \underline{e} = \rho\underline{a} + \sigma\underline{b}$$

med passende $\lambda,\mu,\rho,\sigma \in \mathring{R}$. Man får da ved hjælp af (1) og (3)

$$\mathrm{df}(ABCD) = \lambda/\mu, \quad \mathrm{df}(ABEC) = \sigma/\rho.$$

Da $D \neq A$ og $D \neq B$, er $\lambda \neq 0$ og $\mu \neq 0$, så at $\lambda\underline{a}$ og $\mu\underline{b}$ er repræsentanter for A og B. Af

$$\underline{d} = (\lambda\underline{a}) + (\mu\underline{b}), \quad \underline{e} = \frac{\rho}{\lambda}(\lambda\underline{a}) + \frac{\sigma}{\mu}(\mu\underline{b})$$

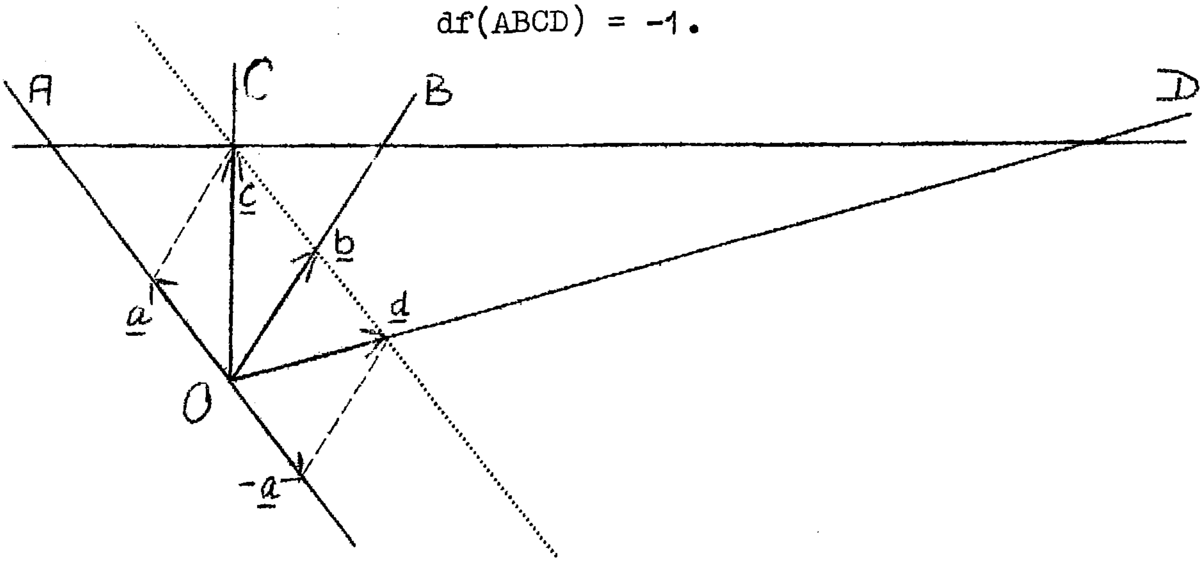
sluttes, at

$$\mathrm{df}(ABDE) = \frac{\rho\mu}{\lambda\sigma}.$$

Dermed er påstanden bevist.

Et punktsæt (A,B,C,D), for hvilket dobbeltforholdet er defineret, siges at være harmonisk (eller punktparrene (A,B) og (C,D) at være harmonisk forbundne), hvis

$$\mathrm{df}(ABCD) = -1.$$



Den anskuelige betydning af dette begreb illustreres ved figuren. Denne figur viser også at fire punkter A, B, C, D på en linie i den til en euklidisk plan π svarende projektive plan, hvor punktet A er uegentligt, er harmonisk forbundne, når og kun når B er midtpunktet af liniestykket C D.

Ved en <u>fuldstændig firkant</u> i den projektive plan forstås en figur bestående af 4 "vinkelspidser" A_1, A_2, A_3, A_4, således at ikke 3 ligger på ret linie, og deres 6 forbindelseslinier, "siderne", $a_{ij} = A_iA_j$, $i,j = 1,2,3,4$ $i \neq j$. De 3 skæringspunkter $D_{12,34}$, $D_{13,24}$, $D_{14,23}$ mellem "modstående sider" henholdsvis a_{12} og a_{34}, a_{13} og a_{24}, a_{14} og a_{23} kaldes firkantens <u>diagonalpunkter</u>.

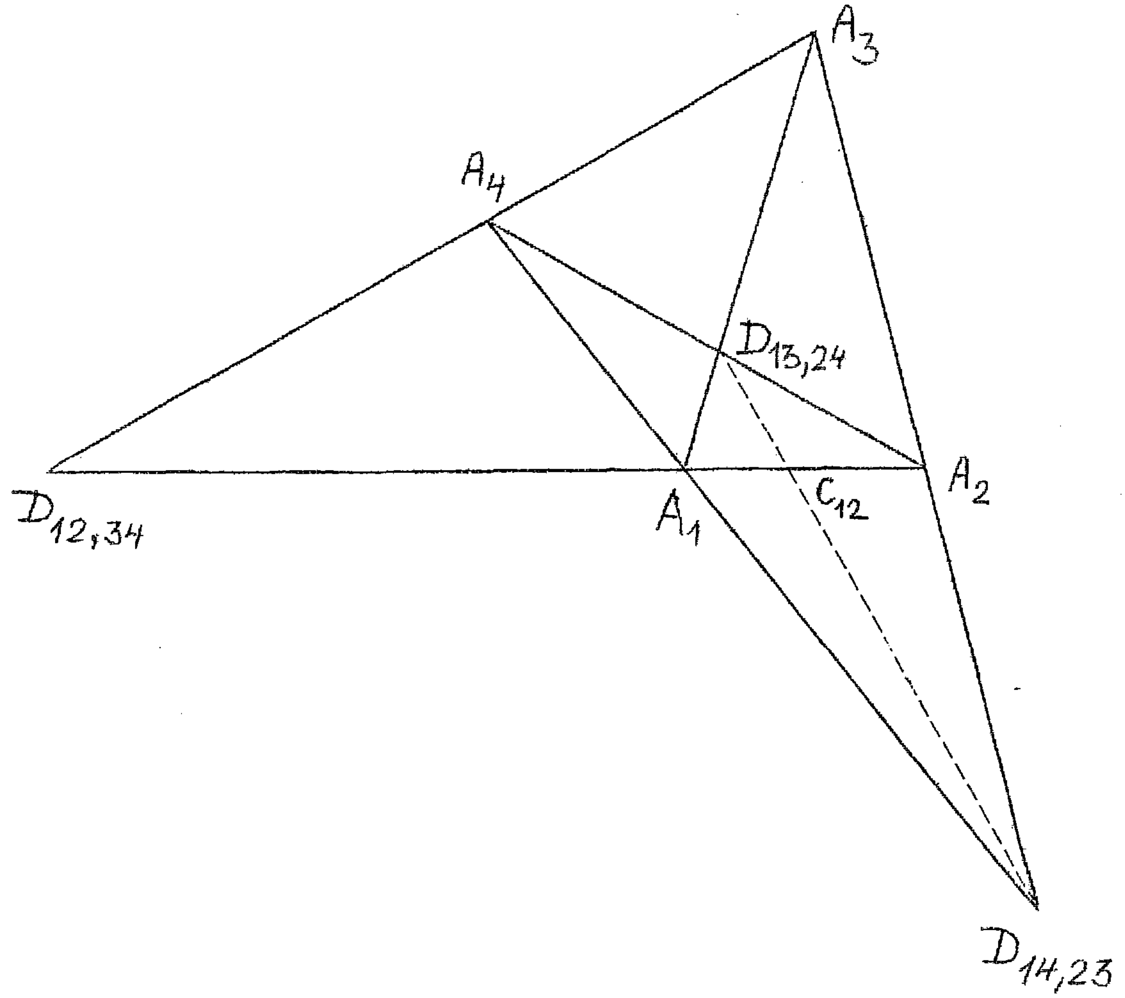
Om fuldstændige firkanter gælder følgende sætning:

<u>Hvilkesomhelst to vinkelspidser i en fuldstændig firkant er harmonisk forbundne med diagonalpunktet på siden, der forbinder dem, og denne sides skæringspunkt med de to andre diagonalpunkters forbindelseslinie.</u>

Bevis: Det er muligt at vælge repræsentanter $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$ for punkterne A_1, A_2, A_3, A_4 så $\underline{a}_1 + \underline{a}_3$ og $\underline{a}_2 + \underline{a}_4$ begge repræsenter skæringspunktet $D_{13,24}$. Vi kan følgelig endda vælge $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ så $\underline{a}_1 + \underline{a}_3 = \underline{a}_2 + \underline{a}_4 = \underline{d}_{13,24}$, og denne vektor er naturligvis en repræsentant for $D_{13,24}$. Vektoren $\underline{d}_{14,23} = \underline{a}_1 - \underline{a}_4 = \underline{a}_2 - \underline{a}_3$ repræsenteret et punkt, der ligger både på A_1A_4 og A_2A_3, altså punktet $D_{14,23}$. På tilsvarende måde ses, at $\underline{d}_{12,34} = \underline{a}_1 - \underline{a}_2 = \underline{a}_4 - \underline{a}_3$ repræsenterer $D_{12,34}$ og, at $\underline{c}_{12} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 = \underline{d}_{13,24} + \underline{d}_{14,23}$ repræsentere C_{12}. Af

$$\underline{c}_{12} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 \quad \text{og} \quad \underline{d}_{12,34} = \underline{a}_1 - \underline{a}_2$$

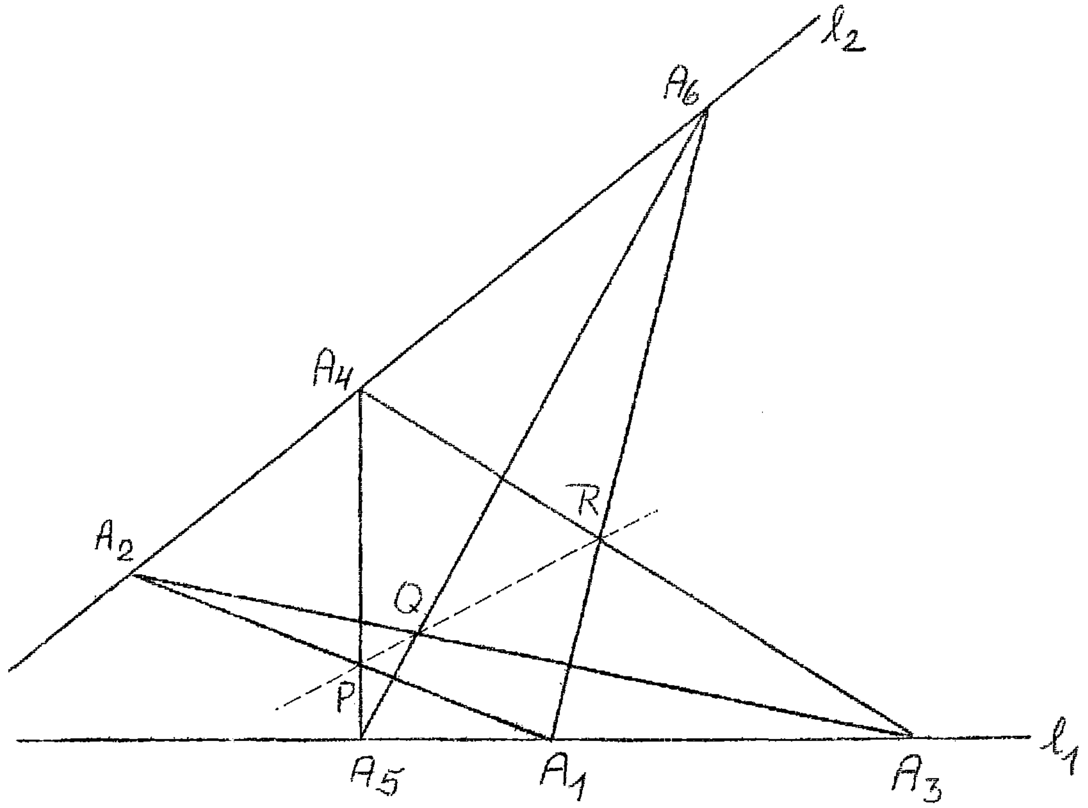
fås $df(A_1 A_2 C_{12} D_{12,34}) = -1$, hvilket er påstanden.



Som et lidt mere kompliceret eksempel på brugen af vektorrepræsentanter bevises

Pappos' sætning: Hvis vinkelspidserne i en sekskant i den projektive plan er indbyrdes forskellige og skiftevis ligger på to forskellige linier, vil modstående siders skæringspunkter ligge på en ret linie.

Bevis: Lad vinkelspidserne hedde $A_1, \dots, A_6$ og linierne l_1 og l_2. Der er da højst én af vinkelspidserne, som kan falde sammen med skæringspunktet mellem l_1 og l_2 og vi kan derfor vælge betegnelserne, så ingen af punkterne A_1, A_2, A_4, A_5



er skæringspunktet mellem l_1 og l_2. Blandt disse fire punkter er der altså ikke tre, som ligger på linie. Vi kan derfor - ligesom i det foregående bevis - vælge repræsentanter $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_4$, $\underline{a}_5$ for disse punkter, så

$$\underline{a}_1 + \underline{a}_2 = \underline{a}_4 + \underline{a}_5 = \underline{p}.$$

Punktet P, repræsenteret ved $\underline{p}$ er åbenbart et af de omtalte skæringspunkter. Idet punkterne A_1, A_3, A_5 ligger på linie og er forskellige, findes der et $\lambda \in \hat{R} \setminus \{0\}$, så

$$\underline{a}_3 = \underline{a}_1 + \lambda\underline{a}_5$$

er en repræsentant for A_3; tilsvarende ses, at der findes et $\mu \in \hat{R} \setminus \{0\}$, så

$$\underline{a}_6 = \underline{a}_2 + \mu\underline{a}_4$$

er en repræsentant for A_6.

Vi søger nu repræsentanter for de to andre skæringspunkter Q og R. Af de tre ovenstående ligninger får vi

$$\underline{a}_6 = \underline{a}_2 + \mu\underline{a}_4 = \underline{a}_2 + \mu(\underline{a}_1 + \underline{a}_2 - \underline{a}_5)$$

$$= (1+\mu)\underline{a}_2 - \mu\underline{a}_5 + \mu\underline{a}_1 = (1+\mu)\underline{a}_2 - \mu\underline{a}_5 + \mu(\underline{a}_3 - \lambda\underline{a}_5)$$

og dermed

$$(1+\mu)\underline{a}_2 + \mu\underline{a}_3 = \mu(1+\lambda)\underline{a}_5 + \underline{a}_6 = \underline{q}.$$

Her er $\underline{q} \neq \underline{0}$ (idet $A_5 \neq A_6$ og $\underline{a}_5$ og $\underline{a}_6$ derfor ikke er proportionale) og den er altså en repræsentant for skæringspunktet Q mellem A_2A_3 og A_5A_6.
Tilsvarende får vi

$$\underline{a}_3 = \underline{a}_1 + \lambda\underline{a}_5 = \underline{a}_1 + \lambda(\underline{a}_1 + \underline{a}_2 - \underline{a}_4)$$

$$= (1+\lambda)\underline{a}_1 - \lambda\underline{a}_4 + \lambda(\underline{a}_6 - \mu\underline{a}_4),$$

altså

$$(1+\lambda)\underline{a}_1 + \lambda\underline{a}_6 = \lambda(1+\mu)\underline{a}_4 + \underline{a}_3 = \underline{r},$$

som følgelig er en repræsentant for det tredje skæringspunkt R.
Idet $\underline{q} + \underline{r} = (1+\mu)\underline{a}_2 + \mu\underline{a}_3 + (1+\lambda)\underline{a}_1 + \lambda\underline{a}_6$

$$= (1+\mu)\underline{a}_2 + \mu(\underline{a}_1 + \lambda\underline{a}_5) + (1+\lambda)\underline{a}_1 + \lambda(\underline{a}_2 + \mu\underline{a}_4)$$

$$= (1+\lambda+\mu)(\underline{a}_1+\underline{a}_2) + \mu\lambda(\underline{a}_4+\underline{a}_5) = (1+\lambda)(1+\mu)\,\underline{p}$$

er vektorerne $\underline{p}$, $\underline{q}$ og $\underline{r}$ lineært afhængige og punkterne P, Q og R ligger altså på linie, hvilket er påstanden.

Øvelser til kap.III.§ 1.

1. Bevis ved hjælp af Desargues' sætning, at de tre ydre ligheds-punkter for 3 cirkler i planen ligger på ret linie, og at hver linie, der forbinder to indre lighedspunkter, også går gennem et ydre.

2. På et stykke papir er tegnet to linier, hvis skæringspunkt falder uden for papiret. Konstruer med linealen linien, som forbinder et givet punkt på papiret med de givne liniers skæringspunkt.

3. I den sædvanlige plan er givet to forskellige parallelle linier og et punkt. Konstruer med linealen den med de givne parallelle linie gennem det givne punkt.
Lad der være givet et parallelogram, dvs. to ikke parallelle par af parallele linier, samt en anden linie. Konstruer med linealen en med denne parallel (men ikke sammenfaldende) linie. (Med en "parallellineal", dvs. en lineal med to parallelle kanter, kan man altså konstruere linien, der er parallel med en given linie og går gennem et givet punkt.)

4. Lad O betegne et valgt begyndelsespunkt i rummet. Til en linie gennem O kan vi da lade svare dens normalplan gennem O og til en plan gennem O dens normal gennem O. Vis, at tre linier gennem O, som ligger i samme plan, herved svarer til tre planer gennem O, som har en linie fælles, og omvendt. Giv ved hjælp heraf et bevis for det på side 4-5 omtalte dualitetsprincip.

5. Givet to trekanter $A_1A_2A_3$ og $B_1B_2B_3$ i den projektive plan således at $B_1B_2B_3$ er indskrevet i $A_1A_2A_3$ i den forstand, at B_1 ligger på linien A_2A_3, B_2 på linien A_3A_1 og B_3 på linien A_1A_2.

Endvidere forudsættes, at punkterne $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ er indbyrdes forskellige. Vis, at der findes en trekant $C_1C_2C_3$, som er indskrevet i $B_1B_2B_3$, sådan at $A_1A_2A_3$ er indskrevet i $C_1C_2C_3$. Herved kan C_3 vælges på linien B_1B_2 forskellig fra B_1 og B_2.

6. I den euklidiske plan er givet en trekant med vinkelspidser A_1, A_2, A_3. Idet B_1, B_2, B_3 betegner fodpunkterne for vinkelhalveringslinierne i A_1, A_2, A_3 og P skæringspunktet mellem A_2A_3 og B_2B_3, skal man vise, at linien A_1P står vinkelret på vinkelhalveringslinien i A_1.

7. Lad ABCD være et parallelogram i den euklidiske plan, og lad E og F være fra vinkelspidserne forskellige punkter, der ligger henholdsvis på siden AB og på siden CD. Skæringspunktet mellem AF og DE betegnes med G og skæringspunktet mellem BF og CE med H. Linien GH skærer AD og BC i henholdsvis I og J. Vis, at liniestykkerne AI og CJ er kongruente.

8. I den projektive plan er givet seks forskellige punkter $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, hvoraf ikke tre ligger på linie, således at linierne A_1B_1, A_2B_3 og A_3B_2 går gennem samme punkt og linierne A_1B_3, A_2B_2 og A_3B_1 går gennem samme punkt. Vis, at linierne A_1B_2, A_2B_1 og A_3B_3 går gennem samme punkt.

§ 2. Dualitetsprincippet. Projektive koordinatsystemer.

Ved siden af vektorrummet V (af vektorer i rummet afsat udfra O) har det også interesse at betragte dettes duale rum V^*, altså vektorrummet over $\hat{R}$ af linearformer $\underline{v}^* : V \to \hat{R}$. Det viser sig i det følgende hensigtsmæssigt at indføre betegnelsen $\langle \underline{v}^*, \underline{v} \rangle$ for værdien af en linearform $\underline{v}^* \in V^*$ på en vektor $\underline{v} \in V$. Såvel lineariteten af linearformerne som definitionen af vektorrumsoperationerne på V^* kan da kort udtrykkes ved, at den ved $(\underline{v}^*, \underline{v}) \to \langle \underline{v}^*, \underline{v} \rangle$ bestemte afbildning $V^* \times V \to \hat{R}$ er en bilinearform (den såkaldte kanoniske bilinearform).

Lad $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ være en basis for V. En linearform $\underline{v}^*$ er da som bekendt fundstændig fastlagt ved sine værdier $y_0 = \langle \underline{v}^*, \underline{e}_0 \rangle$, $y_1 = \langle \underline{v}^*, \underline{e}_1 \rangle$ og $y_2 = \langle \underline{v}^*, \underline{e}_2 \rangle$ på $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$, og på den anden side findes til vilkårlige reelle tal y_0, y_1, y_2 en linearform, som har disse værdier på $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$. Svarende til basen $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ for V findes altså præcis ét sæt $\underline{e}_0^*$, $\underline{e}_1^*$, $\underline{e}_2^*$ af linearformer, så

$$\langle \underline{e}_i^*, \underline{e}_j \rangle = \delta_{ij} \quad , \quad i,j = 0,1,2 \; ,$$

og disse danner en basis for V^*, den såkaldte <u>duale basis</u> til basen $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$. Linearformen $\underline{v}^* = y_0\underline{e}_0^* + y_1\underline{e}_1^* + y_2\underline{e}_2^*$ har nemlig værdien y_0, y_1, y_2 på $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ og er åbenbart den eneste linearkombination af $\underline{e}_0^*$, $\underline{e}_1^*$, $\underline{e}_2^*$ med denne egenskab. Vektorrummet V og dets duale V^* har altså samme dimension.

Idet $\underline{v}$ er en vektor i V bestemmes der ved

$$\underline{v}^* \to \langle \underline{v}^*, \underline{v} \rangle$$

en linearform $h_{\underline{v}} : V^* \to \hat{R}$ på V^*. Den herved definerede afbildning $h : V \to V^{**}$ af V ind i det duale vektorrum til V^* ses at være lineær. Afbildningen h er en isomorfi, den såkaldte <u>kanoniske iso-</u>

morfi mellem V og V^{**}. Er nemlig $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ en basis for V og $\underline{e}_0^*$, $\underline{e}_1^*$, $\underline{e}_2^*$ den tilhørende duale basis for V^*, har linearformen $h_{\underline{e}_j}$ værdien

$$\langle \underline{e}_i^*, \underline{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

på $\underline{e}_i^*$, hvoraf følger, at

$$h_{\underline{e}_0}, h_{\underline{e}_1}, h_{\underline{e}_2}$$

er den til $\underline{e}_0^*$, $\underline{e}_1^*$, $\underline{e}_2^*$ duale basis for V^{**}.

I det følgende tillader vi os at identificere V og V^{**} ved den kanoniske isomorfi. Vi opfatter altså vektorerne $\underline{v} \in V$ som linearformer på V^*. Man ser her, hvorfor betegnelsen $\langle \underline{v}^*, \underline{v} \rangle$ er hensigtsmæssig: Dette reelle tal kan både fortolkes som værdien af linearformen $\underline{v}^*$ på $\underline{v}$ og som værdien af linearformen $\underline{v}$ på $\underline{v}^*$.

Lad $\underline{v}^* \in V^*$ være en linearform på V forskellig fra nulafbildningen $\underline{0}^*$. Kernen U af $\underline{v}^*$ er da et 2-dimensionalt underrum i V. Dette følger af, at $\underline{v}^*$ er en surjektiv lineær afbildning af V på et 1-dimensionalt vektorrum (nemlig $\mathring{R}$), hvorfor der gælder: dim V = dim U + 1. Proportionale og fra $\underline{0}^*$ forskellige linearformer har åbenbart samme kerne. Hermed er bevist, at hvis U^* er et 1-dimensionalt underrum af V^*, da er

$$U = \{\underline{u} \in V \mid \forall\, \underline{u}^* \in U^* : \langle \underline{u}^*, \underline{u} \rangle = 0\}$$

et 2-dimensionalt underrum af V.

Lad omvendt U være et 2-dimensionalt underrum af V. Vi kan da vælge en basis $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ for V, så $\underline{e}_0$ og $\underline{e}_1$ ligger i U. En linearform $\underline{v}^* \in V^*$ er åbenbart 0 på enhver vektor i U, præcis når den er 0 på $\underline{e}_0$ og $\underline{e}_1$, altså når og kun når den er et reelt multiplum af $\underline{e}_2^*$, idet $\underline{e}_0^*$, $\underline{e}_1^*$, $\underline{e}_2^*$ er den duale basis til basen $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$.

Vi har hermed alt i alt bevist følgende:

Der defineres en enentydig korrespondance mellem 2-dimensionale underrum U i V og 1-dimensionale underrum U^* i V^* ved

$$U^* = \{\underline{u}^* \in V^* \mid \forall\, \underline{u} \in U : \langle \underline{u}^*, \underline{u} \rangle = 0\}$$

og

$$U = \{\underline{u} \in V \mid \forall\, \underline{u}^* \in U^* : \langle \underline{u}^*, \underline{u} \rangle = 0\}.$$

Idet linierne i den projektive plan $\Pi(V)$ svarer til 2-dimensionale underrum i V, svarer de altså via denne korrespondance til 1-dimensionale underrum i V^*. Af definitionen på korrespondancen ses, at den til det 1-dimensionale underrum $U^* \subset V^*$ svarende linie i $\Pi(V)$ præcis består af de punkter i $\Pi(V)$, der har repræsentanter $\underline{u}$, med $\langle \underline{u}^*, \underline{u} \rangle = 0$ for enhver linearform $\underline{u}^* \in U^*$. En linearform $\underline{u}^* \in U^* \setminus \{\underline{0}^*\}$ kaldes en repræsentant for linien. Samtlige repræsentanter for linien er netop $\lambda \underline{u}^*$, $\lambda \in \hat{R} \setminus \{0\}$.

Idet V, som tidligere vist, på naturlig måde kan opfattes som det duale vektorrum til V^*, kan vi lade V og V^* bytte roller i den ovenfor fundne korrespondance mellem underrum. Herved fås:

Der defineres en-entydig korrespondance mellem 1-dimensionale underrum U i V og 2-dimensionale underrum U^* i V^* ved

$$U^* = \{\underline{u}^* \in V^* \mid \forall\, \underline{u} \in U : \langle \underline{u}^*, \underline{u} \rangle = 0\}$$

og

$$U = \{\underline{u} \in V \mid \forall\, \underline{u}^* \in U^* : \langle \underline{u}^*, \underline{u} \rangle = 0\}.$$

Punkterne i den projektive plan $\Pi(V)$ svarer altså via denne korrespondance til 2-dimensionale underrum i V^*. Ved at sammenholde med den ovenstående fortolkning af linierne i $\Pi(V)$ som 1-dimensionale underrum i V^* ser man, at er der givet et punkt i $\Pi(V)$, altså et 1-dimensionalt underrum U i V og dermed et 2-dimensionalt underrum U^* i V^*, da svarer de 1-dimensionale underrum i U^* præcis til linierne gennem punktet.

Hermed har vi fået en alternativ algebraisk beskrivelse af den projektive plan ved hjælp af 1- og 2-dimensionale underrum i V^*. Linien, givet ved det 1-dimensionale underrum U_1^* i V^*, går gennem punktet, givet ved det 2-dimensionale underrum U_2^* i V^*, når og kun når $U_1^* \subset U_2^*$. Man ser let (ved lignende betragtninger som i § 1 eller ved at knytte an til det ovenstående), at forbindelse af punkter og skæring af linier her er givet ved de algebraiske operationer $\cap$ og $+$: For to forskellige punkter, givet ved de 2-dimensionale underrum U_1^* og U_2^* i V^*, er forbindelseslinien givet ved $U_1^* \cap U_2^*$ - for to forskellige linier, givet ved 1-dimensionale underrum U_1^* og U_2^* i V^*, er skæringspunktet givet ved $U_1^* + U_2^*$.

Tre linier a,b og c i $\Pi(V)$ går gennem samme punkt når og kun når vilkårlige repræsentanter for dem, $\underline{a}^*$, $\underline{b}^*$ og $\underline{c}^* \in V^* \setminus \{\underline{0}^*\}$, er lineært afhængige. Vi kan derfor kopiere den algebraiske definition af dobbeltforholdet for fire punkter: Lad a,b,c,d, være fire linier i $\Pi(V)$, som går gennem samme punkt, med $a \neq b$, $a \neq c$ og $b \neq c$. Vi vælger da repræsentanter $\underline{a}^*$ og $\underline{b}^* \in V^* \setminus \{\underline{0}^*\}$ således at $\underline{c}^* = \underline{a}^* + \underline{b}^*$ er en repræsentant for c. Idet

$$\underline{d}^* = \rho^* \underline{a}^* + \sigma^* \underline{b}^*$$

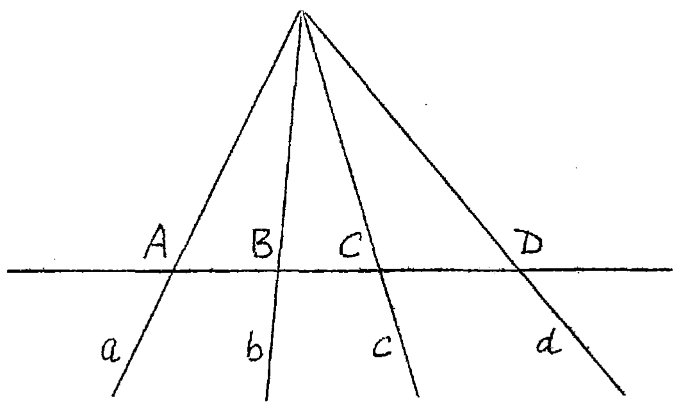
er en repræsentant for d, defineres <u>dobbeltforholdet mellem de fire linier</u> ved

$$df(a\ b\ c\ d) = \rho^* / \sigma^*.$$

Dobbeltforholdet mellem punkter er geometrisk forbundet med dobbeltforholdet mellem linier, idet der gælder.

Lad der i den projektive plan $\Pi(V)$ være givet en linie s og et punkt S, som ikke ligger på s, samt fire linier a,b,c,d gennem S, som skærer s i punkterne A,B,C,D. Hvis mindst tre af punkterne A,B,C,D og dermed mindst tre af linierne a,b,c,d er forskellige, gælder der

$$\mathrm{df}(A\ B\ C\ D) = \mathrm{df}(a\ b\ c\ d)$$



Bevis: Vi kan antage, at A,B,C og dermed a,b,c er indbyrdes forskellige. Der findes da repræsentanter $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ for A,B,C,D og $\underline{a}^*,\underline{b}^*,\underline{c}^*,\underline{d}^*$ for a,b,c,d, således at

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} \qquad \underline{d} = \rho\ \underline{a} + \sigma\ \underline{b}$$

$$\underline{c}^* = \underline{a}^* + \underline{b}^* \qquad \underline{d}^* = \rho^*\ \underline{a}^* + \sigma^*\ \underline{b}^* .$$

Idet A ligger på a, B på b, C på c og D på d gælder

$$\langle \underline{a}^*, \underline{a} \rangle = \langle \underline{b}^*, \underline{b} \rangle = \langle \underline{c}^*, \underline{c} \rangle = \langle \underline{d}^*, \underline{d} \rangle = 0$$

og dermed

$$0 = \langle \underline{c}^*, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}^* + \underline{b}^*, \underline{a} + \underline{b} \rangle$$

$$= \langle \underline{a}^*, \underline{a} \rangle + \langle \underline{b}^*, \underline{b} \rangle + \langle \underline{a}^*, \underline{b} \rangle + \langle \underline{b}^*, \underline{a} \rangle = \langle \underline{a}^*, \underline{b} \rangle + \langle \underline{b}^*, \underline{a} \rangle$$

altså $\langle \underline{b}^*, \underline{a} \rangle = - \langle \underline{a}^*, \underline{b} \rangle$.

Videre fås

$$0 = \langle \underline{d}^*, \underline{d} \rangle = \langle \rho^* \underline{a}^* + \sigma^* \underline{b}^*, \rho \underline{a} + \sigma \underline{b} \rangle$$

$$= \rho^* \rho \ \langle \underline{a}^*, \underline{a} \rangle + \sigma^* \sigma \ \langle \underline{b}^*, \underline{b} \rangle + \rho^* \sigma \ \langle \underline{a}^*, \underline{b} \rangle + \sigma^* \rho \ \langle \underline{b}^*, \underline{a} \rangle$$

$$= (\rho^* \sigma - \sigma^* \rho) \ \langle \underline{a}^*, \underline{b} \rangle .$$

Idet B ikke ligger på a er $\langle \underline{a}^*, \underline{b} \rangle \neq 0$ og der gælder derfor

$$\rho^* \sigma - \sigma^* \rho = 0,$$

altså

$$df(A\ B\ C\ D) = \rho/\sigma = \rho^*/\sigma^* = df(a\ b\ c\ d),$$

hvormed påstanden er bevist.

Af denne sætning følger <u>centralprojektionen af en linie l på en linie l' ud fra et punkt, som hverken ligger på l eller l', er dobbeltforholdstro</u>. Endvidere ser vi af sætningen, at det definerede dobbeltforhold for linier harmonerer med det i de indledende betragtninger i § 1 (side 2-3) omtalte.

Vektorrummene V og V^* har begge dimension 3 og er derfor isomorfe. Lad $\varphi : V \to V^*$ være en isomorfi. Hvis U er et underrum i V er $\varphi(u)$ et underrum i V^* med samme dimension, hvoraf følger, at φ inducerer afbildninger, som til et punkt i $\Pi(V)$ lader svare en linie i $\Pi(V)$ og til en linie i $\Pi(V)$ et punkt i $\Pi(V)$. Idet der for underrum U', U'' i V gælder $\varphi(U' \cap U'') = \varphi(U') \cap \varphi(U'')$og $\varphi(U' + U'') = \varphi(U') + \varphi(U'')$, vil skæringspunktet for to linier i $\Pi(V)$ afbildes i forbindelseslinien af liniernes billedpunkter og forbindelseslinien for to punkter i $\Pi(V)$ i skæringspunktet for de to punkters billedlinier. Fire punkter A,B,C,D i $\Pi(V)$, der ligger på en linie, vil altså afbildes i fire linier a,b,c,d i $\Pi(V)$, som går gennem samme punkt. Der gælder df(A B C D) = df(a b c d). Dette følger af, at hvis $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d} \in V$ er repræsentanter for A,B,C,D med $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$, $\underline{d} = \rho\underline{a} + \sigma\underline{b}$ vil $\underline{a}^* = \varphi(\underline{a})$, $\underline{b}^* = \varphi(\underline{b})$, $\underline{c}^* = \varphi(\underline{c})$, $\underline{d}^* = \varphi(\underline{d})$ være repræsentanter for a,b,c,d hvor der (da φ er lineær) gælder $\underline{c}^* = \underline{a}^* + \underline{b}^*$, $\underline{d}^* = \rho\underline{a}^* + \sigma\underline{b}^*$. Fire linier a,b,c,d i $\Pi(V)$, der går gennem samme punkt, vil afbildes i fire punkter A,B,C,D i $\Pi(V)$, der ligger på linie og der gælder df(a b c d) = df(A B C D). Dette følger af det lige beviste og den ovenfor beviste sætning, idet man skærer linierne a,b,c,d med en linie s, som ikke går gennem deres fælles skæringspunkt.

Et sådant sæt af afbildninger, som induceres af en isomorfi $\varphi : V \to V^*$, kaldes en <u>korrelation</u> af $\Pi(V)$. Korrelationer vil blive undersøgt nærmere i et senere afsnit. Af eksistensen af korrelationer følger

<u>Dualitetsprincippet: Af en gyldig sætning om den projektive plan, som indeholder begreberne "punkt", "linie", "forbindelseslinie", "skæringspunkt" og "dobbeltforhold" (for punkter eller linier) fås en gyldig sætning, når man erstatter "punkt" med "linie", "linie" med"punkt", "forbindelseslinie" med "skæringspunkt" og "skæringspunkt" med "forbindelseslinie".</u>

Anvendes dualitetsprincippet på Desargues' sætning fås følgende sætning, som ses at være dennes omvendte sætning.

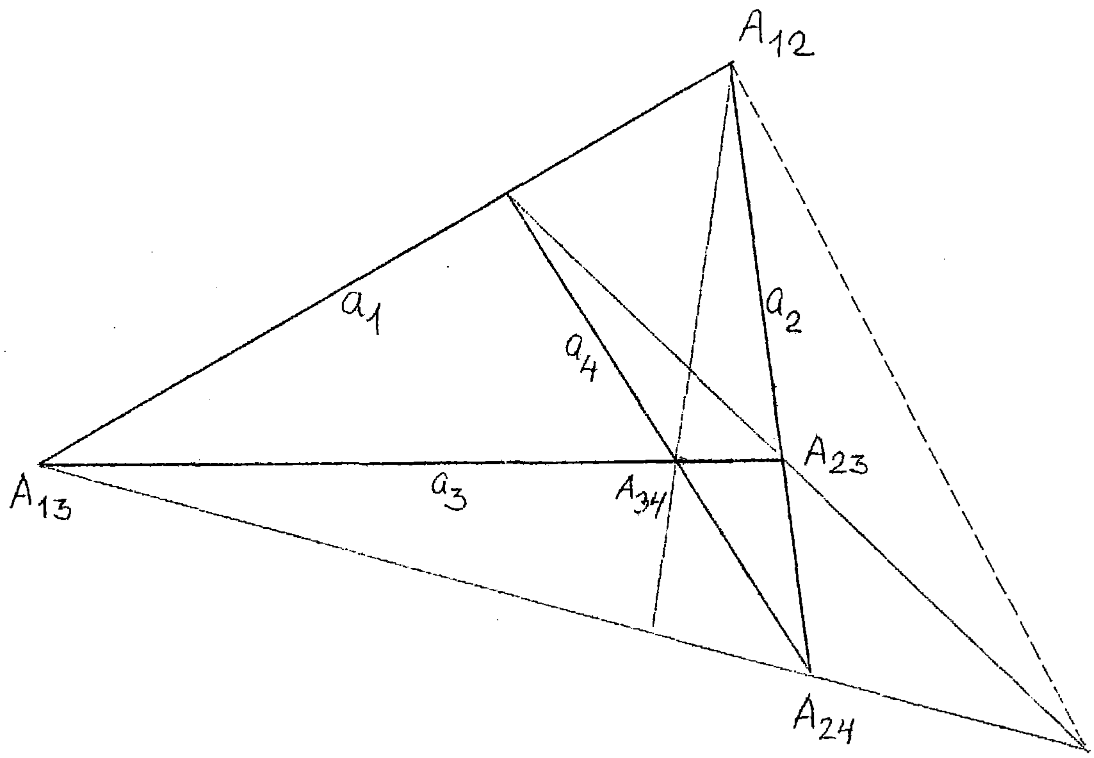
Om to trekanter i den projektive plan med sider a_1, a_2, a_3 og b_1, b_2, b_3 forudsættes, at $a_i \neq b_i$, $i = 1,2,3$, at der for vinkelspidserne gælder $a_i a_j \neq b_i b_j$, $i,j = 1,2,3$, $i \neq j$, og at tilsvarende siders skæringspunkter $a_i b_i$, $i = 1,2,3$ ligger på en linie s. Da går forbindelseslinierne c_{ij} af tilsvarende vinkelspidser $a_i\ a_j$ og $b_i\ b_j$ gennem samme punkt S

Fra § 1 har vi endvidere sætningen om den fuldstændige firkant og Pappos' sætning. Dem vil vi også anvende dulatitesprincippet på.

Den til en fuldstændig firkant duale figur kaldes en fuldstændig firside. Den består af 4 "sider" a_1, a_2, a_3, a_4, således at ikke 3 går gennem samme punkt, og de 6 skæringspunkter, "vinkelspidserne", A_{ij} mellem a_i og a_j, $i,j = 1,2,3,4$, $i \neq j$. De 3 forbindelseslinier $d_{12,34} = A_{12}A_{34}$, $d_{13,24} = A_{13}A_{24}$, $d_{14,23} = A_{14}A_{23}$ af "modstående vinkelspidser" kaldes firsidens diagonaler.

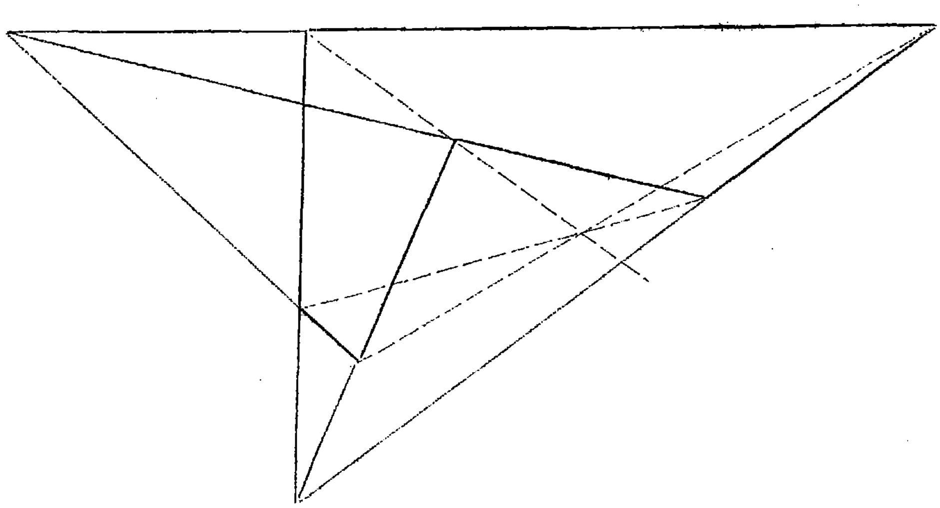
Den duale til sætningen om firkanten kan formuleres således:

Hvilkesomhelst to sider i en fuldstændig firside er harmonisk forbundne med diagonalen gennem deres skæringspunkt og dettes forbindelseslinie med de to andre diagonalers skæringspunkt.



Den duale til Pappos' sætning udsiger:

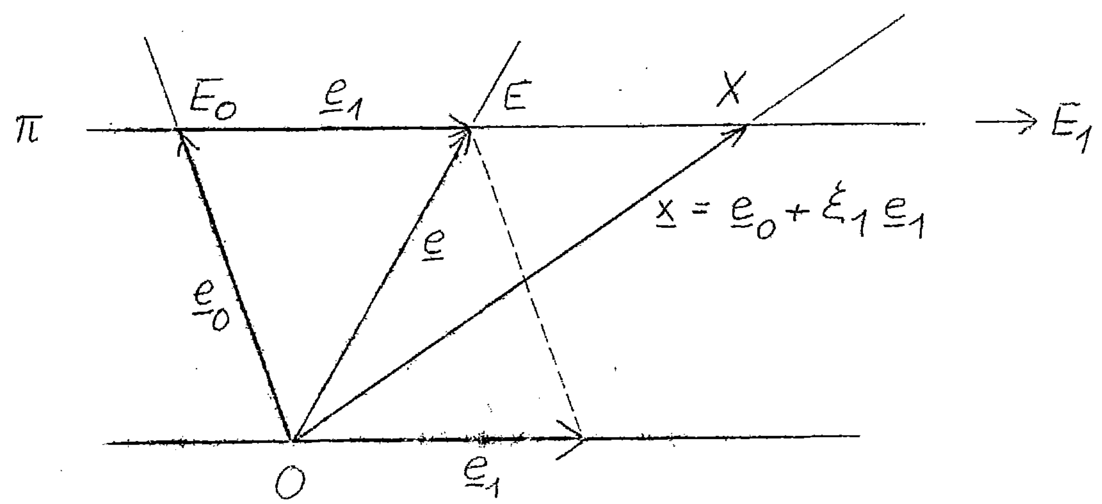
Hvis siderne i en sekskant i den projektive plan er indbyrdes forskellige og skiftevis går gennem to forskellige punkter, vil modstående vinkelspidsers forbindelseslinier gå gennem samme punkt



Er der givet tre forskellige punkter E_0, E_1, E på en projektiv linie, findes der netop ét punkt X på linien, for hvilket $df(E_0E_1EX)$ har en given værdi $\xi \in \dot{R} \cup \{\infty\}$. Dette følger af, at vektorer $\underline{e}_0$ og $\underline{e}_1$, som er repræsentanter for E_0 og E_1, danner en basis for det til linien hørende 2-dimensionale underrum i V. To linearkombinationer $x_0\underline{e}_0 + x_1\underline{e}_1$ og $x_0'\underline{e}_0 + x_1'\underline{e}_1$ repræsenterer altså samme punkt når og kun når talsættene (x_0, x_1) og (x_0', x_1') er proportionale. Vælges $\underline{e}_0$ og $\underline{e}_1$, så $\underline{e} = \underline{e}_0 + \underline{e}_1$ repræsenterer E, har vi hermed påstanden. På denne måde fås en enentydig korrespondance mellem mængden af punkter på linien og den udvidede mængde af reelle tal. Den kaldes det <u>projektive koordinatsystem</u> $(E_0, E_1; E)$ på linien.

Ofte foretrækker man at benytte talsættene (x_0, x_1) som "koordinat" i stedet for $\xi = x_0/x_1$. Herved undgås ∞ som koordinat, men sammenhængen mellem punkt og koordinatsæt bliver ikke enentydig. Man ser, at der til et punkt kommer til at svare en klasse af indbyrdes proportionale talsæt $(\lambda x_0, \lambda x_1)$, $\lambda \in \dot{R} \setminus \{0\}$, hvor $(x_0, x_1) \neq (0,0)$, og omvendt. Sådanne koordinater kaldes <u>homogene projektive koordinater</u>.

Som omtalt i § 1 kan den projektive plan $\Pi(V)$ opfattes som en euklidisk plan π med uegentlige punkter. Vi vælger π, så punktet E_1 er uegentligt.



Som vektorer $\underline{e}_0$ og $\underline{e}_1$ kan vi da åbenbart bruge $\underline{e}_0 = \overrightarrow{OE}_0, \underline{e}_1 = \overrightarrow{E_0E}$. Liniens egentlige punkter er netop punkterne med koordinatsæt (x_0,x_1), hvor $x_0 \neq 0$. Et sådant punkt har derfor præcis ét koordinatsæt af formen $(x_0,x_1) = (1,\xi_1)$. Vektoren $\underline{e}_0 + \xi_1\underline{e}_1$ ses at være stedvektoren $\overrightarrow{OX}$, og idet

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OE}_0 + \overrightarrow{E_0X} = \underline{e}_0 + \overrightarrow{E_0X}$$

har vi altså

$$\overrightarrow{E_0X} = \xi_1\underline{e}_1 = \xi_1\overrightarrow{E_0E},$$

hvilket betyder, at ξ_1 er koordinaten for X i det sædvanlige parallelkoordinatsystem $(E_0,\overrightarrow{E_0E})$ på linien.

(se side 2,11a).

På dualistisk tilsvarende måde til ovenfor kan man definere projektive koordinater i et liniebundt i den projektive plan. Er der valgt tre forskellige linier e_0,e_1,e i bundtet, fås en bijektiv afbildning af bundtet på $\dot{R} \cup \{\infty\}$, ved til hver linie x i bundtet at lade svare $df(e_0e_1e\ x)$. Dualt til ovenfor kan man naturligvis også definere homogene projektive koordinater i et liniebundt.

Lad E_0,E_1,E_2,E være fire forskellige punkter i den projektive plan $\Pi(V)$, hvoraf der ikke er tre, som ligger på linie. <u>Vi kan da vælge repræsentanter $\underline{e}_0,\underline{e}_1,\underline{e}_2$ for E_0,E_1,E_2 så $\underline{e} = \underline{e}_0+\underline{e}_1+\underline{e}_2$ er en repræsentant for E.</u> Vilkårlige repræsentanter $\underline{e}_0', \underline{e}_1', \underline{e}_2'$ vil nemlig (da E_0,E_1,E_2 ikke ligger på linie) danne en basis for V og en vilkårlig repræsentant $\underline{e}$ for E kan derfor skrives som linearkombination: $\underline{e} = \lambda_0\underline{e}_0' + \lambda_1\underline{e}_1' + \lambda_2\underline{e}_2'$. Her kan ingen af koefficienterne være 0, da det ville betyde, at E lå på en linie gennem to af punkterne E_0,E_1,E_2. Vektorerne $\underline{e}_0 = \lambda_0\underline{e}_0', \underline{e}_1 = \lambda_1\underline{e}_1'$ og $\underline{e}_2 = \lambda_2\underline{e}_2'$ er altså repræsentanter med den ønskede egenskab. <u>Sådanne repræsentanter for E_0,E_1,E_2 er entydigt bestemt pånær en fælles talfak-</u>

Er A,B,C,D punkter på en projektiv linie og $(a_0,a_1),(b_0,b_1)$, $(c_0,c_1),(d_1,d_2)$ koordinatsæt for dem med hensyn til et projektivt koordinatsystem $(E_0,E_1;E)$ på linien, gælder

$$\mathrm{df}(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}} .$$

Dette kan indses på følgende måde: Det bemærkes, at den højre side ikke afhænger af, hvilke koordinatsæt for de enkelte punkter der benyttes. Vælges koordinatsættene således, at

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} ,$$

fås ved at indsætte disse søjler og at anvende determinantsætninger, at den højre side er lig ρ/σ, og dette er påstanden.

Fortolkes den projektive linie som en euklidisk linie med det uegentlige punkt E_1, og antages at punkterne A,B,C,D er egentlige, kan man som koordinatsæt for disse vælge $(1,\alpha)$, $(1,\beta)$, $(1,\gamma)$, $(1,\delta)$, hvor $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ er punkternes sædvanlige koordinater i systemet $(E_0,\overrightarrow{E_0E})$. Man får da

$$\mathrm{df}(ABCD) = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} : \frac{\delta - \alpha}{\delta - \beta} ,$$

hvilket viser påny, at det algebraisk definerede dobbeltforhold for punkter på en euklidisk linie er et forhold mellem delingsforhold.

tor forskellig fra $\underline{0}$. Af

$$\alpha_0\underline{e}_0 + \alpha_1\underline{e}_1 + \alpha_2\underline{e}_2 = \alpha(\underline{e}_0 + \underline{e}_1 + \underline{e}_2)$$

følger nemlig $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha$, altså $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$, da $\underline{e}_0,\underline{e}_1,\underline{e}_2$ er lineært uafhængige.

Er (x_0,x_1,x_2) et talsæt forskelligt fra $(0,0,0)$, er $\underline{x} = x_0\underline{e}_0 + x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2$ en vektor forskellig fra $\underline{0}$ og altså repræsentant for et punkt X i den projektive plan. Svarende til et andet valg af et sæt repræsentanter $(\underline{e}_0,\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ af den omtalte art fås en med $\underline{x}$ proportional vektor og følgelig samme punkt X. De fire punkter E_0,E_1,E_2,E giver altså anledning til en afbildning, som til et talsæt $(x_0,x_1,x_2) \neq (0,0,0)$ lader svare et punkt X i den projektive plan. Man ser let, at alle punkter i den projektive plan kommer med på denne måde. Talsættet (x_0,x_1,x_2) kaldes <u>et koordinatsæt</u> for punktet X med hensyn til det <u>projektive koordinatsystem</u> $(E_0,E_1,E_2;E)$. Det ses, at <u>to talsæt er koordinatsæt for samme punkt, når og kun når de er proportionale</u>.

Talsættene $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ henh. $(1,1,1)$ er åbenbart koordinatsæt for E_0,E_1,E_2 henh. E. Punkterne E_0,E_1,E_2 kaldes koordinatsystemets <u>fundamentalpunkter</u> og "trekanten" bestående af punkterne E_0,E_1,E_2 og linierne E_0E_1,E_0E_2, E_1E_2 kaldes koordinatsystemets <u>fundamentaltrekant</u>. Punktet E kaldes <u>enhedspunktet</u>. (Det bemærkes endnu engang, at $(0,0,0)$ ikke kommer med som koordinatsæt, og at forbindelsen mellem punkt og koordinatsæt ikke er enentydig, men at der består en enentydig korrespondance mellem punkter og klasser af indbyrdes proportionale talsæt).

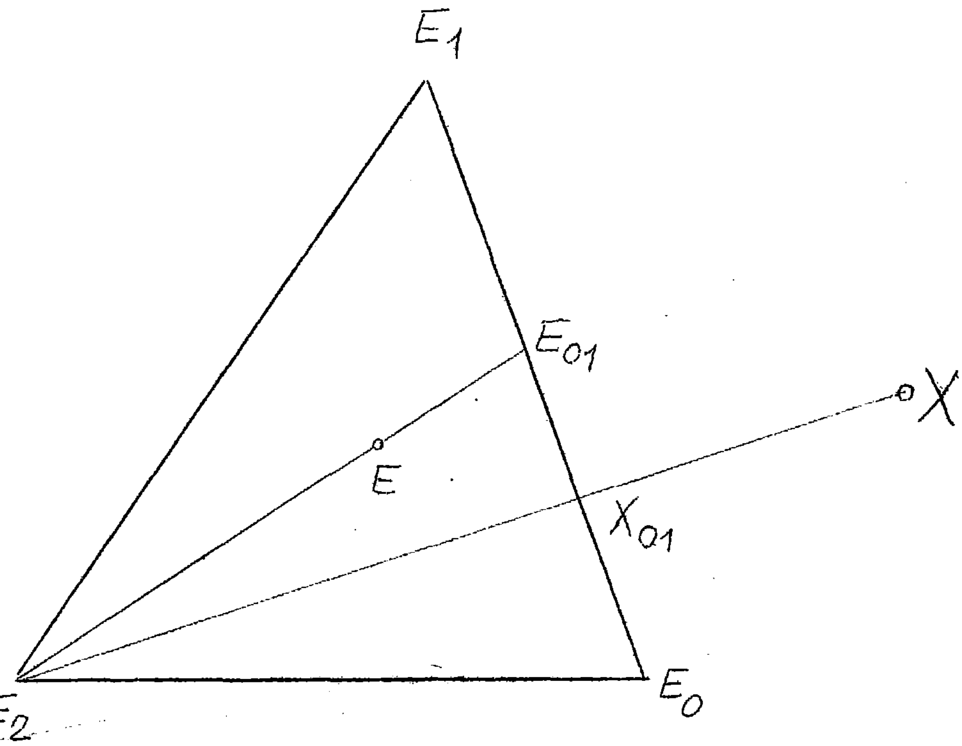
Punkterne E_{01}, E_{02} henh. E_{12} med repræsentanterne $\underline{e}_0 + \underline{e}_1 = \underline{e} - \underline{e}_2$, $\underline{e}_0 + \underline{e}_2 = \underline{e} - \underline{e}_1$ henh. $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 = \underline{e} - \underline{e}_0$ og altså med koordinatsæt $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ henh. $(0,1,1)$ (og dermed proportionale) er åbenbart skæringspunkterne mellem linierne

E_0E_1 og E_2E, E_0E_2 og E_1E henh. E_1E_2 og $E\ E$. For et punkt X på linien E_0E_1, altså med repræsentanter $\underline{x} = x_0\underline{e}_0 + x_1\underline{e}_1$ har vi derfor, at der for ethvert koordinatsæt (x_0, x_1, x_2) for X gælder

$$df(E_0E_1E_{01}X) = x_0/x_1 \quad , \quad x_2 = 0,$$

idet $\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_0 + \underline{e}_1$, $x_0\underline{e}_0 + x_1\underline{e}_1$ er repræsentanter for E_0, E_1, E_{01} og X. Tilsvarende ligninger gælder for et punkt X på en af de andre sider i fundamentaltrekanten.

Lad X være et punkt, som ikke ligger på nogen af fundamentaltrekantens sider. Vi betegner da skæringspunktet mellem E_0E_1 og E_2X med X_{01}. Analogt defineres punkterne X_{02} og X_{12}. Hvis (x_0, x_1, x_2) er et koordinatsæt for X, altså $\underline{x} = x_0\underline{e}_0 + x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2$ en re-



præsentant for X, er vektoren $x_0\underline{e}_0 + x_1\underline{e}_1 = \underline{x} - x_2\underline{e}_2$ repræsentant for et punkt, der ligger både på E_0E_1 og E_2X, altså for punktet X_{01}. Punktet X_{01} har derfor koordinatsættet $(x_0, x_1, 0)$. Af det ovenfor beviste fås følgelig

$$df(E_0E_1E_{01}X_{01}) = x_0/x_1.$$

Analogt fås

$$df(E_0E_2E_{02}X_{02}) = x_0/x_2 \quad \text{og} \quad df(E_1E_2E_{12}X_{12}) = x_1 / x_2.$$

Vi har hermed fået en geometrisk fortolkning af kvotienterne mellem koordinaterne i et projektivt koordinatsæt for et punkt.

På dual måde kan man, hvis e_0, e_1, e_2, e er fire linier i den projektive plan, hvoraf der ikke er tre, som går gennem samme punkt definere <u>projektive liniekoordinater</u> svarende til <u>liniekoordinatsystemet med fundamentallinier</u> e_0, e_1, e_2 <u>og enhedslinie e</u>. Man vælger repræsentanter $\underline{e}_0^*, \underline{e}_1^*, \underline{e}_2^* \in V^*$ for e_0, e_1, e_2, så $\underline{e}^* = \underline{e}_0^* + \underline{e}_1^* + \underline{e}_2^*$, er en repræsentant for e etc. Særlig interessant er det imidlertid, at man på en bestemt måde kan knytte et liniekoordinatsystem til et (punkt-) koordinatsystem.

Lad altså $(E_0, E_1, E_2; E)$ være et koorsinatsystem i den projektive plan og lad $\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2$ være repræsentanter for E_0, E_1, E_2 så $\underline{e} = \underline{e}_0 + \underline{e}_1 + \underline{e}_2$ er en repræsentant for E. Vektorsættet $(\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ er da en basis for V. Lad $\underline{e}_0^*, \underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*$ være den tilsvarende duale basis for V^* og lad $\underline{e}^* = \underline{e}_0^* + \underline{e}_1^* + \underline{e}_2^*$. Linearformerne $\underline{e}_0^*, \underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}^*$ repræsenterer linier $e_0, e_1, e_2; e$. <u>Disse linier afhænger ikke af valget af repræsentanterne</u> $\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2$ <u>og er altså fastlagt ved punkterne</u> $E_0, E_1, E_2; E$. Som tidligere bevist har ethvert andet sæt af repræsenter for E_0, E_1, E_2 af den omtalte art nemlig formen $\lambda\underline{e}_0, \lambda\underline{e}_1, \lambda\underline{e}_2$ med $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Den hertil svarende duale basis for V^* er åbenbart $\underline{e}_0^* / \lambda$, $\underline{e}_1^* / \lambda$, $\underline{e}_2^* / \lambda$, som ligeledes repræsenterer linierne e_0, e_1, e_2 og hvor $\underline{e}_0^* / \lambda + \underline{e}_1^* / \lambda + \underline{e}_2^* / \lambda = \underline{e}^* / \lambda$ ligeledes repræsenterer linien e.

Dette liniekoordinatsystem kaldes det <u>duale</u> til det givne punktkoordinatsystem.

Er X et punkt med koordinatsæt (x_0,x_1,x_2) i koordinatsystemet $(E_0,E_1,E_2;E)$ er vektoren

$$\underline{x} = x_0\underline{e}_0 + x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_1$$

en repræsentant for X og er l en linie med koordinatsæt (y_0,y_1,y_2) i koordinatsystemet $(e_0,e_1,e_2;e)$ er linearformen

$$\underline{l}^* = y_0\underline{e}_0^* + y_1\underline{e}_1^* + y_2\underline{e}_2^*$$

en repræsentant for l. Punktet X ligger på linien l (eller linien l går gennem punktet X) når og kun når $\langle\underline{l}^*,\underline{x}\rangle = 0$. Idet

$$\langle\underline{l}^*,\underline{x}\rangle = y_0x_0 + y_1x_1 + y_2x_2 ,$$

har vi altså, at punktet ligger på linien når og kun når

$$y_0x_0 + y_1x_1 + y_2x_2 = 0 .$$

Denne relation kan for fastholdt (y_0,y_1,y_2) opfattes som en <u>ligning for linien</u> med dette koordinatsæt, idet de fra (0,0,0) forskellige løsninger netop er koordinatsættene for punkterne på linien. For fastholdt (x_0,x_1,x_2) kan den opfattes som en <u>ligning for punktet</u> med dette koordinatsæt, idet de fra (0,0,0) forskellige løsninger netop er koordinatsættene for linierne gennem punktet.

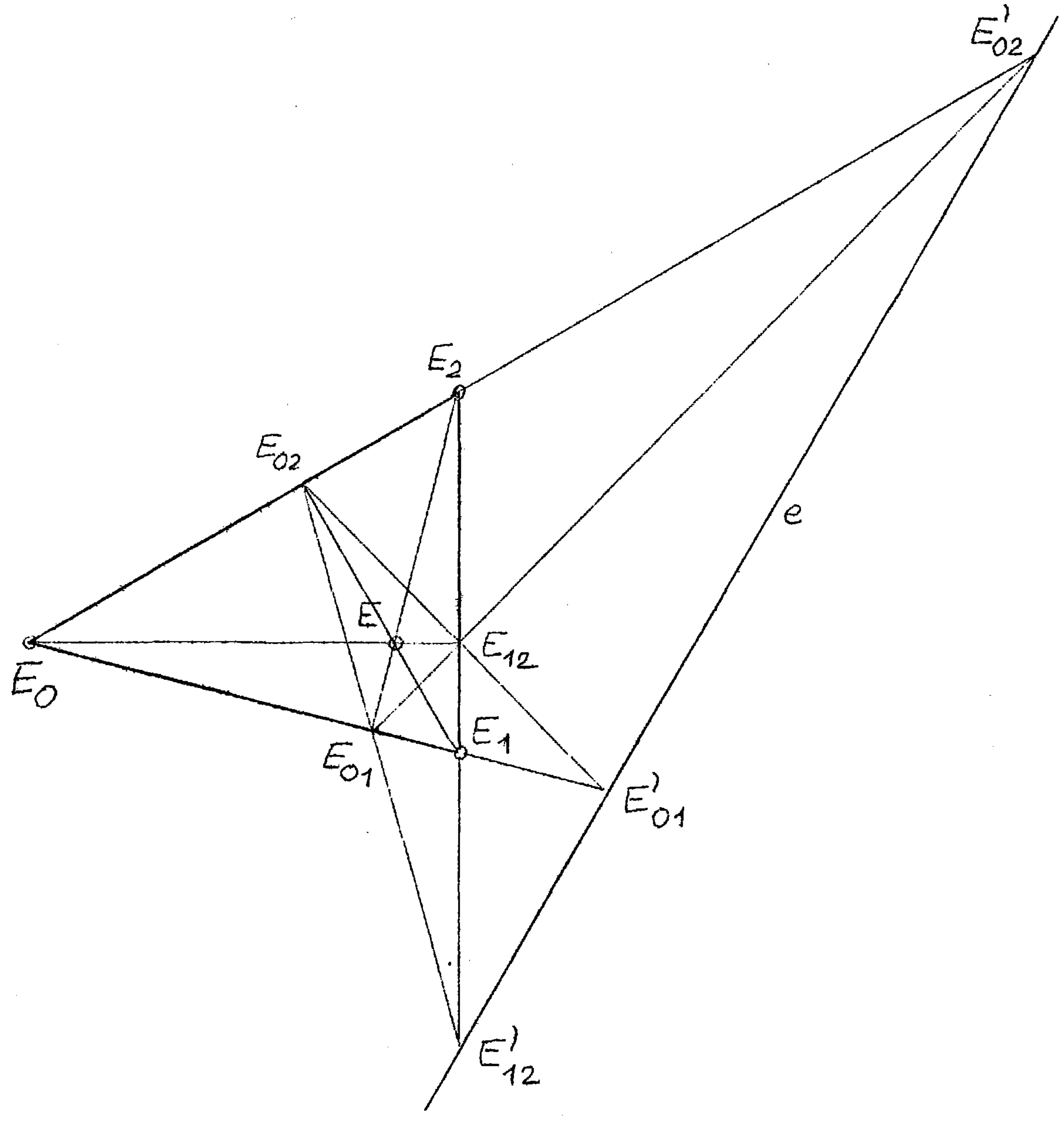
Idet $\underline{e}_0^*(\underline{e}_1) = \underline{e}_0^*(\underline{e}_2) = 0$ er e_0 linien E_1E_2. Tilsvarende ses, at e_1 er linien E_0E_2 og e_2 linien E_0E_1. Fastlæggelsen af enhedslinien e ud fra punkterne E_0,E_1,E_2,E er lidt mere indholdsrig. Lad E'_{01},E'_{02} og E'_{12} betegne skæringspunkterne mellem e og E_0E_1, E_0E_2, E_1E_2. Idet linierne E_0E_1 og e har repræsentanterne $\underline{e}_2^*$ og $\underline{e}^*$ er

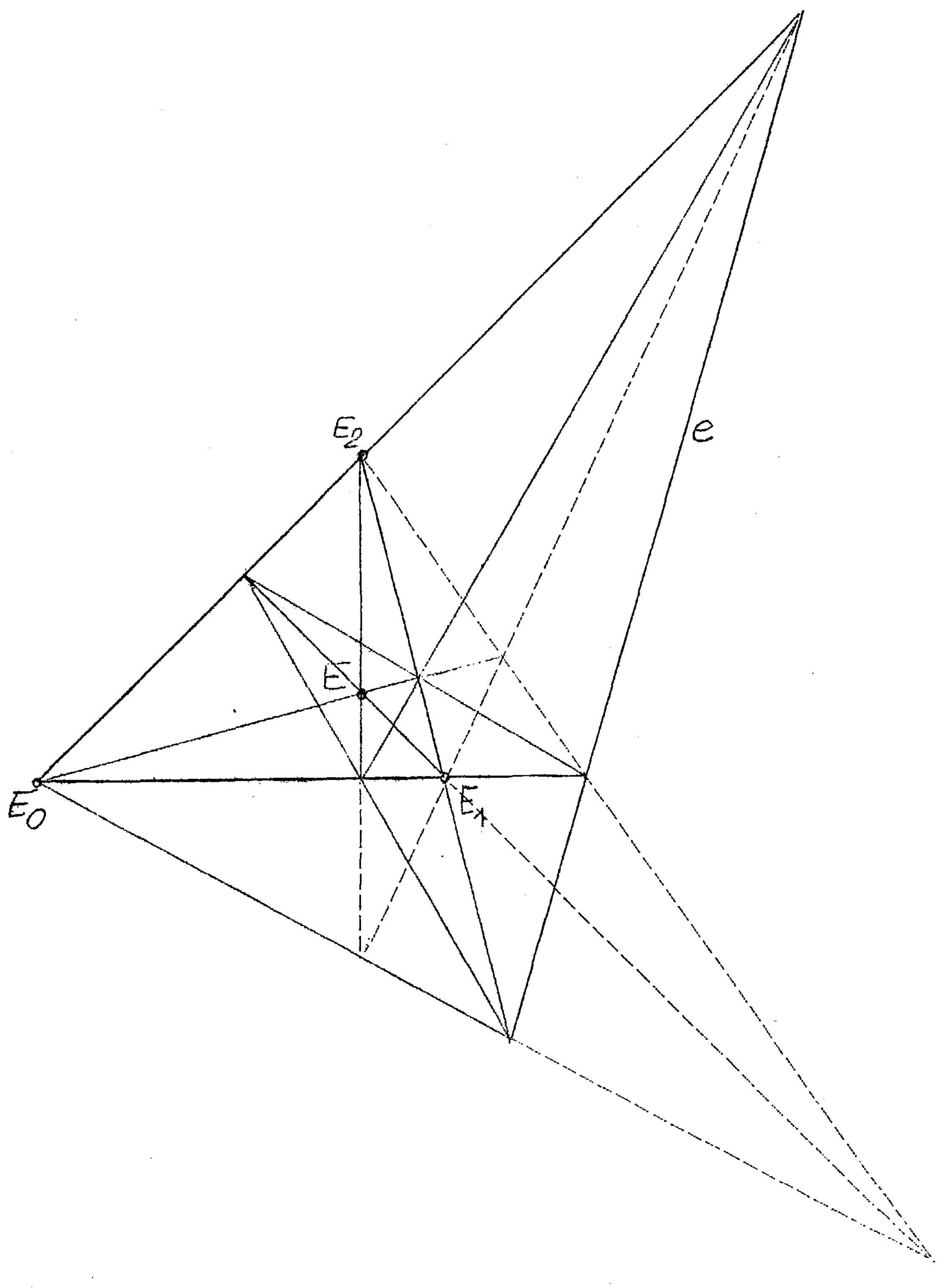
$$x_2 = 0 \quad \text{og} \quad x_0 + x_1 + x_2 = 0$$

ligninger for disse linier. Talsættet $(1,-1,0)$ er altså et koordinatsæt for E'_{01}, d.v.s. $\underline{e}_0 - \underline{e}_1$ er en repræsentant for E'_{01}. Idet $\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_0 + \underline{e}_1$ er repræsentanter for E_0, E_1, E_{01} har vi

$$\mathrm{df}(E_0, E_1 E_{01}, E'_{01}) = -1,$$

altså E'_{01} <u>er "fjerde harmoniske punkt" til</u> E_0, E_1, E_{01}. En anden måde at fastlægge enhedslinien e fås på følgende måde: Idet $\underline{e}_0 + \underline{e}_2$ og $\underline{e}_1 + \underline{e}_2$ er repræsentanter for punkterne E_{02} og E_{12} og idet $(\underline{e}_0 + \underline{e}_2) - (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \underline{e}_0 - \underline{e}_1$ ligger punkterne E_{02}, E_{12}, E'_{01} på linie, altså E'_{01} <u>er skæringspunktet mellem linierne</u> E_0E_1 <u>og</u> $E_{02}E_{12}$. På tilsvarende måde kan punkterne E'_{12} og E'_{02} bestemmes.




E_2
e
E
E_0
E_1

Enhedspunktet E kan bestemmes på dualistisk tilsvarende måde udfra fundamentallinierne $e_0 = E_1E_2$, $e_1 = E_0E_2$, $e_2 = E_0E_1$ og enhedslinien e. På figursiden er begge konstruktioner indtegnet. Som biprodukt fås en geometrisk sætning, hvis nærmere formulering overlades til læseren. Linien e, som på den anførte måde fremkommer ud fra trekanten E_0,E_1,E_2 og punktet E kaldes den <u>harmoniske polar</u> for punktet E med hensyn til trekanten E_0,E_1,E_2. Punktet E, som på dual måde fremkommer ud fra trekanten e_0,e_1,e_2 og linien e kaldes den <u>harmoniske pol</u> for linien e med hensyn til trekanten e_0,e_1,e_2 .

Et projektivt koordinatsystem $(E_0,E_1,E_2;E)$ i den projektive plan $\Pi(V)$ modsvares af et sædvanligt parallelkoordinatsystem, hvis vi opfatter $\Pi(V)$ som en euklidisk plan π med linien E_1E_2 som uegentlig linie:

Vi kan vælge $\underline{e}_0 = \overrightarrow{OE_0}$ som repræsentant for E_0 (se figuren). Hermed er repræsentanterne $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$ for E_1 og E_2, så $\underline{e} = \underline{e}_0+\underline{e}_1+\underline{e}_2$ er en repræsentant for E , entydigt bestemt. Det ses, at $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$ er vektorerne i planen π med retninger svarende til det respektive uegentlige punkt, som opfylder $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 = \overrightarrow{E_0E}$.

De egentlige punkter i π er netop de, der har koordinatsæt (x_0,x_1,x_2), hvor $x_0 \neq 0$. Et egentligt punkt X i π har altså præcis ét koordinatsæt af formen $(1,\xi_1,\xi_2)$. Hertil svarer repræsentanten

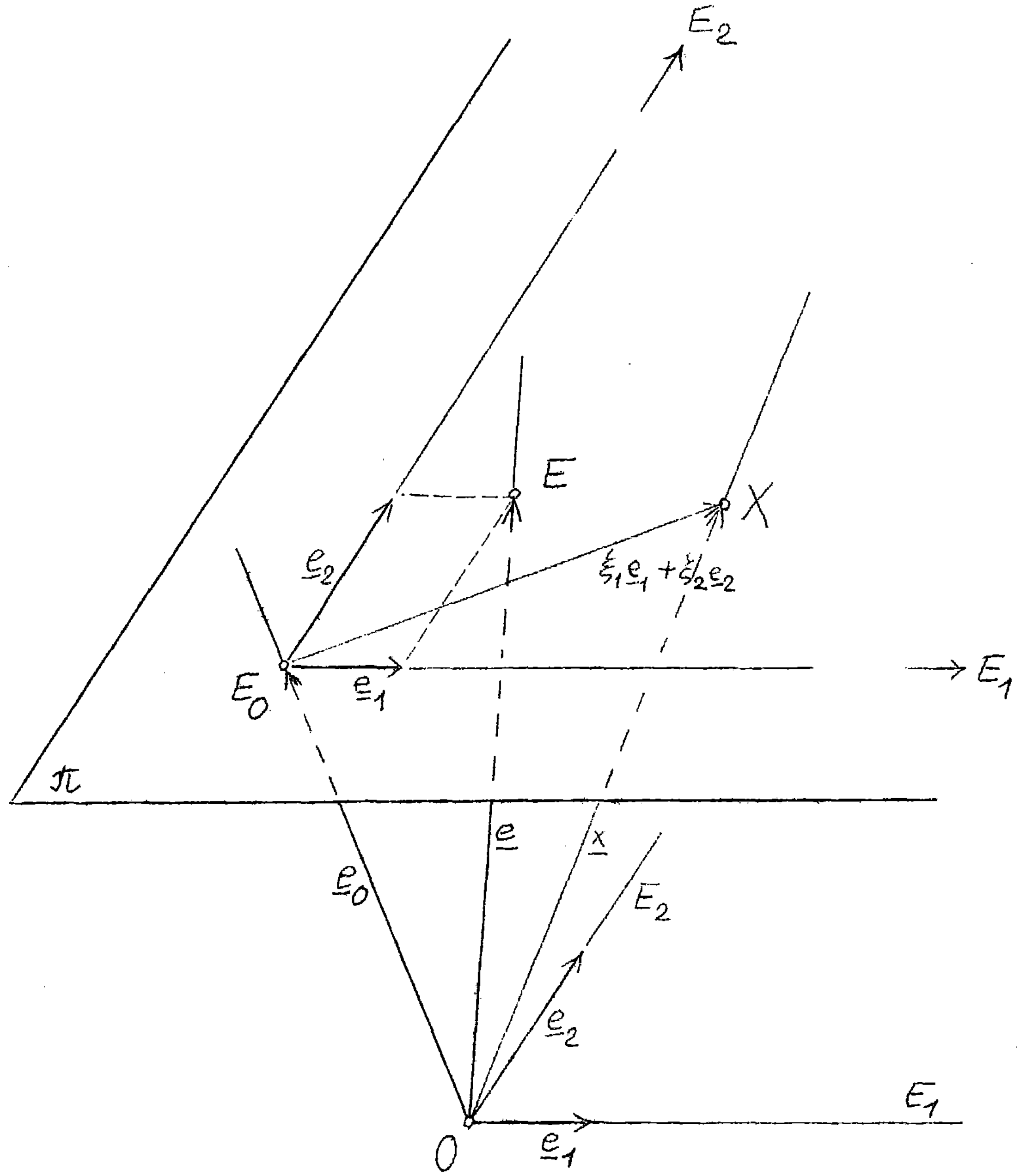
$$\underline{x} = \underline{e}_0 + \xi_1\underline{e}_1 + \xi_2\underline{e}_2 ,$$

som ses netop at være stedvektoren $\overrightarrow{OX}$. Idet $\underline{e}_0 = \overrightarrow{OE_0}$, får vi heraf

$$\overrightarrow{E_0X} = \xi_1\underline{e}_1 + \xi_2\underline{e}_2 .$$

Talsættet (ξ_1,ξ_2) er følgelig koordinatsættet for punktet X i parallelkoordinatsystemet $(E_0,\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ i planen π .

En tilsvarende korrespondance mellem projektive koordinater og parallelkoordinater fås naturligvis, hvis man vælger en af de andre fundamentallinier som uegentlig linie.



Øvelser til § 2.

1. I den projektive plan er givet et koordinatsystem $(E_0,E_1,E_2;E)$ og punkterne A,B,C med koordinatsæt (1,2,5),(2,4,3) og (4,8,-1). Vis, at punkterne A,B,C ligger på en linie l og find et liniekoordinatsæt for l. Find et koordinatsæt for skæringspunktet mellem l og linien m med liniekoordinatsættet (2,3,2).

2. Vis, at hvis (E_0,E_1,E_2,E) er et koordinatsystem i den projektive plan, E_{01},E_{12},E_{20} skæringspunktet mellem E_0E_1 og E_2E, E_1E_2 og E_0E, E_2E_0 og E_1E og hvis X_{01},X_{12},X_{20} er fra E_0,E_1,E_2 forskellige punkter, som ligger på henholdsvis E_0E_1,E_1E_2,E_2E_0, da går linierne E_2X_{01}, E_0X_{12}, E_1X_{20} gennem samme punkt når og kun når

$$\mathrm{df}(E_0E_1E_{01}X_{01})\mathrm{df}(E_1E_2E_{12}X_{12})\mathrm{df}(E_2E_0E_{20}X_{20}) = 1 .$$

Formulér den duale sætning.

Vis herved Cevas'sætning: Lad (E_0,E_1,E_2) være en trekant i den euklidiske plan og X_{01},X_{12},X_{20} fra vinkelspidserne forskellige punkter på siderne E_0E_1,E_1E_2,E_2E_0 . Da vil linierne E_2X_{01}, E_0X_{12},E_1X_{20} gå gennem samme punkt eller være parallelle, hvis og kun hvis

$$\frac{E_0X_{01}}{E_1X_{01}} \cdot \frac{E_1X_{12}}{E_2X_{12}} \cdot \frac{E_2X_{20}}{E_0X_{20}} = -1.$$

(Øvelsen fortsættes nederst på næste side)

3. I en euklidisk plan π er givet en trekant $E_0E_1E_2$ og et punkt E, som ikke ligger på nogen af trekantens sider $e_0 = E_1E_2$, $e_1 = E_2E_0, e_2 = E_0E_1$. Normalerne til trekantens sider orienteres således, at trekanten ligger i de positive halvplaner. Vis, at idet den med fortegn regnede afstand fra e_i til et punkt X betegnes $d(e_i,X)$, $i = 0,1,2$, er

$$\left(\frac{d(e_0,X)}{d(e_0,E)}, \frac{d(e_1,X)}{d(e_1,E)}, \frac{d(e_2,X)}{d(e_2,E)}\right)$$

et koordinatsæt for X i koordinatsystemet $(E_0,E_1,E_2;E)$ i den til π hørende projektive plan. Vælges medianernes skæringspunkt som enhedspunkt E, fås "barycentriske koordinater", for hvilke det gælder, at punktet X med et koordinatsæt (x_0,x_1,x_2) er tyngdepunktet for masserne x_0,x_1,x_2 anbragt i punkterne E_0,E_1,E_2.
Find barycentriske koordinatsæt for højdernes skæringspunkt H og den omskrevne cirkels centrum C, og vis, at H,C og medianernes skæringspunkt E ligger på ret linie.
Angiv i dette tilfælde de koordinatsæt, som hører til uegentlige punkter i π.
Vælges den indskrevne cirkels centrum som enhedspunkt E, fås "Trimetriske koordinater". Bevis ved hjælp af sådanne: Hvis tre linier l_0,l_1,l_2, som henholdsvis går gennem vinkelspidsen E_0,E_1,E_2 i en trekant, har et punkt fælles, vil de tre linier, der fås ved spejling af l_1,l_2,l_3 i vinkelhalveringslinien for henholdsvis E_0,E_1,E_2, ligeledes have et punkt fælles.

Øvelse 2 fortsat:
Vis endvidere, at der i den samme situation gælder Menelaos' sætning: Punkterne X_{01}, X_{12}, X_{02} ligger på linie, hvis og kun hvis

$$\frac{E_0X_{01}}{E_1X_{01}} \cdot \frac{E_1X_{12}}{E_2X_{12}} \cdot \frac{E_2X_{20}}{E_0X_{20}} = 1 .$$

4. Find udtrykt ved $\delta = \mathrm{df}(ABCD)$, hvor A,B,C,D er et sæt af indbyrdes forskellige punkter på en projektiv linie, dobbeltforholdene for alle sæt, der fremgår af dette ved permutationer.

5. Ved en (simpel) femkant i en projektiv plan forstås en figur bestående af 5 cyklisk ordnede punkter A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, vinkelspidserne, og 5 linier a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, siderne, således at a_i går gennem de 2 vinkelspidser A_{i-2}, A_{i+2}, som ikke er naboer til A_i. (Herved regnes mærketallene modulo 5.) Det forudsættes, at vinkelspidserne og siderne er indbyrdes forskellige. De skæringspunkter mellem siderne, som ikke er vinkelspidser, kaldes diagonalpunkter og betegnes på nærliggende måde D_{ij}. De forbindelseslinier mellem vinkelspidserne, som ikke er sider, kaldes diagonaler og betegnes d_{ij}. På hver side ligger to vinkelspidser og to diagonalpunkter, og gennem hver vinkelspids går to sider og to diagonaler. Til hvert par A_i, a_i knyttes dobbeltforholdet

$\delta_i = \mathrm{df}(A_{i-2}A_{i+2}D_{i-2,i}D_{i,i+2}) = \mathrm{df}(d_{i-2,i}d_{i,i+2}a_{i-2}a_{i+2})$,

hvor $i = 1,\ldots,5$ og der regnes modulo 5.

Vis, at

$$1/\delta_i = (1-1/\delta_{i-1})(1-1/\delta_{i+1})$$

$$\delta_i = (1-\delta_{i-2})(1-\delta_{i+2})$$

(A.F. Möbius, 1827).

6. Lad $A_1A_2A_3A_4$ være vinkelspidserne i en fuldstændig firkant og $D_{12,34}, D_{13,24}, D_{14,23}$ dennes diagonalpunkter. Vis, at punkterne

$$D_{12,34}D_{13,24} \cap A_2A_3 ,$$

$$D_{13,24}D_{14,23} \cap A_3A_4 ,$$

$$D_{14,23}D_{12,34} \cap A_4A_2$$

ligger på ret linie.

Konstruer en fuldstændig firkant, af hvilken diagonalpunkterne samt én vinkelspids er givet.

Formuler den duale til ovenstående sætning. Formuler og løs den duale til konstruktionsopgaven.

§ 3. Projektive kollineationer.

Givet to linier 1 og 1' i den projektive plan. En bijektiv afbildning af 1 på 1', ved hvilken der til hvikesomhelst fire punkter på 1 svarer fire punkter på 1' med samme dobbeltforhold, kaldes en projektivitet af 1 på 1'. Enhver centralprojektion (perspektivitet) af 1 på 1' ud fra et punkt, som hverken ligger på 1 eller 1', er, som vi tidligere har set, en afbildning af denne art. Det er klart, at en projektivitets inverse afbildning og den af to projektiviteter sammensatte afbildning også er projektiviteter. Projektiviteterne af en linie på sig selv danner en gruppe, liniens projektive gruppe.

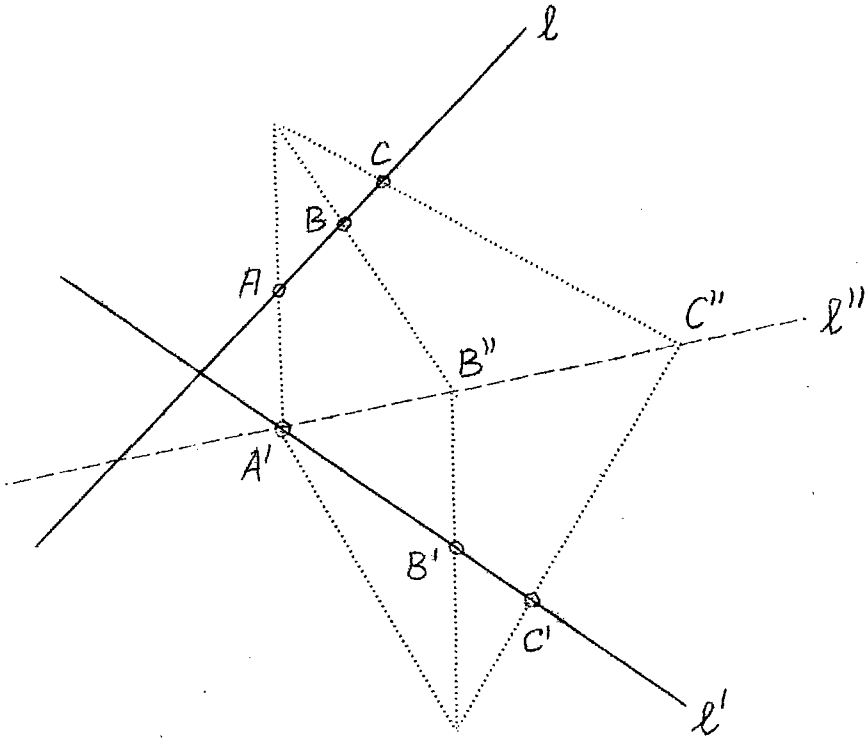
Er $\varphi : 1 \to 1'$ en projektivitet, A, B, C forskellige punkter på 1 og $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$, $C' = \varphi(C)$ deres billedpunkter, vil billedpunktet X' af et vilkårligt punkt X på 1 være bestemt ved, at

$$\mathrm{df}(A'B'C'X') = \mathrm{df}\,(A\;B\;C\;X)$$

Heraf sluttes entydighedspåstanden i følgende sætning:

Er A, B, C tre forskellige punkter på en projektiv linie 1 og A', B', C' tre forskellige punkter på en projektiv linie 1', findes der netop én projektivitet af 1 på 1', ved hvilken A, B, C afbildes i henholdsvis A', B', C'.

Eksistensen af en sådan projektivitet indses således: Vi antager først, at $1 \neq 1'$, og at $A = A'$. Dette punkt er da skæringspunktet mellem 1 og 1', og vi har $B \neq B'$, $C \neq C'$. Centralprojektionen af 1 på 1' fra skæringspunktet mellem linierne B B' og C C', som ligger hverken på 1 eller 1', opfylder da kravene. Tilsvarende sluttes, når $B = B'$ eller $C = C'$. - Vi antager dernæst, at $1 \neq 1'$ og $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$. I mindst ét af parrene (A, A'), (B, B'), (C, C'), f. eks. (A, A'), er da begge punkter forskellige fra liniernes skæringspunkt. På linien AA' vælges et fra A og A' forskelligt punkt, og fra dette projiceres linien l på en fra l' forskellig linie l'' gennem A'. Herved afbildes A på A'' = A', B på B'' og C på C''. Ifølge det allerede viste findes der en centralprojektion, ved hvilken A', B'', C'' afbildes på henholdsvis A', B', C'. Ved sammensæt-



ning af de to centralprojektioner fås en projektivitet af den forlangte art. - Er l = l', projiceres l på en anden linie l'', og det allerede viste anvendes på l'' og l'. Ved sammensætning fås da det ønskede resultat også i dette tilfælde. - Af beviset fremgår:

<u>Enhver projektivitet af en linie på en linie kan sammensættes af højst tre centralprojektioner. Er linierne forskellige og svarer deres skæringspunkt til sig selv, er projektiviteten en centralprojektion.</u>

Er de projektive linier l og l' de 2-dimensionale underrum U og U' af V, og er $\Phi : U \to U'$ en bijektiv lineær afbildning, vil der ved Φ til hvert 1-dimensionalt underrum A af U svare et 1-dimensionalt underrum $\Phi(A)$ af U'. Herved fås en afbildning $\varphi : l \to l'$, der siges at være <u>induceret</u> af Φ. Afbildningen φ er en projektivitet: At den er bijektiv, følger af, at Φ er en isomorfi. Er A, B, C, D fire forskellige punkter på l og $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ sådanne repræsentanter for dem, at

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}, \qquad \underline{d} = \rho\underline{a} + \sigma\underline{b},$$

vil $\Phi(\underline{a})$, $\Phi(\underline{b})$, $\Phi(\underline{c})$, $\Phi(\underline{d})$ være repræsentanter for $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$, for hvilke

$$\Phi(\underline{c}) = \Phi(\underline{a}) + \Phi(\underline{b}), \qquad \Phi(\underline{d}) = \rho\Phi(\underline{a}) + \sigma\Phi(\underline{b}).$$

Heraf sluttes, at

$$\mathrm{df}(\varphi(A)\ \varphi(B)\ \varphi(C)\ \varphi(D)) = \mathrm{df}\ (A\ B\ C\ D).$$

Det er indlysende, at hvis Φ inducerer projektiviteten φ, vil $\lambda\Phi$ fra hvert reelt $\lambda \neq 0$ inducere den samme projektivitet φ.

Enhver projektivitet af l på l' kan fås på denne måde. For at indse dette er det tilstrækkeligt at vise, at der findes en bijektiv lineær afbildning $\Phi : U \to U'$ således, at der ved den inducerede projektivitet φ til givne indbyrdes forskellige punkter A, B, C på l svarer givne indbyrdes forskellige punkter A', B', C' på l'. Lad $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ være repræsentanter for A, B, C, således at $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$, og lad $\underline{a}'$, $\underline{b}'$, $\underline{c}'$ være repræsentanter for A', B', C', således at $\underline{c}' = \underline{a}' + \underline{b}'$. Idet hvert af parrene $\underline{a}$, $\underline{b}$ og $\underline{a}'$, $\underline{b}'$ er lineært uafhængigt, findes der netop én lineær afbildning $\Phi : U \to U'$, således at

$$\Phi(\underline{a}) = \underline{a}', \qquad \Phi(\underline{b}) = \underline{b}'.$$

Den er bijektiv, og der gælder

$$\Phi(\underline{c}) = \Phi(\underline{a} + \underline{b}) = \Phi(\underline{a}) + \Phi(\underline{b}) = \underline{a}' + \underline{b}' = \underline{c}'.$$

Den inducerede projektivitet har altså de forlangte egenskaber. Idet vektorerne $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ med $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ er bestemt ved A, B, C pånær en fælles reel faktor forskellig fra 0 og det tilsvarende gælder for $\underline{a}'$, $\underline{b}'$, $\underline{c}'$, ses, at der ikke kan findes andre lineære afbildninger end $\lambda\Phi$, $\lambda \neq 0$, der inducerer projektiviteten φ.

Lad $(E_0, E_1; E)$ og $(F_0, F_1; F)$ være projektive koordinatsystemer på 1 og 1'. Vælges repræsentanter $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$ for E_0, E_1, så $\underline{e} = \underline{e}_0 + \underline{e}_1$ er en repræsentant for E og repræsentanter $\underline{f}_0$, $\underline{f}_1$ for F_0, F_1 så $\underline{f} = \underline{f}_0 + \underline{f}_1$ er en repræsentant for F, danner $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$ en basis for U og $\underline{f}_0$, $\underline{f}_1$ en basis for U'. Med hensyn til disse baser beskrives en bijektiv lineær afbildning $\Phi : U \to U'$ ved en matrixligning

$$\underline{\underline{x}}_1' = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{x}}_1$$

(altså vektoren $x_0\underline{e}_0 + x_1\underline{e}_1$ afbildes ved Φ på vektoren $x_0'\underline{f}_0 + x_1'\underline{f}_1$). Matricen $\underline{\underline{S}}$ er regulær, da Φ er bijektiv. Denne matrixligning beskriver den af Φ inducerede projektivitet i de valgte koordinatsystemer, idet et punkt på 1 med koordinatsæt $\underline{\underline{x}}_1$ i koordinatsystemet $(E_0,E_1;E)$ åbenbart ved φ afbildes på det punkt på $1'$, som i koordinatsystemet $(F_0,F_1;F)$ har koordinatsættet $\underline{\underline{x}}_1' = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{x}}_1$. En projektivitet kan altså i koordinater beskrives ved en matrixligning - omvendt vil en sådan matrixligning beskrive en projektivitet, hvis matricen er regulær, idet den da giver en bijektiv lineær afbildning af vektorrummene. Vil man finde en matrixligning for en given projektivitet med hensyn til givne koordinatsystemer, skal man følgelig blot bestemme matricen $\underline{\underline{S}}$, så punkterne E_0,E_1,E får de "rigtige" billedpunkter, med andre ord, så søjlerne i $\underline{\underline{S}}$ og summen af disse er koordinatsæt for billedpunkterne af E_0, E_1 og E i koordinatsystemet $(F_0, F_1; F)$. Herved er $\underline{\underline{S}}$ bestemt pånær en fra 0 forskellig reel faktor. Med hensyn til koordinatsystemerne $(E_0, E_1; E)$ og $(F_0, F_1; F)$ bestemmer altså matricerne $\lambda \underline{\underline{S}}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, og kun disse den samme projektivitet som $\underline{\underline{S}}$.

Projektiviteterne af en projektiv linie l på sig selv kan klassificeres efter antallet af fixpunkter. Ifølge en ovenfor bevist sætning findes der kun én projektivitet af l på sig selv med tre fixpunkter og denne er følgelig den identiske afbildning af l. En fra den identiske afbildning forskellig projektivitet af l på sig selv har altså enten ingen, ét eller to fixpunkter. Alle tre tilfælde forekommer, og man benytter gloserne <u>elliptisk</u>, <u>parabolsk</u> eller <u>hyperbolsk</u> projektivitet.

Lad φ være en hyperbolsk projektivitet af den projektive linie l på sig selv med fixpunkterne M og N. Da har dobbeltforholdet

$$\mathrm{df}(M\ N\ X\ \varphi(X))$$

samme værdi for alle punkter X på l forskellige fra M og N. Betegner nemlig X og Y to sådanne punkter har vi

$$\mathrm{df}(M\ N\ X\ Y) = \mathrm{df}(M\ N\ \varphi(X)\ \varphi(Y)),$$

da φ afbilder M,N,X,Y på M,N, $\varphi(X)$, $\varphi(Y)$. Af indskudsreglen for dobbeltforholdet (§1 side 17-18) fås

$$\mathrm{df}(M\ N\ X\ Y) = \mathrm{df}\ (M\ N\ X\ \varphi(X))\ \mathrm{df}(M\ N\ \varphi(X) Y)$$

og

$$\mathrm{df}(M\ N\ \varphi(X)\ \varphi(Y)) = \mathrm{df}(M\ N\ \varphi(X) Y)\ \mathrm{df}(M\ N\ Y\ \varphi(Y))$$

altså

$$\mathrm{df}(M\ N\ \varphi(X)\ Y)\ \mathrm{df}(M\ N\ X\ \varphi(X)) = \mathrm{df}(M\ N\ \varphi(X)\ Y)\ \mathrm{df}(M\ N\ Y\ \varphi(Y))$$

Idet Y er forskellig fra M og N, er df(M N φ(X) Y) forskellig fra 0 og ∞, hvorfor der gælder

$$df(M\ N\ X\ \varphi(X)) = df(M\ N\ Y\ \varphi(Y)),$$

hvilket er påstanden. Afbildningen φ er åbenbart fastlagt ved fixpunkterne M og N og <u>invarianten</u> k = df(M N X φ(X)). Denne kan have alle værdier forskellige fra 0 og ∞; for k = 1 fås den identiske afbildning af linien l.

En projektivitet φ af en projektiv linie l siges at være <u>involutorisk</u>, hvis φ er forskellig fra den identiske afbildning af l og $\varphi \circ \varphi$ lig den identiske afbildning af l. En projektivitet $\varphi : l \to l$ er involutorisk, hvis der blot findes et punktpar (C,C'), C $\neq$ C', som ombyttes ved φ, altså hvor φ(C) = C' og φ(C') = C. Lad nemlig A være et vilkårligt punkt på l forskelligt fra C og C', A' = φ(A) og A'' = φ(A'). Påstanden er da, at A'' = A. Dette ses på følgende måde: Idet C,C',A,A' ved φ afbildes på C',C,A',A'' har vi

$$df(C\ C'\ A\ A') = df(C'\ C\ A'\ A'').$$

Da

$$df(C'\ C\ A'\ A'') = df(C\ C'\ A''\ A'),$$

gælder altså

$$df(C\ C'\ A\ A') = df(C\ C'\ A''\ A'),$$

hvoraf sluttes, at A = A'', idet C, C', A' er tre forskellige punkter på l.

En involutorisk projektivitet φ af en projektiv linie l er enten elliptisk eller hyperbolsk, d.v.s. den har enten ingen eller to fixpunkter. Lad nemlig C være et punkt på l, som ikke er fixpunkt og $C' = \varphi(C)$. Hvis M er fixpunkt ved φ, er det fjerde harmoniske punkt N til C,C',M (altså punktet N på l, hvor df(C C' M N) = -1) også fixpunkt. Idet C,C',M afbildes på C',C,M ved φ, har vi nemlig

$$df(C\ C'\ M\ \varphi(N)) = df(C'\ C\ M\ N) = 1/df(C\ C'\ M\ N) = -1$$

altså

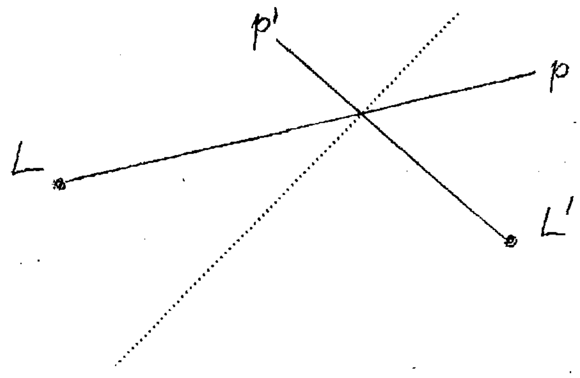
$$df(C\ C'\ M\ \varphi(N)) = df(C\ C'\ M\ N),$$

hvoraf der følger $N = \varphi(N)$. Hermed er samtidig vist, at invarianten for en involutorisk hyperbolsk projektivitet er -1, idet vi jo for punktet C har

$$df(M\ N\ C\ \varphi(C)) = df(M\ N\ C\ C') = df(C\ C'\ M\ N) = -1.$$

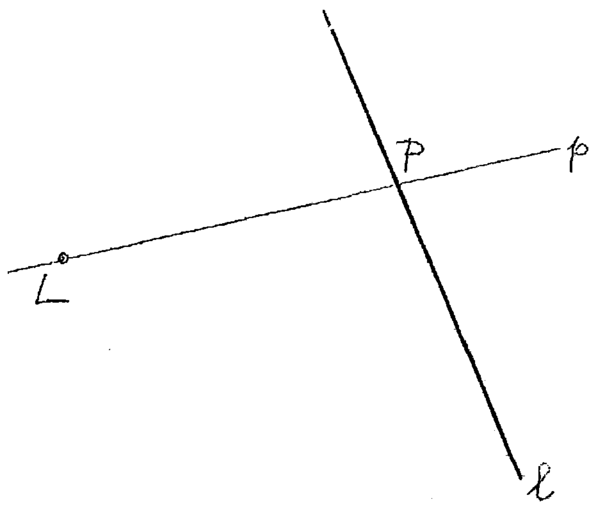
Den involutoriske hyperbolske projektivitet af linien l med fixpunkterne M og N afbilder altså et punkt X, forskelligt fra M og N, på det fjerde harmoniske punkt til M,N,X.

Er der givet to punkter L og L' i den projektive plan defineres på dualistisk tilsvarende måde en projektivitet af liniebundtet med toppunkt L på liniebundtet med toppunkt L' som en bijektiv afbildning ved hvilken dobbeltforhold besvares. For sådanne afbildninger gælder de til de ovenstående duale sætninger. Det duale til en centralprojektion er projektiviteten bestemt ved, at hver linie i bundtet L skærer sin tilsvarende fra bundtet L' på en given linie, som hverken går gennem L eller L'



Punkterne L og L' svarer til 2-dimensionale underrum U^* og U'^* i V^* (og liniebundternes linier er netop de 1-dimensionale underrum i U^* og U'^*). Dualistisk til tidligere gælder, at enhver bijektiv lineær afbildning $\Phi^* : U^* \to U'^*$ inducerer en projektivitet og at enhver projektivitet kan fås på denne måde.

Det skal endelig nævnes, at man på nærliggende måde definerer projektiviteter af et liniebundt på en linie og af en linie på et liniebundt. Den simpleste afbildning af denne art fås ved at "skære" et liniebundt med toppunkt L med en linie l, som ikke går gennem L, og til hver linie i bundtet at lade svare dens skæringspunkt med l. Dualistisk tilsvarende fås en projektivitet af en linie l på et liniebundt ved at "forbinde" linien med et punkt L, der ikke ligger på l.



En linie og et liniebundt svarer til 2-dimensionale underrum U' og U^* af V henholdsvis V^* og man viser let, at projektiviteter af de nævnte arter er induceret af bijektive lineære afbildninger $U^* \rightarrow U'$ henholdsvis $U' \rightarrow U^*$. Heraf følger, at hvis to projektiviteter (hver af en af de fire omtalte arter) kan sammensættes, da er sammensætningen igen en projektivitet.

En bijektiv afbildning φ af den projektive plan på sig selv, ved hvilken hvilkesomhelst tre punkter, der ligger på linie, afbildes i tre punkter, som ligger på linie (og dermed det samme for vilkårligt mange punkter) og hvor fire punkter på linie afbildes i fire punkter med samme dobbeltforhold kaldes en projektiv kollineation af den projektive plan.

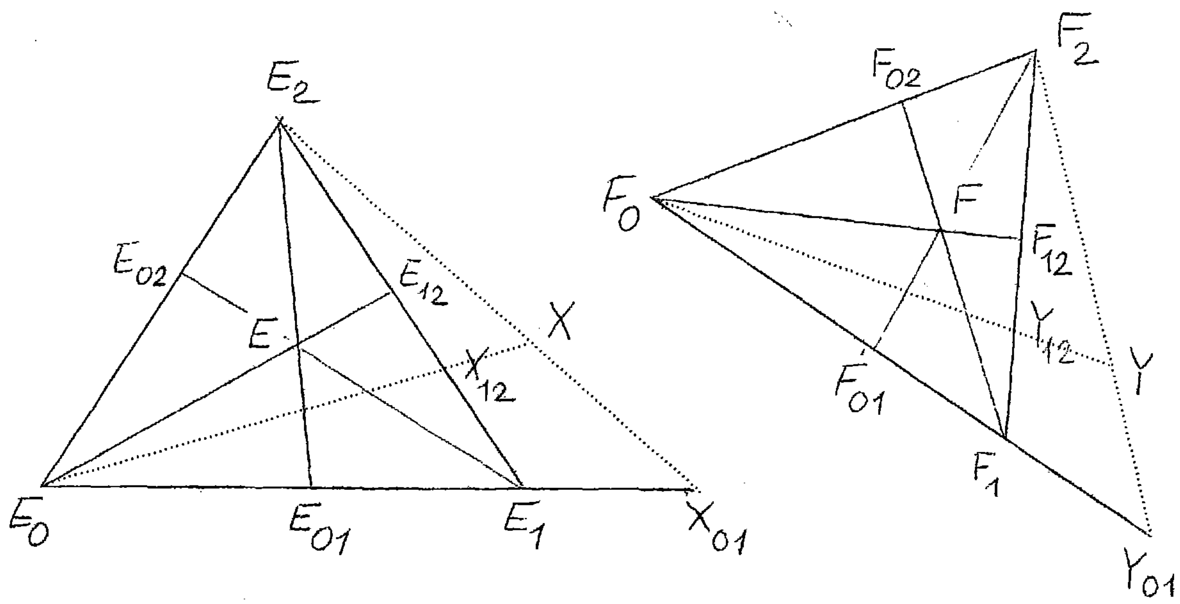
Lad $\Phi : V \rightarrow V$ være en bijektiv lineær afbildning. Er A et 1-dimensionalt underrum i V bliver Φ (A) også et 1-dimensionalt underrum i V. Herved fås en afbildning φ af den projektive plan ind i sig selv, som siges at være induceret af afbildningen Φ. Afbildningen φ er en projektiv kollineation: At den er bijektiv følger umiddelbart af, at Φ er en isomorfi. Tre punkter A,B,C på en linie har repræsentanter $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$, som er lineært afhængige, hvoraf følger, at billedpunkterne har repræsentanter $\Phi(\underline{a})$, $\Phi(\underline{b})$, $\Phi(\underline{c})$, som også er lineært afhængige, altså at billedpunkterne ligger på linie. For fire punkter A,B,C,D med repræsentanter $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$, hvor $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ og $\underline{d} = \rho\underline{a} + \sigma\underline{b}$ gælder, at billedpunkterne har repræsentanterne $\Phi(\underline{a})$, $\Phi(\underline{b})$, $\Phi(\underline{c})$, $\Phi(\underline{d})$, hvor $\Phi(\underline{c}) = \Phi(\underline{a}) + \Phi(\underline{b})$ og $\Phi(\underline{d}) = \rho\Phi(\underline{a}) + \sigma\Phi(\underline{b})$. Heraf følger, at billedpunkterne har samme dobbeltforhold som de givne punkter.

Vi kan nu bevise den plane projektivgeometris fundamentalsætning:

Til to givne sæt E_0, E_1, E_2, E og F_0, F_1, F_2, F, hvert bestående af fire indbyrdes forskellige punkter i den projektive plan, hvoraf der ikke er tre, som ligger på linie, findes præcis én projektiv kollineation φ af den projektive plan, som afbilder E_0 på F_0, E_1 på F_1, E_2 på F_2 og E på F.

Bevis:

Entydigheden: Lad φ være en projektiv kollineation med de ønskede egenskaber. Skæringspunktet E_{01} mellem linierne E_0E_1 og E_2E ligger på begge disse linier og afbildes derfor på et punkt, som ligger både på linien F_0F_1 og på F_2F, altså på disse liniers skæringspunkt F_{01}.



På samme måde ses, at E_{02} afbildes på F_{02} og E_{12} på F_{12}. For et punkt X, der ligger på en fundamentallinie, f.eks. $e_0 = E_1E_2$, gælder, at billedpunktet $Y = \varphi(X)$ ligger på den tilsvarende fundamentallinie $f_0 = F_1F_2$ og endvidere, idet dobbeltforholdet bevares ved φ, at

$$df(E_1E_2E_{12}X) = df(F_1F_2F_{12}Y).$$

Dette viser, at der kun er én mulighed for billedet af et punkt på en fundamentallinie og at afbildningen her er fastlagt ved, at billedpunktet Y har de samme koordinatsæt i systemet $(F_0,F_1,F_2;F)$ som punktet X har i systemet $(E_0,E_1,E_2;E)$.

Et punkt X, som ikke ligger på nogen fundamentallinie i systemet $(E_0,E_1,E_2;E)$ er skæringspunkt for linierne E_0X_{12}, E_1X_{20}, E_2X_{01}, hvor X_{12} ligger på E_1E_2 og opfylder

$$df(E_1E_2E_{12}X_{12}) = x_1/x_2,$$

idet (x_0,x_1,x_2) er et koordinatsæt for X. Punkterne X_{20} og er bestemt på analog måde. Ifølge det lige viste, afbildes X_{12}, X_{20}, X_{01} i punkter Y_{12}, Y_{20}, Y_{01} på de respektive fundamentallinier i systemet $(F_0,F_1,F_2;F)$, hvor

$$df(F_1F_2F_{12}Y_{12}) = x_1 / x_2$$

og tilsvarende for Y_{20} og Y_{01}. Idet X ligger på linierne E_0X_{12}, E_1X_{20}, E_2X_{01} vil billedpunktet Y ligge på linierne F_0X_{12}, F_1Y_{20}, F_2Y_{01}, altså disse linier skæres i punktet Y. Heraf følger, at (x_0,x_1,x_2) er et koordinatsæt for Y i systemet $(F_0,F_1,F_2;F)$.

Hermed er entydigheden bevist, idet vi har vist at φ afbilder et punkt X med koordinatsæt (x_0,x_1,x_2) i koordinatsystemet $(E_0,E_1,E_2;E)$ på det punkt Y, som har samme koordinatsæt i systemet $(F_0,F_1,F_2;F)$.

<u>Eksistensen</u>: Vi vælger repræsentanter $\underline{e}_0,\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{f}_0,\underline{f}_1,\underline{f}_2$ for E_0,E_1,E_2,F_0,F_1,F_2 så $\underline{e} = \underline{e}_0 + \underline{e}_1 + \underline{e}_2$ er en repræsentant for E og $\underline{f} = \underline{f}_0 + \underline{f}_1 + \underline{f}_2$ en repræsentant for F. Idet $(\underline{e}_0,\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ og $(\underline{f}_0,\underline{f}_1,\underline{f}_2)$ er baser for vektorrummet V findes der en lineær afbildning (og iøvrigt kun en) $\Phi : V \to V$ med

$$\Phi(\underline{e}_0) = \underline{f}_0, \quad \Phi(\underline{e}_1) = \underline{f}_1, \quad \Phi(\underline{e}_2) = \underline{f}_2$$

og den er åbenbart bijektiv. Idet vi endvidere har

$$\Phi(\underline{e}) = \Phi(\underline{e}_0 + \underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \Phi(\underline{e}_0) + \Phi(\underline{e}_1) + \Phi(\underline{e}_2)$$

$$= \underline{f}_0 + \underline{f}_1 + \underline{f}_2 = \underline{f},$$

vil den af Φ inducerede projektive kollineation afbilde E_0, E_1, E_2, E på F_0, F_1, F_2, F. Hermed er eksistensen bevist.

Af beviset ses, at enhver projektiv kollineation er induceret af en lineær afbildning. Heraf følger let, at <u>en projektiv kollineation giver en bijektiv afbildning af linier i den projektive plan på sig selv, ved hvilken linier gennem et punkt afbildes på linier gennem et punkt med bevarelse af dobbeltforholdet</u>.

Videre ses, at mængden af projektive kollineationer af den projektive plan danner en gruppe, <u>planens projektive gruppe</u>, idet sammensætning og invers af bijektive lineære afbildninger $V \to V$ modsvares af sammensætning og invers af de inducerede projektive kollineationer.

Lad $E_0, E_1, E_2; E$ være et projektivt koordinatsystem og F_0, F_1, F_2, F fire punkter hvoraf ikke tre ligger på linie. Vælges repræsentanter $\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2$ og $\underline{f}_0, \underline{f}_1, \underline{f}_2$ for E_0, E_1, E_2 og F_0, F_1, F_2 så $\underline{e}_0 + \underline{e}_1 + \underline{e}_2$ er en repræsentant for E og $\underline{f}_0 + \underline{f}_1 + \underline{f}_2$ en repræsentant for F, gælder der, som ovenfor bemærket, at den lineære afbildning $\Phi : V \to V$, som afbilder $\underline{e}_0, \underline{e}_1 . \underline{e}_2$ på $\underline{f}_0, \underline{f}_1, \underline{f}_2$, vil inducere den projektive kollineation, som afbilder E_0, E_1, E_2, E på F_0, F_1, F_2, F. I koordinaterne i V med hensyn til basen $(\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ beskrives Φ ved en matrixligning

$$\underline{\underline{x}}'_{|} = \underline{\underline{S}}\, \underline{\underline{x}}_{|},$$

(altså vektoren $x_0\underline{e}_0 + x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2$ afbildes ved Φ på vektoren $x'_0\, \underline{e}_0 + x'_1\, \underline{e}_1 + x'_2\, \underline{e}_2$) med en regulær matrix $\underline{\underline{S}}$, hvis søjler er koordinaterne for vektorerne $\underline{f}_0, \underline{f}_1, \underline{f}_2$ med hensyn til basen $\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2$. Ifølge definitionen af et projektivt koordinatsystem beskriver en sådan matrixligning den projektive kollineation i koordinatsystemet $(E_0,E_1,E_2;E)$ i den forstand, at hvis $\underline{\underline{x}}_|$ er et koordinatsæt for punktet X, da er $\underline{\underline{x}}'_| = \underline{\underline{S}}\ \underline{\underline{x}}_|$ et koordinatsæt for billedpunktet.

Om vektorerne $\underline{f}_0,\underline{f}_1,\underline{f}_2$ forlangte vi blot, at de skulle være repræsentanter for F_0,F_1,F_2, således at $\underline{f}_0 + \underline{f}_1 + \underline{f}_2$ er en repræsentant for F. Dette krav ses at være ensbetydende med, at søjlerne i matricen $\underline{\underline{S}}$ er koordinatsæt for punkterne F_0,F_1,F_2 og at søjlernes sum (række for række) er et koordinatsæt for F.
Ved indsættelse af koordinatsættene

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

for E_0,E_1,E_2,E ser man på den anden side, at denne betingelse også er nødvendig for at en matrixligning $\underline{\underline{x}}'_| = \underline{\underline{S}}\ \underline{\underline{x}}_|$ beskriver den projektive kollineation i koordinatsystemet $(E_0,E_1,E_2;E)$.Herved er $\underline{\underline{S}}$ bestemt pånær en reel talfaktor forskellig fra 0.Vi har altså bevist følgende.

<u>Sætning</u>. <u>Lad φ være en projektiv kollineation af den projektive plan, $(E_0,E_1,E_2;E)$ et koordinatsystem heri og F_0,F_1,F_2,F billedpunkterne ved φ af E_0,E_1,E_2,E. Med hensyn til koordinatsystemet $(E_0,E_1,E_2;E)$ beskrives φ da ved matrixligningen $\underline{\underline{x}}'_| = \underline{\underline{S}}\ \underline{\underline{x}}_|$ præcis når matricen $\underline{\underline{S}}$ vælges så dens søjler er koordinatsæt for punkterne F_0,F_1,F_2 og søjlernes sum et koordinatsæt for punktet F. Disse matricer udgør en klasse af indbyrdes proportionale matricer</u>.

Mængden af projektive kollineationer af den projektive plan udgør(som tidligere nævnt) en gruppe, planens projektive gruppe. Den ovenstående sætning viser, at denne gruppe er isomorf med kvotientgruppen af den generelle lineære gruppe $GL(3,\mathring{R})$ med hensyn til den normale undergruppe af matricer $\rho\underline{\underline{E}}$, $\rho \in \mathring{R} \setminus \{0\}$.

Sætningen giver ved en let omformulering koordinattransformationsformlerne ved et koordinatskift i den projektive plan. Lad $(E_0,E_1,E_2;E)$ og $(E_0',E_1',E_2';E')$ være projektive koordinatsystemer i den projektive plan og X et punkt, som i systemet $(E_0,E_1,E_2;E)$ har koordinatsættet $\underline{\underline{x}}|$. Det punkt Y, som i systemet $(E_0',E_1',E_2';E')$ har koordinatsættet $\underline{\underline{x}}|$, vil afbildes på X ved den projektive kollineation, som afbilder $(E_0',E_1',E_2';E')$ på $(E_0,E_1,E_2;E)$. Af den ovenstående sætning fås hermed:

<u>Sætning</u>: <u>Lad</u> $(E_0,E_1,E_2:E)$ <u>og</u> $(E_0',E_1',E_2';E')$ <u>være projektive koordinatsystemer i den projektive plan. Et vilkårligt punkt X, som har talsættet</u> $\underline{\underline{x}}|$ <u>som koordinatsæt i systemet</u> $(E_0,E_1,E_2;E)$ <u>vil da have talsættet</u> $\underline{\underline{T}}\ \underline{\underline{x}}|$ <u>som koordinatsæt i systemet</u> $(E_0',E_1',E_2';E')$, <u>når matricen</u> $\underline{\underline{T}}$ <u>vælges, så dens søjler er koordinatsæt for</u> E_0,E_1,E_2 <u>i systemet</u> $(E_0',E_1',E_2';E')$ <u>og søjlernes sum et koordinatsæt for E i systemet</u> $(E_0',E_1',E_2';E')$.

Ved at sammenholde de to sætninger fås transformationsformlen for en projektiv kollineations matrixligning ved et koordinatskift:

<u>Sætning</u>: <u>Lad</u> $(E_0,E_1,E_2;E)$ <u>og</u> (E_0',E_1',E_2',E') <u>være projektive koordinater i den projektive plan. En projektiv kollineation, som i koordinatsystemet</u> $(E_0,E_1,E_2;E)$ <u>beskrives ved matricen</u> $\underline{\underline{S}}$ <u>vil da i systemet</u> $(E_0',E_1',E_2';E')$ <u>beskrives ved matricen</u> $\underline{\underline{T}}\ \underline{\underline{S}}\ \underline{\underline{T}}^{-1}$, <u>hvor matricen</u> $\underline{\underline{T}}$ <u>er valgt, så dens søjler og disses sum er koordinatsæt for</u> E_0,E_1,E_2,E <u>i koordinatsystemet</u> $(E_0',E_1',E_2';E')$.

Man kan naturligvis dualistisk tilsvarende betragte bijektive afbildninger af mængden af linier i den projektive plan på sig selv, som afbilder linier gennem et punkt på linier gennem et punkt under bevarelse af dobbeltforholdet. Dualt til ovenfor kan man endvidere bevise, at enhver sådan afbildning er induceret af en bijektiv lineær afbildning $\underline{\Phi} : V^* \longrightarrow V^*$. Dette giver imidlertid ikke anledning til noget nyt begreb. Vi har nemlig tidligere set, at linietilordningen ved en projektiv kollineation er en afbildning af den omtalte art. Har man omvendt en sådan linieafbildning, afbilder den liniebundt på liniebundt og giver herved anledning til en punktafbildning, som dualt ses at være en projektiv kollineation. Denne korrespondance mellem punkt- og linieafbildninger er enentydig og begrebet projektiv kollineation er derfor selvdualt, hvis vi opfatter en projektiv kollineation som bestående af en punktafbildning og den tilhørende linieafbildning. Algebraisk kan dette udmøntes i, at der består en enentydig korrespondance mellem bijektive lineære afbildninger $\underline{\Phi} : V \longrightarrow V$ og $\underline{\Psi}^* : V^* \longrightarrow V^*$, derved, at der for ethvert par $\underline{v} \in V$, $\underline{v}^* \in V$ skal gælde $\langle \underline{v}^*, \underline{v} \rangle = \langle \underline{\Psi}^*(\underline{v}^*), \underline{\Phi}(\underline{v}) \rangle$. Dette kan også udtrykkes ved, at hvis $\underline{\Phi}$ afbilder basen $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ på basen $\underline{f}_0, \underline{f}_1, \underline{f}_2$ da afbilder $\underline{\Psi}^*$ den duale basis $\underline{e}_0^*, \underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*$ på den duale basis $\underline{f}_0^*, \underline{f}_1^* \underline{f}_2^*$.

Lad $(E_0, E_1, E_2; E)$ være et koordinatsystem i den projektive plan. I de følgende betragtninger vil vi (ligesom ovenfor) skrive et punkts koordinatsæt som en søjlematrix $\underline{\underline{x}}_|$. I sammenhæng hermed er det hensigtsmæssigt at skrive en linies koordinatsæt i det duale liniekoordinatsystem som en rækkematrix $\underline{y}_{-}$. Herved opnås, at talsæt $\underline{\underline{x}}_|$ og $\underline{y}_{-}$, der ikke er nulsættet, er koordinatsæt for et punkt og en linie, hvor punktet ligger på linien, når og kun når

$$\underline{y}_{-}\,\underline{\underline{x}}_| = y_0x_0 + y_1x_1 + y_2x_2 = 0.$$

Vi kan nu bevise:

<u>Sætning</u>: <u>Lad</u> $(E_0, E_1, E_2; E)$ <u>være et koordinatsystem i den projek-</u>

tive plan og φ en projektiv kollineation af denne, som i det givne koordinatsystem beskrives ved matrixligningen

$$\underline{\underline{x}}|' = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{x}}|$$

En linie l' med koordinatsæt $\underline{\underline{y}}'\_$ er da billede ved φ af linien l med koordinatsættet

$$\underline{\underline{y}}\_ = \underline{\underline{y}}'\_\,\underline{\underline{S}}.$$

Bevis: Et punkt med koordinatsæt $\underline{\underline{x}}|$ afbildes i et punkt på l' når og kun når

$$\underline{\underline{y}}'\_\,\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{x}}| = 0,$$

altså når og kun når punktet ligger på linien med koordinatsættet

$$\underline{\underline{y}}'\_\,\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{y}}\_,$$

med det var netop påstanden.

Man ser, at matricen $\underline{\underline{S}}$ (når liniekoordinatsæt skrives som rækker) beskriver linietilordningen ved den inverse afbildning til φ.

Ved en nærmere undersøgelse af en projektiv kollineation spiller dennes fixpunkter og fixlinier en væsentlig rolle. Et punkt kaldes fixpunkt, hvis det afbildes på sig selv og en linie fixlinie, hvis den afbildes på sig selv (ikke nødvendigvis punkt for punkt, hvilket dualistisk svarer til, at vi ikke forlanger, at enhver linie gennem et fixpunkt afbildes på sig selv).

Lad en projektiv kollineation være beskrevet i et koordinatsystem ved en matrixligning.

$$\underline{\underline{x}}|' = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{x}}|.$$

Idet vi erindrer, at to talsæt (forskellige fra nulsættet) er koordinatsæt for samme punkt, når og kun når de er proportionale, ses at et talsæt $\underline{\underline{x}}_| \neq \underline{\underline{0}}_|$ er koordinatsæt for et fixpunkt, når og kun når der findes et reelt tal $\lambda \neq 0$, så

$$\underline{\underline{S}}\, \underline{\underline{x}}_| = \lambda\, \underline{\underline{x}}_| ,$$

altså når og kun når $\underline{\underline{x}}_|$ er en egentlig (søjle-) egenvektor til $\underline{\underline{S}}$, hørende til en egenværdi $\lambda \neq 0$. Fixpunkterne for φ kan altså opdeles i klasser svarende til egenværdien for $\underline{\underline{S}}$. (Egenværdien 0 kan ikke forekomme, da matricen er regulær).

Udseendet af fixpunktkonfigurationen, hørende til en egenværdi λ , er bestemt ved dennes egenværdimultiplicitet $3\text{-rg}(\underline{\underline{S}} - \lambda \underline{\underline{E}})$, som er dimensionen af rummet af egenvektorer. Man ser, at <u>hvis egenværdimultipliciteten er 1, hører der et enkelt fixpunkt til egenværdien</u>; <u>hvis egenværdimultipliciteten er 2, er de tilhørende fixpunkter alle punkter på en bestemt ret linie, en såkaldt fixpunktrække</u>. Findes der en egenværdi med egenværdimultiplicitet 3, er afbildningen den identiske afbildning af den projektive plan.

Vi har ovenfor bevist, at linietilordningen ved den inverse afbildning er givet ved

$$\underline{y}_- = \underline{y}'_-\, \underline{\underline{S}}.$$

Idet afbildningen og dens inverse naturligvis har de samme fixlinier, er et talsæt $\underline{y}_-$ koordinatsæt for en fixlinie, når og kun når $\underline{y}_-\, \underline{\underline{S}}$ er proportionalt med $\underline{y}_-$, altså når og kun når $\underline{y}_-$ er en egentlig rækkeegenvektor til $\underline{\underline{S}}$:

$$\underline{y}_-\, \underline{\underline{S}} = \lambda\, \underline{y}_-$$

(hvilket anderledes sagt betyder, at $\underline{y}_|$ er en søjle-egenvektor til $\underline{\underline{S}}'$). De værdier af λ , som her kan komme på tale er åbenbart sådanne, hvor $\det(\underline{\underline{S}} - \lambda\, \underline{\underline{E}}) = 0$, altså ligeledes egenværdierne for $\underline{\underline{S}}$, idet ligningen jo er ensbetydende med

$$\underline{y}_- (\underline{\underline{S}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \underline{0}_- .$$

Dimensionen af løsningsrummet for denne ligning er åbenbart $3 - \mathrm{Rg}(\underline{\underline{S}} - \lambda \underline{\underline{E}})$ altså egenværdimultipliciteten af λ .

Fixlinierne kan altså ligesom fixpunkterne opdeles i klasser svarende til de forskellige egenværdier. Endvidere er de til en egenværdi hørende konfigurationer af fixpunkter og fixlinier dualistik tilsvarende. Man ser, at til en egenværdi med egenværdimultiplicitet 1 hører en enkelt fixlinie; til en egenværdi med egenværdimultiplicitet 2 hører et bundt af fixlinier.

Fixpunkter hørende til forskellige egenværdier er naturligvis forskellige og det samme gælder for fixlinier hørende til forskellige egenværdier. Mere indholdsrig er følgende bemærkning:

Er P et fixpunkt, hørende til egenværdien λ_1, og l en fixlinie, hørende til en derfra forskellig egenværdi λ_2, da ligger punktet P på linien l.

Har vi nemlig koordinatsæt $\underline{x}_|$ og $\underline{y}_-$ for P og l, gælder der

$$\underline{\underline{S}}\, \underline{x}_| = \lambda_1 \underline{x}_| \quad \text{og} \quad \underline{y}_- \underline{\underline{S}} = \lambda_2 \underline{y}_- ,$$

altså

$$\underline{y}_- \underline{\underline{S}}\, \underline{x}_| = \begin{cases} \lambda_1 \underline{y}_- \underline{x}_| \\ \lambda_2 \underline{y}_- \underline{x}_| \end{cases}$$

og dermed

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, \underline{y}_- \underline{x}_| = 0.$$

Idet $\lambda_1 \neq \lambda_2$, har vi derfor

$$\underline{\underline{y}} - \underline{\underline{x}}| = 0 ,$$

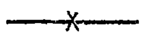
hvilket er påstanden.

I nedenstående skema har vi gennemgået samtlige muligheder for fixpunkt- og fixliniekonfigurationerne for en projektiv kollineation af den projektive plan. Endvidere er det ved simple eksempler vist, at der virkelig findes afbildninger af den pågældende art.

1°: <u>En egenværdi med egen-værdimultiplicitet 1.</u>

Der er ét fixpunkt og én fixlinie. Her er to muligheder:

a) Fixpunktet ligger på fixlinien



Eksempel: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Fixpunkt: E_0. Fixlinie: e_2.

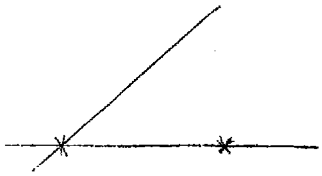
b) Fixpunktet ligger ikke på fixlinien

Eksempel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Fixpunkt: E_0. Fixlinie: e_0.

2°: <u>To forskellige egenværdier, begge med egenværdimultiplicitet 1.</u>

Der er to fixpunkter og to fixlinier. Linien gennem de to punkter er åbenbart fixlinie (lad os sige hørende til λ_1). Fixlinien hørende til λ_2 er en derfra forskellig linie gennem fixpunktet hørende til λ_1.

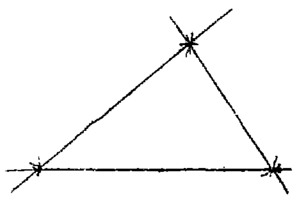


Eksempel: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Fixpunkter E_0 og E_2. Fixlinier: e_1 og e_2.

3°: <u>Tre forskellige egenværdier, alle med egenværdimultiplicitet 1</u>.

Der er tre fixpunkter og tre fixlinier. Fixlinierne, hørende til λ_2 og λ_3, skæres i fixpunktet hørende til λ_1 og fixpunkterne, hørende til λ_2 henh. λ_3, er fra skæringspunktet forskellige punkter på fixlinierne hørende til λ_3 henh. λ_2. Forbindelseslinien af disse to punkter er fixlinien, hørende til λ_1.

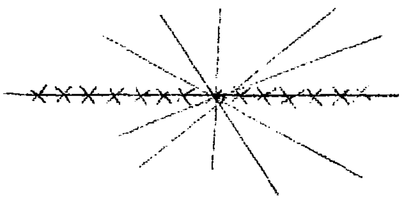


Eksempel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Fixpunkter: E_0, E_1, E_2. Fixlinier: e_0, e_1, e_2.

4°: <u>Een egenværdi med egenværdimultiplicitet 2.</u>

fixpunkterne udgør en fixpunktrække og fixlinierne et liniebundt. Dette bundts toppunkt er åbenbart fixpunkt og hører derfor til fixpunktrækken. Afbildningen kaldes en <u>elation</u>; linien, der "bærer" fixpunktrækken, kaldes elationens <u>akse</u> og fixliniebundtets toppunkt kaldes elationens <u>centrum</u>.



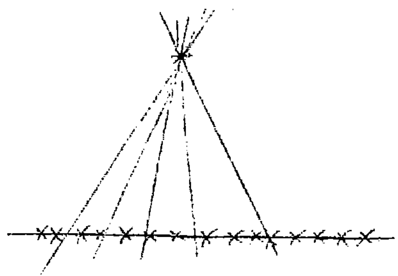
Eksempel: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Fixpunkter: Alle punkter på e_1.

Fixlinier: Alle linier gennem E_0.

5°: <u>En egenværdi med egenværdimultiplicitet 2 og en med egenværdimultiplicitet 1</u>.

Fixpunktmængden består af et enkelt fixpunkt og en derfra disjunkt fixpunktrække. Fixlinierne er derfor fixpunktrækkens bærer og liniebundtet med toppunkt i det enkelte fixpunkt. Afbildningen kaldes en (egentlig) <u>homologi</u>; linien, der bærer fixpunktrækken kaldes <u>homologiaksen</u> og toppunktet for fixliniebundtet kaldes <u>homologicentret</u>.



Eksempel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Fixpunkter: E_0 og alle punkter på e_0.

Fixlinier: e_0 og alle linier gennem E_0.

Blandt homologierne er især de involutoriske, der også kaldes <u>harmoniske homologier</u>, af interesse. Restriktionen af en homologi φ til en linie l gennem homologicentret A er en hyperbolsk projektivitet af l på sig selv, hvis fixpunkter er A og skæringspunktet L mellem l og homologiaksen a. Skal homologien være involutorisk, må denne projektivitet være involutorisk. For hvert punkt X på l, der er forskelligt fra A og L, må altså gælde

$$df(A\ L\ X\ \varphi(X)) = -1.$$

Omvendt, er dette tilfældet for hver linie gennem A, vil være involutorisk, da jo hvert punkt X i planen ligger på en sådan linie. Det fremgår heraf, at til et givet punkt A og en given linie a, som ikke går gennem A, findes der præcis én harmonisk homologi med centrum A og akse a.

6°: <u>En egenværdi med egenværdimultiplicitet 3</u>.

Afbildningen er da den identiske afbildning af den projektive plan.

Lad φ være en projektiv kollineation af den projektive plan $\Pi(V)$ med en linie l som fixlinie. Opfatter vi $\Pi(V)$ som en euklidisk plan π med l som uegentlig linie, afbilder φ egentlige punkter på egentlige punkter og giver derfor en afbildning af den euklidiske plan π på sig selv. Denne afbildning er affin og samtlige affine afbildninger af π på sig selv fås på denne måde.

Lad der nemlig være valgt et koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2; E)$ i $\Pi(V)$, så E_1 og E_2 ligger på l altså så fundamentallinien e_0 er den uegentlige linie i π. Dette modsvarer som omtalt i § 2 et parallelkoordinatsystem $(E_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ i planen π, hvor sammenhængen mellem de to typer af koordinatsæt er givet ved, at et egentligt punkt i π med koordinatsæt (ξ_1, ξ_2) i parallelkoordinatsystemet har $(1, \xi_1, \xi_2)$ som et koordinatsæt i det projektive koordinatsystem. I en matrix, som beskriver φ i det valgte projektive koordinatsystem, er den øverste række et koordinatsæt for den linie, som ved φ afbildes på e_0. Idet e_0 er fixlinie, har den øverste række derfor udseendet $(\lambda, 0, 0)$. ganges matricen med $1/\lambda$ (der gælder $\lambda \neq 0$, da matricen er regulær) fås en matrix $\underline{\underline{S}}$ for φ af formen

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\underline{\underline{A}}$}} \\ a_2 & & \end{pmatrix}$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er en regulær 2×2-matrix. Hvis denne matrix ganges med en søjle, der har et ettal øverst, fås åbenbart en søjle, der igen har et ettal øverst. Heraf følger, at φ på de egentlige punkter af π er beskrevet ved

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & & \\ a_2 & & \underline{\underline{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

og hermed i parallelkoordinaterne ved

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} .$$

Heraf kan vi nu aflæse påstanden ovenfor.

<u>Øvelser til kap. III § 3.</u>

1. Lad l være en linie i den projektive plan. Vis, at en projektivitet af l på sig selv kan sammensættes af to centralprojektioner, hvis og kun hvis den har mindst ét fixpunkt.

2. Vis, at hver ikke involutorisk projektivitet φ af en projektiv linie på sig selv kan sammensættes af to involutoriske projektiviteter. (Vælg et punkt A, som ikke er fixpunkt, og sammensæt φ med den involutoriske projektivitet, der har $\varphi(A)$ som fixpunkt og ombytter A og $\varphi\circ\varphi(A)$.)

3. Lad A,A',B,B' være fire forskellige punkter på en projektiv linie. Vis, at der findes præcis én involutorisk projektivitet φ af denne linie, ved hvilken A og A' samt B og B' ombyttes. Vis, at φ er hyperbolsk, hvis df(A A' B B') $>$ 0 og elliptisk, hvis df(A A' B B') $<$ 0.

4. I den projektive plan er givet tre punkter E_0,E_1,E_2, som ikke ligger på samme linie, og en linie E^*, som ikke går gennem noget af disse punkter, endvidere tre punkter F_0,F_1,F_2, som ikke ligger på ret linie, og en linie F^*, som ikke går gennem noget af disse punkter.

Vis, at der findes en og kun én projektiv kollineation φ, ved hvilken E_0,E_1,E_2 og E^* afbildes på henholdsvis F_0,F_1,F_2 og F^*.

Med hensyn til det projektive koordinatsystem med fundamentalpunkterne E_0,E_1,E_2 og enhedslinien E^* har punkterne F_0,F_1,F_2 henholdsvis koordinatsættene (f_{00},f_{10},f_{20}), (f_{01},f_{11},f_{21}), (f_{02},f_{12},f_{22}), og F^* har liniekoordinatsættet (v_0, v_1, v_2). Find en matrixligning for φ.

5. I den projektive plan Π^2 er givet et projektivt punktkoordinatsystem $(E_0,E_1,E_2;E)$. Med φ betegnes den projektive kollineation af Π^2 på sig selv, som med hensyn til det givne koordinatsystem bestemmes ved matrixligningen

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Vis, at φ er involutorisk.

Vis, at φ er en homologi og find et punktkoordinatsæt for dens homologicentrum og et liniekoordinatsæt for dens homologiakse.

Bestem en matrixligning for φ i koordinatsystemet $(F_0,F_1,F_2;F)$, hvor $F_0 = \varphi(E_0)$, $F_1 = \varphi(E_1)$, $F_2 = \varphi(E_2)$ og $F = \varphi(E)$.

6. Vis, at hvis to transformationer af en mængde er ombyttelige, vil hver af dem afbilde den andens fixelementmængde på sig selv.

Benyt dette til at opstille nødvendige og tilstrækkelige betingelser, som homologicentrerne og homologiakserne for to homologier af den projektive plan må opfylde, for at homologierne er ombyttelige.

7. Vis, at sammensætningen af to harmoniske homologier med samme homologiakse er en elation, og at enhver elation kan fås på denne måde.

8. Om en projektivitet ψ af en projektiv linie l forudsættes, at $\psi \circ \psi \circ \psi$ er den identiske afbildning af l.

Vis, at hvis $A_0 \in$ l ikke er fixpunkt ved ψ, da er punkterne A_0, $A_1 = \psi(A_0)$ og $A = \psi(A_1)$ indbyrdes forskellige, og find for et sådant punkt A_0 en matrixligning for ψ i koordinatsystemet $(A_0,A_1;A)$.

Vis, at hvis ψ er forskellig fra den identiske afbildning af 1, da er ψ fixpunktfri.

Om en fra den identiske afbildning forskellig projektiv kollineation φ af den projektive plan forudsættes, at $\varphi\circ\varphi\circ\varphi$ er den identiske afbildning. Vis, at φ har netop én fixlinie og netop ét fixpunkt.

9. I den projektive plan Π^2 er valgt et punktkoordinatsystem $(E_0,E_1,E_2;E)$, En projektiv kollineation $\varphi: \Pi^2 \to \Pi^2$ er bestemt ved, at den afbilder E på sig selv og hvert fundamentalpunkt på dettes projektion fra E på fundamentaltrekantens modstående side.

Opstil en matrixligning for φ. Bestem samtlige fixpunkter og fixlinier ved φ .

Det antages, at Π^2 er fremkommet af en euklidisk plan ved tilføjelse af de uegentlige punkter. Det forudsættes, at fundamentalpunkterne er egentlige, og at E er medianernes skæringspunkt i fundamentaltrekanten. Beskriv φ i dette tilfælde.

10. Beskriv de afbildninger af en euklidisk plan på sig selv, der er reskriktioner af homologier eller elationer, som afbilder den uegentlige linie på sig selv.

§ 4. Keglesnit i den projektive plan.

En bijektiv afbildning φ af mængden af punkter på mængden af linier i den projektive plan, ved hvilken punkter på en linie afbildes på linier gennem et punkt under bevarelse af dobbeltforhold, kaldes en projektiv korrelation. En sådan afbildning er i en vis forstand analog til en projektiv kollineation - vi har blot erstattet billedobjekterne med dualistisk tilsvarende. De i den foregående paragraf anvendte argumenter kan derfor i modificeret form anvendes på projektive korrelationer til bevis for de sætninger, der svarer til de om projektive kollineationer beviste. På denne måde fås:

Til fire punkter E_0, E_1, E_2, E, hvoraf ikke tre ligger på linie og fire linier f_0, f_1, f_2, f, hvoraf ikke tre går gennem samme punkt, findes præcis én projektiv korrelation φ, som afbilder E_0, E_1, E_2, E på f_0, f_1, f_2, f.

Endvidere:

Enhver projektiv korrelation φ er induceret af en bijektiv lineær afbildning $\Phi : V \to V^*$. Korrelationen φ fastlægger Φ pånær en reel talfaktor forskellig fra 0.

Lad den projektive korrelation φ afbilde punktkoordinatsystemet $(E_0, E_1, E_2; E)$ på linie-koordinatsystemet $(f_0, f_1, f_2; f)$. Hvis $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ betegner repræsentanter for E_0, E_1, E_2, hvis sum er en repræsentant for E, og $\underline{f}_0^*$, $\underline{f}_1^*$, $\underline{f}_2^*$ repræsentanter for f_0, f_1, f_2, hvis sum er en repræsentant for f, vil den bijektive lineære afbildning $\Phi : V \to V^*$, som afbilder $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ på $\underline{f}_0^*$, $\underline{f}_1^*$, $\underline{f}_2^*$, åbenbart inducere φ.

Hvis $\Phi : V \to V^*$ er en lineær afbildning, bestemmes der en bilinearform B på V ved

$$B(\underline{u},\underline{v}) = \langle \Phi(\underline{u}), \underline{v} \rangle.$$

Er der omvendt givet en bilinearform B på V, gælder det for hver vektor $\underline{u} \in V$, at afbildningen

$$\underline{v} \to B(\underline{u},\underline{v})$$

er en linearform på V, altså et element i V^*. Betegner vi dette med $\Phi(\underline{u})$, har vi hermed en afbildning $\Phi : V \to V^*$, som ses at være lineær.

Hermed er bevist, at der består en bijektiv korrespondance mellem lineære afbildninger $\Phi : V \to V^*$ og bilinearformer B på V. Hvis Φ svarer til B, svarer $\lambda\Phi$ åbenbart til λB for hvert reelt tal λ. Den lineære afbildning Φ er bijektiv, når og kun når $\underline{u} \neq \underline{0} \Rightarrow \Phi(\underline{u}) \neq \underline{0}^*$, hvilket for den tilsvarende bilinearform B betyder, at der til hver vektor $\underline{u} \in V$ ($u \neq 0$) findes en vektor $\underline{v} \in V$, så $B(\underline{u},\underline{v}) \neq 0$, altså at B er en regulær bilinearform.

En projektiv korrelation φ af den projektive plan kan altså opfattes som induceret af en regulær bilinearform B på V, som er fastlagt ved φ pånær en reel talfaktor forskellig fra 0. Bilinearformen B ses at inducere φ derved, at et punkt med repræsentant $\underline{u} \in V$ som billedlinie har linien, hvis punkters repræsentanter $\underline{v}$ opfylder $B(\underline{u},\underline{v}) = 0$.

Lad den regulære bilinearform B inducere den projektive korrelation φ. Den <u>transponerede</u> bilinearform B', som defineres ved

$$B'(\underline{u},\underline{v}) = B(\underline{u},\underline{v}), \qquad \underline{u},\underline{v} \in V$$

er da også en regulær bilinearform, og vil følgelig inducere en projektiv korrelation ψ. Denne er åbenbart også induceret af den bijektive lineære afbildning $\Psi : V \to V^*$, som bestemmes ved

$$\langle \Psi(\underline{u}),\underline{v} \rangle = B'(\underline{u},\underline{v}) = B(\underline{v}, \underline{u}).$$

For korrelationerne φ og ψ gælder:

Hvis P, Q er punkter i den projektive plan, da ligger Q på φ (P) når og kun når P ligger på ψ (Q).

Betegner nemlig $\underline{p}$ og $\underline{q}$ repræsentanter for P og Q, har vi

$$Q \in \varphi(P) \iff B(\underline{p},\underline{q}) = 0,$$

$$P \in \psi(Q) \iff B'(\underline{q},\underline{p}) = B(\underline{p},\underline{q}) = 0,$$

hvoraf påstanden aflæses.

Idet afbildningen ψ er bijektiv, følger heraf, at for hver linie l er billedlinierne $\varphi(P)$ af punkterne P på l præcis liniebundtet med toppunkt $\psi^{-1}(l)$, og omvendt, at for hvert punkt P er billedpunkterne $\psi^{-1}(l)$ af linierne gennem P præcis punkterne på linien $\varphi(P)$. Mellem afbildningerne φ og ψ^{-1} består altså en relation, som er analog til relationen mellem en projektiv kollineation og dens tilhørende linieafbildning. Afbildningen ψ^{-1} er induceret af den bijektive lineære afbildning $\underline{\Psi}^{-1}: V^* \to V$ og afbilder derfor et liniebundt på mængden af punkter på en linie under bevarelse af dobbeltforhold. Opfatter vi en projektiv korrelation som et sådant sammenhørende par (φ, ψ^{-1}) af afbildninger, er begrebet selvdualt.

<u>Den inverse afbildning til en projektiv korrelation (φ, ψ^{-1}) er igen en projektiv korrelation, nemlig (ψ, φ^{-1}).</u>

Af definitionen på projektiv korrelation følger videre, at <u>sammensætningen af to projektive korrelationer er en projektiv kollineation</u> og <u>sammensætningen i den ene eller anden rækkefølge af en projektiv korrelation og en projektiv kollineation er en projektiv korrelation.</u>

En projektiv korrelation er åbenbart involutorisk (d.v.s. lig sin inverse), hvis og kun hvis der for en til φ hørende bilinearform B gælder $B' = \lambda B$ med et reelt $\lambda \neq 0$. Da gælder også $B = B'' = \lambda B'$, altså $B' = \lambda^2 B'$, hvoraf $\lambda = 1$ eller $\lambda = -1$. Nødvendig og tilstrækkelig er altså, at B er symmetrisk eller antisymmetrisk. I et vektorrum af ulige dimension findes der imidlertid ikke nogen regulære antisymmetriske bilinearformer, da hver antisymmetrisk determinant af ulige orden er 0. Vi har altså:

En projektiv korrelation af den projektive plan er involutorisk, når og kun når de tilhørende bilinearformer er symmetriske.

En projektiv korrelation φ af den projektive plan, hvor de til φ hørende regulære bilinearformer er symmetriske, kaldes en polaritet. En polaritet er involutorisk, og af det ovenstående følger endda, at enhver involutorisk projektiv korrelation af den projektive plan er en polaritet. Ved polariteter bruges en speciel terminologi, idet billedlinien for et punkt kaldes punktets polar, og billedpunktet for en linie kaldes liniens pol. Den involutoriske egenskab kan da udtrykkes ved, at ethvert punkt er sin polars pol og enhver linie er sin pols polar.

To punkter P og Q kaldes konjugerede ved polariteten φ , hvis P ligger på polaren q for Q. Punktet Q ligger da også på polaren p for P, idet polariteten afbilder linierne gennem P på punkterne på p. Relationen "konjugeret" er altså symmetrisk (men hverken refleksiv eller transitiv). Betegner B en til φ hørende regulær symmetrisk bilinearform ses, at punkter P og Q med repræsentanter $\underline{p}$ og $\underline{q}$ er konjugerede ved φ , præcis når vektorerne $\underline{p}$ og $\underline{q}$ er konjugerede ved B, d.v.s. $B(\underline{p},\underline{q}) = 0$.

Dualistisk tilsvarende siges to linier p og q at være konjugerede. ved polariteten φ ,hvis p går gennem polen Q for q. Linien q går da også gennem polen P for p, altså relationen er symmetrisk (men hverken refleksiv er transitiv).

Et punkt P er selvkonjugeret ved polariteten φ , hvis det ligger på sin polar p. Dualistisk tilsvarende er en linie p selvkonjugeret, hvis den går gennem sin pol P. Et punkt P er åbenbart selvkonjugeret når og kun dets polar p er selvkonjugeret, sagt anderledes, de selvkonjugerede linier er polarerne for de selvkonjugerede punkter og de selvkonjugerede punkter polerne for de selvkonjugerede linier.

Betegner B en til φ hørende regulær symmetrisk bilinearform og P et punkt med repræsentant $\underline{p}$, ses, at P er selvkonjugeret når og kun når $B(\underline{p},\underline{p}) = 0$ (altså når og kun når $\underline{p}$ er en isotrop vektor for den til B hørende kvadratiske form). Polariteten φ har altså selvkonjugerede punkter når og kun de tilhørende regulære kvadratiske former er indefinite. En sådan polaritet siges at være hyperbolsk. En polaritet, hvis tilhørende kvadratiske former er definite, siges at være elliptisk.

Vi betragter nu en hyperbolsk polaritet bestemt ved den symmetriske bilinearform B. Idet denne kan multipliceres med en fra 0 forskellig konstant, uden at polariteten ændres, kan vi antage, at den tilhørende kvadratiske form har positivitetsindex 2 og negativitetsindex 1. Dette betyder, at der findes mindst ét todimensionalt underrum U_2 af V så den kvadratiske forms restriktion til U_2 er positiv definit, og mindst ét endimensionalt underrum U_1, så formens restriktion til U_1 er negativ definit.

Idet der for hver vektor $\underline{v} \in V$ og hvert reelt tal λ gælder

$$B(\lambda \underline{v}, \lambda \underline{v}) = \lambda^2 B(\underline{v},\underline{v}),$$

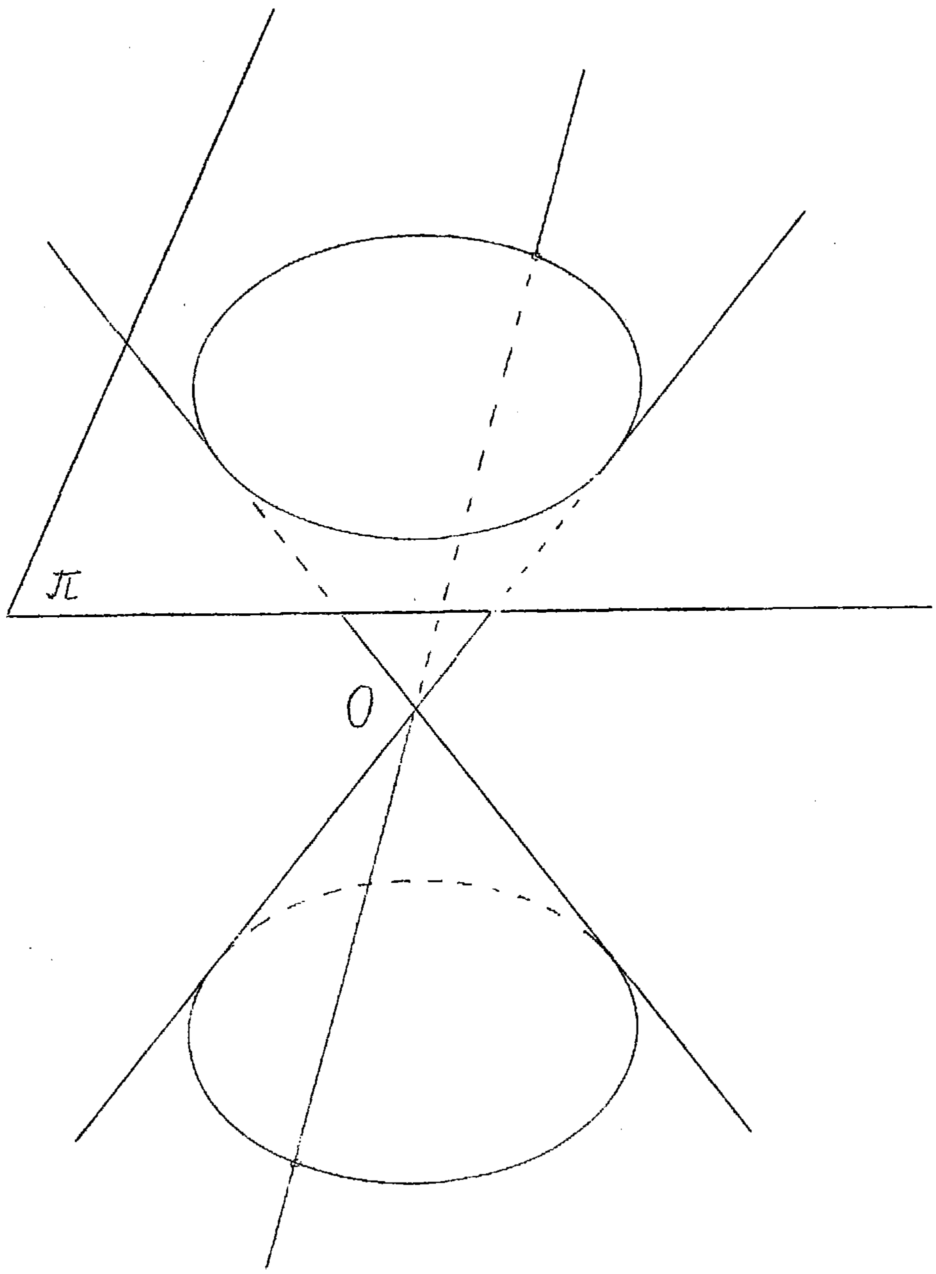
er den kvadratiske forms restriktion til et endimensionalt underrum af V enten positiv definit, konstant lig 0 eller negativ definit. Dette berettiger til at sige, at den er positiv, 0 eller negativ i et punkt af den projektive plan.

Mængden K af punkter i den projektive plan, for hvis repræsentanter $\underline{x}$ der gælder $B(\underline{x},\underline{x}) = 0$, altså mængden af selvkonjugerede punkter, kaldes det ved polariteten bestemte keglesnit. Navnet motiveres ved følgende betragtning:

Idet B er symmetrisk, regulær og indefinit, er mængden af vektorer

$$\{ \underline{x} \in V \mid B(\underline{x},\underline{x}) = 0 \}$$

stedvektorerne for punkterne på en ikke-udartet keglesnitkegle i rummet med toppunkt O. Frembringerene i denne kegle er præcis



punkterne på K. Denne kegle skærer en plan π, som ikke går gennem O, i et sædvanligt keglesnit i π. Omvendt er et sådant keglesnit ledekurve for en kegle af den anførte art med toppunkt O. Opfattes den projektive plan $\Pi(V)$ som en euklidisk plan π med uegentlige punkter, er de euklidiske keglesnit i π (eventuelt suppleret med uegentlige punkter) altså præcis de projektive keglesnit i $\Pi(V)$.

Et punkt, der ikke ligger på keglesnittet kaldes et <u>ydre</u> eller <u>indre punkt</u> for dette, efter som B er positiv eller negativ i punktet. Eksistensen af positivitetsrummet U_2 viser, at der findes mindst én linie i den projektive plan, der kun består af ydre punkter. Da en sådan linie skæres af enhver anden, følger, at der på hver linie ligger ydre punkter. At der findes indre punkter, følger af eksistensen af negativitetsrum.

Lad P og Q være to forskellige punkter i den projektive plan, og lad $\underline{p}$ og $\underline{q}$ være repræsentanter for dem. Punkterne på linien PQ har da som repræsentanter $\lambda\underline{p} + \mu\underline{q}$, hvor $\lambda, \mu \in \grave{R}$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Som funktion af (λ, μ) er

$$B(\lambda\underline{p} + \mu\underline{q}, \lambda\underline{p} + \mu\underline{q}) = \lambda^2 B(\underline{p},\underline{p}) + 2\lambda\mu\, B(\underline{p},\underline{q}) + \mu^2 B(\underline{q},\underline{q})$$

en kvadratisk form i $(\grave{R}^2,+,\grave{R})$. Da den antager positive værdier, foreligger der kun følgende tre muligheder:

$$B(\underline{p},\underline{p})\, B(\underline{q},\underline{q}) - B(\underline{p},\underline{q})^2 \begin{cases} > 0 & \text{positiv definit} \\ = 0 & \text{singulær, positiv semidefinit} \\ < 0 & \text{indefinit.} \end{cases}$$

I det første tilfælde er alle punkter på linien ydre, og denne kaldes en <u>ydre linie</u> for keglesnittet. I det andet tilfælde findes der på linien netop ét punkt, i hvilket formen er 0, d.v.s. netop ét selvkonjugeret punkt. Linien har altså ét punkt fælles med keglesnittet, og dens øvrige punkter er ydre. Den kaldes i dette tilfælde en <u>tangent</u> til keglesnittet, og fællespunktet med dette kaldes dens <u>røringspunkt</u>. I det tredie tilfælde, som foreligger, hvis og kun hvis linien indeholder indre punkter, findes der på linien netop to punkter, i hvilke formen er 0, d.v.s. netop to selvkonjugerede punkter. Linien har altså to punkter fælles med keglesnittet og kaldes en <u>sekant</u> til dette. (De tre tilfælde svarer til, at den af $\underline{p}$ og $\underline{q}$ udspændte plan i V henholdsvis har kun toppunktet O fælles med keglen $B(\underline{x},\underline{x}) = 0$, er tangentplan til denne kegle, skærer keglen i to frembringere.)

Er P og Q ikke sammenfaldende, konjugerede punkter på en sekant, gælder for repræsentanter $\underline{p}$ og $\underline{q}$ for dem

$$B(\underline{p},\underline{q}) = 0, \qquad B(\underline{p},\underline{p})\, B(\underline{q},\underline{q}) < 0.$$

Et af de to punkter er altså indre og det andet ydre.

Vi kan nu bevise:

<u>Polaren til et indre punkt for keglesnittet er en ydre linie</u>.

<u>Polaren til et punkt på keglesnittet er tangent med punktet som røringspunkt</u>.

<u>Polaren til et ydre punkt for keglesnittet er en sekant</u>.

Den første påstand følger af, at hver linie, der forbinder et indre punkt P med et af dettes konjugerede punkter er en sekant. Ifølge ovenstående bemærkning er altså alle til P konjugerede punkter ydre.

At den tredie påstand er rigtig ses således:
Lad der være givet et ydre punkt P. For et vilkårligt indre punkt Q vil linien PQ være en sekant. På denne findes et til P konjugeret punkt R. Ifølge ovenstående bemærkning er R et indre punkt, og da det ligger på polaren til P, er denne en sekant.

Den anden påstand kan bevises således:
Lad P være et punkt på keglesnittet og Q et fra dette forskelligt

punkt på polaren til P. For repræsentanter $\underline{p}$ og $\underline{q}$ for P og Q gælder da $B(\underline{p},\underline{p}) = 0$ og $B(\underline{p},\underline{q}) = 0$, altså

$$B(\underline{p},\underline{p})\,B(\underline{q},\underline{q}) - B(\underline{p},\underline{q})^2 = 0,$$

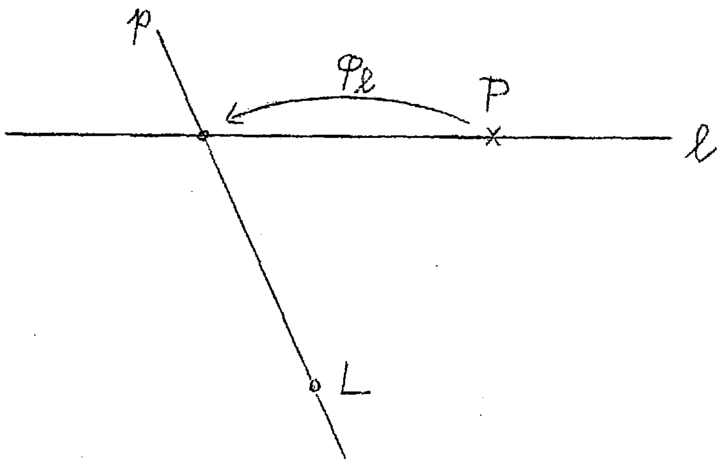
hvilket viser, at linien PQ er tangent med P som røringspunkt.

Ved indirekte slutninger fås af ovenstående resultater:
<u>Polen til en ydre linie for keglesnittet er et indre punkt</u>.
<u>Polen til en tangent til keglesnittet er røringspunktet</u>.
<u>Polen til en sekant til keglesnittet er et ydre punkt</u>.

Mængden K^* af selvkonjugerede linier ved polariteten φ, altså mængden af tangenter til keglesnittet K, kaldes det til φ hørende <u>liniekeglesnit</u>. Polariteten afbilder K på K^* og K^* på K, hvorfor konfigurationen bestående af K og K^* er selvdual. Vi har ovenfor bevist, at K^* er mængden af tangenter til K, altså mængden af linier, som har netop ét punkt fælles med K. Ved anvendelse af polariteten fås, at der dualt gælder, at K er mængden af røringspunkter for linierne i K^*, altså mængden af punkter, igennem hvilke der går netop én linie fra K^*.

Lad P være et ikke selvkonjugeret punkt med polar p. Polen for en linie gennem P ligger da på p, hvoraf følger, at en selvkonjugeret linie gennem P vil skære p i et selvkonjugeret punkt, nemlig liniens pol. Omvendt gælder, at en linie l gennem P, som skærer p i et selvkonjugeret punkt Q, er selvkonjugeret. Polaren for Q er nemlig selvkonjugeret, går gennem P og Q og er derfor sammenfaldende med l, som følgelig er selvkonjugeret. Polaren p for et ydre punkt P er en sekant og har derfor to punkter M, N fælles med keglesnittet. Gennem P går der altså to tangenter, nemlig forbindelseslinierne PM og PN. Gennem et indre punkt går, som tidligere vist, ingen tangenter. (Man bemærker, at denne karakterisering af indre og ydre punkter er dual til den ovenfor givne definition af ydre linier og sekanter).

Lad l være en linie, som ikke er selvkonjugeret. For hvert punkt P på l, er polaren p forskellig fra l, hvorfor der findes netop ét med P konjugeret punkt på l, nemlig skæringspunktet $\varphi_l(P)$ mellem l og polaren p. Den herved bestemte afbildning $\varphi_l : l \to l$ er øjensynlig sin egen inverse og derfor bijektiv. Afbildningen φ_l er en projektivitet, idet den er sammensætningen af polaritetens restriktion til l, som er en projektivitet af l på liniebund-



tet med toppunkt i polen L, og skæringen af dette liniebundt med l, som ligeledes er en projektivitet. Et punkt ses at være fixpunkt ved φ_l, når og kun når det er selvkonjugeret. Idet l ikke består af lutter selvkonjugerede punkter, er φ_l altså ikke den identiske afbildning af l. Hermed er bevist:

<u>På enhver ikke selvkonjugeret linie l bestemmes en involutorisk projektivitet φ_l ved, at hvert punkt på l afbildes på det dermed konjugerede punkt på l.</u>

Dualistisk tilsvarende kan bevises:

<u>I ethvert liniebundt, hvis toppunkt L ikke er selvkonjugeret, bestemmes en involutorisk projektivitet φ_L ved, at hver linie gennem L afbildes på den dermed konjugerede linie gennem L.</u>

Hvis l betegner polaren for L, ser man, at for hvert punkt P på l afbilder φ_L forbindelseslinien LP på forbindelseslinien L $\varphi_l(P)$.

Fra § 3 vides, at en involutorisk projektivitet er enten elliptisk eller hyperbolsk d.v.s. har enten ingen eller to fixpunkter. Ved at sammenholde med det ovenfor beviste ser man, at projektiviteten φ_l er elliptisk, hvis l er en ydre linie, og hyperbolsk, hvis l er en sekant. Dualistisk tilsvarende gælder for et ikke selvkonjugereret punkt L, at projektiviteten φ_L er elliptisk, hvis L er et indre punkt, og hyperbolsk, hvis L er et ydre punkt.

<u>Billedet af et sammenhørende par (K,K^*) af punkt- og liniekeglesnit ved en projektiv kollineation er et sammenhørende par af punkt- og liniekeglesnit.</u>

Bevis: Lad den projektive kollineation være induceret af den bijektive lineære afbildning $\Phi : V \to V$ og lad det givne keglesnit høre til den hyperbolske polaritet, som induceres af den regulære symmetriske indefinite bilinearform B. Ved

$$B_{\Phi}(\underline{u},\underline{v}) = B(\Phi^{-1}(\underline{u}), \Phi^{-1}(\underline{v}))$$

defineres da en regulær symmetrisk indefinit bilinearform B_{Φ} på V, og for denne gælder

$$B(\underline{u},\underline{v}) = B_{\Phi}(\Phi(\underline{u}), \Phi(\underline{v})).$$

Heraf følger, at den (af Φ inducerede) projektive kollineation afbilder to punkter, som er konjugerede ved den af B inducerede hyperbolske polaritet, på to punkter, som er konjugerede ved den af B_{Φ} inducerede hyperbolske polaritet. Dette giver umiddelbart påstanden.

<u>Ved en projektiv korrelation af den projektive plan afbildes</u>

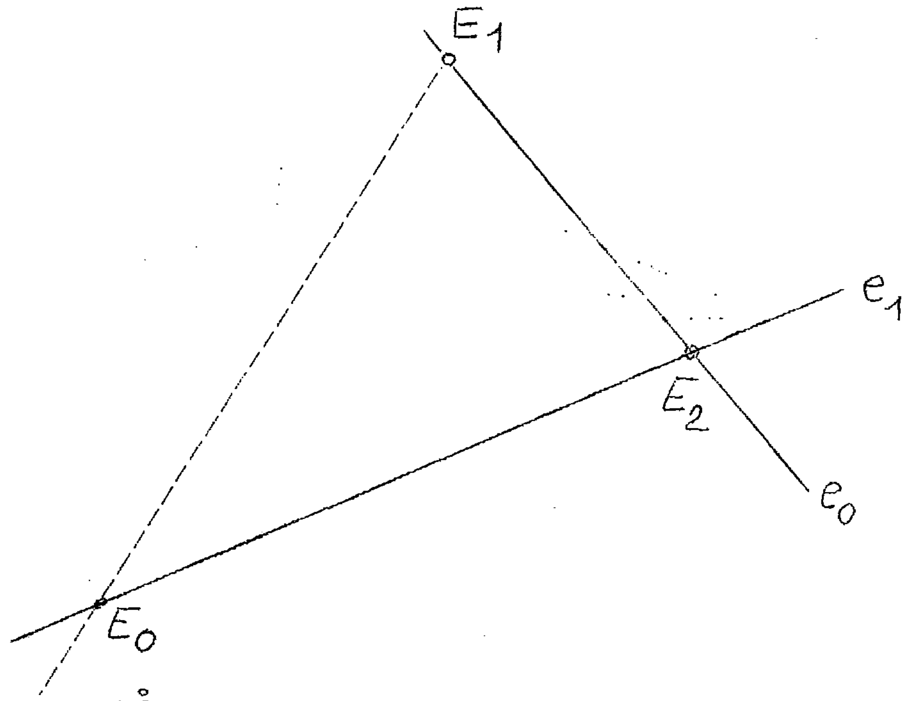
<u>et sammenhørende par (K, K^*) af punkt- og liniekeglesnit på et sammenhørende par af linie- og punktkeglesnit.</u>

Bevis: Lad ψ betegne den givne korrelation og lad det givne keglesnit høre til den hyperbolske polaritet φ . Afbildningen $\psi \circ \varphi^{-1}$ er da en projektiv kollineation, idet den er sammensætning af to projektive korrelationer. Idet

$$\psi = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$$

får vi nu umiddelbart påstanden ved hjælp af den forrige sætning, idet φ afbilder K på K^* og K^* på K.

Lad E_0 være et ikke selvkonjugeret punkt og e_1 en ikke selvkonjugeret linie gennem E_0. Idet E_1 betegner polen for e_1, E_2 skæringspunktet mellem e_1 og polaren e_0 for E_0 og e_2 polaren for E_2, går e_0 gennem E_1, altså $e_0 = E_1E_2$. Endvidere er $e_2 = E_0E_1$, idet



polen E_2 ligger på polarerne e_0 og e_1. Punkterne E_0, E_1, E_2 med forbindelseslinier e_0, e_1, e_2 danner en såkaldt <u>selvpolær trekant</u>, hvormed menes, at E_0, E_1 og E_2 er forskellige og ikke ligger på linie og at hver vinkelspids i trekanten E_0, E_1, E_2 har den modstående side som polar.

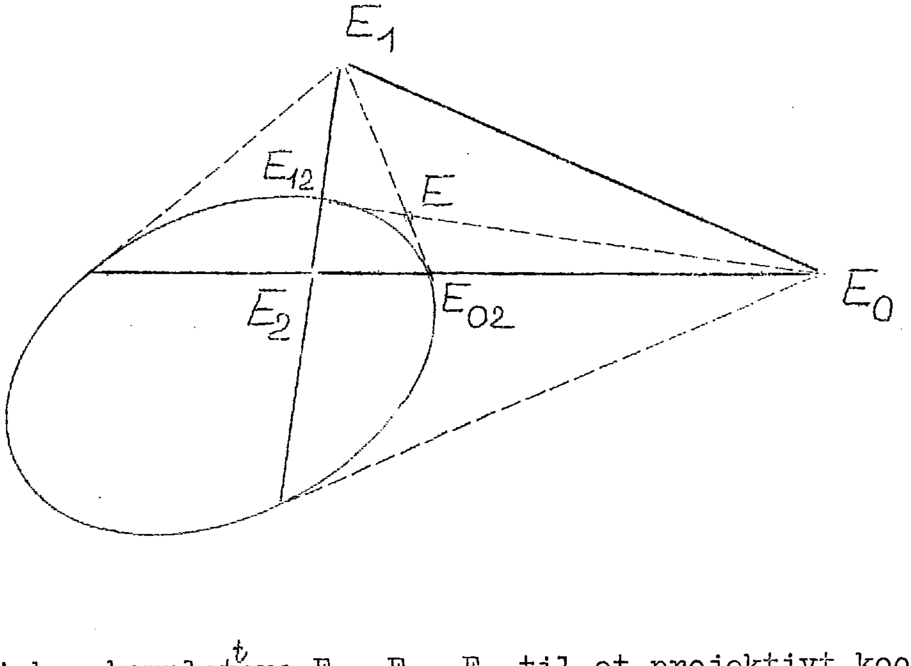
Lad E_0, E_1, E_2, e_0, e_1, e_2 være en selvpolær trekant og $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ repræsentanter for E_0, E_1, E_2. Der gælder da

$$B(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = 0 \quad \text{for } i \neq j,$$

idet E_i og E_j er konjugerede for $i \neq j$. Vektorerne $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ danner en basis for V, idet E_0, E_1, E_2 ikke ligger på linie og for vektorer $\underline{x} = x_0\underline{e}_0 + x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2$, $\underline{y} = y_0\underline{e}_0 + y_1\underline{e}_1 + y_2\underline{e}_2$ gælder

$$B(\underline{x},\underline{y}) = \lambda_0 x_0 y_0 + \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2,$$

hvor $\lambda_i = B(\underline{e}_i,\underline{e}_i)$. Blandt tallene λ_0, λ_1, λ_2 er to positive og et negativt, idet B er valgt med positivitetsindeks 2 og negativitetsindex 1. Lad os antage, at betegnelserne er valgt, så $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 < 0$, altså så E_0 og E_1 er ydre punkter og E_2 et indre punkt.



Vi kan komplettere E_0, E_1, E_2 til et projektivt koordinatsystem ved at vælge skæringspunktet for en af tangenterne gennem E_0 og en af tangenterne gennem E_1 som enhedspunkt E. Punkterne E_{12} og E_{02} i dette koordinatsystem ligger da på keglesnittet. Lad nu $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ betegne repræsentanter for E_0, E_1, E_2 så $\underline{e} = \underline{e}_0 + \underline{e}_1 + \underline{e}_2$

er en repræsentant for E. Ifølge det ovenfor beviste findes da reelle tal λ_0, λ_1, λ_2, så to punkter med koordinatsæt (x_0, x_1, x_2) og (y_0, y_1, y_2) er konjugerede når og kun når

$$\lambda_0 x_0 y_0 + \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 = 0.$$

Idet punkterne E_{02} og E_{12} med koordinatsæt (1,0,1) og (0,1,1) er selvkonjugerede, gælder der $\lambda_0 + \lambda_2 = 0$ og $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. I det valgte koordinatsystem beskrives polariteten altså ved ligningen

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0.$$

For fastholdt (x_0, x_1, x_2) er dette ligningen for polaren til punktet med koordinatsæt (x_0, x_1, x_2), hvis polar følgelig har liniekoordinat-sættet $(x_0, x_1, - x_2)$. Keglesnittet fremstilles ved ligningen

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0,$$

idet de egentlige løsninger hertil præcis er koordinatsættene for punkterne på keglesnittet.

Der findes kun én type af keglesnit i den projektive plan, idet der gælder:

Lad K og K' være keglesnit i den projektive plan. Da findes én projektiv kollineation, som afbilder K på K'.

Bevis: Vi kan vælge et koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2; E)$, så K i dette har ligningen

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Vælges et tilsvarende koordinatsystem $(E_0', E_1', E_2'; E')$ til K', vil den projektive kollineation, som afbilder E_0, E_1, E_2, E på E_0', E_1', E_2', E', åbenbart afbilde K på K', hvormed påstanden er bevist.

Af hensyn til en senere anvendelse bevises:

Hvis der i den projektive plan er givet to forskellige punkter S og S', linier s og s' gennem henholdsvis S og S', som begge er forskellige fra linien S S', og et punkt P, som hverken ligger på s eller s', da findes præcis ét keglesnit K, som går gennem S, S', P og som i S og S' har linierne s og s' som tangenter.

Bevis: Lad $(E_0, E_1, E_2; E)$ betegne det projektive koordinatsystem, hvor E_0 er skæringspunktet mellem s og s', $E_1 = S$, $E_2 = S'$ og E = P. For en hyperbolsk polaritet φ, hvis tilhørende keglesnit har de anførte egenskaber, gælder da, at E_0 er konjugeret med E_1 og med E_2 mens E_1, E_2 og E er selvkonjugerede. For en til φ hørende bilinearform B gælder derfor

$$B(\underline{e}_0, \underline{e}_1) = B(\underline{e}_0, \underline{e}_2) = B(\underline{e}_1, \underline{e}_0) = B(\underline{e}_2, \underline{e}_0) = 0,$$

$$B(\underline{e}_1, \underline{e}_1) = B(\underline{e}_2, \underline{e}_2) = B(\underline{e}, \underline{e}) = 0,$$

idet $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ betegner repræsentanter for E_0, E_1, E_2, hvis sum $\underline{e}$ er en repræsentant for E. Af disse ligninger fås

$$0 = B(\underline{e}, \underline{e}) = B(\underline{e}_0, \underline{e}_0) + B(\underline{e}_1, \underline{e}_2) + B(\underline{e}_2, \underline{e}_1)$$

altså

$$B(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = -\frac{1}{2} B(\underline{e}_0, \underline{e}_0),$$

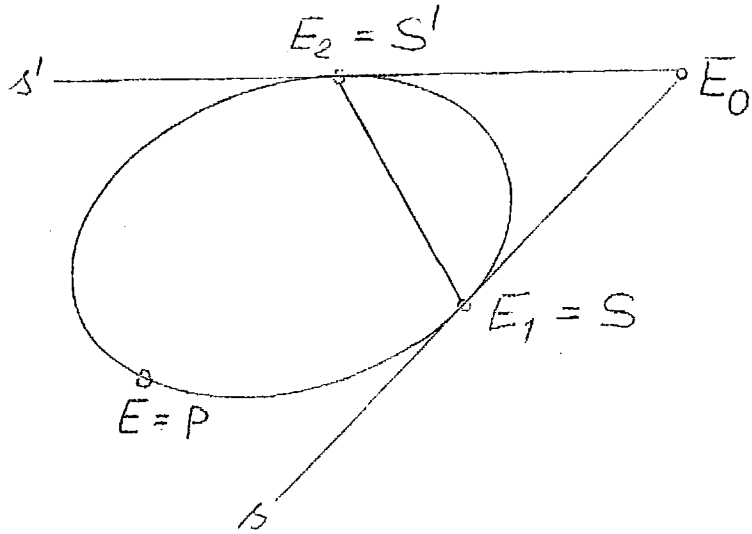
og hermed

$$B(\underline{x}, \underline{y}) = \lambda (x_0y_0 - \frac{1}{2} x_1y_2 - \frac{1}{2} x_2y_1)$$

for vektorer $\underline{x} = x_0\underline{e}_0 + x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2$ og $\underline{y} = y_0\underline{e}_0 + y_1\underline{e}_1 + y_2\underline{e}_2$, idet $\lambda = B(\underline{e}_0, \underline{e}_0) \neq 0$. Keglesnittet har altså ligningen

$$x_0^2 - x_1x_2 = 0,$$

hvormed entydigheden er bevist.



Eksistensen følger af, at

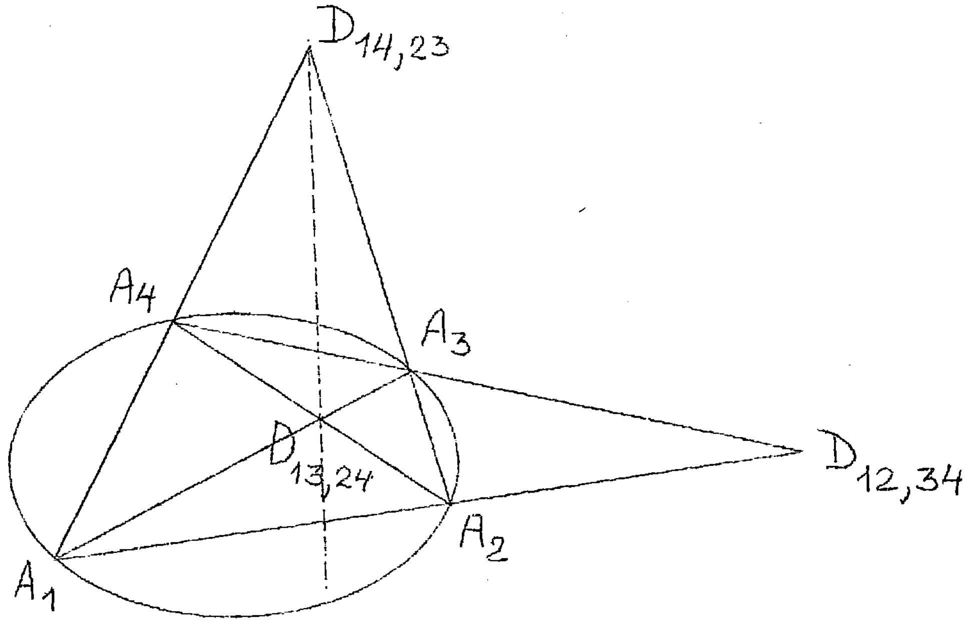
$$B(\underline{x},\underline{y}) = x_0y_0 - \frac{1}{2} x_1y_2 - \frac{1}{2} x_2y_1$$

er en symmetrisk indefinit regulær bilinearform, hvor den inducerede polaritet φ åbenbart har de ovenfor anførte egenskaber, hvorfor det tilhørende keglesnit tilfredsstiller de stillede krav.

Lad K betegne det til den hyperbolske polaritet φ hørende keglesnit og l en sekant til K, som har punkterne M og N fælles med K. Projektiviteten φ_1 er da den involutoriske hyperbolske projektivitet af l med fixpunkterne M og N. Af en bemærkning i § 3. (side 7) følger da, at for hvert punkt P på l forskelligt M og N, vil polaren p skære l i det fjerde harmoniske punkt til M, N, P. Heraf fås følgende sætning:

<u>Hvis vinkelspidserne i en fuldstændig firkant ligger på keglesnittet K, da er firkantens diagonalpunkter parvis konjugerede</u>.

Bevis: Lad A_1, A_2, A_3, A_4 betegne firkantens vinkelspidser. Vi skal bevise at polaren for et diagonalpunkt er de to andre diagonalpunkters forbindelseslinie. Ifølge det ovenstående skærer polaren for diagonalpunktet

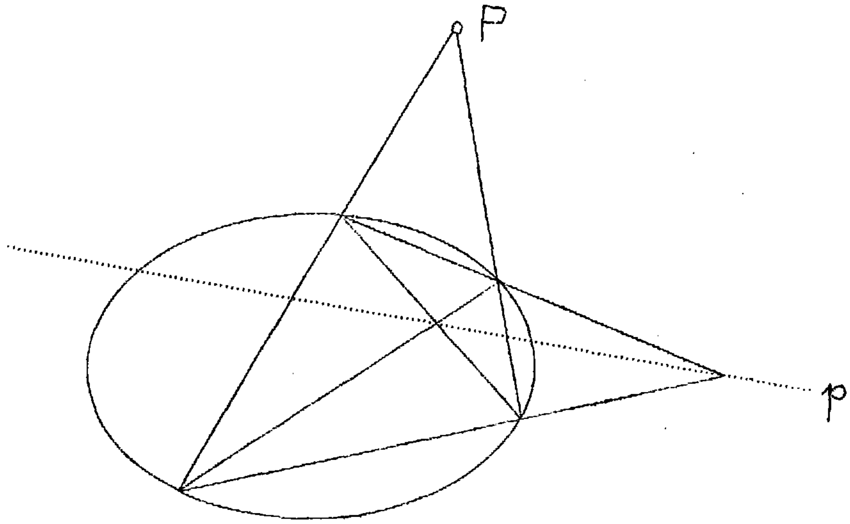


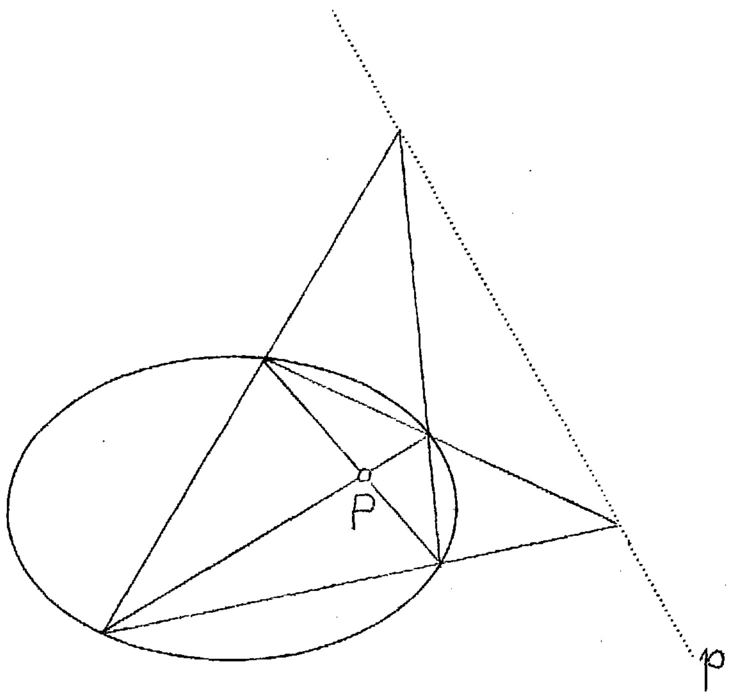
$D_{12,34}$ linierne A_1A_2 og A_3A_4 i de fjerde harmoniske punkter til A_1, A_2, $D_{12,34}$ henholdsvis A_3, A_4, $D_{12,34}$. Forbindelseslinien $D_{13,24}$ $D_{14,23}$ har ifølge firkantsætningen den samme egenskab og er derfor identisk med polaren, hvilket er påstanden.

Ved anvendelse af polariteten fås den duale sætning:

Hvis siderne i en fuldstændig firside tilhører liniekeglesnittet K^*, da er firsidens diagonaler parvis konjugerede.

Vælges to sekanter gennem et vilkårligt punkt P, som blot ikke ligger på keglesnittet, fås en firkant, hvis vinkelspidser ligger på K, og hvor P er et af diagonalpunkterne. Det ses heraf, at polaren for at punkt, som ikke ligger på K, er bestemt, blot man kender

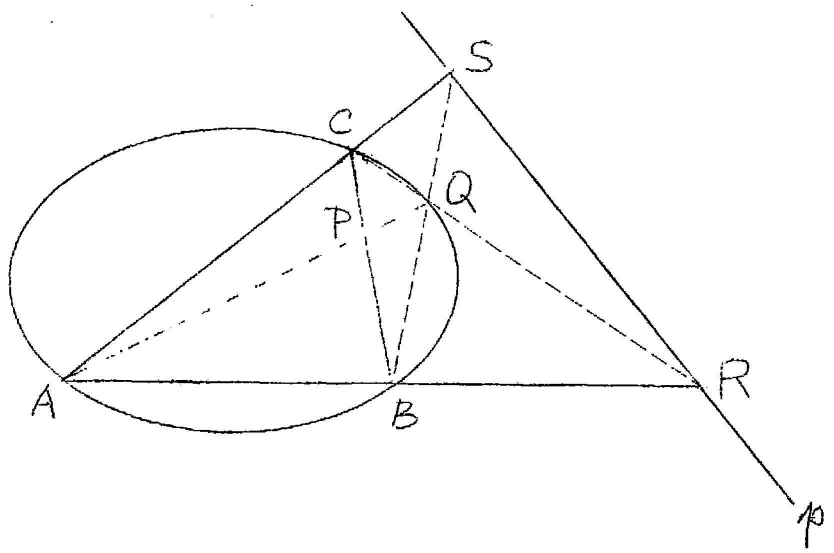




punktmængden K. Idet polaren for et punkt P på K er den eneste linie gennem P, som kun har P fælles med K, har vi hermed vist, at keglesnittet K fastlægger polariteten φ, eller anderledes sagt: Til forskellige hyperbolske polariteter hører forskellige keglesnit. Det har altså en entydig mening at tale om den til et keglesnit hørende polaritet.

Seydewitz' sætning: Hvis en trekant er indskrvet i et keglesnit K, vil en linie, der er konjugeret med en af siderne, skære de to andre i et par af konjugerede punkter eller i samme selvkonjugerede punkt.

Bevis: Vi kalder trekantens vinkelspidser A, B, C. En linie p,



der er konjugeret med BC, er polar for et punkt P på BC. Lad Q betegne det fra A forskellige skæringspunkt mellem keglesnittet og linien AP, R skæringspunktet mellem AB og CQ og S skæringspunktet mellem AC og BQ. Ifølge sætningen om den indskrevne firkant er hvilkesomhelst to forskellige af punkterne Q, R, S konjugerede.

Heraf følger, at RS er polaren p for P og hermed, at R og S er de omtalte skæringspunkter, som følgelig er konjugerede.

Argumentet svigter, hvis AP er tangenter i A eller hvis P = B eller C. I det første af disse særtilfælde går p gennem A, som da er det fælles selvkonjugerede skæringspunkt for p med AB og AC. I de to andre tilfælde, hvor p er tangenten i B eller C, følger påstanden af, at ethvert punkt på en tangent er konjugeret med dennes røringspunkt.

Ved anvendelse af den til keglesnittet hørende polaritet fås den duale sætning:

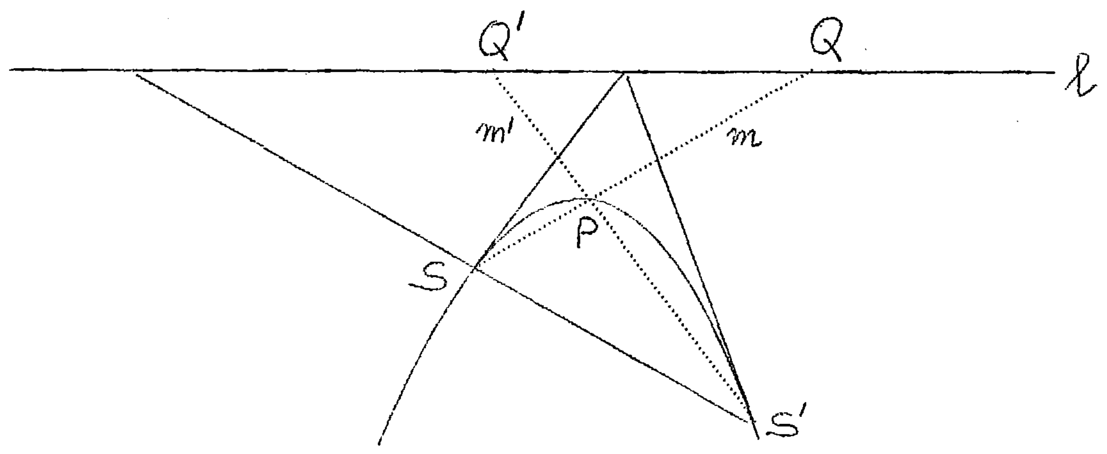
Hvis en trekant er omskrevet om et keglesnit, vil et punkt, som er konjugeret til en af vinkelspidserne, forbindes til de to andre vinkelspidser med et par af konjugerede linier eller samme selvkonjugerede linie.

Ud fra Seydewitz' sætning bevises:

Steiner's sætning: Hvis S og S' er to forskellige punkter på et keglesnit K, bestemmes der en projektivitet af liniebundtet med toppunkt S på liniebundtet med toppunkt S' ved, at man for hvert punkt P på K afbilder sekanten SP på sekanten S'P.

Ved sætningens formulering er det underforstået, at vi med "sekanten SS" mener tangenten i S (og tilsvarende med sekanten S'S').

Påstanden fås let ud fra Seydewitz' sætning: Gennem skæringspunktet mellem tangenterne i S og S' lægges en linie l, som ikke



er tangent til K. Linierne l og SS' er da konjugerede og Seydewitz' sætning giver derfor, at et par af tilsvarende linier m og m' skærer l i et par af konjugerede punkter Q og Q'. (Dette ses let også at være rigtigt, hvis m er linien SS' eller tangenten i S og m' dermed er tangenten i S' eller linien SS', i hvilke tilfælde det anførte argument svigter). Idet φ_1 betegner den af polariteten inducerede involutoriske projektivitet af linien l, er den anførte afbildning altså sammensætningen af tre projektiviteter, nemlig skæringen med linien l ($m \to Q$), φ_1 ($Q \to Q'$) og forbindelsen med S' ($Q' \to m'$).

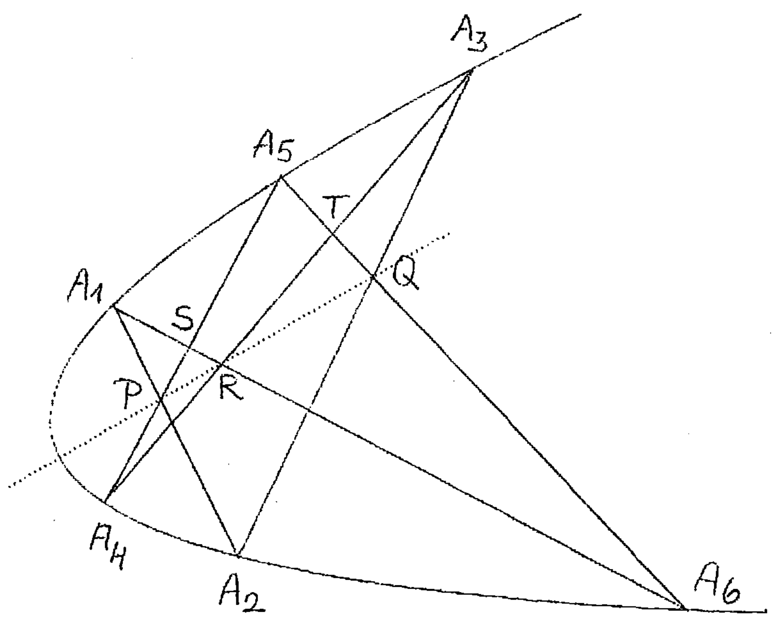
Heraf fås påstanden.

Ved anvendelse af polariteten fås den duale sætning:

Hvis s og s' er to forskellige tangenter til et keglesnit K, bestemmes der en projektivitet af s på s' ved, at man for hver tangent p til K afbilder skæringspunktet for p og s på skæringspunktet for p og s'.

Her skal to sammenfaldende tangenters skæringspunkt fortolkes som deres fælles røringspunkt.

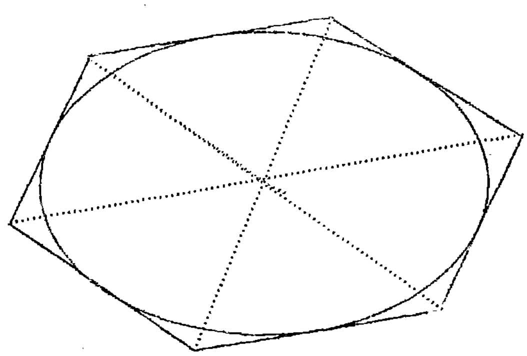
Pascal's sætning: Hvis en sekskant er indskrevet i et keglesnit, da ligger de modstående siders skæringspunkter på en ret linie.



Bevis: Lad $A_1,\dots,A_6$ betegne sekskantens vinkelspidser. Ifølge Steiner's sætning bestemmes en projektivitet af liniebundtet med toppunkt A_1 på liniebundtet med toppunkt A_3 ved, at tilsvarende linier skæres på keglesnittet. Vi kan derfor definere en projektivitet ψ af linien A_4A_5 på linien A_5A_6 ved, at et punkt X på A_4A_5 afbildes på skæringspunktet X' mellem A_5A_6 og billedlinien af linien A_1X ved den lige omtalte projektivitet. Med figurens betegnelser gælder åbenbart $\psi(A_4) = T$, $\psi(P) = Q$, $\psi(S) = A_6$ og $\psi(A_5) = A_5$. Da liniernes skæringspunkt A_5 afbildes på sig selv, er ψ en centralprojektion (sml. § 3). Idet A_4T og SA_6 skæres i R, er ψ centralprojektionen af A_4A_5 på A_5A_6 ud fra R. Nu afbilder ψ P på Q, hvoraf følger, at P,Q og R ligger på en ret linie, hvilket er påstanden.

Ved anvendelse af den til keglesnittet hørende polaritet fås den duale sætning:

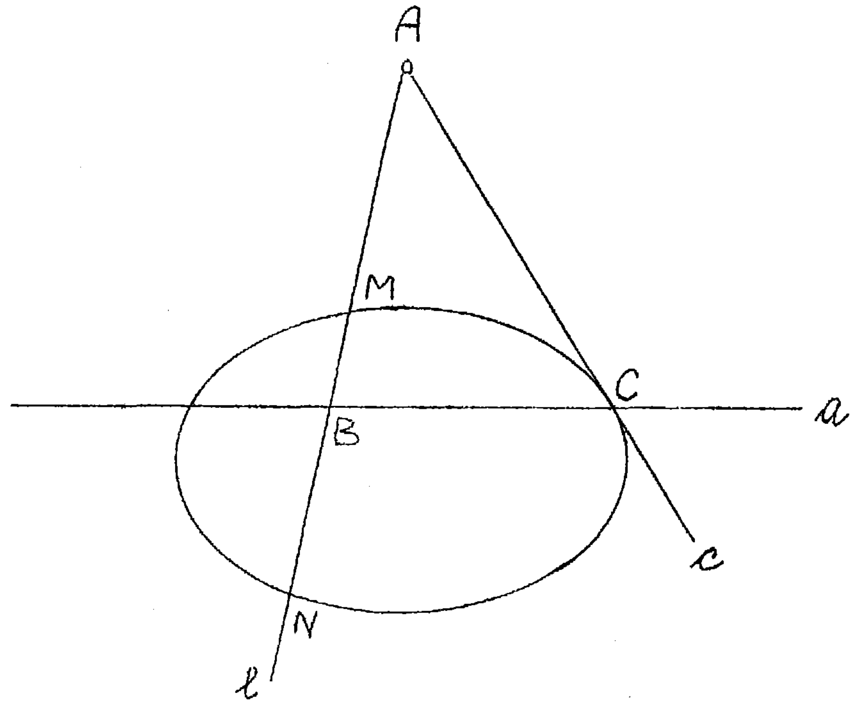
<u>Brianchon's sætning:</u> <u>Hvis en sekskant er omskrevet om et keglesnit, går modstående vinkelspidsers forbindelseslinier gennem samme punkt.</u>



Der er forskellige udartede tilfælde af Pascal's sætning (og de dualistisk tilsvarende udartede tilfælde af Brianchon's sætning). Udartningen fremkommer ved, at et eller flere par af nabovinkelspidser i den indskrevne sekskant falder sammen. Siden, der bestemmes ved et sådant par sammenfaldende vinkelspidser, skal fortolkes som tangenten gennem det pågældende punkt (jvf. konventionen ved Steiner's sætning). Der fremkommer altså sætninger, som udtaler sig om indskrevne fem-, fir- eller trekanter (og de duale om omskrevne fem-, fir- eller trekanter). Sætningerne om indskrevne fem- eller firkanter (der bliver to sætninger om firkanter) kan bevises ved beviset ovenfor (man skal blot vælge betegnelserne, så vinkelspidsen A_5 ikke falder sammen med nogen anden vinkelspids), men argumentationen svigter ved sætningen om trekanten. Vi giver derfor et bevis for dette udartede tilfælde af Pascals sætning. Hertil bevises først en hjælpesætning, som også har interesse i sig selv:

<u>En harmonisk homologi ψ hvis akse a er polaren for centret A afbilder keglesnittet K på sig selv</u>.

Bevis: Det er tidligere blevet vist, at hvis l er en sekant

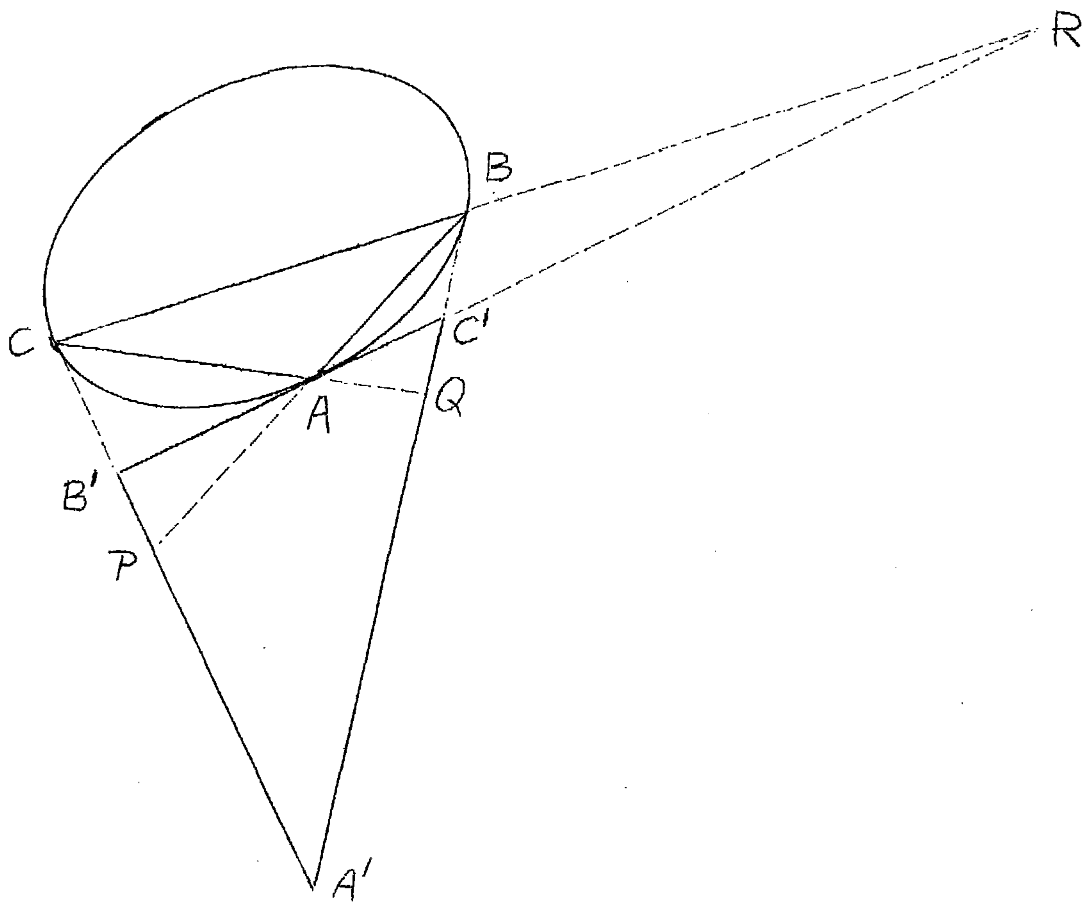


gennem A, da er A, skæringspunktet B mellem l og a og skæringspunkterne M og N mellem l og K harmonisk forbundne. Ved ψ afbildes altså M på N og N på M. For en (eventuel) tangent c gennem A gælder, at dens røringspunkt C ligger på a og derfor afbildes på sig selv ved ψ. Hermed er hjælpesætningen bevist.

Vi kan nu bevise den udartede Pascal's sætning for en indskreven trekant.

Hvis trekanten A,B,C er indskrevet i keglesnittet K, da ligger skæringspunkterne mellem AB og tangenten i C, mellem BC og tangenten i A og mellem CA og tangenten i B på en ret linie.

Bevis: På figuren har vi på nærliggende måde med A',B',C' betegnet vinkelspidserne i den trekant, hvis sider er tangenterne i A, B og C. De omtalte skæringspunkter er betegnet med P, Q og R. Linien AB er øjensynlig polaren for C' og A'C er polaren for C.



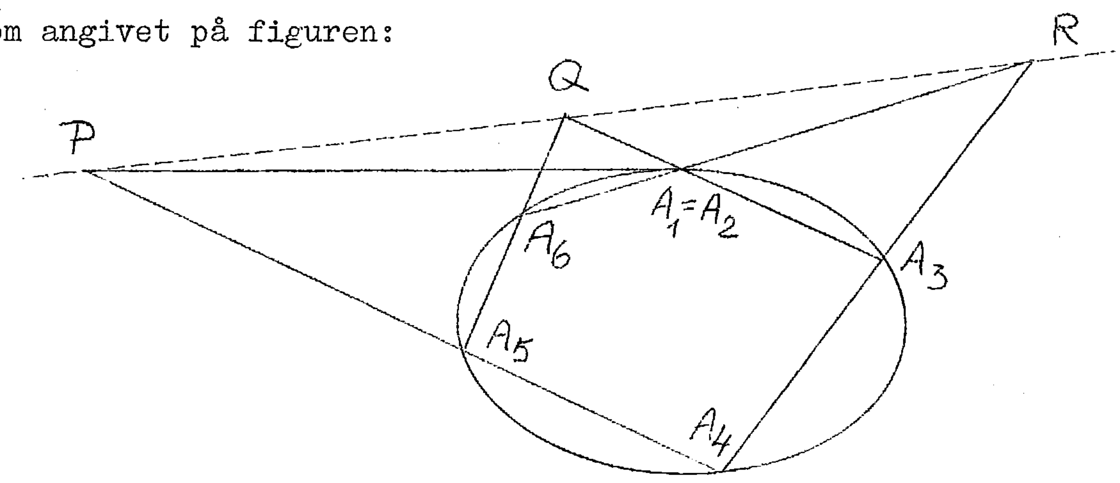
Linien CC' er følgelig polaren for P. Lad ψ betegne den harmoniske homologi med centrum P og akse CC'. Der gælder da $\psi(C) = C$, $\psi(C') = C'$, idet disse punkter ligger på aksen, og $\psi(A) = B$, $\psi(B) = A$ ifølge hjælpesætningen. Skæringspunktet Q mellem AC og BC' afbildes altså på skæringspunktet mellem BC og AC', som netop er punktet R. Linien QR går derfor gennem homologicentret P, hvormed påstanden er bevist.

Konfigurationen, der består af de to trekanter A, B, C og A', B', C' er selvdual, idet polariteten afbilder hver af trekanternes vinkelspidser på den andens sider. Konklusionen i den duale sætning er åbenbart, at linierne AA', BB', CC' går gennem samme punkt. Dette er netop forudsætningen i Desargues' sætning, mens konklusionen ovenfor er konklusionen i Desargues' sætning. De to duale sætninger er altså på denne måde sammenknyttede via Desargues' sætning.

Pascal's og Brianchon's sætninger og (især) de udartede tilfælde heraf kan benyttes til at angive forskellige konstruktionsmetoder i forbindelse med keglesnit. Der er her (naturligvis) tale om konstruktioner som udføres med linealen. Vi nøjes med at give et enkelt eksempel:

På et keglesnit er givet fem punkter. Konstruér tangenten gennem et af punkterne.

Benyttes den udartede Pascal's sætning på den sekskant, som har de givne punkter som vinkelspidser, har vi en konfiguration som angivet på figuren:

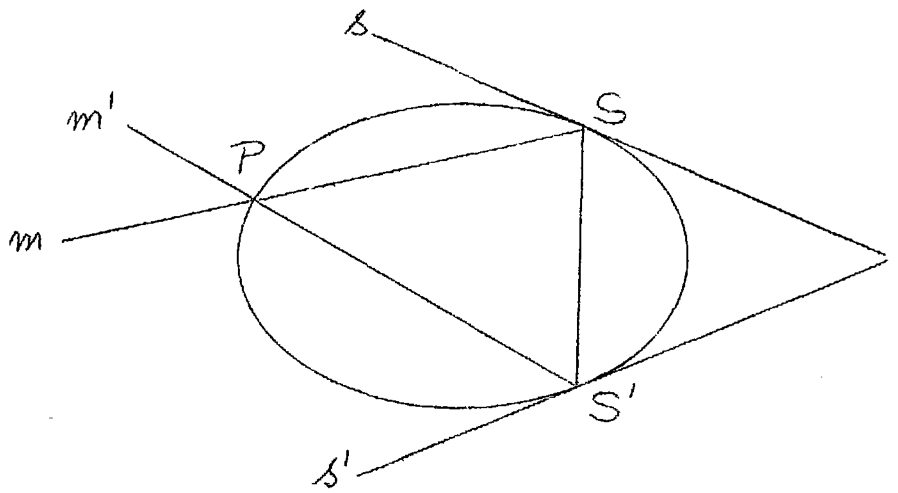


Konstruktionen foretages altså (med de anførte betegnelser $A_1 = A_2, A_3, \ldots, A_6$ for de givne punkter) ved at skære $A_2 A_3$ og $A_5 A_6$ i Q, $A_3 A_4$ og $A_6 A_1$ i R og $A_4 A_5$ og QR i P, hvorefter den søgte tangent er linien $A_1 P$.

Der gælder følgende omvendte til Steiners' sætning:

Hvis S og S' er to forskellige punkter i den projektive plan og ψ en projektivitet af liniebundtet med toppunkt S på liniebundtet med toppunkt S', hvorved SS' ikke afbildes på sig selv, da gennemløber skæringspunktet mellem en linie l gennem S og dens billedlinie $l' = \psi(l)$ et keglesnit K, når l gennemløber liniebundtet med toppunkt S.

Bevis: Lad s betegne den linie gennem S, som ved ψ afbildes på SS' og s' billedlinien ved ψ af SS'. Lad endvidere m være en fra SS' forskellig linie gennem S, m' dens billedlinie ved ψ og P skæringspunktet mellem m og m'. Ifølge en tidligere bevist sætning findes da et keglesnit K, som går gennem S, S' og P, som i S har tangenten s og i S' tangenten s'. Steiner's sætning for keglesnittet K giver os en projektivitet af liniebundtet med toppunkt S på



liniebundtet med toppunkt S'. Denne projektivitet afbilder s på SS', SS' på s' og m på m'. Den er altså identisk med projektiviteten ψ, men heraf følger påstanden, at enhver linie l gennem S skærer sin billedlinie l' = ψ(l) i et punkt på keglesnittet K.

Et interessant korollar til sætningen er :

<u>Gennem fem forskellige punkter i den projektive plan, hvoraf ikke tre ligger på linie, går et og kun et keglesnit.</u>

Bevis: Lad S,S',P,Q,R betegne punkterne. Der findes da præcis en projektivitet af liniebundtet med toppunkt S på liniebundtet med toppunkt S', som afbilder SP, SQ, SR på S'P, S'Q, S'R. Denne projektivitet afbilder ikke SS' på sig selv, idet dette ville medføre, at P, Q, R lå på en ret linie (fordi projektiviteten da var en "centralprojektion" ud fra en linie). Påstanden følger nu af Steiner's sætning og dens omvendte sætning.

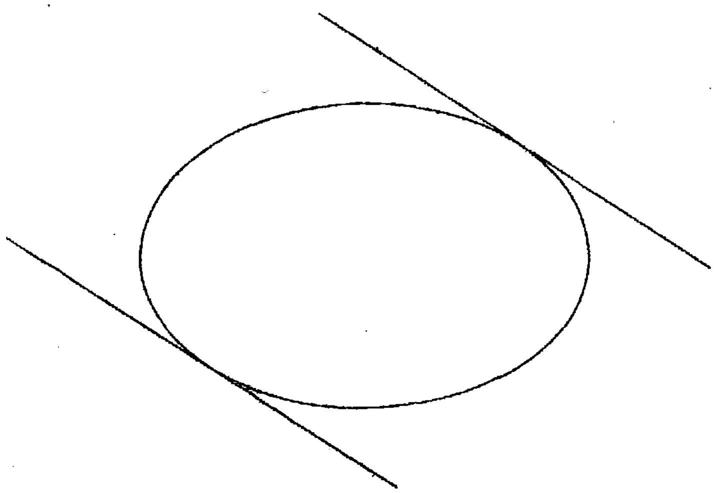
Vi har naturligvis duale sætninger:

<u>Hvis s og s' er to forskellige linier i den projektive plan og ψ en projektivitet af s på s', som ikke er en centralprojektion, da vil forbindelseslinien mellem et punkt L på s og dets billedpunkt L' = ψ(L) gennemløbe et liniekeglesnit K^* når L gennemløber linien s.</u>

<u>Fem forskellige linier i den projektive plan, hvoraf ikke tre går gennem samme punkt tilhører et og kun ét liniekeglesnit.</u>

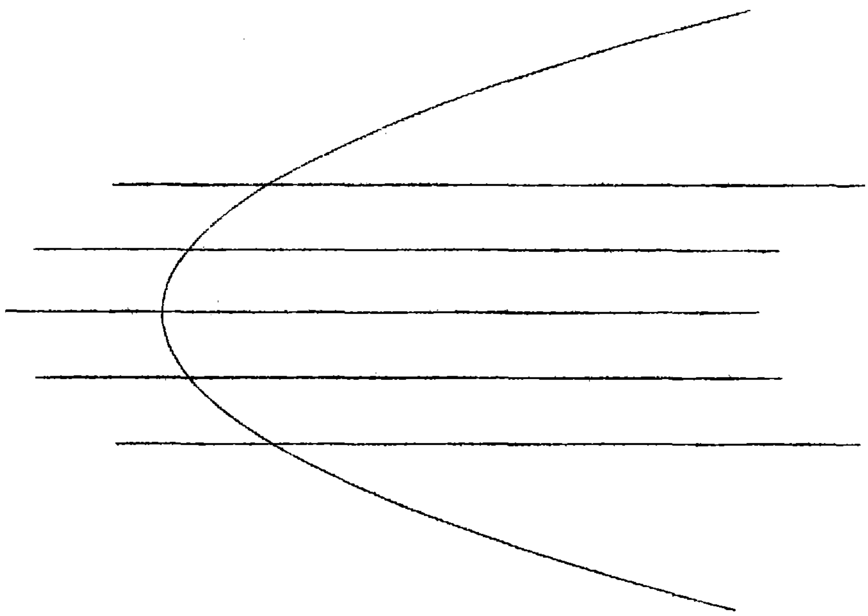
Et keglesnit i en euklidisk plan π er, som tidligere omtalt, mængden af egentlige punkter på et projektivt keglesnit i den til π hørende projektive plan. De forskellige (affine) typer af keglesnit i π svarer til samme type af projektivt keglesnit (idet der kun findes én sådan) og forskelligheden må derfor bero på, at det projektive har forskellig beliggenhed i forhold til den uegentlige linie i planen π .

For en ellipse (spec. cirkel) gælder, at der i enhver retning går to tangenter. Ethvert uegentligt punkt er følgelig et ydre punkt,



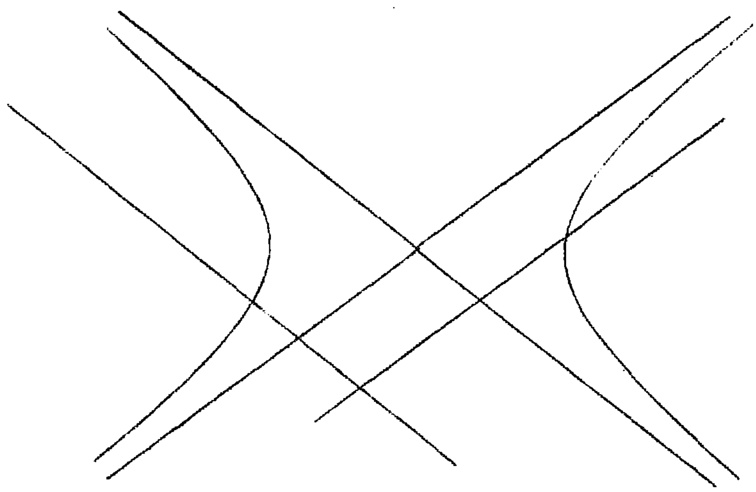
altså den uegentlige linie er en ydre linie for det tilhørende projektive keglesnit.

For en parabel gælder, at enhver linie, der er parallel med



aksen, skærer parablen i ét punkt. Disse linier er ikke tangenter til parablen og derfor sekanter for det tilhørende projektive keglesnit. <u>Dette indeholder altså det uegentlige punkt, som er bestemt ved akseretningen</u>. Enhver egentlig linie gennem dette punkt er en sekant, hvorfor <u>tangenten i det uegentlige punkt er den uegentlige linie</u>.

For en <u>hyperbel</u> gælder, at enhver linie, der er parallel med og forskellig fra en asymptote, skærer hyperblen i ét punkt uden at være tangent. <u>Det tilsvarende projektive keglesnit indeholder</u>



<u>altså de to uegentlige punkter, som er bestemt ved asymptoteretningerne. Tangenterne i de uegentlige punkter er asymptoterne</u>, idet disse ikke har egentlige punkter fælles med keglesnittet og derfor netop ét punkt fælles med det projektive keglesnit.

<u>Rettelse</u>: Side III,4,2 linie 5 f.n., læs

$$B'(\underline{u},\underline{v}) = B(\underline{v},\underline{u})$$

Øvelser til kap. III § 4:

1. Med hensyn til et koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2; E)$ i den projektive plan er en projektiv korrelation φ beskrevet ved, at punktet med koordinatsæt (x_0, x_1, x_2) afbildes på linien med liniekoordinatsæt $(2x_0 - x_2, x_1 + x_2, - x_0 + x_1)$.
Vis, at φ er en hyperbolsk polaritet.
Find koordinatsæt for vinkelspidser og sider i den selvpolære trekant, hvori E_0 er vinkelspids og e_1 side.
Find en matrixligning for den ved φ bestemte involutoriske projektivitet på linien e_0. Vis, at denne projektivitet er hyperbolsk og bestem koordinatsæt for fixpunkterne.
Hvilke vinkelspidser er indre og ydre i den ovenfor omtalte selvpolære trekant? Hvilke sider er sekanter og hvilke er ydre?

2. I den projektive plan er givet et koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2; E)$. Find en ligning for det keglesnit, som går gennem punkterne $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(0,-1,1)$ og har linierne $x_0 - x_2 = 0$ og $x_1 - x_2 = 0$ som tangenter.

3. Bevis Steiner's sætning ved koordinatregning. (vælg koordinatsystemet som anført på side 15 - 16).

4. Bevis de udartede tilfælde af Pascal's sætning (se side 23).

5. Lad P og Q være to punkter på et keglesnit K og A og B et par af konjugerede punkter, således at linierne PQ og AB er konjugerede. Vis, at skæringspunktet mellem AP og BQ ligger på K.

6. På et keglesnit er givet fire punkter samt en sekant og en tangent gennem et af punkterne. Konstruér sekantens andet skærings-

punkt med keglesnittet.

7. Vis sætningerne om konjugerede diametre i en ellipse eller en hyperbel ved hjælp af polariteten. (Definér centrum som polen for den uegentlige linie).

8. Vis (ved hjælp af den udartede Brianchon's sætning for en omskreven trekant), at røringspunktet for en hyperbeltangent er midtpunkt for det liniestykke, som af asymptoterne afskæres på tangenten.

9. For en parabel er givet akseretningen, en tangent med røringspunkt og endnu et punkt på parablen. Konstruér parablens tangent i dette punkt.

10. I den projektive plan er givet punkterne A_0, A_1, A_2, P således, at ikke tre af dem ligger på samme linie, samt en linie p, der ikke går gennem noget af punkterne A_0, A_1, A_2. Vis, at den korrelation, ved hvilken P afbildes på p og hvert af punkterne A_0, A_1, A_2 på sin modstående side i trekant $A_0A_1A_2$, er en polaritet.

11. Lad K være et keglesnit i den projektive plan. Vis, at der findes et projektivt koordinatsystem $(E_0,E_1,E_2;E)$, med hensyn til hvilket K har ligningen

$$x_1x_2 + x_2x_0 + x_0x_1 = 0 .$$

Vis, at E ligger på hver af de tre linier, der forbinder et fundamentalpunkt med polen til dettes modstående side i fundamentaltrekanten.

Københavns Universitet

Matematisk institut.

Mat. 3

1968 - 69

hefte 31

Indhold:

Rettelser til § 5. Projektive rum.

Side,linie	læs	i stedet for
5^4	(9)	
6^{9-10}	foreningsmængden af mængden af	foreningsmængden af
7^8	linier	liniar
12^{11}	$\dots, E_{i-1}, E_{i+1}$	$E_{i-1}, \dots, E_{i+1}$
19^{10}	X^*	X
19_1	Projective	Projektiv
22_{12}	$(\psi^{-1} \circ \psi_o, \psi^* \circ \psi_o^{*-1})$	$(\psi^* \circ \psi_o, \psi^{-1} \circ \psi_o^{*-1})$
22_9	$(\varphi^{-1}, \varphi^*)$	$(\varphi^*, \varphi^{-1})$
31_6	$-x_1 + x_3$	$x_1 - x_3$
32^{14}	$X(x_o, x_1, x_2, x_3)$ på K_ψ	$X(x_o, x_1, x_2, x_3)$
øv. 20^5	og $(0,1,0,1)$	og $(0,1,1,0)$

§ 5. Projektive rum.

Vi betragter et vektorrum $(V,+,L)$ af dimension $n+1$, $n \geq 0$, over et kommutativt legeme L. Det duale, altså vektorrummet bestående af linearformerne defineret på V, betegnes $(V^*,+,L)$, og den til en vektor $\underline{v} \in V$ svarende værdi af en linearform $\underline{v}^* \in V^*$ betegnes $\langle \underline{v}^*,\underline{v}\rangle$. Den ved $(\underline{v}^*,\underline{v}) \to \langle \underline{v}^*,\underline{v}\rangle$ bestemte funktion fra $V^* \times V$ til L er en bilinearform. At den er lineær i $\underline{v}$, er nemlig ensbetydende med, at $\underline{v}^*$ er en linearform, og at den er lineær i $\underline{v}^*$ for fastholdt $\underline{v}$, er en følge af, at linearformerne danner et vektorrum.

Er $(\underline{e}_0,\dots,\underline{e}_n)$ en basis for V, findes der netop én linearform $\underline{v}^*$, som for $\underline{e}_0,\dots,\underline{e}_n$ antager givne værdier. Specielt findes der for hvert $i \in \{0,\dots,n\}$ netop én linearform $\underline{e}_i^*$, for hvilken $\langle \underline{e}_i^*,\underline{e}_j\rangle = \delta_{ij}$. Linearformen

$$\underline{v}^* = v_0^*\underline{e}_0^* + \dots + v_n^*\underline{e}_n^*,$$

hvor $v_i^* \in L$, antager værdierne $v_0^*,\dots,v_n^*$ for henholdsvis $\underline{e}_0,\dots,\underline{e}_n$. Heraf ses, at hver linearform på V på en og kun én måde kan fremstilles som linearkombination af $\underline{e}_0^*,\dots,\underline{e}_n^*$, altså at $(\underline{e}_0^*,\dots,\underline{e}_n^*)$ er en basis for V^* og at $\dim V^* = n+1$. Denne basis kaldes den til $(\underline{e}_0,\dots,\underline{e}_n)$ duale basis. For

$$\underline{v} = v_0\underline{e}_0 + \dots + v_n\underline{e}_n\ ,\quad \underline{v}^* = v_0^*\underline{e}_0^* + \dots + v_n^*\underline{e}_n^*$$

haves

$$(1) \qquad \langle \underline{v}^*,\underline{v}\rangle = v_0^*v_0 + \dots + v_n^*v_n.$$

For hvert fast $\underline{u} \in V$ er $\langle \underline{v}^*,\underline{u}\rangle$ en linearform på V^*. Ved til $\underline{u}$ at lade svare denne defineres en afbildning h af V ind i det til V^* duale vektorrum V^{**}. Denne afbildning er øjensynlig lineær. Den til basisvektoren $\underline{e}_j$ svarende linearform $h_{\underline{e}_j}$ antager for $\underline{e}_i^*$ værdien $\langle \underline{e}_i^*, \underline{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, hvoraf følger, at $(h_{\underline{e}_0}, \dots, h_{\underline{e}_n})$ er den til $(\underline{e}_0^*, \dots, \underline{e}_n^*)$ duale basis. Dette viser, at h er en isomorfi. Den kaldes den kanoniske isomorfi af V på V^{**}. Man plejer at identificere V og V^{**} ved denne. Hvert af vektorrummene V og V^* kan herefter opfattes som bestående af linearformerne defineret på det andet.

Lad U være et underrum af V. Mængden

(2) $$U^\circ = \{\underline{v}^* \in V^* \mid \forall\, \underline{u} \in U : \langle \underline{v}^*, \underline{u} \rangle = 0\}$$

ses at være et underrum af V^*. (Det kaldes hyppigt det til U ortogonale.) Lad dim U = p+1, $p \in \{-1, \dots, n\}$. En basis $(\underline{e}_0, \dots, \underline{e}_p)$ for U suppleres (om fornødent) til en basis $(\underline{e}_0, \dots, \underline{e}_n)$ for V. Er $(\underline{e}_0^*, \dots, \underline{e}_n^*)$ den duale basis, gælder

$$\underline{v}^* = v_0^* \underline{e}_0^* + \dots + v_n^* \underline{e}_n^* \in U^\circ ,$$

hvis og kun hvis

$$\langle \underline{v}^*, \underline{e}_j \rangle = v_j^* = 0 \quad \text{for } j = 0, \dots, p ,$$

altså hvis og kun hvis

$$\underline{v}^* = v_{p+1}^* \underline{e}_{p+1}^* + \dots + v_n^* \underline{e}_n^* .$$

Heraf sluttes, at dim U° = n-p, altså

(3) $$\dim U + \dim U^\circ = n + 1 .$$

Ved til hvert underrum U af V at lade svare det således bestemte underrum U° af V^* defineres en afbildning d af mængden [V] af underrum i V ind i mængden $[V^*]$ af underrum i V^*. Tilsvarende defineres en afbildning d^* af $[V^*]$ ind i $[V]$. Til det ved (2) definerede underrum U° svarer ved d^* underrummet

$$U^{\circ\circ} = \{\underline{v} \in V \mid \forall\, \underline{u}^* \in U^\circ : \langle \underline{u}^*, \underline{v}\rangle = 0\} \subseteq V$$

Af (2) ses, at $\underline{u} \in U^{\circ\circ}$ for hvert $\underline{u} \in U$, altså at $U \subseteq U^{\circ\circ}$. Da (3) også gælder for d^*, må U og $U^{\circ\circ}$ have samme dimension og følgelig være identiske. Dette viser, at $d^* \circ d$ er den identiske afbildning af $[V]$, og heraf følger, at d^* er surjektiv og d injektiv. Da V og V^* og dermed d og d^* kan bytte rolle, sluttes, at begge afbildninger bijektive og hinandens inverse. Vi har altså:

<u>Der består en enentydig korrespondance mellem mængden af underrum i et</u> $(n+1)$-<u>dimensionalt vektorrum</u> V <u>og mængden af underrum i dettes duale</u> V^*, <u>således at dimensionerne af underrum</u> $U \subseteq V$ <u>og</u> $U^\circ \subseteq V^*$, <u>der svarer til hinanden, har summen</u> $n+1$ <u>og</u>

(4) $\underline{v} \in U \iff \forall \underline{u}^* \in U^\circ : \langle \underline{u}^*, \underline{v}\rangle = 0$,

(5) $\underline{v}^* \in U^\circ \iff \forall \underline{u} \in U : \langle \underline{v}^*, \underline{u}\rangle = 0$.

Er U', U'' underrum af V og U'°, U''° de tilsvarende under rum af V^*, gælder

(6) $(U' \cap U'')^\circ = U'^\circ + U''^\circ, \quad (U' + U'')^\circ = U'^\circ \cap U''^\circ$.

Da V og V^* kan bytte rolle, er det tilstrækkeligt at bevise f.eks. den første af disse ligninger. At $\underline{v} \in U' \cap U''$, er ifølge (4) ensbetydende med, at der for alle $\underline{u}'^* \in U'^\circ$ og alle $\underline{u}''^* \in U''^\circ$ gælder

(7) $\langle \underline{u}'^*, \underline{v}\rangle = 0, \quad \langle \underline{u}''^*, \underline{v}\rangle = 0$.

Dette medfører

$$\langle \underline{u}'^* + \underline{u}''^*, \underline{v}\rangle = 0 \ ,$$

altså $\langle \underline{u}^*, \underline{v} \rangle = 0$ for alle $\underline{u}^* \in U'^\circ + U''^\circ$. Da dette omvendt medfører (7), er den første ligning (6) hermed bevist.

Med henblik på senere anvendelse nævnes, at der for underrum U' og U'' af V gælder <u>dimensionsformlen</u>

(8) $$\dim(U' \cap U'') + \dim(U' + U'') = \dim U' + \dim U''.$$

Lad $(V,+,L)$ og $(W,+,L)$ være vektorrum af dimensionerne henholdsvis $n+1$ og $m+1$ og $(V^*,+,L)$ og $(W^*,+,L)$ deres duale. En lineær afbildning $f: V \to W$ bestemmer da på entydig måde en lineær afbildning $f^*: W^* \to V^*$ på følgende måde: For hvert $\underline{w}^* \in W^*$, altså hver linearform $\langle \underline{w}^*, \underline{w} \rangle_W$, $\underline{w} \in W$, på W er $\langle \underline{w}^*, f(\underline{v}) \rangle_W$, $\underline{v} \in V$, en linearform $\langle \underline{v}^*, \underline{v} \rangle_V$ på V. Ved at sætte $\underline{v}^* = f^*(\underline{w}^*)$ defineres da en afbildning af W^* ind i V^*, der øjensynlig er lineær. Den kaldes den til f <u>adjungerede afbildning</u>. Der gælder altså

$$\langle f^*(\underline{w}^*), \underline{v} \rangle_V = \langle \underline{w}^*, f(\underline{v}) \rangle_W, \quad \underline{v} \in V,\ \underline{w}^* \in W^*$$

Lad $(\underline{e}_0, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_0, \dots, \underline{f}_m)$ være baser for V og W og $(\underline{e}_0^*, \dots, \underline{e}_n^*)$ og $(\underline{f}_0^*, \dots, \underline{f}_m^*)$ deres duale. Er $\underline{\underline{A}}$ den til f hørende matrix med hensyn til disse baser, har man ifølge (1) med oplagte betegnelser for koordinatsæt

$$\langle \underline{w}^*, f(\underline{v}) \rangle_W = \underline{\underline{w}}^*_{-} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{v}}_{|} = \langle f^*(\underline{w}^*), \underline{v} \rangle_V ,$$

altså for $\underline{v}^* = f^*(\underline{w}^*)$

$$\underline{\underline{v}}^*_{-} = \underline{\underline{w}}^*_{-} \underline{\underline{A}} ,$$
$$\underline{\underline{v}}^*_{|} = \underline{\underline{A}}' \underline{\underline{w}}^*_{|} .$$

Til den adjungerede afbildning f^* hører altså den transponerede matrix $\underline{\underline{A}}'$. Lades vektorrummene V og W bytte rolle med henholdsvis W^* og V^*, ses, at den adjungerede til f^* er f.

Tilsvarende fås til en lineær afbildning $g:V \to W^*$ en adjungeret afbildning $g^*:W \to V^*$ ved til $\underline{w} \in W$ at lade svare linearformen $\langle g(\underline{v}),\underline{w}\rangle_W$ på V. Der gælder altså her

$$\langle g^*(\underline{w}),\underline{v}\rangle_V = \langle g(\underline{v}),\underline{w}\rangle_W , \quad \underline{v} \in V, \ \underline{w} \in W.$$

$$\langle g(\underline{v}),\underline{w}\rangle_W = \underline{w}'\underline{\underline{B}}\,\underline{v} = \langle g^*(\underline{w}),\underline{v}\rangle$$

Er $\underline{\underline{B}}$ den til g hørende matrix med hensyn til de indførte baser, vil der til g^* høre den transponerede matrix $\underline{\underline{B}}'$.

Det er hensigtsmæssigt i det foreliggende tilfælde at bestemme de lineære afbildninger ved bilinearformer. Lad $B(\underline{w},\underline{v})$ være en bilinearform defineret på $W \times V$. Ved til $\underline{v} \in V$ at lade svare linearformen $B(\underline{w},\underline{v})$, $\underline{w} \in W$, på W defineres en lineær afbildning $g:V \to W^*$, for hvilken

$$\langle g(\underline{v}),\underline{w}\rangle_W = B(\underline{w},\underline{v}) , \quad (\underline{w},\underline{v}) \in W\times V.$$

Omvendt er den venstre side for en given lineær afbildning $g:V \to W^*$ en bilinearform, der bestemmer g. Med hensyn til de indførte baser har bilinearformen B den samme matrix $\underline{\underline{B}}$ som afbildningen g. Den adjungerede afbildning g^* bestemmes ved den transponerede bilinearform

$$(10) \qquad B'(\underline{v},\underline{w}) = B(\underline{w},\underline{v}) , \quad (\underline{v},\underline{w}) \in V\times W ,$$

der har den transponerede matrix $\underline{\underline{B}}'$. Den adjungerede til g^* er g. I tilfældet $V = W$ gælder $g^* = g$, hvis og kun hvis bilinearformen B, altså matricen $\underline{\underline{B}}$ er symmetrisk.

Alt, hvad der er sagt om lineære afbildninger $g:V \to W^*$, kan overføres til lineære afbildninger $h:V^* \to W$. Vi skal her nøjes med at betragte det tilfælde, hvor V og W har samme dimension n+1 og afbildningen h er bijektiv. Den inverse $h^{-1}:W \to V^*$ er da den adjungerede $g^*:W \to V^*$ til en bijektiv lineær afbildning $g:V \to W^*$, altså $h = g^{*-1}$. Omvendt vil $h = g^{*-1}$ for hver bijektiv lineær afbildning $g:V \to W^*$ være en bijektiv lineær afbildning af V^* ind i W. Er $\underline{\underline{B}}$ den til g hørende matrix med hensyn til de valgte baser, vil der til $h = g^{*-1}$ høre matricen $\underline{\underline{B}}'^{-1}$. Afbildningen h bestemmes ved bilinearformen

$$B'^{-1}(\underline{w}^*,\underline{v}^*) = \langle \underline{w}^*, h(\underline{v}^*)\rangle_W, \qquad (\underline{w}^*,\underline{v}^*) \in W^*\times V^*,$$

hvor betegnelsen B'^{-1} er valgt, fordi formens matrix er $\underline{\underline{B}}'^{-1}$.

Lad $(V,+,L)$ være et vektorrum og $(V^*,+,L)$ dets duale. Ved det til disse knyttede <u>projektive rum</u> (over L) forstås foreningsmængden af 1-dimensionale underrum i V og mængden af 1-dimensionale underrum i V^*. De 1-dimensionale underrum af V kaldes det projektive rums <u>punkter</u> og de 1-dimensionale underrum af V^* dets <u>hyperplaner</u>. Har V dimensionen n+1, tilskrives det projektive rum <u>dimensionen</u> n. Det projektive rums punktmængde betegnes Π^n og dets hyperplanmængde Π^{n*}, Som betegnelse for det projektive rum kan bruges (Π^n,Π^{n*},L) eller kort (Π^n,Π^{n*}), hvis der ikke kan opstå misforståelser. Det er hensigtsmæssigt, at inkludere tilfældet $n = -1$, hvor $V = \{\underline{0}\}$, $V^* = \{\underline{0}^*\}$, $\Pi^n = \emptyset$, $\Pi^{n*} = \emptyset$, altså at betragte den tomme mængde som projektivt rum af dimension -1.

Er X et punkt i Π^n, altså et 1-dimensionalt underrum af V, kaldes enhver egentlig vektor $\underline{x} \in X$ en <u>repræsentant</u> for X. Repræsentanterne for X er indbyrdes proportionale. Tilsvarende defineres repræsentant for en hyperplan Y^* i Π^{n*}.

Et punkt $X \in \Pi^n$ og en hyperplan $Y^* \in \Pi^{n*}$ siges at være <u>incidente</u> (punktet X ligger i hyperplanen Y^*, hyperplanen Y^* går gennem punktet X), hvis

$$\langle \underline{y}^*, \underline{x} \rangle = 0$$

for en (og da hver) repræsentant $\underline{x}$ for X og en (og da hver) repræsentant $\underline{y}^*$ for Y^*.

De 1-dimensionale underrum af et (p+1)-dimensionalt underrum af V udgør en delmængde Π^p af Π^n, der kaldes et punktunderrum, kort et P-underrum, af dimension p af det projektive rum (Π^n, Π^{n*}). De 0-dimensionale P-underrum er punkterne, de 1-dimensionale kaldes liniar, de 2-dimensionale planer. Et p-dimensionalt P-underrum Π^p er punktmængden i et p-dimensionalt projektivt rum. Dettes hyperplaner er imidlertid for $p < n$ ikke elementer af Π^{n*}.

På tilsvarende måde defineres et p-dimensionalt hyperplanunderrum, kort H-underrum af det projektive rum (Π^n, Π^{n*}). De 0-dimensionale H-underrum er hyperplanerne, de 1-dimensionale kaldes hyperplanbundter, de 2-dimensionale hyperplanknipper. Et p-dimensionalt H-underrum Π^{p*} er hyperplanmængden i et p-dimensionalt projektivt rum. Dettes punkter er imidlertid for $p < n$ ikke elementer af Π^n.

Den enentydige korrespondance mellem underrummene i V og underrummene i V^* (side III,5,3) bestemmer en enentydig korrespondance mellem P- og H-underrummene således, at underrum $\Pi^p \subseteq \Pi^n$ og $\Pi^{n-p-1°} \subseteq \Pi^{n*}$, der svarer til hinanden, har dimensionstal med summen n-1, at $\Pi^{n-p-1°}$ består af de hyperplaner, der hver går gennem alle punkter i Π^p, og at Π^p består af de punkter, der hvert ligger i alle hyperplaner i $\Pi^{n-p-1°}$.

Af den tilsvarende egenskab ved et vektorrums underrum følger, at en fællesmængde for P-underrum, kaldet disses snit, er et P-underrum, og at en fællesmængde for H-underrum, kaldet disses snit, er et H-underrum.

Er $M \subseteq \Pi^n$ ($M^* \subseteq \Pi^{n*}$) en punktmængde (hyperplanmængde), siges fællesmængden for alle P-underrum (H-underrum), der indeholder M (M^*), at være udspændt af M (M^*). Det af endelig mange P-underrum $\Pi_1,\dots,\Pi_r$ udspændte underrum kaldes deres forbindelse og betegnes $\Pi_1 \vee \dots \vee \Pi_r$. Er $U_1,\dots,U_r$ de underrum af V, der bestemmer $\Pi_1,\dots,\Pi_r$, bestemmes forbindelsen af $U_1+\dots+U_r$. Tilsvarende defineres og betegnes forbindelse af H-underrum. Af (6) (side III, 5,3) sluttes, at der for to P-underrum Π',Π'' og de til disse ved korrespondancen svarende H-underrum gælder

(11) $$(\Pi' \cap \Pi'')^\circ = \Pi'^\circ \vee \Pi''^\circ \ , \qquad (\Pi' \vee \Pi'')^\circ = \Pi'^\circ \cap \Pi''^\circ \ .$$

Dimensionsformlen (8) (side III,5,4) giver for to P-underrum Π' og Π''

(12) $$\dim(\Pi' \cap \Pi'') + \dim(\Pi' \vee \Pi'') = \dim \Pi' + \dim \Pi''$$

og den tilsvarende ligning for to H-underrum. Dimensionsformlen (12) indeholder de fundamentale incidens sætninger. Som eksempler nævnes: Er P' og P'' to forskellige punkter betragtet som 0-dimensionale P-underrum, har vi $P' \cap P'' = \emptyset$, og (12) giver $\dim(P' \vee P'') = 1$, altså at det af P' og P'' udspændte P-underrum er en linie. Er l' og l'' to forskellige linier (betragtet som 1-dimensionale P-underrum), har vi $\dim(l' \cap l'') = -1$ eller 0, altså henholdsvis $\dim(l' \vee l'') = 3$ eller 2. To forskellige linier udspænder følgelig et 3-dimensionalt P-underrum eller en plan, efter som de er disjunkte (vindskæve) eller har et punkt fælles. To disjunkte P-underrum Π' og Π'' udspænder hele rummet Π^n, hvis og kun hvis

$$\dim \Pi' + \dim \Pi'' = n - 1 \ .$$

(Dette er ensbetydende med, at underrummene U' og U" af V, der bestemmer Π' og Π'', danner direkte sum og $U' \oplus U'' = V$.) To disjunkte P-underrum Π' og Π'', for hvilke dette er opfyldt, kaldes <u>komplementære</u>.

Tilsvarende gælder for H-underrum.

Hvis et sæt repræsentanter for punkter $P_0,\dots,P_r$ i Π^n er lineært uafhængigt, gælder dette for ethvert sæt af repræsentanter, og punkterne $P_0,\dots,P_r$ siges at være <u>uafhængige</u>. Da er $r \leq n$, og det af punkterne udspændte P-underrum har dimension r. Hvis dette ikke er tilfældet siges punkterne at være <u>afhængige</u>. Tilsvarende defineres uafhængighed og afhængighed af hyperplaner.

I hvert projektivt rum af dimension større end 1 gælder Desargues' sætning, hvadenten de to trekanter ligger i samme plan eller ej. Det side III,1,12-13 givne bevis kan overføres ordret.

Definitionen af dobbeltforholdet df(ABCD) af fire indbyrdes forskellige punkter A,B,C,D på en linie (side III,1,14-15) kan overtages uforandret. Den kan også udvides til de tilfælde, hvor to af punkterne falder sammen, hvis legemet L udvides med et element ∞, for hvilket de på side III,1,17 angivne regneregler kræves opfyldt. Der gælder også de på side III,1,16-18 udledte relationer mellem dobbeltforhold.

Alt dette kan overføres til fire hyperplaner A^*, B^*, C^*, D^*, der tilhører samme hyperplanbundt. Sætningen om relationen mellem punkters og liniers dobbeltforhold (side III,2,5) kan generaliseres til følgende:

Lad en linie Π^1 og et(n-2)-dimensionalt P-underrum Π^{n-2} være komplementære. Er da A^*, B^*, C^*, D^* hyperplaner gennem Π^{n-2}, hvoriblandt mindst tre indbyrdes forskellige, og A,B,C,D deres skæringspunkter med Π^1, da gælder

$$df(A^*B^*C^*D^*) = df(ABCD).$$

Definitionen af harmoniske punktsæt som punktsæt (A,B,C,D) på en linie, for hvilke dobbeltforholdet er defineret og lig -1 (side III,1,18), kan overføres til vilkårlige projektive rum. Hvis legemet L har karakteristik 2, er imidlertid -1 = 1 og derfor et sæt (A,B,C,D) harmonisk, hvis og kun hvis A = B eller C = D. Sætningen om den fuldstændige firkant i en projektiv plan og beviset for den (side III,1,19-18) bevarer gyldigheden for et vilkårligt legeme L. At dette har karakteristik 2 viser sig derved, at en fuldstændig firkants diagonalpunkter ligger på samme linie. Dette bevirker, at mange sætninger i den projektive geometri enten slet ikke eller kun efter væsentlig modifikation er gyldige, hvis legemets karakteristik er 2.

Lad $E_0, \dots, E_n$, E være n + 2 punkter i et n-dimensionalt projektivt rum (Π^n, Π^{n*}) over et vilkårligt legeme L således, at hvilkesomhelst n+1 af dem er uafhængige. Der findes da repræsentanter $\underline{e}_0, \dots, \underline{e}_n, \underline{e}$ for disse punkter således, at

$$(13) \qquad \underline{e}_0 + \dots + \underline{e}_n = \underline{e}\,.$$

Repræsentanterne er herved bestemt på nær en fælles, fra 0 forskellig faktor fra L. Vektorerne $\underline{e}_0, \dots, \underline{e}_n$ vælges som basis for vektorrummet V, der bestemmer det projektive rum. Er X et punkt i Π^n, vil koordinatsættene for dets repræsentanter udgøre mængden af sæt $(x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ fra L^{n+1}, som er proportionale med et af dem. Efter valget af punkterne $E_0, \dots, E_n, E$ afhænger denne mængde af sæt kun af X, idet basisvektorerne ved dette valg er bestemt på nær en fælles fra 0 forskellig faktor fra L. Hvert af sættene $(x_0,\dots,x_n)$ kaldes et koordinatsæt for X med hensyn til det projektive punktkoordinatsystem $(E_0,\dots,E_n;E)$. Hvert fra nulsættet forskelligt sæt $(x_0,\dots,x_n) \in L^{n+1}$ er koordinatsæt for netop ét punkt $X \in \Pi^n$, nemlig det, der har $\underline{x} = x_0\underline{e}_0+\dots+x_n\underline{e}_n$ som repræsentant.

Punkterne $E_0,\dots,E_n$ kaldes koordinatsystemets fundamentalpunkter. Koordinatsættene for E_i, $i = 0,\dots,n+1$, er sættene, hvor alle koordinater er 0 med undtagelse af den med nummer i. Punktet E kaldes koordinatsystemets enhedspunkt. Dets koordinatsæt er sættene med lutter ens koordinater.

På dualistisk tilsvarende måde defineres hyperplankoordinatsystemer og koordinatsæt for hyperplaner. Til hvert punktkoordinatssystem $(E_0,\dots,E_n;E)$ knyttes et bestemt hyperplankoordinatsystem $(E_0^*,\dots,E_n^*;E^*)$ på følgende måde: Lad $\underline{e}_0,\dots,\underline{e}_n,\underline{e}$ være repræsentanter for $E_0,\dots,E_n,E$, for hvilke (13) er opfyldt, og lad $(\underline{e}_0^*,\dots,\underline{e}_n^*)$ være den til $(\underline{e}_0,\dots,\underline{e}_n)$ duale basis for V^*. Sættes

$$\underline{e}^* = \underline{e}_0^* + \dots + \underline{e}_n^* ,$$

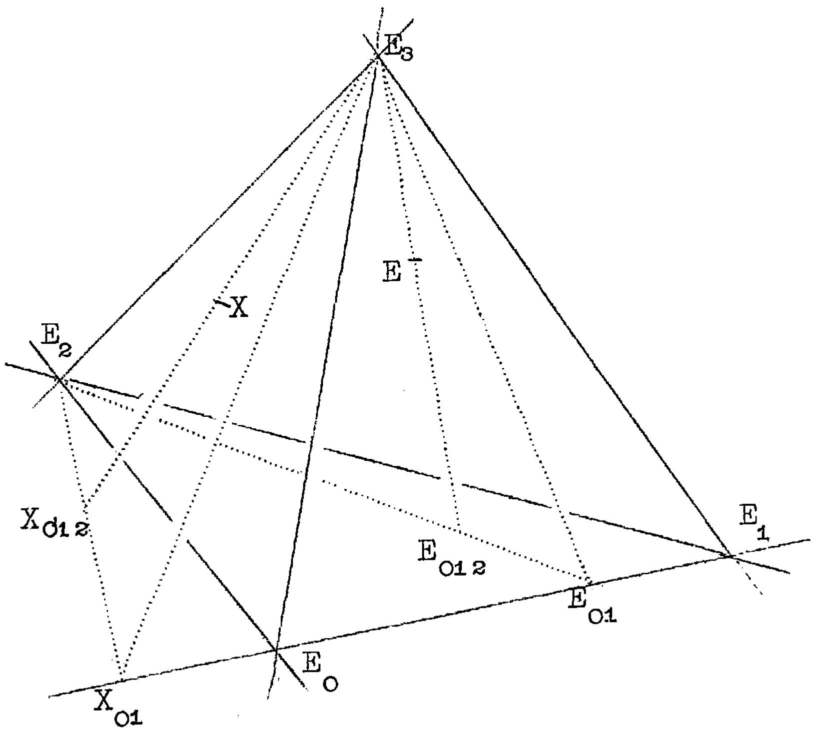
vil $\underline{e}_0^*,\dots,\underline{e}_n^*,\underline{e}^*$ på nær en fælles faktor fra L være bestemt ved punktkoordinatsystemet. Erstattes nemlig basen $(\underline{e}_0,\dots,\underline{e}_n)$ med en dermed proportional, $(\lambda\underline{e}_0,\dots,\lambda\underline{e}_n)$, vil den duale erstattes med $(\lambda^{-1}\underline{e}_0^*,\dots,\lambda^{-1}\underline{e}_n^*)$. Som "fundamentalhyperplanerne" $E_0^*,\dots,E_n^*$ og "enhedshyperplanen" E^* vælges hyperplanerne, der er repræsenteret ved henholdsvis $\underline{e}_0^*,\dots,\underline{e}_n^*$ og $\underline{e}^*$. Omvendt er der på samme måde til hvert hyperplankoordinatsystem knyttet et punktkoordinatsystem. Ud fra det definerede system $(E_0^*,\dots,E_n^*;E^*)$ kommer man derved tilbage til det oprindelige punktkoordinatsystem $(E_0,\dots,E_n;E)$.

I det følgende benyttes udelukkende sådanne par af sammenhørende punkt-og hyperplankoordinatsystemer. Et punkt X med koordinatsæt $(x_0,\dots,x_n)$ og en hyperplan Y^* med koordinatsæt $(y_0^*,\dots,y_n^*)$ er ifølge (1) incidente, hvis og kun hvis

$$\underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{y}}^*| = \underline{\underline{y}}^*\underline{\underline{x}}| = x_0y_0^* + \dots + x_ny_n^* = 0 .$$

For fast Y^* er dette en ligning for (det (n-1) - dimensionale P-underrum, hvis punkter ligger i) hyperplanen Y^*, og for fast X er det en ligning for (det (n-1) - dimensionale H-underrum, hvis hyperplaner går gennem) punktet X. Fundamentalhyperplanen E_i^* har som ligning $x_i = 0$. Den udspændes af fundamentalpunkterne E_0 $E_{i-1},\dots,E_{i+1},\dots,E_n$. Fundamentalpunkt E_i har som ligning $y_i^* = 0$. Det er fællespunktet for hyperplanerne i det af $E_0^*,\dots,E_{i-1}^*$, $E_{i+1}^*,\dots,E_n^*$ udspændte H-underrum. Enhedshyperplanen E^* har som ligning $x_0+\dots+x_n = 0$, og enhedspunktet E har som ligning $y_0^*+\dots+y_n^* = 0$.

Et sæt $(A_0,\dots,A_r)$ af r+1 uafhængige punkter i et projektivt rum Π^n kaldes et <u>r-dimensionalt simplex</u>. Hvert delsæt bestående af s+1 af punkterne, hvor $0 \leqq s \leqq r$, kaldes et <u>s-dimensionalt randsimplex</u> og det af et sådant udspændte P-underrum en <u>s-dimensional side</u> (for s = 0 et <u>hjørne</u>, for s = 1 en <u>kant</u>) af simplexet. Deles sættet $(A_0,\dots,A_r)$ i to komplementære delsæt, fås <u>modstående randsimplexer</u>. De af dem udspændte <u>modstående sider</u> er på grund af uafhængigheden af punkterne $A_0,\dots,A_r$ disjunkte P-underrum, hvis dimensionstal har summen r-1. De er altså komplementære i $\Pi^r = A_0\vee\dots\vee A_r$. Inden for dette rum er begrebet simplex selvdualt, idet hjørner og (r-1)-dimensionale sider, der jo er hyperplaner i Π^r, bytter rolle. I stedet for de s-dimensionale sider træder de s-dimensionale H-underrum bestående af hyperplanerne, der indeholder en (r-s-1)-dimensional side.



Med disse definitioner kan man sige, at et projektivt punktkoordinatsystem i Π^n består af et n-dimensionalt simplex $(E_0,\dots,E_n)$, <u>fundamentalsimplexet</u>, og et punkt E, som ikke ligger på nogen af siderne. Lad $(E_{i_0},\dots,E_{i_s})$, hvor $s<n$, være et randsimplex og $(E_{i_{s+1}},\dots,E_{i_n})$ dets modstående. Det er ikke nogen væsentlig indskrænkning at antage, at det drejer sig om randsimplexerne $(E_0,\dots,E_s)$ og $(E_{s+1},\dots,E_n)$. Et punkt X med koordinatsæt $(x_0,\dots,x_n)$ ligger i siden $E_{s+1}\vee\dots\vee E_n$, hvis og kun hvis $x_0=\dots=x_s=0$. I det følgende forudsættes, at dette ikke er tilfældet. P-underrummet $E_{s+1}\vee\dots\vee E_n\vee X$, som da har dimensionen n-s, udspænder sammen med $E_0\vee\dots\vee E_s$ hele rummet Π^n og har derfor ifølge dimensionsformlen netop ét punkt $X_{0\dots s}$ fælles med $E_0\vee\dots\vee E_s$. Dette punkt kaldes projektionen af X fra $E_{s+1}\vee\dots\vee E_n$ på $E_0\vee\dots\vee E_s$. Den tilsvarende projektion af E betegnes $E_{0\dots s}$.
Af ligningerne

$$\underline{e}_0 + \cdots + \underline{e}_s = \underline{e} - \underline{e}_{s+1} - \cdots - \underline{e}_n ,$$
$$x_0\underline{e}_0 + \cdots + x_s\underline{e}_s = \underline{x} - x_{s+1}\underline{e}_{s+1} - \cdots - x_n\underline{e}_n ,$$

hvor $\underline{x}$ er en repræsentant for X, ses, at deres venstre sider er repræsentanter for henholdsvis $E_{0\ldots s}$ og $X_{0\ldots s}$. Heraf sluttes, at $(x_0,\ldots,x_s)$ er et koordinatsæt for $X_{0\ldots s}$ med hensyn til koordinatsystemet $(E_0,\ldots,E_s;E_{0\ldots s})$ i P-underrummet $E_0\vee\cdots\vee E_s$. Det til dette punktkoordinatsystem knyttede hyperplankoordinatsystem fås ved at skære underrummet med $E_0^*,\ldots,E_n^*$ og E^*.

Lad Π_1^n og Π_2^n være projektive punktrum over samme legeme L og af samme dimension $n>1$. Ved en <u>kollineation</u> af Π_1^n på Π_2^n forstås en bijektiv afbildning $\varphi:\Pi_1^n \to \Pi_2^n$, ved hvilken enhver linie i Π_1^n afbildes på en linie i Π_2^n. Den inverse afbildning φ^{-1} er da en kollineation af Π_2^n på Π_1^n. Der gælder endvidere: <u>Ved φ afbildes hvert r-dimensionalt P-underrum $\Pi_1^r \subset \Pi_1^n$, $1 \leq r \leq n-1$, på et r-dimensionalt P-underrum af Π_2^n</u>. Dette ses ved induktion efter r. For r=1 er det rigtigt ifølge definition. Lad P-underrummet Π_1^r være givet. I dette vælges et (r-1)-dimensionalt P-underrum Π_1^{r-1} og et punkt A uden for dette. Da gælder $\Pi_1^{r-1}\vee A = \Pi_1^r$. Af dimensionsformlen (8) sluttes, at linien $A\vee X$ for hvert fra A forskelligt punkt $X \in \Pi_1^r$ skærer Π_1^{r-1}. Følgelig er Π_1^r foreningsmængden af alle linier, der forbinder A med punkterne i Π_1^{r-1}. Antages nu påstanden at være rigtig for (r-1)-dimensionale underrum, vil $\varphi(\Pi_1^{r-1})$ være et (r-1)-dimensionalt underrum i Π_2^r og $\varphi(A)$ et punkt uden for dette. Idet de omtalte linier afbildes på de linier gennem $\varphi(A)$, der skærer $\varphi(\Pi_1^{r-1})$, og disse liniers foreningsmængde er det r-dimensionale underrum $\varphi(\Pi_1^{r-1})\vee\varphi(A)$, er påstanden hermed bevist.

Ved at anvende det viste på φ^{-1} ses, at der ved φ for hvert $r=1,\dots,n-1$ bestemmes en bijektiv afbildning af mængden af r-dimensionale P-underrum af Π_1^n på mængden af r-dimensionale P-underrum af Π_2^n. For $r=n-1$ induceres altså en bijektiv afbildning af hyperplanrummet Π_1^{n*} på hyperplanrummet Π_2^{n*}, der af grunde, som vil fremgå af det følgende, betegnes φ^{*-1}. Det ses let, at ethvert hyperplanbundt ved φ^{*-1} afbildes på et hyperplanbundt, altså at denne afbildning har egenskaben, der er dual til den ved φ forudsatte. Man kan omvendt gå ud fra en bijektiv afbildning af Π_1^{n*} på Π_2^{n*}, ved hvilken hyperplanbundter afbildes på hyperplanbundter, og dertil på dual måde bestemme en kollineation af Π_1^n på Π_2^n. Fra φ^{*-1} kommer man da tilbage til φ. Ved en <u>kollineation af det projektive rum</u> (Π_1^n,Π_1^{n*}) <u>på det projektive rum</u> (Π_2^n,Π_2^{n*}) forstås et par (φ,φ^{*-1}) af sådanne sammenhørende afbildninger.

Idet en fuldstændig firkant ved en kollineation afbildes på en fuldstændig firkant, vil harmoniske punktsæt afbildes på harmoniske punktsæt, og tilsvarende gælder for hyperplansæt.

Lad Π_1^n og Π_2^n være projektive punktrum over sammen legeme L og af samme dimension $n>0$. En bijektiv afbildning $\varphi:\Pi_1^n\to\Pi_2^n$ kaldes en <u>projektiv kollineation</u> (for n=1 <u>projektivitet</u>) af Π_1^n på Π_2^n, hvis hvert sæt af fire punkter i Π_1^n, der ligger på en linie og har et dobbeltforhold, afbildes på et sæt af fire punkter på en linie i Π_2^n med samme dobbeltforhold. Er A,B,C indbyrdes forskellige punkter på en linie l_1 i Π_1^n, vil billedpunkterne ligge på en linie l_2 i Π_2^n (da jo $df(ABCC) = 1$). Idet der ved $X_1 \longleftrightarrow df(ABCX_1)$ bestemmes en enentydig korrespondance mellem mængden af punkter X_1 på l_1 og $L\cup\{\infty\}$ og ved $df(\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)X_2) \longleftrightarrow X_2$ en enentydig korrespondance mellem $L\cup\{\infty\}$ og mængden af punkter X_2 på l_2, må φ afbilde l_1 på l_2. Dette viser, at for $n>1$ er enhver projektiv kollineation en kollineation. Der gælder <u>projektivgeometriens fundamentalsætning</u>:

<u>Lad</u> Π_1^n <u>og</u> Π_2^n <u>være projektive punktrum over samme legeme</u> L <u>og af samme dimension</u> $n > 0$. <u>Lad endvidere</u> $A_0,\dots,A_n,A$ <u>være punkter i</u> Π_1^n, <u>således at hvilkesomhelst</u> n+1 <u>af dem er uafhængige, og</u> $B_0,\dots,B_n,B$ <u>punkter i</u> Π_2^n <u>med samme egenskab. Der findes da en og kun én projektiv kollineation</u> $\varphi:\Pi_1^n \to \Pi_2^n$ <u>ved hvilken</u> $\varphi(A_0) = B_0,\dots, \varphi(A_n) = B_n, \varphi(A) = B$.

For at bevise eksistensen af en sådan afbildning betragtes vektorrummene V og W, der bestemmer Π_1^n og Π_2^n. Lad $\underline{a}_0,\dots,\underline{a}_n$, $\underline{b}_0,\dots,\underline{b}_n$ være repræsentanter for henholdsvis $A_0,\dots,A_n,B_0,\dots,B_n$, således at $\underline{a} = \underline{a}_0+\dots+\underline{a}_n$ og $\underline{b} = \underline{b}_0+\dots+\underline{b}_n$ er repræsentanter for henholdsvis A og B. Idet sættene $(\underline{a}_0,\dots,\underline{a}_n)$ og $(\underline{b}_0,\dots,\underline{b}_n)$ er lineært uafhængige, findes der en bijektiv lineær afbildning $f:V \to W$, ved hvilken det første sæt afbildes på det andet.
Man har da

$$f(\underline{a}) = f(\underline{a}_0) + \dots + f(\underline{a}_n) = \underline{b}_0 + \dots + \underline{b}_n = \underline{b}.$$

Afbildningen f inducerer en bijektiv afbildning af mængden af 1-dimensionale underrum i V på mængden af 1-dimensionale underrum i W, altså en bijektiv afbildning φ, ved hvilken $\varphi(A_0) = B_0, \dots, \varphi(A_n) = B_n, \varphi(A) = B$. Er P,Q,R,S punkter på en linie i Π_1^n, hvoraf mindst tre, f.eks. P,Q,R, er indbyrdes forskellige, og er $\underline{p},\underline{q},\underline{r},\underline{s}$ sådanne repræsentanter for dem, at

$$\underline{r} = \underline{p} + \underline{q}\,, \quad \underline{s} = \rho\underline{p} + \sigma\underline{q}\,, \qquad \rho,\sigma \in L\,,$$

vil der for billedvektorerne ved f gælde

$$f(\underline{r}) = f(\underline{p}) + f(\underline{q})\,, \quad f(\underline{s}) = \rho f(\underline{p}) + \sigma f(\underline{q})\,.$$

Heraf sluttes, at $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R), \varphi(S)$ ligger på linie og dobbeltforholdet er lig med df(PQRS). Dermed er vist, at φ er en projektiv kollineation med de forlangte egenskaber.

For at bevise entydigheden bemærkes, at hvis ψ og χ er afbildninger af den forlangte art, vil $\varphi = \chi^{-1}\circ\psi$ være en projektiv kollineation af Π_1^n på sig selv med $A_0,\ldots,A_n,A$ som fixpunkter, og påstanden går ud på, at denne er den identiske afbildning. Beviset føres ved induktion. For $n = 1$ lad φ være en projektivitet af Π_1^1 med 3 forskellige fixpunkter A_0,A_1,A. For hvert punkt $X \in \Pi^1$ gælder da

$$df(A_0A_1AX) = df(A_0A_1A\varphi(X)) ,$$

altså $\varphi(X) = X$, hvilket er påstanden. Det antages nu, at påstanden er rigtig for (n-1)-dimensionale projektive rum. Lad φ være en projektiv kollineation af Π_1^n med $A_0,\ldots,A_n,A$ som fixpunkter, og lad $A_{1\ldots n}$ være projektionen af A fra A_0 på $A_1 \vee\ldots\vee A_n$. Da såvel linien $A_0 \vee A$ som hyperplanen $A_1 \vee\ldots\vee A_n$ afbildes på sig selv, er $A_{1\ldots n}$ fixpunkt, og restriktionen af φ til denne hyperplan er derfor ifølge induktionsantagelsen den identiske afbildning. Er nu X et vilkårligt fra A_0 og A forskelligt punkt i Π_1^n, som ikke ligger i $A_1 \vee\ldots\vee A_n$, vil hver af linierne $A_0 \vee X$ og $A \vee X$ afbildes på sig selv, idet A_0 og A samt liniernes skæringspunkter med $A_1 \vee\ldots\vee A_n$ er fixpunkter. Heraf følger, at X er fixpunkt. Dermed er vist, at φ er den identiske afbildning.

Af beviset fremgår tillige, at <u>enhver projektiv kollineation induceres af en lineær afbildning</u>.

To bijektive lineære afbildninger f og g af V på W inducerer den samme projektive kollineation, hvis og kun hvis $f(U) = g(U)$, altså $f^{-1}\circ g(U) = U$ for hvert 1-dimensionalt underrum U af V. Dette er ensbetydende med, at hver vektor i V er egenvektor for $h = f^{-1}\circ g$, altså med, at h er en homoteti af V.

Idet $g = f \circ h$, bestemmer φ den lineære afbildning f på nær sammensætning med en homoteti.

Lad der være valgt projektive punktkoordinatsystemer $(E_0,\ldots,E_n;E)$ og $(F_0,\ldots,F_n;F)$ i Π_1^n og Π_2^n. Disse bestemmer, som omtalt, en basis $(\underline{e}_0,\ldots,\underline{e}_n)$ for V og en basis $(\underline{f}_0,\ldots,\underline{f}_n)$ for W, hver på nær en fra 0 forskellig faktor fra L. Er nu $\varphi:\Pi_1^n \to \Pi_2^n$ en projektiv kollineation og $f:V \to W$ en lineær afbildning, der inducerer den, vil den regulære $(n+1)\times(n+1)$-matrix $\underline{\underline{A}}$, der med hensyn til de nævnte baser hører til f, på nær en fra 0 forskellig faktor fra L være bestemt ved φ og de to projektive koordinatsystemer. Såvel de mulige ændringer af baserne for V og W som sammensætningen af f med en homoteti kan nemlig kun bevirke, at matricen erstattes med en proportional. Til φ hører således matrixligningen

$$\underline{\underline{y}}_| = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{x}}_| ,$$

der til et vilkårligt koordinatsæt $\underline{\underline{x}}_|$ for et punkt $X \in \Pi_1^n$ giver et koordinatsæt $\underline{\underline{y}}_|$ for $\varphi(X)$, og hvor $\underline{\underline{A}}$ for hvert $\rho \in L\setminus\{0\}$ kan erstattes med $\rho\underline{\underline{A}}$ men ikke med nogen anden matrix. Det er klart, at omvendt hver regulær matrix $\underline{\underline{A}}$ med elementer fra L efter valg af koordinatsystemer ved ovenstående matrixligning bestemmer en projektiv kollineation.

Sætningen for den reelle projektive plan om bestemmelsen af en til en projektiv kollineation hørende matrix (side III,3, 13) og beviset for den kan overføres uden vanskelighed til det her betragtede almindelige tilfælde. Det samme gælder for dens anvendelse på koordinattransformationer (side III,3,14).

Som fremhævet ovenfor (side III,5,15) er der til hver kollineation $\varphi : \Pi_1^n \to \Pi_2^n$ knyttet en afbildning $\varphi^{*-1} : \Pi_1^{n*} \to \Pi_2^{n*}$, ved hvilken der til en hyperplan $X^* \in \Pi_1^*$ svarer den hyperplan $\varphi^{*-1}(X^*)$, hvis punkter er billedpunkterne ved φ af punkterne i X. Er φ en projektiv kollineation, der induceres af den lineære afbildning $f : V \to W$, vil φ^{*-1} induceres af $f^{*-1} : V^* \to W^*$, hvor f^* er den til f afjungerede afbildning. Er $\underline{x}$ en repræsentant for et punkt $X \in \Pi_1^n$ og y^* en repræsentant for en hyperplan $Y^* \in \Pi_2^{n*}$, har vi nemlig (jf. side III,5,4)

$$\langle f^*(\underline{y}^*), \underline{x} \rangle_V = 0 \iff \langle y^*, f(\underline{x}) \rangle_W = 0 ,$$

hvilket udsiger, at $f^*(\underline{y}^*)$ repræsenterer den hyperplan X^* i Π_1^{n*}, hvis punkter X ved φ afbildes på punkterne i hyperplanen Y^*, der repræsenteres ved $\underline{y}^*$. Vi har altså $Y^* = \varphi^{*-1}(X^*)$, som påstået,

Er der valgt sammenhørende punkt - og hyperplankoordinatsystemer i (Π_1^n, Π_1^{n*}) og (Π_2^n, Π_2^{n*}), og er $\underline{\underline{A}}$ en til den projektive kollineation φ hørende matrix, vil $\underline{\underline{A}}'^{-1}$ være en til φ^{*-1} hørende matrix.

Vi betragter nu projektive kollineationer af et projektivt rum (Π^n, L) på sig selv. Det er klart at mængden af disse med sammensætning som komposition er en gruppe. Den kaldes den <u>projektive gruppe af graden</u> n+1 <u>over</u> L og betegnes PGL(n+1,L) (Projektiv General Linear group). Den kan bestemmes på følgende måde. Lad $(V,+,L)$ være vektorrummet, der bestemmer Π^n. De bijektive lineære afbildninger $f:V \to V$ udgør den generelle lineære gruppe $GL(n+1,L)$. Ved til hver afbildning f fra denne at lade svare den projektive kollineation φ den inducerer fås en homomorfi af $GL(n+1,L)$ på $PGL(n+1,L)$. Kernen ved denne er gruppen $H(n+1,L)$ af de fra nulafbildningen forskellige homotetier af V. Den projektive gruppe er altså isomorf med faktorgruppen $GL(n+1,L)/H(n+1,L)$. At denne gruppe på nær isomorfi er bestemt ved n og L følger af, at de $(n+1)$-dimensionale vektorrum over L er indbyrdes isomorfe.

De til de projektive kollineationer $\varphi:\Pi^n \to \Pi^n$ knyttede hyperplanafbildninger $\varphi^{*-1}:\Pi^{n*} \to \Pi^{n*}$ udgør ligeledes en gruppe. Denne er imidlertid isomorf med $PGL(n+1,L)$, idet der ved $\varphi \to \varphi^{*-1}$ defineres en isomorfi.

Fixpunktproblemet for en projektiv kollineation $\varphi:\Pi^n \to \Pi^n$ føres, lige som for den reelle projektive plan, tilbage til egenværdiproblemet for en lineær afbildning f, der inducerer φ. Et punkt $X \in \Pi^n$ er fixpunkt ved φ, hvis og kun hvis $f(\underline{x})$, hvor $\underline{x}$ er en repræsentant for X, ligeledes er en repræsentant for X, altså hvis og kun hvis $\underline{x}$ er egenvektor for f. Et $(p+1)$-dimensionalt egenrum for f bestemmer et p-dimensionalt P-underrum bestående af fixpunkter. Idet egenrummene for f svarende til forskellige egenværdier danner direkte sum, er mængden af fixpunkter ved φ foreningsmængden af parvis disjunkte P-underrum. Summen af disse fixpunktunderrums dimensionstal er højst $n+1-r$, hvor r betegner deres antal.

Bestemmelsen af fixhyperplanerne ved den til φ knyttede hyperplanafbildning φ^{*-1} går ud på løsning af egenværdiproblemet for den lineære afbildning $f^{*-1}:V^* \to V^*$ eller for f^*, som jo har de samme egenvektorer (hørende til de reciprokke egenværdier). Er $\underline{x}$ en egenvektor for f hørende til egenværdien λ og $\underline{y}^*$ en egenvektor for f^* hørende til egenværdien $\mu \neq \lambda$, gælder (jf. side III, 5,4)

$$\langle f^*(\underline{y}^*),\underline{x}\rangle = \langle \underline{y}^*,f(\underline{x})\rangle \ ,$$

altså

$$\mu\langle \underline{y}^*,\underline{x}\rangle = \lambda\langle \underline{y}^*,\underline{x}\rangle \ ,$$

hvilket medfører $\langle \underline{y}^*,\underline{x}\rangle = 0$. Dette viser, at et fixpunkt X og en fixhyperplan Y^* er incidente, hvis de repræsenteres henholdsvis af en egenvektor $\underline{x}$ for $\underline{f}$ og en egenvektor $\underline{y}^*$ for f^*, som hører til forskellige egenværdier.

Lad (Π_1^n,Π_1^{n*},L) og (Π_2^n,Π_2^{n*},L) være to projektive rum over samme legeme. Ved en <u>projektiv korrelation</u> af det første på det andet forstås et par af bijektive afbildninger $\psi:\Pi_1^n \to \Pi_2^{n*}$ og $\psi^{*-1}:\Pi_1^{n*} \to \Pi_2^n$ med følgende egenskaber: Hvert sæt af fire punkter i Π_1^n, som ligger på en linie og har et dobbeltforhold, afbildes ved ψ på et sæt af hyperplaner i Π_2^{n*}, som tilhører et hyperplanbundt og har det samme dobbeltforhold. Afbildningen ψ^{*-1} har den duale egenskab, dvs. ved den afbildes hvert sæt af fire hyperplaner i Π_1^*, som tilhører et hyperplanbundt og har et dobbeltforhold, på et sæt af punkter i Π_2^n, som ligger på en linie og har det samme dobbeltforhold. Punktet $X \in \Pi_1^n$ ligger i hyperplanen $X^* \in \Pi_1^{n*}$, når og kun når hyperplanen $\psi(X) \in \Pi_2^{n*}$ går gennem punktet $\psi^{*-1}(X^*) \in \Pi_2^n$.

For at vise eksistensen af projektive korrelationer betragtes parrene V,V^* og W,W^* af indbyrdes duale vektorrum, der bestemmer henholdsvis (Π_1^n, Π_1^{n*}) og (Π_2^n, Π_2^{n*}). Lad $g:V \to W^*$ være en bijektiv lineær afbildning og $g^*:W \to V^*$ dens adjungerede (jf. side III,5,5). Afbildningerne g og g^{*-1} inducerer da afbildninger $\psi:\Pi_1^n \to \Pi_2^{n*}$ og $\psi^{*-1}:\Pi_1^{n*} \to \Pi_2^n$. At disse bevarer dobbeltforhold i ovennævnte forstand, sluttes som i eksistensbeviset for projektive kollineationer (side III,5,16-17). At ψ og ψ^{*-1} tilsammen er incidensbevarende, er ensbetydende med følgende: For $X \in \Pi_1^n$ og $Y \in \Pi_2^n$ gælder, at X ligger i $\psi^*(Y)$, når og kun når $\psi(X)$ går gennem Y. At dette er rigtigt sluttes af, at der for repræsentanter $\underline{x}$ for X og $\underline{y}$ for Y gælder (jf. side III,5,5)

$$\langle g^*(\underline{y}), \underline{x}\rangle_V = 0 \iff \langle g(\underline{x}), \underline{y}\rangle_W = 0 .$$

Er (ψ, ψ^{*-1}) en projektiv korrelation af (Π_1^n, Π_1^{n*}) på (Π_2^n, Π_2^{n*}), vil den "inverse" (ψ^*, ψ^{-1}) være en projektiv korrelation af (Π_2^n, Π_2^{n*}) på (Π_1^n, Π_1^{n*}). Er også (ψ_o, ψ_o^{*-1}) en projektiv korrelation af (Π_1^n, Π_1^{n*}) på (Π_2^n, Π_2^{n*}), vil

$$(\varphi, \varphi^{*-1}) = (\psi^* \circ \psi_o,\ \psi^{-1} \circ \psi_o^{*-1})$$

være en projektiv kollineation af (Π_1^n, Π_1^{n*}) på sig selv. Heraf sluttes, at enhver projektiv korrelation (ψ, ψ^{*-1}) kan fås ved at sammensætte en projektiv kollineation $(\varphi^*, \varphi^{-1})$ med én fast valgt projektiv korrelation (ψ_o, ψ_o^{*-1}). Ved hjælp af fundamentalsætningen (side III,5,16) kan man nu bevise en til denne analog sætning for projektive korrelationer og derefter slutte, at hver projektiv korrelation induceres af lineære afbildninger $g:V \to W^*$ og $g^{*-1}:V^* \to W$, og at disse afbildninger er bestemt pånær faktorer fra $L\setminus\{0\}$.

En bijektiv lineær afbildning $g:V \to W^*$ og dermed den inducerede projektive korrelation ψ kan bestemmes ved en ikke-udartet bilinearform B defineret på $W \times V$ (jf.side III,5,5). Er $\underline{x}$ en valgt repræsentant for et punkt $X \in \Pi_1^n$, vil $\psi(X)$ være den hyperplan i Π_2^{n*}, der går gennem alle punkter i Π_2^n, hvis repræsentanter $\underline{y}$ tilfredsstiller ligningen $B(\underline{y},\underline{x}) = 0$. Den tilhørende afbildning ψ^{*-1} bestemmes på analog måde ved bilinearformen B'^{-1} defineret på $W^* \times V^*$ (jf.side III,5,6). Er $\underline{x}^*$ en valgt repræsentant for en hyperplan $X^* \in \Pi_1^{n*}$, vil $\psi^{*-1}(\underline{x}^*)$ være det punkt i Π_2^n, der ligger i alle hyperplaner i Π_2^{n*}, hvis repræsentanter $\underline{y}^*$ tilfredsstiller ligningen $B'^{-1}(\underline{y}^*,\underline{x}^*) = 0$. To bilinearformer B_o og B bestemmer den samme afbildning ψ, hvis og kun hvis de er proportionale, altså hvis og kun hvis der findes et $\rho \in L\setminus\{0\}$, således at $B = \rho B_o$. For formerne $B_o'^{-1}$ og B'^{-1} gælder da $B'^{-1} = \rho^{-1}B_o'^{-1}$, og de bestemmer derfor den samme afbildning ψ^{*-1}. Omvendt medfører det sidste, at B og B_o bestemmer den samme afbildning ψ.

Vi betragter nu projektive korrelationer (ψ,ψ^{*-1}) af et projektivt rum (Π^n,Π^{n*},L) på sig selv. Af særlig interesse er de involutoriske, for hvilke altså $(\psi^*,\psi^{-1}) = (\psi,\psi^{*-1})$, dvs. $\psi^* = \psi$. Er ψ bestemt ved bilinearformen B, går dette ud på, at der findes et $\rho \in L\setminus\{0\}$, således at $B' = \rho B$, altså

$$B(\underline{y},\underline{x}) = \rho B(\underline{x},\underline{y})$$

for alle $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i vektorrummet V, der bestemmer Π^n. Erstattes her $\underline{x}$ med $\underline{y}$ og $\underline{y}$ med $\underline{x}$, fås en ligning, der sammen med den oprindelige giver $\rho^2 = 1$, altså $\rho = 1$ eller $\rho = -1$. Heraf sluttes: <u>En projektiv korrelation er involutorisk, hvis og kun hvis en bilinearform, der bestemmer den, er symmetrisk eller antisymmetrisk</u>. Idet bilinearformerne, der bestemmer korrelationen, er indbyrdes proportionale, er de da alle henholdsvis symmetriske eller antisymmetriske. Endvidere ses let, at hvis bilinearformen B er symmetrisk (antisymmetrisk), gælder det samme om B'^{-1}.

Hvis legemet L har karakteristik 2, er der ingen forskel mellem symmetri og antisymmetri. I det følgende forudsættes, at karakteristikken er forskellig fra 2.

En korrelation, der bestemmes ved antisymmetriske bilinearformer, kaldes et <u>nulsystem</u>. Idet alle antisymmetriske bilinearformer i vektorrum af ulige dimension er singulære, findes nulsystemer kun i projektive rum af ulige dimension. Er B en antisymmetrisk bilinearform defineret på $V \times V$, gælder for hver vektor $\underline{x} \in V$, at $B(\underline{x},\underline{x}) = -B(\underline{x},\underline{x})$, altså $B(\underline{x},\underline{x}) = 0$. Dette viser, at ved et nulsystem ligger hvert punkt i sin billedhyperplan, og hver hyperplan går gennem sit billedpunkt.

I det følgende betragtes en <u>polaritet</u> (ψ,ψ^{-1}), hvor ψ er bestemt ved en symmetrisk bilinearform B på $V \times V$. Den til et punkt $X \in \Pi^n$ svarende hyperplan $\psi(X) \in \Pi^{n*}$ kaldes <u>polarhyperplanen</u> eller kort <u>polaren</u> for X. Det til en hyperplan $X^* \in \Pi^{n*}$ svarende punkt $\psi^{-1}(X^*) \in \Pi^n$ kaldes <u>polen</u> for X^*. Hvert punkt er polen for sin polar og hver hyperplan polaren for sin pol. <u>To punkter</u> X og Y siges at være <u>konjugerede</u> med hensyn til polariteten, hvis et, og da hvert af dem ligger i det andets polar. Dette er ensbetydende med, at der for repræsentanter $\underline{x}$ og $\underline{y}$ for punkterne gælder $B(\underline{x},\underline{y}) = 0$, altså at de er konjugerede med hensyn til bilinearformen B. Tilsvarende siges <u>to hyperplaner</u> at være <u>konjugerede</u>, hvis en, og da hver af dem går gennem den andens pol. For repræsentanter af dem er dette ensbetydende med, at de er konjugerede med hensyn til bilinearformen B'^{-1}, der her på grund af $B' = B$ også kan betegnes B^{-1}.

Mængden af selvkonjugerede punkter med hensyn til polariteten ψ kaldes den til denne hørende punktkvadrik og betegnes K_ψ. Mængden af selvkonjugerede hyperplaner kaldes den til ψ hørende hyperplankvadrik og betegnes K_ψ^*. Repræsentanterne for punkterne $X \in K_\psi$ er præcis de egentlige vektorer $\underline{x} \in V$, for hvilke $B(\underline{x},\underline{x}) = 0$, og repræsentanterne for hyperplanerne $X^* \in K_\psi^*$ er præcis de egentlige vektorer $\underline{x}^* \in V^*$, for hvilke $B^{-1}(\underline{x}^*,\underline{x}^*) = 0$. Kvadrikkerne er enten begge tomme eller begge ikke-tomme. I sidste tilfælde ligger hvert punkt $X \in K_\psi$ i (mindst) en hyperplan hørende til K_ψ^*, nemlig polaren $\psi(X)$. Denne kaldes tangenthyperplanen til K_ψ i X. Hver hyperplan $X^* \in K_\psi^*$ går gennem (mindst) et punkt tilhørende K_ψ, nemlig polen $\psi^{-1}(X^*)$. Den er altså tangenthyperplan til K_ψ med røringspunkt $\psi^{-1}(X^*) \in K_\psi$. En linie kaldes en tangent til K_ψ i punktet $X \in K_\psi$, hvis den går gennem X og ligger i tangenthyperplanen i X.

Lad ψ være en vilkårlig polaritet i Π^n bestemt ved den symmetriske bilinearform B. Der findes da ikke-selvkonjugerede punkter, og dermed også ikke-selvkonjugerede hyperplaner, idet den kvadratiske form $B(\underline{x},\underline{x})$ jo ikke er identisk lig 0. Lad A^* være en sådan hyperplan og A dens pol. For hvert punkt $X \in A^*$ går polaren gennem A og skærer A^* i et (n-2)-dimensionalt P-underrum. Dette består af punkterne i en hyperplan $\psi_{A^*}(X)$ i det (n-1)-dimensionale projektive rum A^*. Ved til X at lade svare $\psi_{A^*}(X)$ fås en afbildning ψ_{A^*}, som bestemmes ved restriktionen af B til $V_{A^*} \times V_{A^*}$, hvor V_{A^*} er underrummet af V, der bestemmer A^*, og som følgelig er en polaritet. Vi vil kalde den restriktionen af polariteten ψ til hyperplanen A^*. Eventuelle selvkonjugerede punkter ved denne, er netop fællespunkterne for A^* og K_ψ. Der gælder altså: Fællesmængden for en punktkvadrik og en ikke-selvkonjugeret hyperplan er en punktkvadrik i denne eller tom.

Dualistisk tilsvarende kan man betragte restriktionen af polariteten ψ^{-1} til punktet A, dvs. til det (n-1)-dimensionale H-underrum, som består af hyperplanerne gennem A, og som vi vil tillade os også at betegne med A. Den er bestemt på følgende måde: Lad X^* være en hyperplan gennem A. Dens pol $\psi^{-1}(X^*)$ ligger da i A^*. Ved til X^* at lade svare linien $A\vee\psi^{-1}(X^*)$ fås en afbildning ψ_A^{-1} af det (n-1)-dimensionale H-underrum A på mængden af linier gennem punktet A. Nu hører til en linie gennem dette punkt det (n-2)-dimensionalt H-underrum bestående af hyperplanerne, som indeholder linien (jfr. side III,5,7), og som følgelig tilhører H-underrummet A. Vi kan altså opfatte ψ_A^{-1} som en afbildning, der til hver hyperplan i H-underrummet A lader svare et (n-2)-dimensionalt H-underrum af H-underrummet A. Opfattet på denne måde bestemmes ψ_A^{-1} ved restriktionen af bilinearformen B^{-1} til $V_A^*\times V_A^*$, hvor V_A^* betegner det n-dimensionale underrum af V^*, som bestemmer H-underrummet A. Heraf sluttes, at ψ_A^{-1} er en polaritet i A. En hyperplan X^* gennem punktet A er selvkonjugeret ved denne polaritet, hvis og kun hvis den indeholder linien $\psi_A^{-1}(X^*) = A\vee\psi^{-1}(X^*)$. Dette er ensbetydende med, at hyperplanen X^* indeholder sin pol ved ψ^{-1}, altså med, at X^* er tangenthyperplan til kvadrikken K_ψ med $\psi^{-1}(X^*)$ som røringspunkt, og dette igen med, at linien $\psi_A^{-1}(X^*)$ er tangent til K_ψ. Idet mængden af selvkonjugerede hyperplaner gennem A, hvis den ikke er tom, kaldes en kvadratisk hyperplankegle med A som toppunkt og mængden af tilsvarende linier den af hyperplankeglen indhyllede kvadratiske liniekegle, kan vi sammenfatte de fundne resultater på følgende (ikke helt selvdualistiske, men anskueligt nærliggende) måde: Lad ψ være en polaritet i Π^n, til hvilken der hører en ikke-tom kvadrik K_ψ. Lad endvidere A være et ikke-selvkonjugeret punkt og A^* dets polar. Hvis $K_\psi \cap A^* \neq \emptyset$, er denne fællesmængde en kvadrik i A^* og tangenthyperplanerne til K_ψ i dennes punkter udgør en kvadratisk hyperplankegle med toppunkt A. Den af hyperplankeglen indhyllede liniekegle udgøres af linierne, der forbinder A med punkterne i $K_\psi \cap A^*$, og disse linier er netop de tangenter til K_ψ, der går gennem A.

Et simplex $(A_0,\dots,A_n)$ i Π^n siges at være et selvpolært simplex eller polarsimplex med hensyn til en polaritet ψ, hvis hvert hjørne er den modstående sides pol, og dermed hver $(n-1)$-dimensional side det modstående hjørnes polar. Dette er ensbetydende med, at repræsentanter $\underline{a}_0,\dots,\underline{a}_n$ for hjørnerne er lineært uafhængige og parvis konjugerede med hensyn til en bilinearform B, der bestemmer ψ, altså opfylder $B(\underline{a}_i,\underline{a}_j) = 0$ for $i,j = 0,\dots,n$, $i \neq j$. At bestemme et polarsimplex går altså ud på at finde en basis$(\underline{a}_0,\dots,\underline{a}_n)$ for V, hvis vektorer er parvis konjugerede med hensyn til B. At sådanne baser eksisterer, ses let ved induktion efter n: For $n = 0$ er det klart. Antag, at påstanden er rigtig for n-dimensionale vektorrum. I det $(n+1)$-dimensionale vektorrum V vælges en vektor $\underline{a}_0$, for hvilken $B(\underline{a}_0,\underline{a}_0) \neq 0$. Ifølge induktionsantagelsen findes i underrummet, hvis vektorer $\underline{x}$ tilfredsstiller $B(\underline{a}_0,\underline{x}) = 0$, en basis $(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)$, hvis vektorer er parvis konjugerede med hensyn til restriktionen af B til underrummet, altså, hvad der kommer ud på det samme, med hensyn til B. Følgelig er $(\underline{a}_0,\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)$ en basis for V af den forlangte art.

Man ser, at man kan vælge et hjørne A_o i et polarsimplex vilkårligt blandt de ikke-selvkonjugerede punkter, et andet hjørne A_1 blandt de ikke-selvkonjugerede punkter i polaren for A_o, et tredie blandt de ikke-selvkonjugerede punkter i fællesmængden for polarerne for A_o og A_1 osv., det næstsidste A_{n-1} blandt de ikke-selvkonjugerede punkter på linien, der er fælles for polarerne for $A_o,\dots,A_{n-2}$. Det sidste hjørne A_n er da bestemt som fællespunkt for de n første hjørners polarer.

Lad en polaritet $\psi:\Pi^n \to \Pi^{n*}$ være bestemt ved den symmetriske bilinearform B defineret på VxV. Vælges et projektivt koordinatsystem $(E_o,\dots,E_n;E)$, hvis fundamentalsimplex er selvpolært, vil den til B hørende matrix være en diagonalmatrix. Betegnes diagonalelementerne, som alle er forskellig fra 0, da formen er ikke-udartet, med $b_o,\dots,b_n$, vil ligningen

$$b_o x_o y_o + \dots + b_n x_n y_n = 0$$

bestemme polariteten, idet den for et givet punkt X med koordinatsæt $(x_o,\dots,x_n)$ er en ligning for dette punkts polar. Til formen B^{-1} defineret på $V^*\times V^*$, der bestemmer $\psi^{-1}:\Pi^{n*} \to \Pi^n$, hører den inverse matrix. Følgelig vil

$$b_o^{-1} x_o^* y_o^* + \dots + b_n^{-1} x_n^* y_n^* = 0$$

for en given hyperplan X^* med koordinatsæt $(x_o^*,\dots,x_n^*)$ være en ligning for denne hyperplans pol (dvs. tilfredsstilles præcist af koordinatsættene $(y_o^*,\dots,y_n^*)$ for hyperplanerne gennem polen). En ligning for punktkvadrikken K_ψ er

$$b_o x_o^2 + \dots + b_n x_n^2 = 0 ,$$

og en ligning for den tilhørende hyperplankvadrik K_ψ^* er

$$b_o^{-1} x_o^{*2} + \dots + b_n^{-1} x_n^{*2} = 0 .$$

Indførelse af et nyt enhedspunkt kommer ud på en koordinattransformation, hvis matrix er en diagonalmatrix $(\rho_0,\ldots,\rho_n)_{diag}$. Bilinearformens koefficienter b_i bliver da erstattet med $\rho_i^{-2}b_i$. Man vil nu søge at opnå simple værdier for koefficienterne ved passende valg af elementerne ρ_i. I hvilken udstrækning dette er muligt, afhænger væsentligt af legemet L, der er lagt til grund. Hvis b_i er kvadratet på et element i L, kan man opnå, at den pågældende koefficient bliver 1. I tilfældet $L = \grave{C}$ er dette altid muligt. Hvis $-b_i$ er et kvadrat i L, kan man opnå, at den pågældende koefficient bliver -1. I tilfældet $L = \grave{R}$ foreligger altid én af de to muligheder. Der findes imidlertid legemer med elementer, som hverken er kvadrater eller modsat kvadrater (f.eks. 2 i $\grave{Q}$ eller 3 i restklasselegemet modulo 5).

Den videregående undersøgelse af polariteterne og de tilhørende kvadrikker begrænses til tilfældet $n = 3$, $L = \grave{R}$.

Ifølge ovenstående resultater, og da bilinearformer B og -B bestemmer den samme polaritet, kan enhver polaritet ψ i $(\Pi^3,\Pi^{3*},\grave{R})$ efter valg af et passende koordinatsystem bestemmes ved en ligning af én af formerne

(0) $$x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0 ,$$

(1) $$x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 = 0 ,$$

(2) $$x_0y_0 + x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 = 0 .$$

I hvert af tilfældene har den tilsvarende ligning i hyperplankoordinater præcis den samme form.

I tilfældet (0) er den tilhørende kvadratiske form positiv definit. Kvadrikkerne K_ψ og K_ψ^* er tomme.

I tilfældet (1) er den tilhørende kvadratiske form

$$B(\underline{x},\underline{x}) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

indefinit og $K_\psi \neq \emptyset$. Idet formens fortegn ikke ændres, når $\underline{x}$ erstattes med en anden repræsentant for samme punkt, falder $\Pi^3 \setminus K_\psi$ i to disjunkte delmængder, den ene, kaldet <u>det ydre for</u> K_ψ, bestående af punkterne, for hvis repræsentanter B er positiv, den anden, kaldet <u>det indre for</u> K_ψ, bestående af punkterne, for hvis repræsentanter B er negativ. Da formens positivitetsindex er 3, findes der planer, der helt tilhører det ydre. Da negativitetsindex er 1, indeholder enhver linie, altså også enhver plan, ydre punkter. Lad P og Q være forskellige punkter i Π^3, $\underline{p}$ og $\underline{q}$ repræsentanter for dem, Linien PvQ vil da helt forløbe i det ydre for K_ψ, hvis og kun hvis

$$B(\underline{p},\underline{p})B(\underline{q},\underline{q}) - B(\underline{p},\underline{q})^2 > 0 \ .$$

Linien vil være en sekant for K_ψ, dvs. indeholde indre punkter for K_ψ og skære K_ψ i to forskellige punkter, hvis og kun hvis

$$B(\underline{p},\underline{p})B(\underline{q},\underline{q}) - B(\underline{p},\underline{q})^2 < 0 \ .$$

Disse påstande bevises som for keglesnit (side III,4,7-8). Endvidere ses som tidligere, at

$$B(\underline{p},\underline{p})B(\underline{q},\underline{q}) - B(\underline{p},\underline{q})^2 = 0$$

er ensbetydende med, at linien har netop ét punkt fælles med K_ψ, medens dens øvrige punkter er ydre. Vælges i dette tilfælde P som liniens fællespunkt med K_ψ, bliver ligningen ensbetydende med $B(\underline{p},\underline{q}) = 0$, altså med, at Q ligger i tangentplanen til K_ψ med røringspunkt P. Linien PvQ er altså tangent. Endvidere følger, at tangentplanen kun har P fælles med K_ψ. Endelig bemærkes, at man som for keglesnit indser, at et indre punkts polar ligger helt i det ydre, og at et ydre punkts polar skærer K_ψ og da ifølge et tidligere resultat (side III,5,25) i et keglesnit.

I tilfældet (2) er den tilhørende kvadratiske form

$$B(\underline{x},\underline{x}) = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

ligeledes indefinit, men har positivitets- og negativitetsindex 2. Vi har derfor igen $K_\psi \neq \emptyset$, og $\Pi^3 \setminus K_\psi$ falder i to disjunkte delmængder $K_\psi(+)$ og $K_\psi(-)$ efter fortegnet for $B(\underline{x},\underline{x})$. Ved den ved

$$(x_0,x_1,x_2,x_3) \to (x_2,x_3,x_0,x_1)$$

bestemte projektive kolloneation afbildes $K_\psi(+)$ bijektivt på $K_\psi(-)$. De to delmængder har altså de samme projektivgeometriske egenskaber. Enhver plan har punkter fælles med begge mængder og skærer derfor K_ψ. Hvis planen ikke er selvkonjugeret, altså ikke tangentplan, er fællesmængden et keglesnit.

For den videre undersøgelse af kvadrikken K_ψ i dette tilfælde er det hensigtsmæssigt at henføre den til et andet koordinatsystem. Anvendes koordinattransformationen

$$\hat{x}_0 = x_0 + x_2$$
$$\hat{x}_1 = x_0 - x_2$$
$$\hat{x}_2 = x_1 + x_3$$
$$\hat{x}_3 = \div x_1 + x_3 ,$$

R

bliver ligningen for K_ψ (når der igen skrives x_i i stedet for $\hat{x}_i$)

$$x_0x_1 - x_2x_3 = 0 .$$

Idet denne er ensbetydende med

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

ligger et punkt med koordinatsættet (x_0, x_1, x_2, x_3) på K_ψ, hvis og kun hvis der findes et talpar $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, således at

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} \lambda x_0 + \mu x_2 &= 0 \\ \lambda x_3 + \mu x_1 &= 0 , \end{aligned}$$

og hvis og kun hvis der findes et talpar $(\rho, \sigma) \neq (0,0)$, således at

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} \rho x_0 + \sigma x_3 &= 0 \\ \rho x_2 + \sigma x_1 &= 0 . \end{aligned}$$

For vilkårligt givet $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ er hver af ligningerne (a) ligning for en plan, og disse planer ses let at være uafhængige. Deres skæringslinie ligger ifølge det sagte helt på K_ψ. Det samme gælder for skæringslinien mellem planerne, hvis ligninger er (b) med givet $(\rho, \sigma) \neq (0,0)$. Da der til hvert givet punkt R $X(x_0, x_1, x_2, x_3)$ på K_ψ findes netop ét sæt af indbyrdes proportionale (λ, μ), der tilfredsstiller (a), og netop ét sæt af indbyrdes proportionale (ρ, σ), der tilfredsstiller (b), går der gennem X netop én "(a)-linie" og netop én "(b)-linie". Endvidere følger, at hvilkesomhelst to forskellige (a)-linier ((b)-linier) er vindskæve; thi hvis de havde et punkt fælles, måtte de pågældende sæt (λ, μ) være proportionale og linierne derfor være identiske. Idet der for alle $\lambda, \mu, \rho, \sigma$ gælder

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \lambda \\ \rho & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & \sigma & \rho & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

skæres enhver (a)-linie af enhver (b)-linie. På K_ψ kan der ikke ligge nogen anden linie. Lad nemlig l være en sådan linie og

P, Q og R tre forskellige punkter på den. Hvis l ikke er nogen (a)-linie, altså (a)-linierne gennem P og Q forskellige fra l, må l stemme overens med (B)-linien gennem R, idet der kun findes én linie gennem R, der skærer de to indbyrdes vindskæve (a)-linier.

Linierne på kvadrikken K_ψ, der fordeler sig på de to omtalte "skarer", kaldes dens frembringere og kvadrikken selv en retlinet kvadrik.

Vi nævner endnu nogle egenskaber ved en sådan.

Fællesmængden for K_ψ og tangentplanen P^* i et punkt P på K_ψ udgøres af de to frembringere gennem P. Dette kan indses på følgende måde: Først vises, at hver af frembringerne gennem P ligger i tangentplanen. Lad $Q \neq P$ være et punkt på en sådan frembringer, og lad $\underline{p}$ og $\underline{q}$ være repræsentanter for P og Q. Idet $\underline{p} + \underline{q}$ da også er repræsentant for et punkt på frembringeren $P \vee Q$, gælder

$$B(\underline{p},\underline{p}) = 0, \quad B(\underline{q},\underline{q}) = 0, \quad B(\underline{p}+\underline{q},\underline{p}+\underline{q}) = 0 ,$$

hvoraf følger $B(\underline{p},q) = 0$ og dermed påstanden. Dernæst vises, at hvis $Q \neq P$ er et fællespunkt for K_ψ og P^*, vil linien $P \vee Q$ ligge på K_ψ, altså være en frembringer. For repræsentanter $\underline{p}$ og $\underline{q}$ for P og Q gælder nu

$$B(\underline{p},\underline{p}) = 0, \quad B(\underline{q},\underline{q}) = 0, \quad B(\underline{p},\underline{q}) = 0 .$$

Heraf følger for hvert par $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ af reelle tal, at

$$B(\lambda\underline{p}+\mu\underline{q},\lambda\underline{p}+\mu\underline{q}) = 0 ,$$

og dermed påstanden.

Lad l være en frembringer for K_ψ. For hvert punkt P på l går da tangentplanen P^* i P gennem l. Afbildningen, der til P lader svare P^*, er restriktionen af polariteten ψ til l. Den er derfor dobbeltforholdsbevarende og følgelig en projektivitet af (punktmængden på) l på planbundtet med "akse" l. Heraf fremgår specielt, at enhver plan gennem l er tangentplan til K_ψ i ét af punkterne på l.

Om et koordinatsystem $(E_0,E_1,E_2,E_3;E)$, med hensyn til hvilket en retlinet kvadrik har

$$x_0x_1 - x_2x_3 = 0$$

som ligning, kan siges følgende: Alle fire fundamentalpunkter og enhedspunktet ligger på K_ψ, linierne $E_0 \vee E_3$ og $E_1 \vee E_2$ er (a)-frembringere ($\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ henholdsvis $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$), linierne $E_0 \vee E_2$ og $E_1 \vee E_3$ er (b)-frembringere. Heraf fremgår, at tangentplanerne i E_0,E_1,E_2,E_3 er henholdsvis $E_1{}^* = E_0 \vee E_2 \vee E_3$, $E_0{}^* = E_1 \vee E_2 \vee E_3$, $E_3{}^* = E_2 \vee E_0 \vee E_1$ og $E_2{}^* = E_3 \vee E_0 \vee E_1$. Omvendt kan vises (jf. øvelse), at hvis kanterne $E_0 \vee E_3$, $E_1 \vee E_2$, $E_0 \vee E_2$ og $E_1 \vee E_3$ i et koordinatsystems fundamentaltetraeder er frembringere for en retlinet kvadrik K_ψ og koordinatsystemets enhedspunkt ligger på K_ψ, da er $x_0x_1-x_2x_3 = 0$ en ligning for K_ψ med hensyn til dette koordinatsystem.

Ovenstående undersøgelser har ført til en inddeling af mængden af kvadrikker i $(\Pi^3,\Pi^{3*},\dot{R})$ i to klasser, den ene bestående af de retlinede og den anden af de kvadrikker, som kun har røringspunkterne fælles med deres tangentplaner, og som vil blive kaldt <u>ovale kvadrikker</u>. En finere inddeling fra projektivgeometrisk synspunkt er ikke mulig. Til hver af to kvadrikker, der enten begge er ovale eller begge retlinede, findes der nemlig et koordinatsystem, således at begge kvadrikker har ligningen

$$x_0{}^2 + x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2 = 0 ,$$

hvis de er ovale, og ligningen

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

hvis de er retlinede. Ved den projektive kollineation φ, ved hvilken det ene koordinatsystem afbildes på det andet, vil et punkt, der med hensyn til det første har (x_0,x_1,x_2,x_3) som koordinatsæt, afbildes i punktet, som med hensyn til det andet har (x_0,x_1,x_2,x_3) som koordinatsæt. Ved den projektive kollineation φ afbildes derfor den ene kvadrik på den anden.

Foruden de hidtil betragtede polariteter, som nu vil blive betegnet som *ikke-udartede* eller *regulære*, er det af interesse at undersøge de *udartede* eller *singulære polariteter* i et projektivt rum (Π^n,Π^{n*}), Sådanne bestemmes ved symmetriske bilinearformer på de tilhørende vektorrum V eller V^*, der har rang r, $0<r<n+1$. En sådan bilinearform B bestemmer imidlertid ikke nogen bijektiv afbildning af Π^n på Π^{n*}. Der findes nemlig vektorer $\underline{x} \neq \underline{0}$, således at $B(\underline{x},\underline{y}) = 0$ for alle $\underline{y} \in V$. Er $\underline{\underline{B}}$ matricen, der med hensyn til en basis for V hører til B, vil en vektor $\underline{x} \in V$ have denne egenskab, hvis og kun hvis dens koordinatrække $\underline{\underline{x}}$ tilfredsstiller $\underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}}$. Dette homogene lineære ligningssystem har et $(n+1-r)$-dimensionalt løsningsrum. Det tilsvarende underrum i V, bilinearformens nulrum, bestemmer et $(n-r)$-dimensionalt P-underrum af Π^n, som kaldes den udartede polaritets *singulære rum* og betegnes med Σ. Til dettes punkter, polaritetens *singulære punkter*, svarer der ikke nogen hyperplaner. For et punkt $X \in \Pi^n \setminus \Sigma$ med repræsentant $\underline{x}$ er derimod linearformen $B(\underline{x},\underline{y})$ i $\underline{y}$ ikke nulformen, og ved $B(\underline{x},\underline{y}) = 0$ bestemmes derfor en hyperplan $\psi(X) \in \Pi^{n*}$. Den herved definerede afbildning $\psi : \Pi^n \setminus \Sigma \to \Pi^{n*}$ er da den ved bilinearformen B bestemte sin-

gulære polaritet. Idet der for et punkt $Y \in \Sigma$ med repræsentant $\underline{y}$ og alle $\underline{x} \in V$ gælder $B(\underline{x},\underline{y}) = B(\underline{y},\underline{x}) = 0$, indeholder $\psi(X)$ for hvert X det singulære rum Σ. Ved ψ afbildes altså $\Pi^n\setminus\Sigma$ ind i (faktisk på) det $(r-1)$-dimensionale H-underrum bestående af hyperplanerne gennem Σ. Endvidere ses, at ψ ikke er injektiv. For et punkt $X \in \Pi^n\setminus\Sigma$ med repræsentant $\underline{x}$, hvert punkt $S \in \Sigma$ med repræsentant $\underline{s}$ og alle par $(\lambda,\mu) \in L\times L$ medfører nemlig $B(\underline{x},\underline{y}) = 0$, at $B(\lambda\underline{x}+\mu\underline{s},\underline{y}) = 0$, hvoraf følger, at alle punkter Z i det $(n-r+1)$-dimensionale P-underrum $X \vee \Sigma$ har den samme "polar" $\psi(Z) = \psi(X)$.

En singulær polaritet har ifølge det sagte ikke nogen invers (i overensstemmelse med, at der til en udartet bilinearform B ikke findes nogen form B^{-1}), Af denne grund er en singulær polaritet ikke selvdual som parret ψ,ψ^{-1} ved en regulær. En bilinearform B^* defineret på $V^*\times V^*$og af rang r, $0<r<n+1$, bestemmer en afbildning ψ^* af $\Pi^{n*}\setminus\Sigma^*$, hvor Σ^* er det til nulrummet for B^* svarende H-underrum af Π^{n*}, ind i (faktisk på) det $(r-1)$-dimensionale P-underrum, som er fælles for hyperplanerne i Σ^*. En "pol" $\psi^*(X^*)$ har altså kun en hyperplan $X^* \in \Pi^{n*}\setminus\Sigma$.

Det er herefter nødvendigt at skelne mellem singulære P-polariteter ψ og singulære H-polariteter ψ^*.

Idet konjugerede punkter ved en singulær P-polaritet ψ defineres som i det regulære tilfælde, forstås ved den til ψ hørende <u>singulære punktkvadrik</u> K_ψ mængden af selvkonjugerede punkter. Den indeholder Σ, er altså ikke tom, men behøver ikke at indeholde andre punkter. Ved <u>tangenthyperplanen</u> til K_ψ i et punkt $X \in K_\psi\setminus\Sigma$ forstås punktets polar $\psi(X)$. I punkterne af Σ defineres ikke nogen tangenthyperplaner. Hvis punktkvadrikken ikke kun består af Σ, er den ifølge en tidligere bemærkning foreningsmængde af $(n-r+1)$-dimensionale P-underrum, der indeholder Σ.

Dualistisk tilsvarende defineres den til en singulær H-polaritet ψ^* af rang r hørende <u>singulære hyperplankvadrik</u> $K^*_{\psi*}$. Denne indeholder det singulære H-underrum Σ^*. Ved <u>røringspunktet</u> for en hyperplan tilhørende $K^*_{\psi*}\backslash\Sigma^*$ forstås dennes pol. Mængden af røringspunkter kan vises at være en regulær punktkvadrik i det (r-1)-dimensionale P-underrum, som er fælles for hyperplanerne i Σ^*.

Til enhver singulær P-polaritet ψ findes selvpolære simplexer, idet der ved et sådant forstås et simplex, der har n-r+1 hjørner beliggende i det singulære rum Σ, og hvor hvert af de r øvrige hjørner har sine modstående side som polar. Beviset for eksistensen begynder som i det regulære tilfælde (side III,5,27). Repræsentanter for de r første hjørner bestemmes som der. De til alle disse r repræsentanter konjugerede vektorer udgør nulrummet for B, og som repræsentanter for de resterende n-r+1 hjørner kan vælges vektorerne i en vilkårlig basis for dette. Vælges et selvpolært simplex $(E_0,\dots,E_n)$, hvor $E_r,\dots,E_n \in \Sigma$, som fundamentalsimplex for et koordinatsystem, bestemmes ψ med hensyn til dette ved en ligning af formen

$$b_0x_0y_0 + \dots + b_{r-1}x_{r-1}y_{r-1} = 0 ,$$

hvor $b_0,\dots,b_{r-1} \neq 0$.

Tilsvarende gælder for singulære H-polariteter.

Som eksempler betragtes de singulære polariteter af rang 3 i $(\Pi^3,\Pi^{3*},\hat{R})$. Er ψ en sådan P-polaritet, vil det singulære rum bestå af ét punkt S. For hvert fra S forskelligt punkt X er polaren $\psi(X)$ en plan gennem S. Hvis kvadrikken K_ψ indeholder fra S forskellige punkter, er den foreningsmængde af linier gennem S, kaldet dens frembringere. I alle fra S forskellige punkter på en frembringer har K_ψ den samme tangentplan. Kvadrikken er en <u>kvadratisk</u>

liniekegle (jfr. side III,5,26; overensstemmelsen med den tidligere definition ses let ved hjælp af koordinatfremstillingen nedenfor). Med hensyn til et koordinatsystem $(E_0,E_1,E_2,E_3;E)$ hvor fundamentaltetraedret er selvpolært, $E_3 = S$ og E passende valgt, bestemmes ψ ved en ligning af én af formerne

$$x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 = 0\ ,$$
$$x_0y_0 + x_1y_1 - x_2y_2 = 0.$$

I det første tilfælde har kvadrikken

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

som ligning og består kun af $S = E_3$. I det andet tilfælde har den

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$$

som ligning. Heraf ses f.eks., at den skærer planen $x_3 = 0$ i et keglesnit.

En singulær H-polaritet ψ^* af rang 3 i $(\Pi^3,\Pi^{3*},\dot{R})$ har én singulær plan S^*, der altså udgør Σ^*. For hver plan $X^* \neq S^*$ er polen $\psi^*(X^*)$ et punkt i S^*. Hvis kvadrikken $K^*_{\psi^*}$ indeholder fra S^* forskellige planer, er den foreningsmængde af planbundter med akser i S^*. Alle planer i et sådant bundt har samme røringspunkt. Mængden af røringspunkter er et punktkeglesnit i S^* og bundternes akser udgør det tilhørende liniekeglesnit. Den singulære plankvadrik består altså af alle planer, der rører keglesnittet i S^*.

Rettelser

Side III,5,31 linie 6 f.n. læs: $\hat{x}_3' = -x_1+x_3$ i stedet for $\hat{x}_3 = x_1-x_3$.

Side III,5,32 linie 14 f.o. indføj: på K_ψ efter $X(x_0,x_1,x_2,x_3)$.

1. Bevis ved hjælp af dimensionsformlen, at de på side III,1, 5-6 angivne incidenssætninger er gyldige i ethvert 3-dimensionalt projektivt rum.

2. I et n-dimensionalt projektivt rum er givet to ikke-tomme komplementære P-underrum. Vis, at der gennem hvert punkt i rummet, som ikke tilhører noget af de to P-underrum, går netop én linie, der skærer dem begge.
Formulér den duale sætning.
Angiv alle tilfælde, der kan forekomme, når n = 3.

3. I et n-dimensionalt projektivt rum Π^n er givet et fra $\emptyset$ og Π^n forskelligt P-underrum Π_o samt to P-underrum Π_1 og Π_2, der hvert er komplementært til Π_o. Vis, at $\Pi_o \vee X$ for hvert punkt $X \in \Pi_1$ har netop ét punkt X' fælles med Π_2, og at der ved $X \to X'$ defineres en bijektiv afbildning af Π_1 på Π_2.
(Projektion eller perspektivitet ud fra Π_o.)
Formulér den duale sætning.
Angiv alle tilfælde, der kan forekomme, når n = 3.

4. Lad L være et endeligt legeme og k dets elementtal. Bestem (ved induktion eller direkte) antallet N(n,k) af punkter i et n-dimensionalt projektivt rum over L.
Bestem antallet af linier i et 3-dimensionalt projektivt rum over restklasselegemet modulo 2.

5. På den komplekse projektive linie $\Pi^1(\mathbb{C})$ vælges et projektivt koordinatsystem med fundamentalpunkterne E_o, E_1 og enhedspunktet E. Ved til punktet X med koordinatsættet (x_o, x_1) at lade svare det komplekse tal $x = x_1/x_o$, fås en bijektiv afbildning af Π^1 på $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, hvorved der til E_o, E_1 og E svarer henholdsvis $x = 0$, $x = \infty$ og $x = 1$. Den komplekse projektive linie kan altså repræsenteres ved de komplekse tals plan (kompletteret

ved tilføjelse af ∞ .) Til cirklerne i denne plan regnes de rette linier.

Lad der være givet fire indbyrdes forskellige punkter A,B,C,D i $\Pi^1(\check{C})$, og lad a,b,c,d være de til disse svarende komplekse tal. Find df(ABCD) udtrykt ved a,b,c,d. Tag også det tilfælde i betragtning, at ét af disse tal er ∞ .

Giv en geometrisk fortolkning (i de komplekse tals plan) af |df(ABCD)| og arg df(ABCD). Find geometriske udsagn, der er ensbetydende med, at df(ABCD) 1° er reelt, 2° er positivt, 3° er negativt, 4° er rent imaginært, 5° har absolut værdi 1. Karakteriser cirkler og ortogonalitet af cirkler ved hjælp af dobbeltforhold.

Der er givet tre forskellige punkter A,B,C. Vis, at mængden af punkter P, for hvilke |df(ABCP)| = 1, er en cirkel, <u>forholdscirklen</u> for (A,B) gennem C, nemlig den, som er ortogonal til cirklen gennem A,B,C, og som skærer denne foruden i C i det punkt D, for hvilket df(ABCD) = -1. [Man kan benytte, at der under forudsætning af df(ABCD) = -1 består en relation mellem df(ABCP) og df(CDAP).] Slut af resultatet, at enhver forholdscirkel for (A,B) er ortogonal til enhver cirkel gennem A og B.

Vis, at hvis en cirkel er ortogonal til to forskellige cirkler gennem A og B, er den forholdscirkel for (A,B). Slut heraf: Hvis tre cirkler er ortogonale to og to, vil hver af dem skæres af de to andre i harmonisk forbundne punktpar.

6. I et 3-dimensionalt projektivt rum er givet et simplex (tetraeder) (A_0,A_1,A_2,A_3) samt et punkt A, som ikke ligger i nogen af sideplanerne. Punktet A projiceres fra hvert hjørne på dettes modstående sideplan. Hvilkesomhelst 3 af de således fremkomne 4 punkter udspænder en plan, som skærer sideplanen, der indeholder det fjerde, i en linie. Vis, at de 4 således bestemte linier ligger i en plan (den harmoniske polar for A med hensyn til simplexet (A_0,A_1,A_2,A_3)). Dualiser, og vis at man ved den duale konstruktion anvendt på simplexets sideplaner og den harmoniske polar for A kommer tilbage til A.

7. Lad $(V,+,L)$ og $(W,+,L)$ være endelig-dimensionale vektorrum over samme legeme L. Lad endvidere $\alpha: L \to L$ være en automorfi. Om en afbildning $f: V \to W$ forudsættes, at der for alle $\underline{x},\underline{y} \in V$ og $\lambda \in L$ gælder

$$f(\underline{x}+\underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y}) , \quad f(\lambda\underline{x}) = \lambda^{\alpha}\underline{x} ,$$

hvor der er sat $\alpha(\lambda) = \lambda^{\alpha}$. (En sådan afbildning kaldes semilineær.)

Vis, at der til f efter valg af baser for V og W hører en og kun én matrixligning af formen

$$\underline{y}_| = \underline{\underline{A}}\underline{x}_|^{\alpha} ,$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er en matrix med elementer fra L, og $\underline{x}_|$ og $\underline{y}_|$ er koordinatsøjlerne for henholdsvis en vektor $\underline{x} \in V$ og dennes billedvektor $\underline{y} = f(\underline{x})$ i W.

Det forudsættes nu, at V og W har samme dimension $n+1 > 1$, og at f er bijektiv. Vis, at f da inducerer en bijektiv afbildning φ af det ved V bestemte projektive rum Π_1^n på det ved W bestemte projektive rum Π_2^n. Vis endvidere, at der for punkter A,B,C,D i Π_1^n, der ligger på en linie og har et dobbeltforhold, gælder, at billedpunkterne ligger på en linie og

$$df(\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)) = df(ABCD)^{\alpha} ,$$

hvor α skal tænkes udvidet til $L\cup\{\infty\}$ ved fastsættelsen $\alpha(\infty) = \infty$. Slut heraf, at for $n > 1$ er φ en kollineation. (Man kan vise, at enhver kollineation induceres af en semilineær afbildning.)

Formuler og bevis en til projektivgeometriens fundamentalsætning analog sætning for de afbildninger $\varphi : \Pi_1^n \to \Pi_2^n$, der induceres af semilineære afbildninger af V på W hørende til en given automorfi α.

8. Den komplekse projektive linie $\Pi^1(\mathbb{C})$ kan efter valg af et projektivt koordinatsystem afbildes bijektivt på de komplekse tals plan $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ som angivet i øv.5. Beskriv gruppen $(M,\circ)$ af transformationer af $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, der herved svarer til gruppen $PGL(2,\mathbb{C})$ af projektiviteter af $\Pi^1(\mathbb{C})$. Slut af resultaterne i øv.5, at transformationerne tilhørende M er cirkel- og vinkeltro.

Lad $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ være automorfien, der til hvert komplekst tal lader svare det konjugeret komplekse. De til α hørende semilineære afbildninger (se øv.7) inducerer bijektive afbildninger af $\Pi^1(\mathbb{C})$, som kaldes antiprojektiviteter .

Beskriv mængden $\overline{M}$ af de transformationer af $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, der svarer til antiprojektiviteterne af $\Pi^1(\mathbb{C})$. Vis, at transformationerne tilhørende $\overline{M}$ er cirkeltro og bevarer vinklers absolutte værdier.

Undersøg de involutoriske transformationer i M og $\overline{M}$ med hensyn til fixpunkter, og søg simple geometriske beskrivelser af transformationerne i de tilfælde, hvor der findes fixpunkter. (Jf.øv.5.)

9. Med hensyn til et koordinatsystem $(E_0,\ldots,E_n;E)$ i et projektivt rum Π^n hører til en projektiv kollineation $\varphi:\Pi^n \to \Pi^n$ en matrix $\underline{A}$. Hvorledes ændres denne, når der i stedet for E benyttes punktet $\hat{E}$ med koordinatsættet $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$, hvor $\lambda_i \neq 0$ for $i = 0,\ldots,n$, som enhedspunkt?

10. I det 3-dimensionale reelle projektive rum er valgt et projektivt punktkoordinatsystem $(E_0,E_1,E_2,E_3;E)$. Find en matrixligning for hver af de projektive kollineationer, der er bestemt ved

$$E_0 \to E_1,\ E_1 \to E_2,\ E_2 \to E_3,\ E_3 \to E_0,\ E \to E$$

og

$$E_0 \to E_0,\ E_1 \to E_1,\ E_2 \to E_2,\ E_3 \to E\ ,\ E \to E_3\ ,$$

og find deres fixpunkter og fixplaner.

11. Bestem ordenen af gruppen PGL(2,L) af projektiviteter af en projektiv linie $\Pi^1(L)$ over et endeligt legeme L med k elementer. Bestem ordenen af gruppen PGL(3,$\dot{Z}$ mod 2) af projektive kollineationer af den projektive plan $\Pi^2(\dot{Z}$ mod 2) over restklasselegemet modulo 2.

12. I et 3-dimensionalt projektivt rum Π^3 over et legeme L er givet to vindskæve linier p og q samt et element $\kappa \in L\setminus\{0\}$. En afbildning $\varphi:\Pi^3 \to \Pi^3$ defineres på følgende måde: Punkterne på p og på q er fixpunkter. Til et punkt X uden for p og q lades svare det punkt Y på linien gennem X, som skærer både p og q, for hvilket

$$df(PQXY) = \kappa ,$$

hvor P og Q betegner liniens skæringspunkter med henholdsvis p og q.
Vis med benyttelse af et projektivt koordinatsystem med fundamentalpunkterne E_0 og E_1 på p og E_2 og E_3 på q, at φ er en projektiv kollineation.
Vis endvidere, at enhver projektiv kollineation, hvis fixpunktmængde udgøres af to vindskæve linier kan bestemmes på den ovenfor angivne måde.

13. Lad φ være en projektiv kollineation og ψ en projektiv korrelation af et 3-dimensionalt projektivt rum på sig selv. Gør rede for, at hver af disse afbildninger inducerer en bijektiv afbildning af mængden af rummets linier på sig selv, og undersøg om de to inducerede afbildninger kan være identiske.

14. Vis, at de projektive korrelationer af en projektiv linie på sig selv er identiske med dennes projektiviteter. Angiv specielt de projektiviteter, der er polariteter eller nulsystemer. Med hensyn til et koordinatsystem kan altså en projektivitet bestemmes ved en matrixligning $\underline{y}_| = \underline{\underline{A}}\underline{x}_|$ og ved en bilineform $\underline{y}\,\underline{\underline{B}}\underline{x}_|$. Hvilken sammenhæng består mellem $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$?

15. I et 3-dimensionalt projektivt rum (Π^3,Π^{3*},L), hvor L har karakteristik forskellig fra 2, er valgt et par af sammenhørende punkt-og hyperplankoordinatsystemer $(E_0,E_1,E_2,E_3;E)$ og $(E_0^*,E_1^*,E_2^*,E_3^*;E^*)$. En projektiv korrelation ψ er bestemt ved, at

$$\psi(E_0) = E_1^*, \quad \psi(E_1) = E_0^*, \quad \psi(E_2) = E_3^*, \quad \psi(E_3) = E_2^*,$$

$$\psi(E) = E_{01} \vee E_{12} \vee E_{03} ,$$

hvor E_{ij} er projektionen af E på kanten $E_i \vee E_j$ fra dennes modstående i fundamentaltetraedret. Vis, at ψ er et nulsystem, og find billedpunktet af E^*.
Vis, at der til hvert nulsystem ψ findes koordinatsystemer, således at ψ bestemmes på den angivne måde.

16. Ethvert nulsystem ψ i et 3-dimensionalt projektivt rum over et legeme med karakteristik $\neq 2$ inducerer en afbildning af mængden af linier på sig selv. Vis, at der i hver plan findes fixlinier ved denne afbildning, og at disse udgør et liniebundt.

17. Lad ψ være en polaritet i et 3-dimensionalt projektivt rum. Til hver linie l i rummet svarer da en linie l^*, <u>polaren</u> for l, nemlig den, der er fælles for polarerne for punkterne på l.
Vis, at polaren for l^* er l.
Vis, at hvis l og l^* har et punkt fælles, ligger det på kvadriken K_ψ, og l og l^* tilhører tangentplanen i punktet. Vis envidere, at hvis $l^* = l$, ligger l helt på K_ψ.

18. En polaritet ψ i (Π^n,Π^{n*}) antages bestemt ved bilinearformen B. Lad A være et ikke-selvkonjugeret punkt, hvis polar A^* skærer den til polariteten hørende kvadrik K_ψ, og $\underline{a}$ en repræsentant for $\underline{A}$. Vis, at

$$B(\underline{a},\underline{a})B(\underline{x},\underline{x}) - B(\underline{a},\underline{x})^2 = 0$$

er en ligning for liniekeglen bestående af tangenterne til K_ψ gennem A (i den forstand, at den tilfredsstilles præcist af repræsentanterne $\underline{x}$ for punkterne på denne kegle).
Dualiser dette (med hensyn til (Π^n,Π^{n*})).

19. Om en polaritet ψ i $(\Pi^n,\Pi^{n*},\hat{R})$ forudsættes, at den er bestemt ved en bilinearform, hvis tilhørende kvadratiske form har positivitetsindex p, hvor $\frac{1}{2}(n+1) \leq p < n+1$. Vis, at den ved ψ bestemte kvadrik K_ψ indeholder (n-p)-dimensionale P-underrum, men ikke noget P-underrum af højere dimension.

20. I det 3-dimensionale reelle projektive rum er valgt et koordinatsystem. Med hensyn til dette er

$$x_0^2 - x_0x_3 + x_1x_2 = 0$$

ligning for en kvadrik. Undersøg, hvorledes linien, der forbinder punkterne med koordinatsættene (1,0,0,0) og (0,1,1,0) ligger i forhold til kvadrikken, og find ligninger for eventuelle tangentplaner gennem linien.

21. Lad ψ være en polaritet i det 3-dimensionale reelle projektive rum, hvis tilhørende kvadrik K_ψ er retlinet. Vis, at hvis en linie l ikke er tangent til K_ψ, men skærer K_ψ, har dens polar l^* (jf. øv. 17) de samme egenskaber.
Karakteriser de linier, gennem hvilke der går tangentplaner til K_ψ.

22. Lad K_ψ være en retlinet kvadrik i det 3-dimensionale reelle projektive rum. Et koordinatsystems fundamentalpunkter E_0, E_1, E_2, E_3 vælges i skæringspunkterne mellem to frembringere af den ene og to frembringere af den anden skare, således at hverken E_0 og E_1 eller E_2 og E_3 ligger på samme frembringer. Enhedspunktet E vælges på K_ψ. Vis, at $x_0x_1-x_2x_3 = 0$ er en ligning for K_ψ.

Vis, at der findes en involutorisk projektiv kollineation, ved hvilken K_ψ afbildes således på sig selv, at de to frembringerskarer ombyttes.

23. Lad f og f' være to frembringere af samme skare på en retlinet kvadrik i det 3-dimensionale reelle projektive rum. En afbildning $\chi: f \to f'$ defineres ved, at der til et punkt P på f lader svare skæringspunktet P' mellem f' og den frembringer i den anden skare, der går gennem P. Vis, at χ er en projektivitet.

Formuler og bevis den omvendte sætning.

Dualiser begge sætninger.

(Steiners sætninger for retlinede kvadrikker.)

24. Vis (ved hjælp af et af resultaterne i øvelse 23 eller med benyttelse af et passende koordinatsystem), at der findes netop én retlinet kvadrik med tre givne, parvis vindskæve linier som frembringere.

25. Undersøg og beskriv de singulære polariteter af rang 2 i $(\Pi^2, \Pi^{2*}, \hat{R})$ og i $(\Pi^3, \Pi^{3*}, \hat{R})$.

§ 6. Affine rum.

Definition. Lad der være givet et vektorrum $(V,+,L)$ over et kommutativt legeme L. En mængde $\acute{A}$, hvis elementer kaldes punkter, siges at være et affint rum med vektorrum V og vektorafbildningen $\Phi: \acute{A} \times \acute{A} \to V$, hvis følgende er opfyldt:

AR 1: For hvert punkt $P \in \acute{A}$ er restriktionen Φ_P af Φ til $\{P\}\times\acute{A}$ en bijektiv afbildning af denne mængde på V.

AR 2: For hvilkesomhelst punkter $P,Q,R \in \acute{A}$ gælder

$$\Phi(P,Q) + \Phi(Q,P) = \Phi(P,R) .$$

Som betegnelse for det affine rum kan benyttes $(\acute{A},(V,+L),\Phi)$ eller kortere $(\acute{A},V,\Phi)$, $(\acute{A},V)$, $\acute{A}$, når der ikke kan opstå misforståelser.

Idet der indføres betegnelsen

$$\Phi(P,Q) = \overrightarrow{PQ},$$

udsiger AR 1, at der for hvert fast punkt $P \in \acute{A}$ ved $\overrightarrow{PQ} = \underline{v}$ defineres en enentydig korrespondance $Q \longleftrightarrow \underline{v}$ mellem $\acute{A}$ og V. (Dette giver mening til talemåderne: "$\underline{v}$ er vektoren med begyndelsespunkt P og endepunkt Q ", "Q fås ved at afsætte vektoren $\underline{v}$ ud fra P ", "$\underline{v}$ er stedvektoren for Q ud fra P ".) Endvidere kan AR2 skrives

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}. \tag{1}$$

Ved i AR2 eller (1) at sætte $P = Q = R$, ses, at $\Phi(P,P) = \overrightarrow{PP} = \underline{0}$ for hvert $P \in \acute{A}$, og af AR 1 fås derfor for $P,Q \in \acute{A}$

$$\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \iff P = Q . \tag{2}$$

Ved i AR2 at sætte R = P fås dernæst $\Phi(Q,P) = -\Phi(P,Q)$, dvs.

$$(3) \qquad \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} \,.$$

Af AR 1 følger nu, at også restriktionen af Φ til $\acute{A}\times\{P\}$ for hvert fast $P \in \acute{A}$ er bijektiv, idet afbildningen $\underline{v} \to -\underline{v}$ af V på sig selv er det.

For vilkårlige $P,Q,R,S \in \acute{A}$ har man

$$\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PR} \,,$$

og heraf fås "parallelogramsætningen"

$$(4) \qquad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \iff \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS} \,.$$

<u>Affine Afbildninger</u>. Lad $(\acute{A},U,\Phi)$ og $(\acute{B},V,\Psi)$ være affine rum over samme legeme L. En afbildning $\alpha:\acute{A} \to \acute{B}$ kaldes en <u>affin afbildning</u> af $(\acute{A},U,\Phi)$ ind i $(\acute{B},V,\Psi)$, hvis der findes en lineær afbildning $f:U \to V$, således at der for $P,Q \in \acute{A}$ gælder

$$\Psi(\alpha(P),\alpha(Q)) = f(\Phi(P,Q)) \,.$$

Skrives $\Phi(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$ for $P,Q \in \acute{A}$ og $\Psi(P',Q') = \overrightarrow{P'Q'}$ for $P',Q' \in \acute{B}$, hvilket ikke vil give anledning til misforståelser, antager kravet formen

$$(5) \qquad \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)} = f(\overrightarrow{PQ}) \,.$$

Dets indhold er: Den vektor i V, der svarer til billedet $(\alpha(P),\alpha(Q))$ ved α af et punktpar (P,Q) i $\acute{A}$, skal kun afhænge af den til (P,Q) svarende vektor $\overrightarrow{PQ} \in U$. Ved α skal altså induceres en afbildning f af U ind i V, og denne skal være lineær.

Det er klart, at der til en afbildning $\alpha:\acute{A} \to \acute{B}$ højst kan findes én lineær afbildning $f:U \to V$, for hvilken (5) gælder.

Til en affin afbildning α hører altså netop én. Derimod er en affin afbildning α ikke fuldstændig bestemt ved den tilhørende lineære afbildning. Herom gælder:

<u>Til givne punkter</u> $O \in \acute{A}$ <u>og</u> $O' \in \acute{B}$ <u>samt en given lineær afbildning</u> $f:U \to V$ <u>findes der en og kun én affin afbildning</u> $\alpha:\acute{A} \to B'$, <u>for hvilken</u> $\alpha(O) = O'$, <u>og hvis tilhørende lineære afbildning er</u> f.

Bevis: Hvis α er en affin afbildning med disse egenskaber, må der ifølge (5) for hvert $P \in \acute{A}$ gælde

$$\overrightarrow{O'\alpha(P)} = f(\overrightarrow{OP}), \tag{6}$$

og da $\alpha(P)$ på grund af AR 1 er entydig bestemt herved, kan der højst findes én sådan affin afbildning. På den anden side bestemmes der ved (6) en afbildning $\alpha:\acute{A} \to \acute{B}$, og denne er affin med f som tilhørende lineære afbildning. For $P,Q \in \acute{A}$ har man nemlig ifølge (1),(3),(6) og lineariteten af f

$$\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)} = \overrightarrow{O'\alpha(Q)} - \overrightarrow{O'\alpha(P)} = f(\overrightarrow{OQ}) - f(\overrightarrow{OP}) = f(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}) = f(\overrightarrow{PQ}) .$$

Idet (6) ifølge (2) medfører $\alpha(O) = O'$, er påstanden hermed bevist.

Lad $\acute{A},\acute{B}$ og $\acute{C}$ være affine rum med vektorrummene henholdsvis U, V og W over samme legeme L. Hvis $\alpha:\acute{A} \to \acute{B}$ og $\beta:\acute{B} \to \acute{C}$ er affine afbildninger med de tilhørende lineære afbildninger $f:U \to V$ og $g:V \to W$ vil $\beta\circ\alpha:\acute{A} \to \acute{C}$ være affin med tilhørende lineære afbildning $g\circ f:U \to W$. Dette ses ved gentagen anvendelse af (5).

En affin afbildning $\alpha:\acute{A} \to \acute{B}$ er injektiv (surjektiv), hvis og kun hvis den tilhørende lineære afbildning $f:U \to V$ er injektiv (surjektiv). Begge dele sluttes af (6) ved hjælp af AR 1.

Hvis en affin afbildning $\alpha: \acute{A} \to \acute{B}$ med tilhørende lineære afbildning $f: U \to V$ er bijektiv, er også α^{-1} affin, og den tilhørende lineære afbildning er f^{-1}. Ifølge (5) gælder nemlig for $P',Q' \in B'$, $P = \alpha^{-1}(P')$, $Q = \alpha^{-1}(Q')$

$$f^{-1}(\overrightarrow{P'Q'}) = f^{-1}(\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)}) = f^{-1} \circ f(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\alpha^{-1}(P')\alpha^{-1}(Q')} \ .$$

<u>Isomorfi. Fremstilling som sideunderrum.</u> To affine rum over samme legeme siges at være <u>isomorfe</u>, hvis der findes en bijektiv affin afbildning af det ene på det andet. Af ovenstående fremgår, at der er tale om en ækvivalensrelation i klassen af affine rum. Endvidere sluttes, at isomorfe affine rum har isomorfe vektorrum. Af den ovenfor beviste sætning om bestemmelsen af en affin afbildning med en given tilhørende lineær afbildning følger, at der også gælder det omvendte. Vi har altså:

<u>To affine rum er isomorfe, hvis og kun hvis de tilhørende vektorrum er isomorfe</u>. Specielt er affine rum med samme vektorrum indbyrdes isomorfe.

Vi viser nu, at der til hvert vektorrum $(U,+,L)$ findes et affint rum $(\acute{A},U,\Phi)$. Til dette formål betragtes et vektorrum $(\hat{U},+,L)$, der har et med U isomorft underrum (som for simpelhedens skyld også betegnes med U). Vektorrummet $\hat{U} = U$ tilfredsstiller naturligvis dette krav. Det er imidlertid hensigtsmæssigt ved nogle af de følgende betragtninger, at benytte vektorrum $\hat{U}$, der har U som ægte underrum. Et sådant er $\hat{U} = L \times U$ med kompositionerne

$$(x_1,\underline{u}_1) + (x_2,\underline{u}_2) = (x_1+x_2,\underline{u}_1+\underline{u}_2)$$
$$\lambda(x,\underline{u}) = (\lambda x,\lambda\underline{u})$$

for $x_1,x_2,x,\lambda \in L$ og $\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u} \in U$. Dette vektorrum er den direkte sum af et 1-dimensionalt underrum, nemlig $\{(x,\underline{0}) \mid x \in L\}$, og det med U isomorfe underrum $\{(0,\underline{u}) \mid \underline{u} \in U\}$.

Lad $\hat{U}$ være et vektorrum, der har U som underrum, og lad der være valgt en vektor $\hat{\underline{a}} \in \hat{U}$. Vi betragter sideunderrummet

$$\hat{\underline{a}} + U = \{\hat{\underline{a}} + \underline{u} \mid \underline{u} \in U\}.$$

Det betegnes også med $\acute{A}$, dens vektorer benævnes også punkter og betegnes med store latinske bogstaver. Ethvert punkt $P \in \acute{A}$ har altså en og kun én fremstilling $P = \hat{\underline{a}}+\underline{p}$, hvor $\underline{p} \in U$. Er $Q = \hat{\underline{a}}+\underline{q} \in \acute{A}$, hvor $\underline{q} \in U$, defineres ved

$$(7) \qquad \Phi(P,Q) \;(= \overrightarrow{PQ}) = \underline{q} - \underline{p}$$

en afbildning $\Phi : \acute{A}\times\acute{A} \to U$, der øjensynlig opfylder AR 1 og AR 2. Herved bliver altså $\acute{A}$ til et affint rum med vektorrum U. Det bemærkes, at Φ ikke afhænger af valget af repræsentanten $\hat{\underline{a}}$ for sideunderrummet $\acute{A}$. Betegnes punktet $\hat{\underline{a}}$ med O, fås for $P = \hat{\underline{a}}+\underline{p}$, at

$$\overrightarrow{OP} = \underline{p}\ ,$$

og $\underline{p}$ kan fortolkes som <u>stedvektoren</u> til P ud fra O.

Den simpleste fremstilling af et affint rum med vektorrum U fås for $\hat{U} = U$. I dette tilfælde kan man vælge $\hat{\underline{a}} = \underline{0}$. Her bliver vektorrummet U selv til det affine rum, nemlig ved at dets vektorer tillige kaldes for og betegnes som punkter og der til to punkter $P = \underline{p}$ og $Q = \underline{q}$ lades svare vektoren $\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p}$.

I det følgende tænkes hvert af de forekommende affine rum $(\acute{A},U,\Phi)$ fremstillet som et fra U forskelligt sideunderrum til U i et vektorrum $\hat{U}$, der er direkte sum af U og et 1-dimensionalt underrum. En sådan fremstilling, som tillader at udlede egenskaber ved det affine rum af resultater vedrørende vektorrum, vil blive betegnet som en standardfremstilling.

Lad $\acute{A} = \hat{\underline{a}}+U$, hvor $\hat{\underline{a}} \in \hat{U}\setminus U$, og $\acute{B} = \hat{\underline{b}}+V$, hvor $\hat{\underline{b}} \in \hat{V}\setminus V$, være standardfremstillinger af to affine rum over legemet L. Idet $L\hat{\underline{a}}$ og $L\hat{\underline{b}}$ betegner de af $\hat{\underline{a}}$ og $\hat{\underline{b}}$ frembragte 1-dimensionale underrum af henholdsvis $\hat{U}$ og $\hat{V}$, gælder

$$(8) \qquad \hat{U} = L\hat{\underline{a}} \oplus U,, \qquad \hat{V} = L\hat{\underline{b}} \oplus V \; .$$

Vi betragter en lineær afbildning $\hat{f}:\hat{U} \to \hat{V}$, ved hvilken sideunderrummet $\acute{A}$ afbildes ind i sideunderrummet $\acute{B}$. For $P = \hat{\underline{a}}+\underline{p} \in \acute{A}$ har vi da

$$\hat{f}(P) = \hat{f}(\hat{\underline{a}}) + \hat{f}(\underline{p}) \; ,$$

og idet $\hat{f}(P)$ og $\hat{f}(\hat{\underline{a}})$ tilhører $\acute{B}$, kan vi heraf slutte, at $\hat{f}(\underline{p}) \in V$ for hver vektor $\underline{p} \in U$, altså at $\hat{f}$ afbilder U ind i V. Er også $Q = \hat{\underline{a}}+\underline{q}$ et punkt af $\acute{A}$, gælder

$$\overrightarrow{\hat{f}(P)\hat{f}(Q)} = \hat{f}(\underline{q}) - \hat{f}(\underline{p}) = \hat{f}(\underline{q}-\underline{p}) = \hat{f}(\overrightarrow{PQ}) \; .$$

Heraf sluttes, at restriktionen af $\hat{f}$ til $\acute{A}$ er en affin afbildning af $\acute{A}$ ind i $\acute{B}$, hvis tilhørende lineære afbildning er restriktionen af $\hat{f}$ til U.

Omvendt, til en given affin afbildning $\alpha:\acute{A} \to \acute{B}$ findes der netop én lineær afbildning $\hat{f}:\hat{U} \to \hat{V}$, hvis restriktion til $\acute{A}$ stemmer overens med α. Idet hver vektor i $\hat{U}$ ifølge (8) har en og kun én fremstilling af formen $x\hat{\underline{a}}+\underline{u}$, hvor $x \in L$ og $\underline{u} \in U$, er den eneste afbildning $\hat{f}$, der kan tilfredsstille kravene, bestemt ved

$$(9) \qquad \hat{f}(x\hat{\underline{a}}+\underline{u}) = x\alpha(\hat{\underline{a}}) + f(\underline{u}) \; ,$$

hvor $f:U \to V$ er den til α hørende lineære afbildning. At $\hat{f}$ er lineær, ses af, at der for $\lambda_1,\lambda_2,x_1,x_2 \in L$ og $\underline{u}_1,\underline{u}_2 \in U$ gælder

$$\hat{f}(\lambda_1(x_1\hat{\underline{a}}+\underline{u}_1) + \lambda_2(x_2\hat{\underline{a}}+\underline{u}_2))$$
$$= (\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\alpha(\hat{\underline{a}}) + \lambda_1 f(\underline{u}_1) + \lambda_2 f(\underline{u}_2)$$
$$= \lambda_1\hat{f}(x_1\hat{\underline{a}}+\underline{u}_1) + \lambda_2\hat{f}(x_2\hat{\underline{a}}+\underline{u}_2) .$$

At restriktionen af $\hat{f}$ til $\acute{A} = \hat{\underline{a}}+U$ er α, sluttes ved at sammenholde (9) for $x = 1$ med

$$\overrightarrow{\alpha(\hat{\underline{a}}+\underline{u})\alpha(\hat{\underline{a}})} = \alpha(\hat{\underline{a}}+\underline{u}) - \alpha(\hat{\underline{a}}) = f(\underline{u}) ,$$

der fås af (7) anvendt på $\acute{B}$ og (5). Vi har altså:

<u>For affine rum</u> $\acute{A}$ <u>og</u> $\acute{B}$ <u>i standardfremstillinger i vektorrummene</u> $\hat{U}$ <u>og</u> $\hat{V}$ <u>er de affine afbildninger af</u> $\acute{A}$ <u>ind i</u> $\acute{B}$ <u>præcis restriktionerne til</u> $\acute{A}$ <u>af de lineære afbildninger af</u> $\hat{U}$ <u>ind i</u> $\hat{V}$, <u>ved hvilke</u> $\acute{A}$ <u>afbildes ind i</u> $\acute{B}$.

<u>Affine transformationer. Affin geometri.</u> Vi betragter nu de affine afbildninger af et affint rum $\acute{A}$ med vektorrum U ind i sig selv, specielt de bijektive, der kaldes <u>affine transformationer</u> af $\acute{A}$.

De affine transformationer danner med sammensætning som komposition en gruppe, rummets <u>affine gruppe</u>, Aff($\acute{A}$). Ved til hver affin transformation at lade svare den tilhørende lineære transformation af U fås en homomorf afbildning af Aff($\acute{A}$) på den generelle lineære gruppe GL(U) af U. En affin transformation af $\acute{A}$, der hører til denne homomorfis kerne, hvis tilhørende lineære afbildning af U altså er den identiske, kaldes en <u>translation</u> af $\acute{A}$. Translationerne danner herefter en normal undergruppe Tr($\acute{A}$) af Aff($\acute{A}$).

Er τ en translation, gælder ifølge (5) for $P,Q \in \acute{A}$

(10) $$\overrightarrow{\tau(P)\tau(Q)} = \overrightarrow{PQ} ,$$

hvilket ifølge parallelogramsætningen er ensbetydende med

(11) $$\overrightarrow{P\tau(P)} = \overrightarrow{Q\tau(Q)} \ .$$

Der findes altså en og naturligvis kun én vektor $\underline{v} \in U$ således, at

(12) $$\overrightarrow{P\tau(P)} = \underline{v}$$

for alle $P \in \acute{A}$. Omvendt, er der givet en vektor $\underline{v} \in U$, bestemmes der ved (12) en afbildning $\tau : \acute{A} \to \acute{A}$, for hvilken (11) og dermed (10) gælder, og som følgelig er en translation. Ved til hver translation τ at lade svare den ved (12) bestemte vektor $\underline{v}$, fås følgelig en bijektiv afbildning af $Tr(\acute{A})$ på U. Denne er en isomorfi på (U,+), idet der for translationer σ og τ, de tilsvarende vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ og $P \in \acute{A}$ gælder

$$\overrightarrow{P\tau\circ\sigma(P)} = \overrightarrow{P\sigma(P)} + \overrightarrow{\sigma(P)\tau(\sigma(P))} = \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u} \ .$$

Gruppen af translationer er altså isomorf med (U,+) og derfor kommutativ.

Med benyttelse af en standardfremstilling af det affine rum $(\acute{A},U)$ i et vektorrum $\hat{U}$ ses, at $Aff(\acute{A})$ er isomorf med en undergruppe af $GL(\hat{U})$, nemlig den, ved hvilken sideunderrummet $\acute{A}$ afbildes på sig selv.

Ved <u>affin geometri</u> forstås studiet af de egenskaber ved et affint rum, som bevares ved transformationerne i den til rummet hørende affine gruppe.

<u>Affine underrum.</u> Lad $(\acute{A},U,\Phi)$ være et affint rum. En delmængde $\acute{A}_1$ af $\acute{A}$ siges at være et <u>affint underrum</u> af $\acute{A}$, hvis der findes et underrum U_1 af U således, at $(\acute{A}_1,U_1,\Phi)$, hvor Φ_1 beteg-

ner restriktionen af Φ til $Á_1 \times Á_1$, er et affint rum. For et vilkårligt valgt punkt $P_0 \in Á_1$ gælder da ifølge AR 1

$$(13) \qquad Á_1 = \{P \in Á \mid \overrightarrow{P_0P} \in U_1\}.$$

Omvendt, er der givet et punkt $P_0 \in Á$ og et underrum U_1 af U, vil punktmængden M bestemt ved ligningens højre side være et affint underrum af $Á$, der indeholder P_0 og har U_1 som vektorrum. Det er nemlig klart, at $P_0 \in M$, og idet $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P_0Q} - \overrightarrow{P_0P}$, har vi endvidere for hvert $P \in M$, at $\overrightarrow{PQ} \in M$, hvis og kun hvis $\overrightarrow{P_0Q} \in M$, og derfor

$$M = \{Q \in Á \mid \overrightarrow{PQ} \in U_1\} .$$

Afbildningen $Q \to \overrightarrow{PQ}$ af M ind i U_1 er altså surjektiv og som restriktion af en injektiv afbildning også injektiv. Følgelig er AR 1 opfyldt for M og vektorrummet U_1. At AR 2 gælder, er klart. Sammenfattende kan altså siges:

<u>En delmængde</u> $Á_1$ <u>af et affint rum</u> $Á$ <u>med vektorrum</u> U <u>er et affint underrum af</u> $Á$, <u>hvis og kun hvis</u> $Á_1$ <u>er mængden af "endepunkter" af de fra et punkt af</u> $Á_1$ <u>afsatte" vektorer i et underrum</u> U_1 <u>af</u> U.

Det er hensigtsmæssigt at betragte den tomme mængde som et affint underrum af $(Á,U)$ med et vilkårligt underrum af U som vektorrum.

Med denne vedtægt gælder:

Fællesmængden for affine underrum $Á_i \subseteq Á$ med vektorrummene $U_i \subseteq U$, $i \in J$, hvor J er en vilkårlig indexmængde, er et affint underrum af $Á$ med vektorrum $\bigcap_{i\in J} U_i$.

Dette indses ved hjælp af (13) med et punkt P_0 fra fælles mængden, hvis denne ikke er tom, og ellers er det rigtigt ifølge vedtægten.

Til enhver delmængde M af Á findes et "mindste" affint underrum af Á, som indeholder den, nemlig fællesmængden for alle sådanne affine underrum. Det siges at være udspændt af M og betegnes aff M. Det bestemmes ved (13) med et punkt P_0 fra M og det af vektormængden $\{\overrightarrow{P_0Q} \mid Q \in M\}$ frembragte underrum U_1 af U. Det således definerede affine underrum indeholder nemlig M og er indeholdt i ethvert affint underrum, som indeholder M.

To affine underrum $Á_1, Á_2 \subseteq Á$ med vektorrummene $U_1, U_2 \subseteq U$ siges at være parallelle, hvis $U_1 \subseteq U_2$ eller $U_2 \subseteq U_1$, og der skrives $Á_1 \parallel Á$. Herved defineres en refleksiv og symmetrisk (men ikke transitiv) relation i mængden af affine underrum i Á.

To parallelle affine underrum er enten disjunkte, eller et af dem er indeholdt i det andet.

De ikke-tomme affine underrum af (Á,U) med et givet underrum U' af U som vektorrum er indbyrdes parallelle og siges at udgøre den ved U' bestemte parallelskare. Gennem hvert punkt P_0 af Á går netop ét af parallelskarens affine underrum.

To ikke-tomme affine underrum (Á',U') og (Á,U") af (Á,U) siges at være komplementære, hvis deres vektorrum U' og U" er komplementære underrum af U, altså

$$U' \oplus U'' = U .$$

To komplementære affine underrum (Á',U') og (Á",U") har netop ét punkt fælles.

Bevis: Lad P' og P" være punkter i henholdsvis Á' og Á". Der findes vektorer $\underline{u}' \in U'$ og $\underline{u}'' \in U''$ således, at

$$\overrightarrow{P'P''} = \underline{u}' + \underline{u}'' .$$

Lad P være det punkt, for hvilket $\overrightarrow{P'P} = \underline{u}'$. Det tilhører Á' og, idet

$$\overrightarrow{P''P} = \overrightarrow{P''P'} + \overrightarrow{P'P} = -\underline{u}'' ,$$

også Á''. Det affine underrum $Á' \cap Á''$ er altså ikke tomt. Men da dets vektorrum er $U' \cap U'' = \{\underline{0}\}$, kan det kun bestå af punktet P.

Lad der være givet et ikke-tomt affint underrum (Á',U') af (Á,U), hvor $U' \subset U$, og lad U'' være et til U' komplementært underrum af U. Gennem hvert punkt P af Á går netop et affint underrum Á'' tilhørende den ved U'' bestemte parallelskare, og dette underrum skærer Á' i et punkt P'. Ved til P at lade svare P' defineres en afbildning $\pi: Á \to Á'$, der kaldes <u>parallelprojektionen</u> af Á på Á' langs U''. Den er surjektiv, idet der gennem hvert punkt af Á' går et affint underrum med vektorrum U''. Endvidere er π en <u>affin afbildning</u>. For at vise dette betragtes to vilkårlige punkter $P,Q \in Á$ og deres billedpunkter $P',Q' \in Á'$. Idet U' og U'' er komplementære, har vi $\overrightarrow{PQ} = \underline{u}' + \underline{u}''$, hvor $\underline{u}' \in U'$ og $\underline{u}'' \in U''$, altså

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{P'P} + \underline{u}' + \underline{u}'' + \overrightarrow{Q'Q} .$$

Da endvidere $\overrightarrow{P'P}, \overrightarrow{Q'Q} \in U''$ og $\overrightarrow{P'Q'}$ kun på én måde kan fremstilles som sum af en vektor fra U' og en vektor fra U'', må vi have $\overrightarrow{P'Q'} = \underline{u}'$. Dette viser, at $\overrightarrow{P'Q'}$ kun afhænger af vektoren $\overrightarrow{PQ}$, og da afbildningen $\underline{u} \to \underline{u}'$ er en parallelprojektion af vektorrummet U, altså lineær, er påstanden bevist.

<u>Ved en affin afbilning</u> α <u>af et affint rum</u> (Á,U) <u>ind i et affint rum</u> (B́,V) <u>over samme legeme afbildes et affint underrum</u> $(Á_1, U_1)$ <u>af</u> Á <u>på et affint underrum</u> $(B́_1, f(U_1))$ <u>af</u> B́, <u>hvor</u> f <u>betegner den til</u> α <u>hørende lineære afbildning</u>.

Dette sluttes af fremstillingen (13) af underrummet $Á_1$.

<u>Ved en affin afbildning afbildes parallelle underrum på parallelle underrum.</u>

<u>Dimension.</u> Ved <u>dimensionen</u>, dim $\acute{A}$, af et ikke-tomt affint rum $(\acute{A},U)$ forstås dimensionen, dim U, af dets vektorrum. Et tomt affint rum tilskrives ikke nogen dimension.

Et affint rum har dimension 0, hvis og kun hvis det består af ét punkt. De 1-dimensionale affine rum kaldes (<u>affine</u>) <u>linier</u>, de 2-dimensionale (<u>affine</u>) <u>planer</u>.

Lad $(\acute{A}_1,U_1)$ og $(\acute{A}_2,U_2)$ være endelig-dimensionale affine underrum af et affint rum. Der gælder da <u>dimensionsformlerne</u>

$$(14)\quad \dim \operatorname{aff}(\acute{A}_1 \cup \acute{A}_2) = \dim \acute{A}_1 + \dim \acute{A}_2 - \dim(\acute{A}_1 \cap \acute{A}_2)\ ,$$

<u>hvis</u> $\acute{A}_1 \cap \acute{A}_2 \neq \emptyset$,

$$(15)\quad \dim \operatorname{aff}(\acute{A}_1 \cup \acute{A}_2) = \dim \acute{A}_1 + \dim \acute{A}_2 + 1 - \dim(U_1 \cap U_2)\ ,$$

<u>hvis</u> $\acute{A}_1 \cap \acute{A}_2 = \emptyset$.

Bevis: Antag $\acute{A}_1 \cap \acute{A}_2 \neq \emptyset$, og lad P_0 være et punkt af fællesmængden. Det til $\operatorname{aff}(\acute{A}_1 \cup \acute{A}_2)$ hørende vektorrum udspændes af vektorerne i $U_1 \cup U_2$ og er følgelig $U_1 + U_2$. Formlen (14) er derfor en umiddelbar konsekvens af dimensionsformlen for underrum af et vektorrum. Hvis $\acute{A}_1 \cap \acute{A}_2 = \emptyset$, fås (15) ved at anvende (14) med aff $(P_1 \cup \acute{A}_2)$, hvor P_1 er et vilkårligt valgt punkt af $\acute{A}_1$, i stedet for $\acute{A}_2$. (Se øvelse 6.)

Af velkendte egenskaber ved lineære afbildninger sluttes: For en affin afbildning $\alpha:\acute{A} \to \acute{B}$ haves

$$\dim \alpha(\acute{A}) \leq \dim \acute{A}.$$

Lighed gælder, når α er injektiv, og, hvis dim $\acute{A}$ er endelig, kun i dette tilfælde. Det er klart, at

$$\dim \alpha(\acute{A}) \leqq \dim \acute{B} .$$

Lighed gælder, når α er surjektiv, og, hvis $\dim \acute{B}$ er endelig, kun i dette tilfælde.

<u>Affine kombinationer, affin afhængighed.</u> Lad $(\acute{A},U)$ være et affint rum over et legeme L, og lad der være valgt et punkt $O \in \acute{A}$. For givne $P_o,\dots,P_r \in \acute{A}$ og givne $\lambda_o,\dots,\lambda_r \in L$ bestemmes da ved

(16) $$\overrightarrow{OP} = \lambda_o\overrightarrow{OP_o} + \dots + \lambda_r\overrightarrow{OP_r}$$

en vektor $\overrightarrow{OP} \in U$ og et punkt $P \in \acute{A}$. Almindeligvis vil begge afhænge af valget af O. For et andet punkt O' bestemmes ved

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'P'} &= \lambda_o\overrightarrow{O'P_o} + \dots + \lambda_r\overrightarrow{O'P_r}\\ &= (\lambda_o + \dots + \lambda_r)\ \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

en vektor $\overrightarrow{O'P'}$ og et punkt P'. Det fremgår af den sidste ligning, at vektoren $\overrightarrow{OP}$ er uafhængig af valget af O, hvis og kun hvis

(17) $$\lambda_o + \dots + \lambda_r = 0 ,$$

og at punktet P er uafhængigt af O, hvis og kun hvis

(18) $$\lambda_o + \dots + \lambda_r = 1 .$$

I begge tilfælde skrives den højre side i (16)

$$\lambda_oP_o + \dots + \lambda_rP_r .$$

Hvis (17) er opfyldt, kaldes den en <u>vektorkombination</u> af punkterne $P_o,\dots,P_r$, og den fremstiller da en vektor $\underline{p}$ af U. Hvis (18) er opfyldt, kaldes den en affin <u>kombination</u> af punkterne $P_o,\dots,P_r$, og den fremstiller da et punkt P af $\mathring{A}$.

Med denne skrivemåde har man specielt for $P, Q \in \mathring{A}$

$$Q - P = \overrightarrow{PQ} ,$$

og for en vilkårlig vektorkombination af punkterne $P_o, \ldots, P_r$ f.eks.

$$\begin{aligned} \underline{p} &= \lambda_o P_o + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_1 P_r \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{P_o P_1} + \ldots + \lambda_r \overrightarrow{P_o P_r} , \end{aligned} \tag{19}$$

idet $\lambda_o = -\lambda_1 - \ldots - \lambda_r$. Endvidere har man for en affin kombination f.eks.

$$\begin{aligned} P &= \lambda_o P_o + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r \\ &= P_o + \lambda_1 \overrightarrow{P_o P_1} + \ldots + \lambda_r \overrightarrow{P_o P_r} , \end{aligned} \tag{20}$$

idet $\lambda_o = 1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_r$. Ligningen (20) udsiger, at P fås som endepunkt af den fra P_o afsatte vektor $\lambda_1 \overrightarrow{P_o P_1} + \ldots + \lambda_r \overrightarrow{P_o P_r}$.

Herefter ligger det nær at betragte vilkårlige lineære kombinationer af punkter fra $\mathring{A}$ og vektorer fra U, altså udtryk af formen

$$\lambda_o P_o + \ldots + \lambda_r P_r + \mu_1 \underline{v}_1 + \ldots + \mu_s \underline{v}_s .$$

En sådan linearkombination tillægges imidlertid i almindelighed kun en mening, såfremt et "begyndelsespunkt" O er valgt, nemlig ved at tænke punkterne P_ρ erstattet med deres stedvektorer $\overrightarrow{OP_\rho}$ ud fra O. Det drejer sig derfor om en sædvanlig linearkombination af vektorer fra U, og den er følgelig lig med en sådan vektor. Afsættes denne som stedvektor $\overrightarrow{OP}$ ud fra O, bestemmes et punkt P, og linearkombinationen siges også at være lig med dette punkt. Her skelnes altså ikke mellem et punkt og dets stedvektor, idet det er underforstået, at begyndelsespunktet O er valgt en gang for alle. Kun hvis koefficienterne til de i linearkombinationen forekommende punkter har summen 0 eller 1, altså hvis (17) eller (18) er opfyldt, har linearkombinationen en af det valgte begyndelsespunkt uafhængig betydning. I det første tilfælde er den en vektor i U, i det andet et punkt af Á.

Punkter $P_o,\dots,P_r$ i et affint rum (Á,U) over et legeme L siges at være <u>affint afhængige</u>, hvis der findes $\lambda_o,\dots,\lambda_r \in L$, for hvilke $(\lambda_o,\dots,\lambda_r) \neq (0,\dots,0)$ og $\lambda_o+\dots+\lambda_r = 0$, således at

(21) $$\lambda_o P_o + \dots + \lambda_r P_r = \underline{0} ,$$

altså hvis der findes en "egentlig" vektorkombination af punkterne, som er lig med nulvektoren. Er dette ikke tilfældet, er altså $0\cdot P_o+\dots+0\cdot P_r$ den eneste vektorkombination af punkterne, der er lig $\underline{0}$, siges punkterne at være <u>affint uafhængige</u>. Ét punkt er ifølge denne definition affint uafhængigt.

Et sæt af r+1 affint uafhængige punkter kaldes et <u>r-dimensionalt simplex</u>. (Glosen "simplex" bruges også i en noget afvigende betydning, som omtales senere.)

Idet (21) ifølge (19) er ensbetydende med (f.eks.)

(22) $$\lambda_1 \overrightarrow{P_oP_1} + \dots + \lambda_r \overrightarrow{P_oP_r} = \underline{0} ,$$

gælder for r > 0: <u>Punkterne $P_o,\dots,P_r$ er affint afhængige eller uafhængige, efter som vektorerne fra ét (vilkårligt) af punkterne til de øvrige er lineært afhængige eller uafhængige</u>.

Endvidere gælder for r > 0: <u>Punkterne $P_o,\dots,P_r$ er affint afhængige, hvis og kun hvis mindst ét blandt dem er en affin kombination af de øvrige</u>. Er punkterne affint afhængige og f.eks. $\lambda_o \neq 0$, fås nemlig af (21)

$$P_o = -\frac{\lambda_1}{\lambda_o}P_1 - \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda_o}P_r ,$$

hvor koefficientsummen på højre side er 1, og er (f.eks.)

$$P_o = \mu_1 P_1 + \cdots + \mu_r P_r , \quad \mu_1 + \cdots + \mu_r = 1 ,$$

fås

$$\underline{0} = -P_o + \mu_1 P_1 + \cdots + \mu_r P_r ,$$

hvoraf fremgår, at punkterne er affint afhængige.

Af det viste sluttes, at punkterne $P_o,\dots,P_r$ er affint afhængige, hvis og kun hvis der findes mindst ét blandt dem, som er indeholdt i det af de øvrige udspændte affine underrum. For det af $P_0,\dots,P_r$ udspændte affine underrum har man

$$\dim \operatorname{aff}\{P_0,\dots,P_r\} \leqq r ,$$

og lighedstegnet gælder, hvis og kun hvis punkterne er affint uafhængige. To punkter er affint uafhængige, hvis og kun hvis de er forskellige, tre punkter, hvis og kun hvis de ikke ligger på samme linie.

I et affint rum $(\acute{A},U)$ af endelig dimension m findes der sæt af m+1 affint uafhængige punkter, medens ethvert sæt af flere end m+1 punkter er affint afhængigt.

Lad $(\acute{A},U)$ og $(\acute{B},V)$ være affine rum over samme legeme L, og lad $\alpha:\acute{A}\to\acute{B}$ være en affin afbildning med tilhørende lineære afbildning $f:U\to V$. Er der valgt et begyndelsespunkt $0\in\acute{A}$, og benyttes $\alpha(0) = 0'$ som begyndelsespunkt i $\acute{B}$, gælder for vilkårlige $P_o,\dots P_r\in\acute{A}$ og $\lambda_0,\dots,\lambda_r\in L$

(23) $\quad \alpha(\lambda_o P_o + \cdots + \lambda_r P_r) = \lambda_o\alpha(P_o) + \cdots + \lambda_r\alpha(P_r) ,$

idet denne ligning er ensbetydende med vektorligningen

$$f(\lambda_o\overrightarrow{OP} + \dots + \lambda_r\overrightarrow{OP_r}) = \lambda_o f(\overrightarrow{OP_o}) + \dots + \lambda_r f(\overrightarrow{OP_r})$$
$$= \lambda_o\overrightarrow{O'\alpha(P_o)} + \dots + \lambda_r\overrightarrow{O'\alpha(P_r)} ,$$

der er en følge af lineariteten af f. Af (23) sluttes videre: <u>Ved en affin afbildning afbildes affint afhængige punkter på affint afhængige punkter. Er afbildningen injektiv, afbildes affint uafhængige punkter på affint uafhængige punkter.</u>

Har $(\acute{A},U)$ den endelige dimension m, gælder:

<u>Til et givet sæt</u> $(P_o,\dots,P_m)$ <u>af affint uafhængige punkter i</u> $\acute{A}$ <u>og et vilkårligt givet sæt</u> $(Q_o,\dots,Q_m)$ <u>af punkter i</u> $\acute{B}$, <u>findes der netop én affin afbildning</u> $\alpha:\acute{A}\to\acute{B}$, <u>ved hvilken</u> $\alpha(P_o) = Q_o, \dots , \alpha(P_m) = Q_m$.

Bevis: Da der findes netop én lineær afbildning $f:U \to V$, ved hvilken

$$f(\overrightarrow{P_oP_1}) = \overrightarrow{Q_oQ_1}, \quad . \quad . \quad . \quad , f(\overrightarrow{P_oP_m}) = \overrightarrow{Q_oQ_m} ,$$

følger påstanden af en tidligere sætning (side III, 6,3).

<u>Affine og barycentriske koordinater.</u> Lad $(\acute{A},U)$ være et affint rum over legemet L. Det af punkterne $P_o,\dots,P_r \in \acute{A}$ udspændte affine underrum

$$\acute{A}' = \text{aff}\{P_o,\dots,P_r\}$$

har som vektorrum det af vektorerne $\overrightarrow{P_oP_1},\dots,\overrightarrow{P_oP_r}$ udspændte underrum U' af U. Der gælder følgelig

$$\dim \acute{A}' = \dim U' \leqq r .$$

Idet U' udgøres af de r vektorers linearkombinationer, har man

$$\AA' = \{P \in \AA \mid P = P_o + t_1\overrightarrow{P_oP_1} + \dots + t_r\overrightarrow{P_oP_r},\ t_1,\dots,t_r \in L\},$$

som kan opfattes som en <u>parameterfremstilling</u> af $\AA'$ (ganske vist almindeligvis med for mange parametre). Ifølge (20) kan den også skrives

$$\AA' = \{P \in \AA \mid P = t_oP_o + \dots + t_rP_r,\ t_o,\dots,t_r \in L,\ t_o + \dots + t_r = 1\},$$

altså med r+1 parametre, som dog ikke er fri, men har summen 1.

Vi antager nu, at punkterne $P_o,\dots,P_r$ er affint uafhængige eller, hvad der kommer ud på det samme, at vektorerne $\overrightarrow{P_oP_1},\dots,\overrightarrow{P_oP_r}$ danner en basis for U'. Vi har da dim $\AA' = r$, og for hvert punkt $P \in \AA'$ er sættet $(t_1,\dots,t_r) \in L^r$ entydig bestemt som koordinatsættet for vektoren $\overrightarrow{P_oP}$ med hensyn til denne basis. Ved $P \leftrightarrow (t_1,\dots,t_n)$ defineres altså en enentydig korrespondance mellem $\AA'$ og L^r. Sættet $(t_1,\dots,t_n)$ kaldes det <u>affine koordinatsæt</u> for punktet $P \in \AA'$ med hensyn til det <u>affine koordinatsystem</u> $(P_o,\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_r)$ med <u>begyndelsespunkt</u> P_o og <u>grundvektorerne</u> $\underline{e}_1 = \overrightarrow{P_oP_1}$, ... , $\underline{e}_r = \overrightarrow{P_oP_r}$. Ved til punktet $P \in \AA'$ at lade svare sættet $(t_o,\dots,t_r) \in L^{r+1}$, for hvilket $t_o + \dots + t_r = 1$ og $P = t_oP_o + \dots + t_rP_r$, bestemmes en enentydig korrespondance mellem $\AA'$ og delmængden

$$\{(t_o,\dots,t_r) \in L^{r+1} \mid t_o + \dots + t_r = 1\}$$

af L^{r+1}. Man kalder $(t_o,\dots,t_r)$ af grunde, som omtales senre, det <u>barycentriske koordinatsæt</u> for P med hensyn til <u>koordinatsimplexet</u> $(P_o,\dots,P_r)$. Det affine koordinatsystem og koordinatsimplexet bestemmer hinanden.

Dette kan specielt anvendes på selve det affine rum $(\acute{A},U)$, dersom det har endelig dimension m. Et affint koordinatsystem i $\acute{A}$ er et sæt $(P_o,\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$, hvor $P_o \in \acute{A}$ og $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$ er en basis for U. Det affine koordinatsæt $(x_1,\dots,x_m)$ for et punkt $X \in \acute{A}$ er da bestemt ved

$$\overrightarrow{P_oX} = x_1\underline{e}_1 + \dots + x_m\underline{e}_m .$$

Det til det affine koordinatsystem knyttede koordinatsimplex er $(P_o,P_1,\dots,P_m)$, hvor

$$P_1 = P_o + \underline{e}_1, \quad \dots \quad , P_m = P_o + \underline{e}_m ,$$

og det barycentriske koordinatsæt for X er $(x_o,x_1,\dots,x_m)$, hvor $x_o = 1-x_1-\dots-x_m$.

For linien l, der udspændes af to forskellige punkter P_o og P_1 i et affint rum $\acute{A}$ over legemt L har man parameterfremstillingerne

$$\begin{aligned} l &= \{P \in \acute{A} \mid P = P_o + t\underline{e}_1,\ t \in L\} \\ &= \{P \in \acute{A} \mid P = (1-t)P_o + tP_1,\ t \in L\} , \end{aligned}$$

hvor $\underline{e}_1 = \overrightarrow{P_oP_1}$. Her er t den affine koordinat og $((1-t),t)$ det barycentriske koordinatsæt for punktet P. Er A og B to forskellige punkter og $C \neq B$ et tredje punkt på linien, findes der ét $\delta \in L$ således, at

$$\overrightarrow{AC} = \delta\overrightarrow{BC} .$$

Man siger da, at C deler (A,B) i forholdet δ, og dette <u>delingsforhold</u> betegnes

$$\delta = \frac{AC}{BC} .$$

(Udvides legemet L med et element ∞, kan tillades, at C = B, og man tilskriver delingsforholdet værdien $\delta = \infty$.) Har A,B,C de affine koordinater a,b,c, ses af $\overrightarrow{AC} = (c-a)\underline{e}_1$ og $\overrightarrow{BC} = (c-b)\underline{e}_1$, at

$$\frac{\underline{AC}}{\underline{BC}} = \frac{c-a}{c-b} .$$

Af delingsforholdets definition sluttes umiddelbart: Hvis A og B ved en affin afbildning α har forskellige billedpunkter og følgelig l afbildes på en linie, vil $\alpha(C)$ dele $(\alpha(A),\alpha(B))$ i samme forhold som C deler (A,B). Dette giver man udtryk for ved at sige, at delingsforholdet er en <u>affin-invariant</u>.

I det m-dimensionale affine rum (Á,U) vælges et affint koordinatsystem $(P_0,\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$. Lad $\underline{\underline{x}}_{|0},\dots,\underline{\underline{x}}_{|r}$ være de (som søjlematricer skrevne) affine koordinatsæt for punkter $X_0,\dots,X_r \in$ Á. Idet disse koordinatsæt tillige er koordinatsættene for punkternes stedvektorer ud fra P_0, vil det affine koordinatsæt for linearkombinationen

$$X = \lambda_0 X_0 + \dots + \lambda_r X_r ,$$

dvs. for stedvektoren $\overrightarrow{P_0X}$ være

$$\underline{\underline{x}}_| = \lambda_0 \underline{\underline{x}}_{|0} + \dots + \lambda_r \underline{\underline{x}}_{|r} . \tag{24}$$

Punkterne $X_0,\dots,X_r$ er affint afhængige, hvis og kun hvis det homogeme lineære ligningssystem bestående af de m+1 ligninger

$$\lambda_0 + \dots + \lambda_r = 0 ,$$

$$\lambda_0 \underline{\underline{x}}_{|0} + \dots + \lambda_r \underline{\underline{x}}_{|r} = \underline{\underline{0}}_|$$

har en løsning $(\lambda_0,\dots,\lambda_r) \neq (0,\dots,0)$. Idet $r \leq m$, er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse herfor, at

$$(25) \qquad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \underline{\underline{x}}_{|0} & \cdots & \underline{\underline{x}}_{|r} \end{pmatrix} < r + 1 .$$

Brugen af barycentriske koordinater er kun hensigtsmæssig ved undersøgelser, hvor de forekommende linearkombinationer har en af begyndelsespunktet uafhængig betydning, altså er vektorkombinationer eller affine kombinationer. Lad $(P_0,\dots,P_n)$ være valgt som koordinatsimplex i $\mathring{A}$. De barycentriske koordinatsæt for punkterne $X, X_0,\dots,X_r$ skrives som søjlematricer

$$\tilde{\underline{\underline{x}}}_{|} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \underline{\underline{x}}_{|} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\underline{\underline{x}}}_{|0} = \begin{pmatrix} x_{00} \\ \underline{\underline{x}}_{|0} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , \tilde{\underline{\underline{x}}}_{|r} = \begin{pmatrix} x_{0r} \\ \underline{\underline{x}}_{|r} \end{pmatrix} ,$$

hvor $\underline{\underline{x}}_{|}$, $\underline{\underline{x}}_{|\rho}$ er punkternes affine koordinatsæt med hensyn til koordinatsystemet $(P_0, \overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_r})$. For den affine kombination

$$X = \lambda_0 X_0 + \dots + \lambda_r X_r , \qquad \lambda_0 + \dots + \lambda_r = 1 ,$$

gælder da

$$(26) \qquad \tilde{\underline{\underline{x}}}_{|} = \lambda_0 \tilde{\underline{\underline{x}}}_{|0} + \dots + \lambda_r \tilde{\underline{\underline{x}}}_{|r} .$$

Dette er nemlig ifølge (24) rigtigt for de affine koordinatsæt, altså for søjlernes m sidste elementer, og for deres første elementer gælder det, fordi såvel elementerne i $\tilde{\underline{\underline{x}}}_{|}$ som elementerne i søjlen på ligningens højre side har summen 1. Drejer det sig om en vektorkombination, er altså $\lambda_0+\dots+\lambda_r = 0$, vil elementerne i søjlen $\tilde{\underline{\underline{x}}}_{|}$ i (26) have summen 0. Delsøjlen $\underline{\underline{x}}_{|}$ bestående af de m sidste elementer er ifølge (24) koordinatsættet for vektoren $\lambda_0 X_0+\dots+\lambda_r X_r$ med hensyn til basen $(\overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_m})$ for U. Heraf sluttes at punkterne $X_0,\dots,X_r$ en affint afhængige, hvis og kun hvis det homogene lineære ligningssystem

$$\lambda_0 \tilde{\underline{\underline{x}}}_{|0} + \cdots + \lambda_r \tilde{\underline{\underline{x}}}_{|r} = \underline{\underline{0}}_|$$

har en fra nulløsningen forskellig løsning. For enhver løsning $(\lambda_0,\ldots,\lambda_r)$ gælder nemlig $\lambda_0+\cdots+\lambda_r = 0$, idet rækkerne i ligningssystemets matrix har summen $(1 \cdots 1)$. Som nødvendig og tilstrækkelig betingelse for affin afhængighed af punkterne fås derfor

$$\mathrm{rg}(\tilde{\underline{\underline{x}}}_{|0} \cdots \tilde{\underline{\underline{x}}}_{|r}) < r + 1 .$$

At denne betingelse er ensbetydende med (25) ses også let direkte.

<u>Affine afbildningers koordinatfremstilling</u>. Lad $(\acute{A},U)$, $\dim \acute{A} = m < \infty$, og $(\acute{B},V)$ være affine rum over samme legeme L, og lad der være valgt et affint koordinatsystem $(P_0,\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_m)$ i $\acute{A}$. Er $\alpha:\acute{A} \to \acute{B}$ en affin afbildning og $f:U \to V$ den tilhørende lineære afbildning, fås for billedet $Y = \alpha(X)$ af punktet $X \in \acute{A}$ med det affine koordinatsæt $(x_1,\ldots,x_m)$

$$\begin{aligned}(27)\qquad Y = \alpha(X) &= \alpha(P_0 + x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_m\underline{e}_m) \\ &= \alpha(P_0) + x_1 f(\underline{e}_1) + \cdots + x_m f(\underline{e}_m) .\end{aligned}$$

Hvis α er injektiv, vil $(\alpha(P_0),f(\underline{e}_1),\ldots,f(\underline{e}_m))$ være et affint koordinatsystem i billedrum $\alpha(\acute{A}) \subseteq \acute{B}$, og (27) udsiger, at Y har samme koordinatsæt med hensyn til dette koordinatsystem som X har med hensyn til det oprindelige.

Det antages nu, at $\dim \acute{B} = n$ også er endelig, og at der er valget et affint koordinatsystem $(Q_0,\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_n)$ i $\acute{B}$. Idet

$$\overrightarrow{Q_0Y} = \overrightarrow{Q_0\alpha(P_0)} + \overrightarrow{\alpha(P_0)\alpha(X)} = \overrightarrow{Q_0\alpha(P_0)} + f(\overrightarrow{P_0X}) ,$$

gælder for de affine koordinatsæt $\underline{\underline{x}}_|$ og $\underline{\underline{y}}_|$ for X og Y med hensyn til koordinatsystemet i henholdsvis $\acute{A}$ og $\acute{B}$

(28) $$\underline{\underline{y}}_{|} = \underline{\underline{a}}_{|} + \underline{\underline{A}}\underline{\underline{x}}_{|} .$$

Her betegner $\underline{\underline{a}}_{|}$ det affine koordinatsæt for $\alpha(P_0)$ med hensyn til koordinatsystemet i $\acute{B}$, og $\underline{\underline{A}}$ er matricen, der med hensyn til baserne $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$ og $(\underline{f}_1,\dots,\underline{f}_n)$ hører til den lineære afbildning f. Ligningen (28) kaldes <u>matrixligningen</u> for den affine afbildning α med hensyn til de valgte koordinatsystemer.

Er den affine afbildning α bestemt ved, at de affint uafhængige punkter P_0, $P_1 = P_0+\underline{e}_1$, ..., $P_m = P_0+\underline{e}_m$ afbildes henholdsvis på givne punkter $Q_0,\dots,Q_m$ med de affine koordinatsæt $\underline{\underline{q}}_{|0},\dots,\underline{\underline{q}}_{|m}$ med hensyn til koordinatsystemet i $\acute{B}$, fås matrixligningen ved at bemærke, at man må have $\underline{\underline{a}}_{|} = \underline{\underline{q}}_{|0}$, og at søjlerne i $\underline{\underline{A}}$ må være koordinatsættene for vektorerne $\overrightarrow{Q_0Q_\mu}$, $\mu = 1,\dots,m$, altså $\underline{\underline{a}}_{|\mu} = \underline{\underline{q}}_{|\mu}-\underline{\underline{q}}_{|0}$.

Ved undersøgelse af affine afbildninger af et affint rum $(\acute{A},U)$ af endelig dimension m ind i sig selv vil man i reglen henføre original-og billedpunkterne til samme koordinatsystem. At man også i dette tilfælde kan benytte to forskellige, gør det muligt at udlede koordinattransformationsformlen på simpel måde. Lad $(P_0,\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$ og $(\bar{P}_0,\bar{\underline{e}}_1,\dots,\bar{\underline{e}}_m)$ være to koordinatsystemer i $\acute{A}$. De affine koordinatsæt for et punkt $X \in \acute{A}$ med hensyn til disse systemer betegnes henholdsvis $\underline{\underline{x}}_{|}$ og $\bar{\underline{\underline{x}}}_{|}$. Den identiske afbildning af $\acute{A}$ har, hvis et punkt X henføres til det første eller det andet koordinatsystem, efter som det betragtes som original-eller billedpunkt, en matrixligning af formen

$$\bar{\underline{\underline{x}}}_{|} = \underline{\underline{t}}_{|} + \underline{\underline{T}}\underline{\underline{x}}_{|} .$$

Her er $\underline{\underline{t}}_{|}$ koordinatsættet for P_0 med hensyn til det andet system.

og $\underline{\underline{T}}$ er en regulær matrix, hvis søjler er koordinatsættene for vektorerne $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m$ med hensyn til basen $(\bar{\underline{e}}_1,\dots,\bar{\underline{e}}_m)$ for U.

Det bemærkes, at matrixligningen (28) for en affin afbildning $\alpha:\acute{A}\to\acute{B}$ kan skrives

$$(29) \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\underline{y}}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{\underline{0}}- \\ \underline{\underline{a}}| & \underline{\underline{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\underline{x}}| \end{pmatrix} .$$

I denne form kan den fortolkes på følgende måde: Lad $\acute{A} = \hat{\underline{a}} + U$ og $\acute{B} = \hat{\underline{b}} + V$ være standardfremstillinger af $\acute{A}$ og $\acute{B}$ henholdsvis i det (m+1)-dimensionale vektorrum $\hat{U}$ og det (n+1)-dimensionale vektorrum $\hat{V}$ (side III,6,4-5). Idet $(P_0,\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$ og $(Q_0,\underline{f}_1,\dots,\underline{f}_n)$ er de ovenfor indførte koordinatsystemer i $\acute{A}$ og $\acute{B}$, tænkes valgt $\hat{\underline{a}} = P_0$ og $\hat{\underline{b}} = Q_0$. Da er $(\hat{\underline{a}}, \underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$ en basis for $\hat{U}$, således at punktet $X \in \acute{A}$ med det affine koordinatsæt $(x_1,\dots,x_m)$ er den vektor i $\hat{U}$, hvis koordinatsæt med hensyn til denne basis er $(1,x_1,\dots,x_m)$. Tilsvarende gælder for basen $(\hat{\underline{b}},\underline{f}_1,\dots,\underline{f}_n)$ for $\hat{V}$ og punkterne i $\acute{B}$. Det ses heraf at $(m+1)\times(m+1)$-matricen i (29) netop er matricen med hensyn til de to baser for den lineære afbildning $\hat{f}:\hat{U}\to\hat{V}$, hvis restriktion til $\acute{A}$ er α.

<u>Affine funktioner</u>. Et kommutativt legeme L kan som bekendt betragtes som et 1-dimensionalt vektorrum over sig selv. Det kan derfor (jf.side III,6,5) også organiseres som 1-dimensionalt affint rum ved den for $\lambda,\mu \in L$ ved $(\lambda,\mu) \to \mu-\lambda$ bestemte vektorafbildning.

En affin afbildning α af et affint rum $(\acute{A},U)$ over L ind i L kaldes en <u>affin funktion</u> (også "inhomogen lineær funktion") defineret på $\acute{A}$. Den til α hørende lineære afbildning er her en linearform på U, altså en vektor $\underline{u}^*$ i det til U duale vektorrum U^*. Betegnes værdien af linearformen $\underline{u}^*$ for vektoren $\underline{u} \in U$ med $\langle \underline{u}^*, \underline{u} \rangle$, har man for den affine funktions værdi i $P \in \acute{A}$

$$(30) \qquad \alpha(P) = \alpha(P_0) + \langle \underline{u}^*, \overrightarrow{P_0P} \rangle ,$$

hvor P_0 er et vilkårligt valgt punkt i $\acute{A}$. Omvendt vil (30) for et givet $\alpha(P_0) \in L$ og en given linearform $\underline{u}^*$ på U bestemme en affin funktion α. Er α og β affine funktioner og λ et element fra L, vil $\alpha+\beta$ og $\lambda\alpha$ øjensynlig også være affine funktioner. De affine funktioner på $\acute{A}$ udgør altså et vektorrum $(\acute{A},U)^*$ eller kort $\acute{A}^*$. [Dette vektorrum er "kanonisk" (dvs. på naturlig, fra vilkårligheder fri måde) isomorft med det duale $\hat{U}^*$ til vektorrummet $\hat{U}$, der blev benyttet ved standardfremstillingen af $(\acute{A},U)$. Restriktionen af en linearform på $\hat{U}$ til $\acute{A}$ er nemlig en affin funktion, og enhver affin funktion på $\acute{A}$ er restriktionen af netop én linearform på $\hat{U}$ (se øvelse 16.)] Det har herefter en mening at tale om lineært afhængige eller uafhængige affine funktioner.

Er α en ikke-konstant affin funktion på et affint rum $(\acute{A},U)$, kaldes punktmængden

$$\acute{H} = \{P \in \acute{A} \mid \alpha(P) = 0\}$$

en <u>hyperplan</u> i $\acute{A}$. Den er ikke tom, idet den til α hørende linearform $\underline{u}^*$ ikke er nulformen $\underline{0}^*$ og følgelig antager enhver værdi fra L, specielt værdien $-\alpha(P_0)$ i (30). Endvidere er $\acute{H}$ et affint underrum af $\acute{A}$. Vælges nemlig P_0 i $\acute{H}$, har man $\alpha(P_0) = 0$, og et punkt $P \in \acute{A}$ vil tilhøre $\acute{H}$, hvis og kun hvis $\langle \underline{u}^*, \overrightarrow{P_0P} \rangle = 0$, dvs. hvis og kun hvis $\overrightarrow{P_0P}$ tilhører nulrummet (kernen) U_α for linearformen $\underline{u}^*$, altså et underrum af U. Idet $\underline{u}^* \neq \underline{0}^*$, er nulrummet et ægte underrum af U, og dette medfører, at $\acute{H}$ ikke er hele rummet $\acute{A}$.

Idet $\acute{H} = \alpha^{-1}(0)$, kan man også af en almen sætning (øvelse 3) slutte, at $\acute{H}$ er et affint underrum.

De til nulrummet U_α komplementære underrum af U er mindst 1-dimensionale, da $U_\alpha \subset U$. På den anden side har ethvert 2-dimensionalt underrum af U egentlige vektorer fælles med U_α. Er nemlig $\underline{a},\underline{b} \in U$ lineært uafhængige, vil vektoren $\lambda\underline{a}+\mu\underline{b}$, $\lambda,\mu \in L$, tilhøre U_α, hvis

$$\langle \underline{u}^*, \lambda\underline{a}+\mu\underline{b}\rangle = \lambda\langle \underline{u}^*,\underline{a}\rangle + \mu\langle \underline{u}^*,\underline{b}\rangle = 0 \ ,$$

og der findes $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, for hvilke dette gælder. Man kan altså slutte, at de til U_α komplementære underrum af U er 1-dimensionale. Der gælder endvidere, at ethvert underrum U' af U, til hvilket der findes et 1-dimensionalt komplementært underrum, er nulrummet for en fra nulformen forskellig linearform på U. Dette ses således: Lad $\underline{a}$ være en vektor, der frembringer et til U' komplementært underrum. Hver vektor $\underline{u} \in U$ har da netop én fremstilling $\underline{u} = x\underline{a}+\underline{u}'$, hvor $x \in L$ og $\underline{u}' \in U'$. Den ved $\underline{u}^*(u) = x$ definerede funktion $\underline{u}^*$ er øjensynlig en linearform med nulrum U'.

Om et underrum U' af et vektorrum U siges, at det har <u>codimension</u> s, og man skriver codim U' = s, hvis et (og da, øvelse 17, ethvert) komplementært underrum har dimensionen s. Vi har altså: Et underrum af et vektorrum er nulrummet for en fra nulformen forskellig linearform, hvis og kun hvis det har codimension 1.

Om et affint underrum $(\acute{A}',U')$ af et affint rum $(\acute{A},U)$ siges, at det har <u>codimension</u> s, og man skriver codim $\acute{A}'$ = s, hvis det har et s-dimensionalt komplementært affint underrum. Dette er ensbetydende med, at codim $U' = s$. For enhver hyperplan $\acute{H}$ har man ifølge det viste codim $\acute{H} = 1$. Omvendt, ethvert affint underrum $(\acute{A}',U')$ med codim $\acute{A}' = 1$ er en hyperplan. Er nemlig $\underline{u}^* \neq \underline{0}^*$ en linearform på U, hvis nulrum er U', vil $\alpha : \acute{A} \to L$ bestemt ved $\alpha(P) = \langle \underline{u}^*, \overrightarrow{P_0P} \rangle$, hvor P_0 er et punkt af $\acute{A}'$, være en affin funktion, der er lig 0 netop på $\acute{A}'$. Vi har altså:

<u>Et affint underrum er en hyperplan, hvis og kun hvis det har codimension 1.</u>

Heraf sluttes, at hvis $\acute{H}$ er en hyperplan og $Q \in \acute{A}$ et punkt uden for denne, gælder

$$\mathrm{aff}(\acute{H} \cup \{Q\}) = \acute{A} ;$$

thi $\acute{A}' = \mathrm{aff}(\acute{H} \cup \{Q\})$ indeholder linien, der forbinder et punkt af $\acute{H}$ med Q, altså et til $\acute{H}$ komplementært underrum, og det til $\acute{A}'$ hørende vektorrum er følgelig hele det affine rums vektorrum U.

Det bemærkes endvidere, at hvis en affih funktion antager værdien 0 på en hyperplan $\acute{H}$ og desuden i et punkt $Q \notin \acute{H}$, må den være konstant lig 0, fordi mængden af punkter, i hvilke den antager værdien 0, er et affint underrum, der indeholder $\acute{H}$ og Q, altså hele rummet $\acute{A}$.

Lad $\acute{H}$ være en hyperplan i $\acute{A}$ bestemt ved den ikke-konstante affine funktion α. For hvert $\lambda \in L\setminus\{0\}$ vil da $\lambda\alpha$ bestemme den samme hyperplan. Omvendt, hvis β er en affin funktion, som antager værdien 0 i alle punkter af $\acute{H}$, findes der et $\lambda \in L$ således, at $\beta = \lambda\alpha$. Dette følger af, at den affine funktion $\alpha(Q)\beta - \beta(Q)\alpha$, hvor Q er et fast punkt uden for $\acute{H}$, er lig 0 såvel på $\acute{H}$ som i Q, altså ifølge det lige viste konstanten 0. Dermed er vist:

<u>To ikke-konstante affine funktioner bestemmer den samme hyperplan, hvis og kun hvis de er proportionale.</u>

Til enhver hyperplan svarer herefter et 1-dimensionalt underrum i $\acute{A}^*$ bestående af de affine funktioner, som antager værdien 0 på hyperplanen. Omvendt, vil ethvert 1-dimensionalt underrum af $\acute{A}^*$ bestemme en hyperplan. Man kan vise, at der består en tilsvarende enentydig korrespondance mellem de affine underrum af $\acute{A}$ af codimension s og de s-dimensionale underrum af $\acute{A}^*$. For endelig-dimensionale affine rum $\acute{A}$ vil dette fremgå af det følgende.

Vi forudsætter nu, at det affine rum $(\acute{A},U)$ har endelig dimension m. Af sætningen om affine afbildninger fås ved specialisering:

<u>Lad</u> $(P_0,\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$ <u>være et affint koordinatsystem i</u> $\acute{A}$, <u>og lad der være givet</u> $a,a_1,\dots,a_m \in L$. <u>Der findes da netop én affin funktion</u> α <u>med tilhørende linearform</u> $\underline{u}^*$ <u>således, at</u> $\alpha(P_0) = a$, $\langle\underline{u}^*,\underline{e}_\mu\rangle = a_\mu$ <u>for</u> $\mu = 1,\dots,m$. <u>For punktet</u> X <u>med det affine koordinatsæt</u> $(x_1,\dots,x_m)$ er

$$\alpha(X) = a + a_1x_1 + \dots + a_mx_m .$$

Hvis α ikke er konstant, har altså den ved α bestemte hyperplan som <u>ligning</u>

$$a + a_1x_1 + \dots + a_mx_m = 0 .$$

Endvidere gælder:

<u>Lad</u> $(P_0,P_1,\dots,P_m)$ <u>være et sæt af affint uafhængige punkter i</u> $\acute{A}$, <u>og lad der være givet</u> $b_0,\dots,b_m \in L$. <u>Der findes da netop én affin funktion</u> α, <u>for hvilken</u> $\alpha(P_p) = b_\mu$ <u>for</u> $\mu = 0,\dots,m$. <u>For punktet</u> X <u>med det barycentriske koordinatsæt</u> $(x_0,\dots,x_m)$ <u>er</u>

$$\alpha(X) = b_0x_0 + \dots + b_mx_m .$$

At den højre side er en affin funktion, ses ved at indsætte $x_0 = 1-x_1-\cdots-x_m$, og idet punkterne $P_0,\ldots,P_m$ har de barycentriske koordinatsæt $(1,0,\ldots,0),\ldots, (0,\ldots,0,1)$, antager den i disse de foreskrevne værdier.

Vi betragter nu et sæt $(\alpha_1,\ldots,\alpha_t)$ af affine funktioner på et m-dimensionalt affint rum $\acute{A}$. Punktmængden

$$(31) \qquad \acute{A}' = \{X \in \acute{A} \mid \alpha_\tau(X) = 0, \ \tau = 1,\ldots,t\}$$

er affint underrum af $\acute{A}$. Idet hver af ligningerne $\alpha_\tau(X) = 0$ bestemmer hele rummet $\acute{A}$, en hyperplan eller den tomme mængde, er nemlig $\acute{A}'$ fællesmængde for affine underrum.

Det er klart, at man i (31) uden at ændre $\acute{A}'$ kan tilføje enhver ligning $\alpha(X) = 0$, hvor α er en linearkombination af $\alpha_1,\ldots,\alpha_t$. Man kan altså sige, at $\acute{A}'$ er mængden af fælles nulpunkter for alle affine funktioner i det af $\alpha_1,\ldots,\alpha_t$ frembragte underrum af $\acute{A}^*$. På den anden side kan man i (31) nøjes med de ligninger, der svarer til et maximalt sæt af lineært uafhængige blandt de affine funktioner $\alpha_1,\ldots,\alpha_t$, eller erstatte dem med ligningerne svarende til en vilkårlig basis for det nævnte underrum af $\acute{A}^*$.

<u>Hvis det ved (31) definerede affine underrum</u> $\acute{A}'$ <u>ikke er tomt, har det dimensionen</u> $r = m-s$, <u>hvor</u>

$$s = \operatorname{rg}(\alpha_1,\ldots,\alpha_t) .$$

For at vise dette, vælges et affint koordinatsystem i $\acute{A}$. Man har da for $\tau = 1,\ldots,t$

$$\alpha_\tau(X) = a_\tau + a_{\tau 1}x_1 + \cdots + a_{\tau m}x_m ,$$

hvor $a_\tau, a_{\tau\mu} \in L$ og $(x_1,\ldots,x_m)$ er det affine koordinatsæt for X.

Med betegnelserne $\underline{\underline{A}}$ for $(t \times m)$-matricen $(a_{\tau\mu})$, $\underline{\underline{a}}_|$ for søjlen (a_τ) og $\underline{\underline{x}}_|$ for søjlen (x_μ) er $\acute{A}'$ mængden af punkter X, hvis affine koordinatsæt tilfredsstiller det inhomogene lineære ligningssystem

$$\underline{\underline{a}}_| + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{0}}_| .$$

Hvis dette har en løsning $\overset{\circ}{\underline{\underline{x}}}_|$, fås samtlige løsninger ved til denne at addere løsningerne $\underline{\underline{y}}_|$ til det homogene system $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{y}}_| = \underline{\underline{0}}_|$. Dettes løsningsrum, og dermed $\acute{A}'$, har dimensionen $m - \mathrm{rg}\,\underline{\underline{A}}$. Idet $\mathrm{rg}(\underline{\underline{a}}_|\underline{\underline{A}}) = \mathrm{rg}\,\underline{\underline{A}}$ er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at det inhomogene system har en løsning, kan vi slutte, at

$$\dim \acute{A}' = m - \mathrm{rg}(\underline{\underline{a}}_|\underline{\underline{A}}) .$$

Da endvidere $\mathrm{rg}(\underline{\underline{a}}_|\underline{\underline{A}}) = \mathrm{rg}(\alpha_1,\dots,\alpha_t)$, hvilket følger af, at en affin funktion

$$\alpha(X) = a + a_1x_1 + \dots + a_mx_m$$

er konstanten 0, hvis og kun hvis $a = a_1 = \dots = a_m = 0$, er påstanden hermed bevist.

Af den sidste bemærkning kan endvidere sluttes, at $\acute{A}^*$ er isomorf med L^{m+1}.

Lad der nu være givet et r-dimensionalt affint underrum $\acute{A}'$ af $\acute{A}$. Mængden af affine funktioner, som har værdien 0 på $\acute{A}'$, er et underrum $\acute{A}_0^*$ af $\acute{A}^*$. Lad dets dimension være s. De fælles nulpunkter for de affine funktioner fra A_0^* udgør et affint underrum af dimension m-s, som indeholder $\acute{A}'$. Vi har altså $r \leq m-s$. Det skal vises, at der gælder lighed. Antag, at $r < m-s$. Der fandtes da et punkt $Q \notin \acute{A}'$ således, at $\alpha(Q) = 0$ for alle $\alpha \in A_0^*$. Men dette ville stride mod definitionen af $\acute{A}_0^*$. Der findes nemlig affine funktioner, som er 0 på $\acute{A}'$ og forskellig fra 0 i Q, hvilket ses således: Man vælger affint uafhængige punkter $P_0,\dots,P_r$ i $\acute{A}'$. Da vil $P_0,\dots,P_r$, Q også være affint uafhængige. Hvis $m > r+1$, kan der yderligere vælges $m-r-1$ punkter i $\acute{A}$, som sammen med de nævnte udgør et sæt af $m+1$ affint uafhængige punkter. Der findes derfor affine funktioner α, for hvilke $\alpha(P_0) = \dots = \alpha(P_r) = 0$ og $\alpha(Q) \neq 0$, og disse har den ønskede egenskab. Hermed er bevist:

Til hvert r-dimensionalt affint underrum $\acute{A}'$ af et m-dimensionalt affint rum $\acute{A}$ svarer netop ét underrum af dimension $m - r = \operatorname{codim} \acute{A}'$ af vektorrummet $\acute{A}^*$ af affine funktioner på $\acute{A}$, således at $\acute{A}'$ består af de fælles nulpunkter for underrummets affine funktioner.

Orientering. I mængden af baser for (sæt af m lineært uafhængige vektorer i) et m-dimensionalt reelt vektorrum U defineres en relation på følgende måde: Er $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m)$ og $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m)$ baser for U, findes der én regulær matrix $\underline{\underline{S}}$ således, at

$$(\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_m) = (\underline{u}_1 \cdots \underline{u}_m)\ \underline{\underline{S}} .$$

Basen $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m)$ siges at være ens orienteret med eller modsat orienteret $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m)$, efter som det $\underline{\underline{S}} > 0$ eller det $\underline{\underline{S}} < 0$, og vi skriver henholdvis

$$(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m) \sim (\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m)$$

eller

$$(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m) \not\sim (\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m) .$$

Det er klart, at relationen $\sim$ er refleksiv. At den er symmetrisk følger af, at det $\underline{\underline{S}}^{-1}$ har samme fortegn som det $\underline{\underline{S}}$. Er $(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_m)$ en tredie basis, findes der én regulær matrix $\underline{\underline{T}}$ således, at

$$(\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m) = (\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_m)\underline{\underline{T}} = (\underline{u}_1 \cdots \underline{u}_m)\underline{\underline{S}}\underline{\underline{T}}.$$

Ved hjælp af $\det(\underline{\underline{S}}\underline{\underline{T}}) = \det \underline{\underline{S}} \det \underline{\underline{T}}$ ses, at $\sim$ er transitiv, altså en ækvivalensrelation, og at der findes netop to ækvivalensklasser. At <u>orientere rummet</u> vil sige at vælge én af de to klasser og kalde baserne tilhørende denne for <u>positivt orienteret</u> (eller kort <u>positive</u>). Baserne i den anden klasse siges da at være <u>negativt orienteret</u> (eller kort <u>negative</u>).

To baser, hvoraf den ene fremgår af den anden ved, at én af vektorerne erstattes med den modsatte, eller ved ombytning af to af vektorerne, er modsat orienteret. Heraf sluttes:

<u>To baser, hvoraf den ene fremgår af den anden ved en permutation af vektorerne, er ens eller modsat orienteret, efter som permutationen er lige eller ulige</u>.

Lad vektorrummet U af dimension m være orienteret, og lad U', hvor

$$0 < r = \dim U' < m ,$$

være et orienteret underrum af U. Ethvert til U' komplementært underrum U" kan da tilskrives en bestemt orientering ved at lade en basis $(\underline{u}_1'',\dots,\underline{u}_{m-r}'')$ for U" være positivt orienteret, hvis

$$(\underline{u}_1',\dots,\underline{u}_r',\underline{u}_1'',\dots,\underline{u}_{m-r}'') ,$$

hvor $(\underline{u}_1',\dots,\underline{u}_r')$ er en positivt orienteret basis for U', er en positivt orienteret basis for U. Det ses let, at den således <u>inducerede orientering</u> af U" er uafhængig af, hvilken positivt orienterede basis for U' der benyttes. De orienteringer, der induceres i de til U' komplementære underrum, omtales lejligheds-vis under ét som den til den givne "<u>indre orientering</u>" af U' svarende "<u>ydre orientering</u>" af U'.

Vi betragter nu et m-dimensionalt reelt affint rum (Á,U). Her defineres en relation ~ i mængden af (ordnede) sæt af m+1 affint uafhængige punkter, altså i mængden af m-dimensionale simplexer. To simplexer $(P_0,\dots,P_m)$ og $(Q_0,\dots,Q_m)$ siges at være ens eller modsat orienteret, og man skriver

$$(P_0,\dots,P_m) \sim \text{ eller } \nsim (Q_0,\dots,Q_m) ,$$

efter som $(\overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_m})$ og $(\overrightarrow{Q_0Q_1},\dots,Q_0Q_m)\dots$ er ens eller modsat orienterede baser for U. Det er oplagt, at ~ er en ækvivalensrelation, og at der findes netop to ækvivalensklasser. At <u>orientere det affine rum</u> vil sige at vælge én af de to klasser og kalde dennes simplexer for <u>positivt orienteret</u> (eller kort <u>positive</u>). Den anden klasses simplexer siges da at være <u>negativt orienteret</u> (eller kort <u>negative</u>). Det fremgår af definitionen, at orientering af det affine rum går ud på at orientere dets vektorrum.

To simplexer, hvoraf det ene fremgår af det andet ved ombytning af to af punkterne, er modsat orienteret. For at vise dette betragtes et simplex $(P_0,P_1,\dots,P_m)$. Idet ombytning af to af punkterne $P_1,\dots,P_m$ medfører ombytning af de to tilsvarende vektorer blandt $\overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_m}$, er påstanden rigtig i dette tilfælde. Det er herefter tilstrækkeligt at vise, at

$$(P_1,P_0,P_2,\dots,P_m) \nsim (P_0,P_1,P_2,\dots,P_m) ,$$

dvs.

$$(\overrightarrow{P_1P_0},\overrightarrow{P_1P_2},\dots,\overrightarrow{P_1P_m}) \nsim (\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2},\dots,\overrightarrow{P_0P_m}) .$$

Idet

$$(\overrightarrow{P_1P_0},\overrightarrow{P_1P_2},\dots,\overrightarrow{P_1P_m}) = (-\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2}-\overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_m}-\overrightarrow{P_0P_1}) ,$$

er dette rigtigt, fordi

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ -1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 .$$

Af det viste sluttes:

<u>To m-dimensionale simplexer i et m-dimensionalt reelt affint rum, hvoraf det ene fremgår af det andet ved en permutation af punkterne, er ens eller modsat orienteret, efter som permutationen er lige eller ulige.</u>

Lad det m-dimensionale reelle affine rum $(\acute{A},U)$ være orienteret, og lad $(\acute{A},U')$, hvor

$$0 < r = \dim \acute{A}' < m ,$$

være et orienteret underrum af $\acute{A}$. Er $(\acute{A}'',U'')$ et til dette komplementært underrum, vil vektorrummene U' og U'' være komplementære underrum af U. Den givne orientering af $\acute{A}'$ bestemmer en orientering af U', denne inducerer en orientering af U'', og denne bestemmer igen en orientering af $\acute{A}''$, der siges at være <u>induceret</u> af den givne orientering af $\acute{A}'$. Er $(P_0,P_1',\dots,P_r')$, hvor P_0 er skæringspunktet mellem $\acute{A}'$ og $\acute{A}''$, et positivt simplex i $\acute{A}'$, vil et simplex $(P_0,P_1'',\dots,P_{m-r}'')$ i $\acute{A}''$ være positivt ved den inducerede orientering, hvis og kun hvis $(P_0,P_1',\dots,P_r',P_1'',\dots,P_{m-r}'')$

er et positivt simplex ved den givne orientering af $\acute{A}$. Man taler også her om den til den givne "<u>indre orientering</u>" af $\acute{A}'$ svarende "<u>ydre orientering</u>" af $\acute{A}'$, hvormed menes de inducerede orienteringer af de til $\acute{A}'$ komplementære affine underrum.

Vi betragter nu specielt en hyperplan $\acute{A}' = \acute{H}$ i $\acute{A}$ med ligning $\alpha(X) = 0$, hvor α er en ikke-konstant affin funktion på $\acute{A}$. Punktmængderne

$$\{X \in \acute{A} \mid \alpha(X) > 0\} \; , \qquad \{X \in \acute{A} \mid \alpha(X) < 0\}$$

kaldes de <u>åbne halvrum</u> og punktmængderne

$$\{X \in \acute{A} \mid \alpha(X) \geqq 0\} \; , \qquad \{X \in \acute{A} \mid \alpha(X) \leqq 0\}$$

de <u>afsluttede halvrum begrænset af</u> (eller kort <u>til</u>) $\acute{H}$.

<u>Er</u> $(P_0,\dots,P_{m-1})$ <u>et $(m-1)$-dimensionalt simplex i hyperplanen</u> $\acute{H}$ <u>og</u> P_m, Q <u>punkter uden for</u> $\acute{H}$, <u>gælder</u>

$$(32) \qquad (P_0,\dots,P_{m-1},Q) \sim (P_0,\dots,P_{m-1},P_m) \; ,$$

<u>hvis og kun hvis</u> P_m <u>og</u> Q <u>ligger i samme åbne halvrum til</u> $\acute{H}$.

Bevis: Lad $(q_1,\dots,q_m)$ være det affine koordinatsæt for Q med hensyn til koordinatsystemet $(P_0,\overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_m})$. Der gælder da

$$(\overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_{m-1}},\overrightarrow{P_0Q}) = (\overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_{m-1}},\overrightarrow{P_0P_m})\underline{\underline{S}} \; ,$$

hvor matricen $\underline{\underline{S}}$ fås af $(m \times m)$-enhedsmatricen ved at erstatte den sidste række med $(q_1 \cdots q_m)$. Vi har altså det $\underline{\underline{S}} = q_m$, og følgelig er (32) opfyldt, hvis og kun hvis $q_m > 0$. Idet den affine funktion α er lig 0 i punkterne $P_0,\dots,P_{m-1}$, har den i det valgte koordinatsystem fremstillingen $\alpha(X) = \alpha(P_m)x_m$. Da således $\alpha(Q) = \alpha(P_m)q_m$, vil (32) være opfyldt, hvis og kun hvis

$\alpha(Q)$ og $\alpha(P_m)$ har samme fortegn, og dette er påstanden.

Af det viste fremgår, at hvis rummet $\acute{A}$ er orienteret, kan den til en indre orientering af en hyperplan $\acute{H}$ svarende ydre orientering angives ved det åbne halvrum til $\acute{H}$, for hvis punkter Q simplexet $(P_0,\dots,P_{m-1},Q)$, hvor $(P_0,\dots,P_{m-1})$ er et positivt simplex i $\acute{H}$, er positivt i $\acute{A}$. Det pågældende åbne halvrum kaldes da det <u>positive halvrum</u> til $\acute{H}$ og betegnes $\acute{H}^+$. Det andet kaldes det <u>negative halvrum</u> og betegnes H^-.

Undertiden er det hensigtsmæssigt at vælge et af de åbne halvrum til en hyperplan $\acute{H}$ som det positive, selv om der ikke er givet orienteringer af både $\acute{A}$ og $\acute{H}$, og derved at fastsætte orienteringer af de til $\acute{H}$ komplementære underrum, altså linierne, der skærer $\acute{H}$, nemlig "fra $\acute{H}$ ind i det valgte halvrum".

Det bemærkes, at der i undersøgelserne vedrørende orientering af reelle vektorrum og affine rum, kun er benyttet, at de reelle tal med den sædvanlige ordning danner et kommutativt ordnet legeme. Alt kan derfor overføres ordret til rum over et vilkårligt sådant legeme.

<u>Topologi</u>. Ethvert reelt affint rum af endelig dimension kan på naturlig måde forsynes med en bestemt topologi. Her vil det ske ved, at der fastsættes, hvilke delmængder af rummet der skal være åbne.

I det reelle m-dimensionale affine rum vælges et affint koordinatsystem $(0, \underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$. Ved til hvert punkt $X \in \acute{A}$ at lade svare dets koordinatsæt $(x_1,\dots,x_m)$ defineres en bijektiv afbildning $\kappa:\acute{A}\to\acute{R}^m$. En mængde $M \subseteq \acute{A}$ siges at være åben, hvis dens billede $\kappa(M)$ er en åben delmængde af $\acute{R}^m$ i dette talrums sædvanlige topologi. Ifølge denne definition kunne mængden af

Tilføjelse til afsnittet om orientering.

Lad U og V være reelle vektorrum af samme dimension m, og lad $f:U \to V$ være en bijektiv lineær afbildning. Der gælder da, at ens orienterede baser for U afbildes på ens orienterede baser for V og (følgelig) modsat orienterede på modsat orienterede. Dette indses således: Er $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$ en vilkårlig basis for U, vil $(f(\underline{e}_1),\dots,f(\underline{e}_m))$ være en basis for V. En vektor $\underline{u} \in U$ og dens billedvektor $f(\underline{u}) \in V$ har da de samme koordinatsæt med hensyn til disse baser. Er

$$(\underline{u}_1\cdots\underline{u}_m) = (\underline{e}_1\cdots\underline{e}_m)\underline{\underline{S}} ,$$

hvor $\underline{\underline{S}}$ er regulær, en anden basis for U, gælder derfor

$$(f(\underline{u}_1)\cdots f(\underline{u}_m)) = (f(\underline{e}_1),\dots,f(\underline{e}_m))\underline{\underline{S}} .$$

Heraf ses, at hvis baserne $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$ og $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m)$ er ens orienteret, er deres billeder det også.

I tilfældet U = V, hvor det altså drejer sig om en lineær transformation af U, kan man sammenligne en basis og dens billede med hensyn til orientering. Af ovenstående følger, at der foreligger to muligheder: 1) Enhver basis er ens orienteret med sit billede. 2) Enhver basis er modsat orienteret sit billede. I tilfældet 1) siges f at være en orienteringsbevarende og i tilfældet 2) en orienteringsvendende lineær transformation. Er $\underline{\underline{A}}$ matricen, der med hensyn til en basis $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$ hører til f, har man

$$(f(\underline{e}_1)\cdots f(\underline{e}_m)) = (\underline{e}_1\cdots\underline{e}_m)\underline{\underline{A}},$$

hvoraf ses, at f er orienteringsbevarende eller -vendende, efter som det $\underline{\underline{A}} > 0$ eller det $\underline{\underline{A}} < 0$. Bemærker man, at det $\underline{\underline{A}}$ er uafhængig af den valgte basis (idet $\underline{\underline{A}}$ ved en koordinattransformation med matricen $\underline{\underline{S}}$ ændres til $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$), og at man derfor kan tale om en lineær transformations determinant, kan man formulere det fundne resultat således:

En lineær transformation af et endelig-dimensionalt reelt vektorrum er orienteringsbevarende eller orienteringsvendede, efter som dens determinant er positiv eller negativ.

Den sammensatte af to lineære transformationer bevarer eller vender orienteringen, efter som de to transformationer er af samme art eller af hver sin art. En lineær transformation og dens inverse er af samme art. Heraf sluttes:

De orienteringsbevarende lineære transformationer af et endelig-dimensionalt reelt vektorrum U danner en undergruppe $GL^+(U)$ af index 2 af den generelle lineære gruppe $GL(U)$.

Vi betragter nu reelle affine rum (Á,U) og (B́,V) af samme endelige dimension m. For en bijektiv affin afbildning α:Á $\to$ B́ gælder da, at ens orienterede m-dimensionale simplexer i Á afbildes på ens orienterede simplexer i B́ og (følgelig) modsat orienterede på modsat orienterede. Tages i betragtning, hvad det betyder, at to simplexer er ens orienteret, ses dette at være en umiddelbar konsekvens af den tilsvarende egenskab ved den til α hørende lineære afbildning $f: U \to V$.

Heraf sluttes videre, at en affin transformation af et affint rum Á er enten orienteringsbevarende, dvs. afbilder ethvert m-dimensionalt simplex i Á på et med dette ens orienteret, eller orienteringsvendende, dvs. afbilder ethvert sådant simplex på et modsat orienteret. Idet matricen $\underline{\underline{A}}$ i en matrixligning $\underline{y}_| = \underline{a}_| + \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_|$ for den affine transformation tillige er en matrix for den tilhørende lineære transformation, er det $\underline{\underline{A}}$ uafhængig af det valgte koordinatsystem og kan derfor kaldes den affine transformations determinant. Der gælder:

En affin transformation af et endelig-dimensionalt reelt affint rum er orienteringsbevarende eller orienteringsvendende, efter som dens determinant er positiv eller negativ.

Endvidere har man:

De orienteringsbevarende affine transformationer af et endelig-dimensionalt reelt affint rum $\acute{A}$ danner en undergruppe $\mathrm{Aff}^{+}(\acute{A})$ af index 2 af rummets affine gruppe $\mathrm{Aff}(\acute{A})$.

åbne delmængder af $\acute{A}$ imidlertid tænkes at afhænge af det valgte koordinatsystem. At dette ikke er tilfældet, ses på følgende måde: Lad $(\bar{O},\underline{\bar{e}}_1,\ldots,\underline{\bar{e}}_m)$ være et andet koordinatsystem i $\acute{A}$. Ved til punktet $X \in \acute{A}$ at lade svare dets koordinatsæt $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m)$ med hensyn til dette system fås en bijektiv afbildning $\bar{\kappa}:\acute{A} \to \acute{R}^m$. Nu er $\bar{\kappa}(M) = \bar{\kappa}\circ\kappa^{-1}(\kappa(M))$, og såvel koordinattransformationen $\bar{\kappa}\circ\kappa^{-1}:\acute{R}^m \to \acute{R}^m$, der har formen $\underline{\underline{\bar{x}}}_| = \underline{\underline{t}}_| + \underline{\underline{T}}\underline{\underline{x}}_|$, som dens inverse, der har samme form, er øjensynlig kontinuert. Dette medfører, at $\bar{\kappa}(M)$ er åben, hvis og kun hvis $\kappa(M)$ er åben, og dette er påstanden.

Den således definerede mængde af åbne mængder i $\acute{A}$ har de egenskaber, som sikrer, at den bestemmer en topologi i $\acute{A}$, nemlig:

1) $\emptyset$ og $\acute{A}$ er åbne mængder.

2) Fællesmængden for endelig mange åbne mængder er åben.

3) Foreningsmængden af en vilkårlig mængde af åbne mængder er åben.

Dette følger umiddelbart af, at mængden af åbne mængder i $\acute{R}^m$ har disse egenskaber, og at koordinatafbildningen er bijektiv. Generelt kan man sige, at alle begreber og resultater vedrørende topologien i $\acute{R}^m$ uden videre kan overføres til $\acute{A}$.

Ganske tilsvarende kan et reelt endelig-dimensionalt vektorrum på "kanonisk" måde forsynes med en topologi. Er $(\acute{A},U)$ et affint rum af den her betragtede art, vil den bijektive afbildning af $\acute{A}$ på $\acute{R}^m$, der for et fast punkt P_0 af $\acute{A}$ er bestemt ved $X \to \overrightarrow{P_0X}$, være kontinuert, idet den med benyttelse af et koordinatsystem med begyndelsespunkt P_0 føres over i den identiske afbildning af $\acute{R}^m$. Det samme gælder naturligvis for den inverse afbildning.

I det følgende tænkes endelig-dimensionale reelle vektorrum og affine rum forsynet med deres kanoniske topologier, uden at dette siges udtrykkeligt.

Matrixligninger for lineære og affine afbildninger viser, at alle sådanne afbildninger af endelig-dimensionale reelle vektorrum henholdsvis affine rum ind i rum af samme art er kontinuerte.

Med benyttelse af et koordinatsystem ses endvidere, at de ovenfor definerede åbne og afsluttede halvrum er henholdsvis åbne og afsluttede delmængder af det topologiske rum $\acute{A}$.

Det bemærkes, at også et endelig-dimensionalt komplekst vektorrum eller affint rum har en naturlig topologi, der fås som i det reelle tilfælde ved overføring af det pågældende komplekse talrums sædvanlige topologi.

<u>Konvekse mængder</u>. Lad P og Q være punkter i et reelt affint rum $\acute{A}$. Ved det <u>afsluttede liniestykke</u> [P,Q] forstås punktmængden

$$[P,Q] = \{X \in \acute{A} \mid X = (1-t)P + tQ,\ 0 \leqq t \leqq 1\}.$$

En punktmængde $C \subseteqq \acute{A}$ siges at være <u>konveks</u>, hvis der for $P,Q \in \acute{A}$ gælder

$$P,Q \in C \Rightarrow [P,Q] \subseteqq C .$$

Alle affine underrum, specielt $\emptyset$, enhver mængde bestående af ét punkt og hele rummet, er konvekse. Idet der for en affin funktion α og $t \in \acute{R}$ gælder

$$\alpha(1-t)P + tQ) = (1-t)\alpha(P) + t\alpha(Q) ,$$

er alle åbne og afsluttede halvrum konvekse mængder. Af definitionen følger endvidere umiddelbart:

<u>Fællesmængden for en vilkårlig mængde af konvekse mængder er konveks.</u>

<u>Ved en affin afbildning afbildes en konveks mængde på en konveks mængde, og originalmængden til en konveks mængde er konveks.</u>

Ved det <u>konvekse hylster</u> conv M af en punktmængde $M \subseteq \acute{A}$ forstås fællesmængden for alle konvekse delmængder af Á, der indeholder M, altså den "mindste" konvekse mængde, der indeholder M. Det er klart, at

$$\operatorname{conv} M \subseteq \operatorname{aff} M .$$

Ved en <u>konveks kombination</u> af punkter $P_0,\dots,P_r$ i Á forstås en affin kombination af dem med ikke-negative koefficienter. (Et liniestykkes punkter er endepunkternes konvekse kombinationer.) Er $\mu_0,\dots,\mu_r$ ikke-negative tal, som ikke alle er 0, og μ deres sum, kaldes den konvekse kombination

$$P = \mu^{-1}(\mu_0 P_0 + \dots + \mu_r P_r)$$

også for <u>tyngdepunktet</u> eller <u>massemidtpunktet</u> for partikler med masserne $\mu_0,\dots,\mu_r$ anbragt i punkterne $P_0,\dots,P_r$. Der gælder øjensynlig:

<u>Er</u> $P = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_r P_r$ <u>og</u> $Q = \mu_0 Q_0 + \dots + \mu_s Q_s$ <u>konvekse kombinationer, da er for hvert</u> $t \in [0,1]$ <u>punktet</u> $(1-t)P + tQ$, <u>altså ethvert punkt af</u> $[P,Q]$, <u>en konveks kombination af punkterne</u> $P_0,\dots,P_r,Q_0,\dots,Q_s$.

Ved hjælp af induktion fås heraf:

<u>Er</u> C <u>en konveks mængde, vil enhver konveks kombination af endelig mange punkter fra</u> C <u>tilhøre</u> C.

Endvidere gælder:

<u>For enhver punktmængde</u> M <u>er</u> conv M <u>mængden af alle konvekse kombinationer af endelig mange punkter fra</u> M.

Bevis: Lad M' betegne mængden af disse konvekse kombinationer. Ifølge den sidste sætning har vi $M' \subseteq \operatorname{conv} M$. Endvidere er ethvert punkt af M konveks kombination af sig selv, altså $M \subseteq M'$. Ifølge den foregående sætning er M' konveks, altså $\operatorname{conv} M \subseteq M'$.

Vi betragter nu et simplex $(P_0,\dots,P_r)$, altså et sæt af affint uafhængige punkter i $\acute{A}$. Lad $\acute{A}' = \operatorname{aff}\{P_0,\dots,P_r\}$ være det af punkterne udspændte r-dimensionale affine underrum, og $S = \operatorname{conv}\{P_0,\dots,P_r\}$ deres konvekse hylster. Ifølge den lige viste sætning er S mængden af punkter i $\acute{A}'$, hvis barycentriske koordinater med hensyn til simplexet $(P_0,\dots,P_r)$ er ikke-negative. Mængden S kaldes <u>det afsluttede simplex med hjørnerne</u> $P_0,\dots,P_r$. (For $r = 1$ også liniestykket med endepunkterne P_0P_1, for $r = 2$ også trekanten med vinkelspidserne P_0,P_1,P_2, for $r = 3$ også tetraedret med hjørnerne P_0,P_1,P_2,P_3.) (Glosen "simplex" bruges altså til at betegne såvel et ordnet sæt af affint uafhængige punkter som disses konvekse hylster, altså en punktmængde.) Simplexet S udgøres af de punkter X, hvis koordinatsæt $(x_1,\dots,x_r)$ med hensyn til det affine koordinatsystem $(P_0,\overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_r})$ tilfredsstiller

$$(33) \qquad x_1 \geqq 0, \dots, x_r \geqq 0, \quad x_1 + \dots + x_r \leqq 1 .$$

Hvert delsæt $(P_0,\dots,P_r)$ bestående af s+1 punkter, hvor $0 \leqq s < r$, bestemmer et s-dimensionalt simplex (i begge betydninger) og kaldes en <u>s-dimensional side</u> af S. Samtlige siders foreningsmængde er <u>randen</u> af simplexet S. Den består af alle de punkter af S, for hvilke mindst én barycentrisk koordinat er 0. Det indre af S udgøres af de punkter af S, hvis barycentriske koordinater alle er positive, og kaldes også et åbent simplex, idet det er en åben delmængde af underrummet Á'.

Lad C være en ikke-tom konveks mængde. Hvis dim aff C = r, vil C indeholde r+1 affint uafhængige punkter og dermed et r-dimensionalt simplex. Dettes indre er en åben delmængde af underrummet aff C. Der gælder altså: Enhver ikke-tom konveks mængde C har, betragtet som delmængde af aff C, indre punkter. Disse kaldes de relativt indre punkter af C og de øvrige punkter af C relative randpunkter af C.

Om det konvekse hylster af en punktmængde gælder følgende sætning (C. Carathéodory, 1911, for kompakte mængder, E. Steinitz, 1913, for vilkårlige mængder):

Lad M være en punktmængde i et reelt affint rum af dimension m, og lad der være givet et punkt $P_0 \in M$. Hvert punkt $X \in \operatorname{conv} M$ er da en konveks kombination af affint uafhængige punkter $P_0, P_1, \dots, P_r \in M$, altså højst m+1 punkter, hvoriblandt P_0. Med andre ord: conv M er foreningsmængden af alle afsluttede simplexer, hvis hjørner er P_0 og andre punkter af M.

Det bemærkes, at hvis dim aff M = r, kan man nøjes med de r-dimensionale simplexer, da de andre, der skal tages i betragtning, er sider af disse.

Bevis: Ethvert punkt $X \in \operatorname{conv} M$ er ifølge et tidligere resultat en konveks kombination

$$(34) \qquad X = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_s P_s , \quad \lambda_\sigma \geqq 0 , \quad \Sigma\lambda_\sigma = 1 ,$$

af punkter tilhørende M. (Skulle det givne punkt P_0 ikke være blandt disse, tilføjes det med koefficient 0.) Antag, at $P_0, \dots, P_s$ er affint afhængige, altså at der findes reelle tal

μ_σ, $\sigma = 0,\ldots,s$, som ikke alle er 0, således at

(35) $$\underline{0} = \mu_0 P_0 + \cdots + \mu_s P_s \ , \quad \Sigma\mu_\sigma = 0 \ .$$

Vi kan antage, at $\mu_0 \leqq 0$, idet dette, om fornødent, kan opnås ved at erstatte alle koefficienter med de modsatte. Blandt koefficienterne μ_σ findes positive. Lad τ være det eller et af disse koefficienters mærketal, for hvilket $\lambda_\sigma/\mu_\sigma$ er mindst, altså

(36) $$\frac{\lambda_\tau}{\mu_\tau} = \min_{\mu_\sigma > 0} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} \ .$$

Da $\mu_0 \leqq 0$, er $\tau \neq 0$. Multiplikation af ligningen (35) og derpå følgende subtraktion fra (34) giver

$$X = \sum_{\sigma=0}^{s} \left(\lambda_\sigma - \frac{\lambda_\tau}{\mu_\tau}\mu_\sigma\right) P_\sigma \ .$$

Her er koefficientsummen atter lig 1. Endvidere er alle koefficienter ikke-negative. Hvis $\mu_\sigma \leqq 0$, er dette klart, og ellers følger det af (36). Da koefficienten til P_τ er 0, kan dette punkt udelades, og man får en fremstilling af X som konveks kombination af s punkter. Da $\tau \neq 0$, findes P_0 stadig blandt disse. Hvis de s punkter er affint afhængige, kan man gentage processen. Efter endelig mange skridt fås X fremstillet som en konveks kombination af affint uafhængige punkter fra M, deriblandt P_0. Hermed er sætningen bevist.

Lad $(P,P_1,\ldots,P_r)$ være et sæt af affint uafhængige punkter og A' det af disse udspændte affine underrum. Til sættet knyttes en punktmængde, betegnet $[P,P_1,\ldots,P_r]$ og kaldet det af sættet udspændte (afsluttede) r-dimensionale <u>parallelotop</u> (for r = 1 også liniestykke, for $r = 2$ også parallel-ogram, for $r = 3$ også parallelepipedum). Det defineres som mængden af punkter $X \in \acute{A}'$, hvis affine koordinater $x_1,\dots,x_r$ med hensyn til koordinatsystemet $(P,\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_r)$, hvor $\underline{e}_\rho = \overrightarrow{PP_\rho}$, $\rho = 1,\dots,r$, tilfredsstiller $x_1,\dots,x_r \in [0,1]$. Parallelotopet afbildes altså ved den til koordinatsystemet hørende koordinatafbildning på "enhedsintervallet" $[0,1]^r \subset \acute{R}^r$. For hver delmængde $\{i_1,\dots,i_p\}$ af $\{1,\dots,r\}$ betragtes punktet

$$P_{i_1\dots i_p} = P + \underline{e}_{i_1} + \dots + \underline{e}_{i_p} .$$

Inklusive P, der lades svare til den tomme delmængde, fås herved 2^r punkter, der kaldes parallelotopets <u>hjørner</u>. De er karakteriseret ved at alle deres koordinater er lig 0 eller 1. Ved en <u>s-dimensional side</u>, hvor $0 \leqq s < r$, forstås en delmængde af parallelotopet, som er defineret på følgende måde: Man vælger en delmængde $\{j_1,\dots,j_s\}$ af $\{1,\dots,r\}$, specielt $\emptyset$, hvis $s = 0$, samt en mængde

$$\{i_1,\dots,i_p\} \subseteq \{1,\dots,r\} \setminus \{j_1,\dots,j_s\} .$$

Her kan p være $1,\dots,r-s$ samt 0 svarende til $\emptyset$. Siden er da mængden af punkter $X(x_1,\dots,x_r)$, for hvilke

$$x_{j_1},\dots,x_{j_s} \in [0,1] , \quad x_{i_1} = \dots = x_{i_p} = 1$$

og de øvrige koordinater er lig 0, altså parallelotopet

$$[P_{i_1\dots i_p}, P_{i_1\dots i_p j_s}, \dots , P_{i_1\dots i_p j_s}] .$$

Samtlige siders foreningsmængde er parallellotopets <u>rand</u>. Dets <u>indre</u> er mængden af punkter, hvis koordinater tilhører $]0,1[$.

Af koordinatfremstillingen sluttes let, at ethvert parallelotop er en konveks punktmængde. Det er det konvekse hylster af mængden af sine hjørner. Dette fremgår af følgende:

Et r-dimensionalt parallelotop $[P,P_1,\dots,P_r]$ er foreningsmængde af r! simplexer af dimension r, som alle har P som hjørne, og som to og to kun har randpunkter fælles. Til enhver permutation p af $\{1,\dots,r\}$ svarer ét af disse simplexer, nemlig

$$\text{(37)}\qquad \operatorname{conv}\{P,P_{p(1)}, P_{p(1)p(2)},\dots, P_{p(1)\dots p(r)}\} .$$

For at indse dette betragtes først de punkter $X \in [P,P_1,\dots,P_r]$, hvis koordinater $x_1,\dots,x_r$ er indbyrdes forskellige. Til hvert sådant punkt svarer én permutation p af $\{1,\dots,r\}$ således, at

$$\text{(38)}\qquad 1 \geqq x_{p(1)} > x_{p(2)} > \dots > x_{p(r)} \geqq 0 .$$

Punkterne, hvis koordinater opfylder disse uligheder med $\geqq$ i stedet for $>$ for en given permutation p, udgør netop simplexet (37). Dettes punkter er nemlig

$$t_0P + t_1(P + \underline{e}_{p(1)}) + \dots + t_r(P + \underline{e}_{p(1)} + \dots + \underline{e}_{p(r)}) ,$$

hvor

$$\text{(39)}\qquad t_0 \geqq 0, \dots ,t_r \geqq 0 , \quad t_0 + \dots + t_r = 1 ,$$

altså punkterne med de affine koordinater

$$x_{p(1)} = t_1 + \dots + t_r, \; x_{p(2)} = t_1 + \dots + t_{r-1}, \dots , x_{p(r)} = t_1 .$$

Ulighederne (38) med $\geqq$ i stedet for $>$ er ensbetydende med (39), og da lighed i en eller flere af ulighederne (39) og dermed (38) kun gælder for randpunkter af simplexet, følger påstanden heraf.

Volumen og mål. Vi betragter igen et reelt affint rum $(\acute{A},U)$ af endelig dimension m.

Som vist i den lineær algebra findes der en og på nær en konstant faktor kun én funktion $F:U^m \to \mathring{R}$, kaldet et volumenmål i U, som er forskellig fra konstanten 0, og som for $\underline{u}_1,\cdots,\underline{u}_m \in U$, $\lambda \in \mathring{R}$ og $i \neq j$ opfylder

$$F(\underline{u}_1,\cdots,\underline{u}_i+\lambda\underline{u}_j,\cdots,\underline{u}_m) = F(\underline{u}_1,\cdots,\underline{u}_i,\cdots,\underline{u}_m) ,$$

$$F(\underline{u}_1,\cdots,\lambda\underline{u}_i,\cdots,\underline{u}_m) = \lambda F(\underline{u}_1,\cdots,\underline{u}_i,\cdots,\underline{u}_m) .$$

(Disse to egenskaber er vist at være ensbetydende med, at F er en alternerende m-linearform.) Hvis og kun hvis $\underline{u}_1,\cdots,\underline{u}_m$ er lineært afhængige, er $F(\underline{u}_1,\cdots,\underline{u}_m) = 0$. Er

$$(40) \qquad (\underline{v}_1\cdots\underline{v}_m) = (\underline{u}_1\cdots\underline{u}_m)\underline{\underline{S}} ,$$

hvor $\underline{\underline{S}}$ er en reel $(m\times m)$-matrix, gælder

$$F(\underline{v}_1,\cdots,\underline{v}_m) = F(\underline{u}_1,\cdots,\underline{u}_m)\det \underline{\underline{S}} .$$

Heraf ses, at hvis såvel $\underline{u}_1,\cdots,\underline{u}_m$ som $\underline{v}_1,\cdots,\underline{v}_m$ er lineært uafhængige, altså $\underline{\underline{S}}$ regulær, vil $F(\underline{u}_1,\cdots,\underline{u}_m)$ og $F(\underline{v}_1,\cdots,\underline{v}_m)$ have samme eller modsatte fortegn, efter som de to vektorsæt er ens eller modsat orienteret. Forholdet

$$(41) \qquad \frac{F(\underline{v}_1,\cdots,\underline{v}_m)}{F(\underline{u}_1,\cdots,\underline{u}_m)} = \det \underline{\underline{S}}$$

afhænger ikke af det valgte volumemål F, men kun af de to vektorsæt.

Lad $[P,P_1,\cdots,P_m]$ og $[Q,Q_1,\cdots,Q_m]$ være to parallel-otoper i $\acute{A}$. Med betegnelserne

$$\underline{u}_\mu = \overrightarrow{PP_\mu} , \quad \underline{v}_\mu = \overrightarrow{QQ_\mu} , \quad \mu = 1,\cdots,m ,$$

defineres de to parallelotopers <u>volumenforhold</u> (for m = 1 <u>længdeforhold</u>, for m = 2 <u>arealforhold</u>) ved (41), hvor $\underline{\underline{S}}$ er bestemt ved (40). Der gælder

<u>To parallelotopers volumenforhold er en affin invariant.</u>

Bevis: Lad $(\acute{B},V)$ også være et reelt affint rum af dimension m og $\alpha:\acute{A} \to \acute{B}$ en bijektiv affin afbildning med den lineære afbildning $f:U \to V$. Benyttes $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m)$ som basis for U og $(f(\underline{u}_1),\dots,f(\underline{u}_m))$ som basis for V, vil (40) medføre, at

$$(f(\underline{v}_1)\cdots f(\underline{v}_m)) = (f(\underline{u}_1)\cdots f(\underline{u}_m))\underline{\underline{S}} \ ,$$

og heraf følger påstanden.

Man kan naturligvis også tale om volumenforhold for parallelotoper i et affint underrum $\acute{A}'$ af det betragtede affine rum $\acute{A}$, altså f.eks. om arealforhold for parallelogrammer i en plan beliggende i et 3-dimensionalt rum. Parallelotoper i forskellige affine underrum kan tilskrives et volumenforhold, hvis og kun hvis underrummene har samme vektorrum.

Lad $\alpha:\acute{A} \to \acute{A}$ være en affin transformation og $f:U \to U$ den tilhørende lineære transformation. For en basis $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m)$ for U har man da

$$(f(\underline{u}_1)\cdots f(\underline{u}_m)) = (\underline{u}_1\cdots\underline{u}_m)\underline{\underline{A}} \ ,$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er den lineære transformations matrix med hensyn til denne basis. Er $[P,P_1,\dots,P_m]$ et parallelotop i $\acute{A}$ fås derfor med ovenstående betegnelser

$$\frac{F(f(\underline{u}_1),\dots,f(\underline{u}_m))}{F(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m)} = \det \underline{\underline{A}} \ .$$

Heraf sluttes:

<u>Volumenforholdet for et parallelotops billede ved en affin transformation og selve parallelotopet er uafhængigt af dette, nemlig lig med transformationens determinant.</u>

Begrebet volumenmål har en nøje forbindelse med målteorien for talrummet $\mathring{R}^m$. Er der valgt et affint koordinatsystem i $\acute{A}$, svarer der ved den tilhørende koordinatafbildning $\kappa:\acute{A} \to \mathring{R}^m$ til hver delmængde M af $\acute{A}$ en delmængde $\kappa(M)$ af $\mathring{R}^m$. Mængden M siges at være <u>målelig</u>, hvis den tilsvarende mængde $\kappa(M)$ af koordinatsæt er en målelig delmængde af $\mathring{R}^m$. Valget af koordinatsystemet spiller herved ingen rolle, idet en koordinattransformation ikke er andet end en affin transformation af $\mathring{R}^m$, og ved en sådan afbildes målelige mængder på målelige mængder.

Parallelotoper og simplexer er målelige, idet de er afsluttede mængder.

I rummet $\acute{A}$ vælges et parallelotop $[P,P_1,\dots,P_m]$ som "volumenenhed", og volumenmålet F vælges således, at

$$F(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m) = 1, \qquad \underline{u}_\mu = \overrightarrow{PP_\mu}, \; \mu = 1,\dots,m \; .$$

For et vilkårligt parallelotop $[Q,Q_1,\dots,Q_m]$ defineres da volumenet ved

$$\mathrm{vol}[Q,Q_1,\dots,Q_m] = F(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m), \qquad \underline{v}_\mu = \overrightarrow{QQ_\mu}, \; \mu = 1,\dots,m \; .$$

Benyttes $(P,\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m)$ som affint koordinatsystem i $\acute{A}$, og er $\kappa:\acute{A} \to \mathring{R}^m$ den tilhørende koordinatafbildning, vil der gælde

$$\kappa[P,P_1,\dots,P_m] = [0,1]^m \; ,$$

altså

$$\text{mål}(\kappa[P,P_1,\dots,P_m]) = 1$$

og

$$(42) \qquad \text{mål}(\kappa[Q,Q_1,\dots,Q_m]) = |\text{vol}[Q,Q_1,\dots,Q_m]| \ .$$

For at indse den sidste lignings gyldighed betragtes den affine transformation $\alpha: \acute{A} \to \acute{A}$, der er bestemt ved, at

$$\alpha(P) = Q, \ \alpha(P_1) = Q_1, \ \dots \ , \ \alpha(P_m) = Q_m \ .$$

Lad $\underline{y}_| = \underline{\underline{a}}_| + \underline{\underline{A}}\underline{x}_|$ være dens matrixligning med hensyn til det valgte koordinatsystem. Ifølge ovenstående er den højre side i (42) lig med $|\det\underline{\underline{A}}|$. At den venstre side også har denne værdi, kan f.eks. bevises ved at betragte

$$\text{sgn}(\det \underline{\underline{A}})\text{mål}(\kappa[Q,Q_1,\dots,Q_m]) \ ,$$

hvor sgn(det $\underline{\underline{A}}$) betegner fortegnet for det $\underline{\underline{A}}$, som funktion af de m søjler i $\underline{\underline{A}}$, og ud fra målets egenskaber at slutte, at den har de to for volumenmål karakteristiske egenskaber. Idet der i $\acute{R}^m$ kun findes ét volumenmål, som har værdien 1 for sættet af enhedsmatricens søjler, nemlig det $\underline{\underline{A}}$, følger påstanden heraf.

Dette resultat motiverer, at man tilskriver enhver målelig mængde $M \subseteq \acute{A}$ et ikke-negativt volumen ved

$$\text{vol } M = \text{mål } \kappa(M) \ .$$

Dette afhænger imidlertid af valget af volumenenheden $[P,P_1,\dots,P_m]$ og det derved fastlagte koordinatsystem. Erstatning med et andet parallelotop som volumenenhed går ud på en koordinattransformation i $\acute{A}$, altså ud på en affin transformation af $\acute{R}^m$. For en sådan gælder, at målet for billedmængden af en målelig mængde fås af dennes mål ved multiplikation med transformationens determinant. (Dette sluttes ved at anvende sætningen om transformation af integraler på mængdens karakteristiske funktion.) Heraf følger, at forholdet vol M'/vol M for to målelige mængder $M,M' \subseteq \overset{n}{A}$ med vol $M \neq 0$ er uafhængigt af den valgte volumeenhed, og at dette forhold er en affin invariant. Endvidere følger, at hvis $\alpha: \overset{n}{A} \to \overset{n}{A}$ er en affin transformation, vil vol $\alpha(M)$/vol M for enhver målelig mængde $M \subseteq \overset{n}{A}$ med vol $M \neq 0$ være lig med transformationens determinant.

<u>For et simplex</u> $\operatorname{conv}\{P,P_1,\dots,P_m\}$ <u>gælder</u>

$$(43) \qquad \operatorname{vol}\{P,P_1,\dots,P_m\} = \frac{1}{m!}\operatorname{vol}[P,P_1,\dots,P_m] ,$$

når simplexets volumen regnes med fortegn i overensstemmelse med parallelotopets.

Bevis: Ifølge et tidligere resultat kan parallelotopet deles i m! simplexer (37) (med m i stedet for r), som to og to kun har randpunkter fælles. Bortset fra fortegnet har disse simplexer samme volumen, idet hvert af dem fremgår af ét af dem, f.eks.

$$(44) \qquad \operatorname{conv}\{P,P_1,P_{12},\dots,P_{12\dots m}\} ,$$

ved en affin transformation, hvis determinant har absolut værdi 1. Transformationens matrix med hensyn til det side 44 benyttede koordinatsystem fås nemlig, som det fremgår af (38), af enhedsmatricen ved permutation af søjlerne. Endvidere har den affine transformation α, der er bestemt ved

$$\alpha(P) = P,\ \alpha(P_1) = P_1,\ \alpha(P_2) = P_{12},\ \dots\ ,\ \alpha(P_m) = P_{12\dots m} ,$$

ved hvilken $\operatorname{conv}\{P,P_1,\dots,P_m\}$ afbildes på (44), determinanten 1. Dens matrix med hensyn til det benyttede koordinatsystem er nemlig en trekantsmatrix, hvis diagonalelementer alle er 1. Hermed er (43) bevist for volumenernes absolutte værdier. Fortegnet for simplexets volumen defineres derefter ved (43), hvorved opnås samme forbindelse mellem fortegn og orientering som ved parallelotoper.

Euklidiske rum. I den affine geometri er det ikke muligt at definere en afstand mellem to punkter eller ortogonalitet af to linier. Ethvert punktpar bestående af forskellige punkter kan nemlig ved en affin transformation føres over i ethvert andet sådant par, og tilsvarende gælder for par af hinanden skærende linier. Sådanne par har ikke nogen affine invarianter.

I den elementære geometri defineres skalarproduktet af to vektorer ved hjælp af afstand og vinkelmål. Her er det hensigtsmæssigt at gå den omvendte vej, nemlig at gå ud fra et reelt affint rum $(\acute{A},U)$, i hvis vektorrum U der er defineret et indre produkt, altså en funktion fra $U \times U$ til $\hat{R}$ som for $\underline{u},\underline{v},\underline{w} \in U$ og $\lambda \in \hat{R}$ opfylder:

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{v}\cdot\underline{u} \ ,$$
$$(\underline{u}+\underline{v})\cdot\underline{w} = \underline{u}\cdot\underline{w} + \underline{v}\cdot\underline{w} \ ,$$
$$(\lambda\underline{u})\cdot\underline{v} = \lambda(\underline{u}\cdot\underline{v}) \ ,$$
$$\underline{u} \neq \underline{0} \ \Rightarrow \ \underline{u}\cdot\underline{u} > 0 \ .$$

Ensbetydende hermed er, at der i U er givet en symmetrisk bilinearform $\underline{u}\cdot\underline{v}$, hvis tilhørende kvadratiske form $\underline{u}\cdot\underline{u}$ er positiv definit.

Et endelig-dimensionalt affint rum, hvis vektorrum er forsynet med et indre produkt, kaldes et euklidisk rum. Som betegnelse kan bruges $(\acute{A},U,\cdot)$.

Et euklidisk rum $(\acute{A},U,\cdot)$ siges at være isomorf med et euklidisk rum $(\acute{B},V,\cdot)$, hvis der findes en bijektiv affin afbildning $\alpha:\acute{A} \to \acute{B}$, hvis tilhørende lineære afbildning $f:U \to V$ er ortogonal, altså opfylder $f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) = \underline{u}\cdot\underline{v}$ for $\underline{u},\underline{v} \in U$. Det bemærkes, at $f(\underline{u})\cdot f(\underline{u}) = \underline{u}\cdot\underline{u}$ for $\underline{u} \in U$ er tilstrækkelig herfor, idet

$$4\underline{u}\cdot\underline{v} = (\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v}) - (\underline{u}-\underline{v})\cdot(\underline{u}-\underline{v}) .$$

Isomorfi mellem euklidske rum er en ækvivalensrelation. Nødvendig og tilstrækkelig for isomorfi er, at de to rum har samme dimension. Nødvendigheden følger umiddelbart af definitionen, og tilstrækkeligheden sluttes af, at hvis to reelle vektorrum med indre produkt har samme endelige dimension, findes der en ortogonal afbildning af det ene på det andet.

For et indre produkt gælder Cauchy-Schwarz' ulighed

$$|\underline{u}\cdot\underline{v}| \leqq (\underline{u}\cdot\underline{u})^{\frac{1}{2}}(\underline{v}\cdot\underline{v})^{\frac{1}{2}}$$

med lighedstegn, hvis og kun hvis $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er lineært afhængige. Endvidere er

$$\|\underline{u}\| = (\underline{u}\cdot\underline{u})^{\frac{1}{2}}$$

en norm i U, så at

$$\|\underline{u}+\underline{v}\| \leqq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\| .$$

Her gælder lighed, hvis og kun hvis en af de to vektorer fremgår af den anden ved multiplikation med et ikke-negativt tal.

To vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$, for hvilke $\underline{u}\cdot\underline{v} = 0$, siges at være <u>ortogonale</u>, og man skriver $\underline{u} \perp \underline{v}$.

Er $(u_1,\dots,u_m)$ og $(v_1,\dots,v_m)$ koordinatsættene for vektorer $\underline{u},\underline{v} \in U$ med hensyn til en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$ for U, altså en basis, for hvilken

$$\underline{e}_i\cdot\underline{e}_j = \delta_{ij} ,$$

har man

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = u_1v_1 + \dots + u_mv_m = \underline{\underline{u}}_{-}\underline{\underline{v}}_{|} .$$

I det m-dimensionale euklidiske rum $(A,U,\cdot)$ defineres nu <u>afstanden</u> mellem to punkter P og Q ved

$$|PQ| = \|\overrightarrow{PQ}\| .$$

Det følger umiddelbart af normens egenskaber, at A herved bliver til et metrisk rum. Den ved metrikken bestemte topologi stemmer overens med den tidligere (side III,6,36-37) indførte. I trekantsuligheden

$$|PR| \leq |PQ| + |QR| ,$$

hvor $P,Q,R \in A$, gælder lighed, hvis og kun hvis $\overrightarrow{PQ}$ og $\overrightarrow{QR}$ er ens rettet, altså hvis og kun hvis P,Q,R ligger på ret linie og Q "mellem" P og R.

I et euklidisk rum gælder Pythagoras' sætning og den omvendte:

$$\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QR} \iff |PQ|^2 = |PR|^2 + |QR|^2 .$$

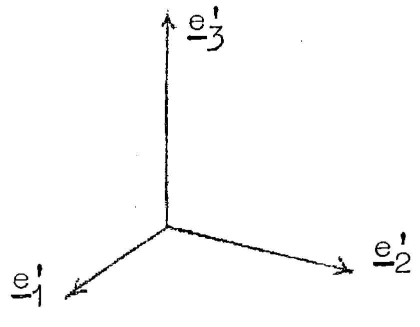
Ethvert affint underrum (A',U') af et euklidisk rum $(A,U,\cdot)$ er selv et euklidisk rum med restriktionen til U' af det indre produkt i U som indre produkt.

To affine underrum (A',U') og (A'',U'') af et euklidisk rum (A,U) siges at være (<u>fuldstændigt</u>) <u>ortogonale</u>, hvis de tilhørende vektorrum er det, altså hvis $U' \perp U''$, og man skriver da $A' \perp A''$. Er desuden U' og U'' komplementære, altså $U' \oplus U'' = U$, siges hvert af underrummene A' og A'' at være et <u>ortogonalt komplement</u> til det andet. To sådanne underrum har netop ét punkt fælles. Idet hvert underrum U' i det (endelig-dimensionale) vektorrum U har netop ét ortogonalt komplement $U'^{\perp}$, går der gennem hvert punkt af A netop ét ortogonalt komplementært under-

1. Affine afbildninger af et 3-dimensionale affint rum $\acute{A}^3$ med vektorrummet $(U^3,+,\dot{R})$ på en reel affin plan, dvs. et 2-dimensionalt affint rum $\acute{B}^2$ med vektorrummet $(V^2,+,\dot{R})$, benyttes i den såkaldte deskriptivgeometri. Dennes opgave er at udvikle metoder til afbildning af rumlige figurer i en plan på en sådan måde, at rumfigurens egenskaber kan aflæses af det plane billede. Ved en aksonometrisk afbildning forstås i deskriptivgeometrien en affin afbildning α af den nævnte art, som er bestemt på følgende måde: I $\acute{A}$ vælges et affint koordinatsystem $(0,\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ og i $\acute{B}$ et punkt $0'$ samt vektorer $\underline{e}_1',\underline{e}_1',\underline{e}_3'$, som to og to er lineært uafhængige. Der findes da netop én affin afbildning α, således at $\alpha(0) = 0'$ og $f_\alpha(\underline{e}_i) = \underline{e}_i'$, $i = 1,2,3$, hvor f_α er den til α hørende lineære afbildning. For punktet $X \in \acute{A}$ med koordinatsættet (x_1,x_2,x_3) er da $X' = \alpha(X)$ bestemt ved

$$\overrightarrow{0'X'} = x_1\underline{e}_1' + x_2\underline{e}_2' + x_3\underline{e}_3' .$$

Et polyeders 15 hjørnespidser har i koordinatsystemet $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ (som man bedst forestiller sig sædvanligt retvinklet) koordinatsættene $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,1,0)$, $D(1,1,0)$, $E(1,3,0)$, $F(0,3,0)$, $A_1(0,0,1)$, $B_1(2,0,1)$, $C_1(2,1,1)$, $D_1(1,1,1)$, $E_1(1,3,1)$, $F_1(0,3,1)$, $G(3/2,1/2,3/2)$, $H(1/2,1/2,3/2)$, $I(1/2,5/2,3/2)$. Polyedret har 13 sideflader: $ABCDEF$, ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1, EFF_1E_1, FAA_1F_1, A_1B_1GH, B_1C_1G, C_1D_1HG; D_1E_1IH, E_1F_1I, F_1A_1HI. Tegn et aksonometrisk billede af polyedret. (Vælg billedvektorerne $\underline{e}_1',\underline{e}_2'$ og $\underline{e}_3'$ af $\underline{e}_1,\underline{e}_2$ og $\underline{e}_3$ omtrent som angivet på figuren.)



2. Om en afbildning α af et affint $\acute{A}$ ind i et affint rum $\acute{B}$ over samme legeme L forudsættes, at der for hvilkesomhelst punkter $P,Q,R,S \in \acute{A}$ og hvert $\lambda \in L$ gælder

$$\overrightarrow{RS} = \lambda\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{\alpha(R)\alpha(S)} = \lambda\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)}.$$

Vis, at α er en affin afbildning.

3. Vis, at hvis α er en affin afbildning af et affint rum $\acute{A}$ ind i et affint rum $\acute{B}$ over samme legeme, vil det inverse billede $\alpha^{-1}(\acute{B}')$ af et affint underrum $\acute{B}'$ af $\acute{B}$ være et affint underrum af $\acute{A}$.

4. Vis, at en delmængde M af et affint rum $\acute{A}$ over et legeme med mindst 3 elementer er et affint underrum, hvis og kun hvis hver linie, der har to forskellige punkter fælles med M, er indeholdt i M.
Slut heraf, at mængden af fixpunkter ved en affin afbildning af $\acute{A}$ ind i sig selv er et affint underrum af $\acute{A}$.

5. En affin transformation α af et affint rum $(\acute{A},U)$ over legemet L kaldes en homoteti med multiplikator $\mu \in L\setminus\{0\}$, hvis den tilhørende lineære transformation f af U er en homoteti med multiplikator μ, altså $f(\underline{u}) = \mu\underline{u}$ for $\underline{u} \in U$.
Vis, at hver homoteti med multiplikator $\mu \neq 1$ har netop ét fixpunkt.
Vis, at en affin transformation α af $\acute{A}$ er en homoteti, hvis og kun hvis der for hver linie $\acute{A}_1 \subsetneq \acute{A}$ gælder $\alpha(\acute{A}_1) \parallel \acute{A}_1$.
Vis, at homotetierne udgør en normal undergruppe $Ht(\acute{A})$ af $Aff(\acute{A})$.

6. Gennemfør det side III,6,12 antydede bevis for dimensionsformlen (15) i tilfældet af disjunkte underrum.
Beskriv de forskellige muligheder for to liniers indbyrdes beliggenhed (fællesmængde, udspændt affint underrum, parallellitet) i et (mindst) 3-dimensionalt affint rum. Gennemfør det tilsvarende for en linie og en plan i et (mindst) 4-dimensionalt samt for to planer i et (mindst) 5-dimensionalt affint rum.

7. Lad der være valgt et begyndelsespunkt O i et affint rum $(\acute{A},U)$ over legenet L. For ikke-tomme punktmængder $M,N \subseteq \acute{A}$ og $\lambda \in L$ defineres

$$M + N = \{P + Q \mid P \in M,\ Q \in N\} ,$$
$$\lambda M = \{\lambda P \mid P \in M\} .$$

Vis, at den således definerede addition af punktmængder er associativ og kommutativ. Undersøg, om der findes et neutralt element ved denne komposition. Vis endvidere, at der for $M,N \subseteq \acute{A}$ og $\lambda,\mu \in L$ gælder

(a) $\lambda(\mu M) = (\lambda\mu)M$,

(b) $\lambda(M + N) = \lambda M + \lambda N$,

(c) $(\lambda + \mu)M \subseteq \lambda M + \mu M$.

Gør rede for, at der i almindelighed ikke gælder lighed i (c), men at dette er tilfældet for alle $\lambda,\mu \in L$ med $\lambda+\mu \neq 0$, hvis og kun hvis M er et affint underrum af $\acute{A}$.
Undersøg, hvorledes punktmængderne M+N og λM ændres, når begyndelsespunktet O erstattes med et andet, O'.

8. Vis, at en affin afbildning π af et affint rum $(\acute{A},U)$ ind i sig selv er en parallelprojektion, hvis og kun hvis den er idempotent, dvs. hvis og kun hvis $\pi^2 = \pi$. (Benyt f.eks. den

tilsvarende sætning om lineære afbildninger af et vektorrum ind i sig selv.)

Det forudsættes nu, at $(\acute{A},U)$ er et affint rum over et legeme med karakteristik forskellig fra 2. Lad $(\acute{A},U')$ være et ikke-tomt affint underrum af $(\acute{A},U)$ og U'' et til U' komplementært underrum af U. Parallelprojektionen af $\acute{A}$ på $\acute{A}'$ langs U'' betegnes med π. Afbildningen $\sigma:\acute{A} \to \acute{A}$, der for $P \in \acute{A}$ er bestemt ved

$$\overrightarrow{\pi(P)\sigma(P)} = \overrightarrow{P\pi(P)} ,$$

kaldes (affin) spejling af $\acute{A}$ i $\acute{A}'$ langs U''.

Vis, at σ er en affin transformation.

Vis endvidere, at en affin afbildning $\sigma:\acute{A} \to \acute{A}$ er en spejling, hvis og kun hvis den er identiteten ε eller involutorisk, dvs. hvis og kun hvis $\sigma^2 = \varepsilon$. (Benyt f.eks. den tilsvarende sætning om lineære afbildninger af et vektorrum).

9. I en reel affin plan $\acute{A}$ er givet to hinanden skærende linier $\acute{A}_1$ og $\acute{A}_2$ samt en affin afbildning $\alpha:\acute{A}_1 \to \acute{A}_2$.
Vis, at der findes en parallelprojektion π af $\acute{A}$ på $\acute{A}_2$ og en translation τ af $\acute{A}$, ved hvilken $\acute{A}_2$ afbildes på sig selv, således at α er restriktionen af $\tau\circ\pi$ til $\acute{A}_1$.
Vis, at hvis α er surjektiv, findes der også en translation τ', ved hvilken $\acute{A}_1$ afbildes på sig selv, og en parallelprojektion π' på $\acute{A}_2$, således at α er restriktionen af $\pi'\circ\tau'$ til $\acute{A}_1$.

10. I en reel affin plan $\acute{A}$ er givet en linie a og to forskellige punkter P_2 og Q_2, som ikke ligger på a. Vis, at der findes netop én affin afbildning $\alpha:\acute{A} \to \acute{A}$, ved hvilken hvert punkt af a er fixpunkt og P_2 afbildes i Q_2. (En sådan afbildning

kaldes en affinitet af Á med akse a.)
Konstruer for et vilkårligt punkt $P \in$ Á billedpunktet $\alpha(P)$.
(Skeln mellem tilfældene $P_2Q_2 \parallel a$ og $P_2Q_2 \nparallel a$.)
Angiv matrixligningen for α med hensyn til det affine koordinatsystem $(P_o, \overrightarrow{P_oP_1}, \overrightarrow{P_oP_2})$, hvor P_o og P_1 er forskellige punkter på a således, at P_o er skæringspunktet mellem a og P_2Q_2, hvis dette eksisterer. Koordinatsættet for Q_2 med hensyn til dette koordinatsystem tænkes givet.
Det antages nu, at planen Á ligger i et 3-dimensionalt reelt affint rum B́. Vis, at der findes en plan $Á' \subset$ B́, en parallelprojektion π:B́ $\rightarrow$ Á' og en parallelprojektion π':B́ $\rightarrow$ Á således, at α er restriktionen af $\pi' \circ \pi$ til Á.

11. I et 3-dimensionalt reelt affint rum (Á,U) er givet affint uafhængige punkter P_o, P_1, P_2, P_3.
Find for den ved $\alpha(P_o) = P_1$, $\alpha(P_1) = P_o$, $\alpha(P_2) = P_3$, $\alpha(P_3) = P_2$ bestemte affine afbildning α:Á $\rightarrow$ Á mængden af fixpunkter.
Find for punktet P med det barycentriske koordinatsæt (t_o, t_1, t_2, t_3) med hensyn til koordinatsimplexet (P_o, P_1, P_2, P_3) det barycentriske koordinatsæt for billedpunktet $\alpha(P)$, og opstil matrixligningen for α med hensyn til det affine koordinatsystem $(P_o, \overrightarrow{P_oP_1}, \overrightarrow{P_oP_2}, \overrightarrow{P_oP_3})$.

12. En affin afbildning α af et n-dimensionalt affint rum Á ind i et n-dimensionalt affint rum B́ har med hensyn til valgte affine koordinatsystemer i Á og B́ matrixligningen $\underline{y}_| = \underline{a}_| + \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_|$.
Bestem en $(n+1) \times (m+1)$ - matrix $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ således, at der for de tilsvarende barycentriske koordinatsæt $\underline{\tilde{x}}_|$ og $\underline{\tilde{y}}_|$ gælder $\underline{\tilde{y}}_| = \underline{\underline{\tilde{A}}}\,\underline{\tilde{x}}_|$.

13. I et affint rum $\acute{A}$ over et legeme med karakteristik 0 er givet en endelig punktmængde M. De affine transformationer af $\acute{A}$, ved hvilke M afbildes på sig selv, udgør en underdruppe G af rummets affine gruppe Aff($\acute{A}$).

Vis, at elementerne af G har et fælles fixpunkt. Slut heraf, at dette gælder for enhver endelig gruppe af affine transformationer.

Vis endvidere, at hvis dim $\acute{A} = m < \infty$, og M indeholder m+1 affint uafhængige punkter, vil G være af endelig orden mindre end eller lig med $\frac{\nu!}{(\nu-n-1)!}$, hvor ν betegner antallet af punkter i M.

* Det antages nu, at $(\acute{A},U)$ er et reelt affint rum af dimension $m < \infty$. Lad G være en endelig undergruppe af Aff($\acute{A}$). Vis, at der findes et affint koordinatsystem i $\acute{A}$ således, at hvert element af G med hensyn til dette har en matrixligning af formen $\underline{y}| = \underline{\underline{A}}\underline{x}|$, hvor $\underline{\underline{A}}$ er en ortogonal matrix. (Søg en positiv definit kvadratisk form på U, som transformeres i sig selv ved de lineære transformationer af U, der hører til elementerne af G.)

14. I en affin plan $\acute{A}$ er givet tre affint uafhængige punkter P_o, P_1, P_2. Om punkterne Q_o på linien P_1P_2, Q_1 på linien P_2P_o og Q_2 på linien P_oP_1 forudsættes, at $Q_i \neq Q_j$ for $i,j = 0,1,2$. Vis, at hvis linierne P_oQ_o, P_1Q_1 og P_2Q_2 har et punkt Q fælles eller er indbyrdes parallelle, gælder

$$\frac{\overline{P_1Q_o}}{\overline{P_2Q_o}} \cdot \frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_oQ_1}} \cdot \frac{\overline{P_oQ_2}}{\overline{P_1Q_2}} = -1 ,$$

og omvendt (Cevas sætning).

15. I en affin plan $\acute{A}$ er givet tre affint uafhængige punkter P_0, P_1, P_2. Om punkterne Q_0 på linien P_1P_2, Q_1 på linien P_2P_0 og Q_2 på linien P_0P_1 forudsættes, at $Q_i \neq P_j$ for $i,j = 0,1,2$. Vis, at Q_0, Q_1, Q_2 ligger på samme linie, hvis og kun hvis

$$\frac{P_1Q_0}{P_2Q_0} \cdot \frac{P_2Q_1}{P_0Q_1} \cdot \frac{P_0Q_2}{P_1Q_2} = 1$$

(Menelaos' sætning).

16. Et affint rum $(\acute{A}, U)$ antages givet i standardfremstilling i vektorrummet $\hat{U}$. Vis, at restriktionen til $\acute{A}$ af en linearform på $\hat{U}$ er en affin funktion, og at enhver affin funktion på $\acute{A}$ er restriktionen af netop én linearform på $\hat{U}$.

17. Lad $\acute{A}' \neq \emptyset$ være et ægte affint underrum af et affint rum $\acute{A}$. Vis, at alle til $\acute{A}'$ komplementære underrum har samme dimension. (Bemærk, at det ikke forudsættes, at $\acute{A}$ har endelig dimension.)

18. I et reelt 3-dimensionalt affint rum $\acute{A}$ tænkes valgt et affint koordinatsystem. Der er givet punkterne $P_0(1,0,-1)$, $P_1(0,0,-2)$, $P_2(0,3,0)$, $P_3(1,0,0)$ med de angivne affine koordinatsæt.

Vis, at punkterne er affint uafhængige.

Bestem den affine funktion α, for hvilken $\alpha(P_0) = -1$, $\alpha(P_1) = 0$, $\alpha(P_2) = 2$, $\alpha(P_3) = 0$.

Find en parameterfremstilling for den ved α bestemte plan.

Opstil et ligningssystem for linien P_1P_3.

19. I et m-dimensionalt affint rum $\acute{A}$ er valgt et affint koordinatsystem. Der er givet m affint uafhængige punkter $Q_0,\dots,Q_{m-1}$ ved deres koordinatsæt $\underline{\underline{q}}_{|0},\dots,\underline{\underline{q}}_{|m-1}$. Find (med benyttelse af determinantteori) en ligning for hyperplanen, der går gennem de givne punkter.

20. Et r-dimensionalt affint underrum $\acute{A}'$ af et m-dimensionalt affint rum $\acute{A}$ er med hensyn til et affint koordinatsystem i $\acute{A}$ givet ved parameterfremstillingen

$$\underline{\underline{x}}_{|} = \underline{\underline{c}}_{|} + t_1\underline{\underline{c}}_{|1} + \dots + t_r\underline{\underline{c}}_{|r}\ , \qquad (t_1,\dots,t_r) \in L^r\ ,$$

hvor søjlerne $\underline{\underline{c}}_{|1},\dots,\underline{\underline{c}}_{|r}$ er lineært uafhængige. Find (med benyttelse af determinantteori) et ligningssystem for $\acute{A}'$. ("Elimination af parametrene".)

21. Lad U være et orienteret reelt vektorrum af dimension m, og lad U' og U" være egentlige underrum af U, der er komplementære. En given orientering af U' inducerer da en orientering af U" og denne igen efter samme forskrift en orientering af U'. Under hvilke betingelser stemmer den sidste overens med den givne ?

22. Bestem dimensionstallene m for de reelle vektorrum, hvori baser $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m)$ og $(\underline{u}_m,\dots,\underline{u}_1)$ er ens orienteret, og dimensionstallene m for de reelle affine rum, hvori simplexer $(P_0,\dots,P_m)$ og $(P_m,\dots,P_0)$ er ens orienteret.

23. Et 3-dimensionalt reelt affint rum kan orienteres ved valg af et par af vindskæve orienterede linier. Præciser og bevis denne påstand.

24. Lad $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m)$ og $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m)$ være baser for et m-dimensionalt reelt vektorrum U. Hvis og kun hvis de to baser er ens orienteret, kan den første overføres i den anden ved en "kontinuert deformation" i følgende forstand: Der findes kontinuerte afbildninger $\underline{x}_\mu:[0,1] \to U$, $\mu=1,\dots,m$, således at $\underline{x}_\mu(0) = \underline{u}_\mu$, $\underline{x}_\mu(1) = \underline{v}_\mu$ og for hvert $t \in [0,1]$ er $\underline{x}_1(t),\dots,\underline{x}_m(t)$ lineært uafhængige. Bevis dette. [Benyt $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m)$ som koordinatsystem, vis først, at $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m)$ kan deformeres i en basis, hvis vektorer på nær én har sidste koordinat 0, og anvend induktion.]
Formuler og bevis (ved hjælp af det allerede viste) en tilsvarende sætning om to m-dimensionale simplexer i et m-dimensionalt reelt affint rum.

25. Vis, at en punktmængde M i et reelt affint rum er konveks, hvis og kun hvis $(\lambda+\mu)M = \lambda M + \mu M$ for alle $\lambda,\mu \in \acute{R}_+$. (Jf. øv.7.)

26. Lad $(\acute{A},U)$ være et reelt affint rum, og lad p være en **seminorm** i U, dvs. en funktion

$$p:U \to \acute{R}_+ \cup \{0\},$$

således at der for $\lambda \in \acute{R}$ og $\underline{u},\underline{v} \in U$ gælder

$$p(\lambda\underline{u}) = |\lambda|p(\underline{u}), \quad p(\underline{u}+\underline{v}) \leqq p(\underline{u}) + p(\underline{v}).$$

Vis, at for hvert punkt $P \in \acute{A}$ og hvert $\rho \geqq 0$ er

$$\{X \in \acute{A} \mid p(\overrightarrow{PX}) \leqq \rho\}$$

en konveks mængde.

27. Lad M være en punktmængde i et reelt affint rum. Den siges at være stjerneformet ud fra et punkt P af M, hvis $[PX] \subseteq M$ for hvert punkt $X \in M$. Vis, at mængden af punkter, ud fra hvilke M er stjerneformet, er konveks.

28. Der er givet to partikelsystemer. Vis, at man kan finde tyngdepunktet T for det samlede system på følgende måde: Hvert af de givne systemer erstattes med én partikel anbragt i systemets tyngdepunkt og med systemets massesum som masse. T er da tyngdepunktet for de to således bestemte partikler. Generaliser.

29. Vis, at et m-dimensionalt afsluttet simplex i et m-dimensionalt reelt affint rum er fællesmængden for m+1 afsluttede halvrum.

30. Vis, at hvis endelig mange punkter i et reelt affint rum er affint afhængige, kan de fordeles på to disjunkte delmængder, hvis konvekse hylstre har et punkt fælles.

31. Lad $C_1, \dots, C_{m+2}$ være konvekse mængder i et m-dimensionalt affint rum Á således, at hvilkesomhelst m+1 har mindst ét punkt fælles. Vis, at de alle har et punkt fælles. (Benyt øv.30.)

Lad $C_1, \dots, C_N$, hvor $N > m+1$, være endelig mange konvekse mængder i Á således, at hvilkesomhelst m+1 har mindst ét punkt fælles. Vis (ved induktion efter N), at de alle har et punkt fælles. (E. Helly, 1913.)

32. Lad M_ι, $\iota \in J$, hvor J er en vilkårlig indexmængde, være afsluttede delmængder af et Hausdorff rum T. Det forudsættes, at der findes en kompakt mængde $K \subset T$ således, at hvilkesomhelst endelig mange af mængderne M_ι har mindst ét fællespunkt i K. Vis, at $\bigcap_{\iota \in J} M_\iota \neq \emptyset$. Benyt dette og øv. 31 til at bevise <u>Hellys sætning</u>: Lad C_ι, $\iota \in J$, være afsluttede konvekse delmængder af et m-dimensionalt reelt affint rum $\acute{A}$. Det forudsættes, at der findes en kompakt mængde $K \subset \acute{A}$ således, at hvilkesomhelst $m+1$ af mængderne C_ι har mindst ét fællespunkt i K. Vis, at $\bigcap_{\iota \in J} C_\iota \neq \emptyset$.

33. I en reel affin plan er givet en endelig punktmængde. Vis, at der findes et punkt P i planen med følgende egenskab: Enhver afsluttet halvplan, hvis begrænsede linie går gennem P indeholder mindst en tredjedel af mængdens punkter. (Anvend Hellys sætning, øv. 32, på de afsluttede halvplaner, som hver indeholder mere end to tredjedele af mængdens punkter.) Generaliser til reelle affine rum af vilkårlig endelig dimension m.

34. I et m-dimensionalt affint rum er givet en ikke-tom punktmængde M_0. Ved induktion defineres M_k for $k = 1,2,\dots$ som foreningsmængde af alle afsluttede liniestykker, hvis endepunkter tilhører M_{k-1}. Vis, at

$$2^k \geq m+1 \Rightarrow M_k = \operatorname{conv} M_0 ,$$

og at konklusionen ikke er rigtig for alle mængder M_0, hvis $2^k < m+1$.

35. Der betragtes punktmængder i et endelig-dimensionalt reelt affint rum. Bevis, at en åben mængdes konvekse hylster er åben, at en afsluttet mængdes konvekse hylster ikke behøver at være afsluttet, og (ved hjælp af Carathéodorys sætning) at en kompakt mængdes konvekse hylster er kompakt.

36. Find for $r = 0,1,\dots,m-1$ antallet N_r af r-dimensionale sider såvel i et m-dimensionalt simplex som i et m-dimensionalt parallellotop, og vis, at der i begge tilfælde gælder

$$\sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r N_r = 1 - (-1)^m .$$

37. Vis, at volumenet af et simplex $(X_0,\dots,X_m)$ i et m-dimensionalt reelt affint rum med et valgt affint koordinatsystem er

$$\frac{1}{m!} \det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \underline{\underline{x}}_{|0} & \cdots & \underline{\underline{x}}_{|m} \end{pmatrix} ,$$

hvor $\underline{\underline{x}}_{|0},\dots,\underline{\underline{x}}_{|m}$ er hjørnernes koordinatsøjler.

38. Lad $[P_0,\dots,P_m]$ være et parallelotop i et m-dimensionalt affint rum. Find volumenforholdet for simplexet $(P_{1\dots m}, P_1,\dots,P_m)$ og parallelotopet. (For betegnelsen $P_{1\dots m}$ se side III,6,43.)

39. I en reel affin plan er valgt et enhedsparallelogram $[P_0,P_1,P_2]$. Lad $(Q_0,\dots,Q_{n-1})$ være et punktsæt i planen, således at $Q_{\nu-1} \neq Q_\nu$ for $\nu = 1,\dots,n$, hvor der er sat $Q_n = Q_0$. Ved den <u>orienterede lukkede polygon</u> (n-kant) $Q_0\cdots Q_{n-1}$ forstås sættet af liniestykkerne Q_0Q_1, Q_1Q_2, $\dots$, $Q_{n-1}Q_n$ hvert orienteret ved de to endepunkters angivne orden. For

et valgt punkt O i planen har hver af de orienterede trekanter $OQ_{\nu-1}Q_{\nu}$ et areal regnet med fortegn. (Eventuelle udartede trekanter tages i betragtning og tilskrives arealet 0.) Vis, at summen af disse trekantsarealer er uafhængig af punktet O.

Ved det af den lukkede polygon omsluttede areal $\text{ar}(Q_0\cdots Q_{n-1})$ forstås denne sum. Find den, udtrykt ved koordinatsættene for punkterne $Q_0,\cdots,Q_{n-1}$ med hensyn til det affine koordinatsystem $(P_0,\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2})$.

I et 3-dimensionalt reelt affint rum defineres analogt en <u>orienteret lukket polyederflade</u> som et sæt af orienterede trekanter i rummet, der opfylder følgende betingelser: Hver trekantside er side i netop to af trekanterne, og de orienteringer, den får fra de to trekanters, er modsat.
Vis som for orienterede lukkede polygoner i planen, at man efter valg af et enhedsparallelepipedum kan definere et fortegnsbestemt volumen omsluttet af en orienteret lukket polyederflade.

I rummet vælges et affint koordinatsystem. Der betragtes punkterne $Q_1(1,0,0)$, $Q_1'(-1,0,0)$, $Q_2(0,1,0)$, $Q_2'(0,-1,0)$, $Q_3(0,0,1)$, $Q_3'(0,0,-1)$. Trekanterne

$$Q_1Q_2Q_3,\quad Q_1'Q_2'Q_3,\quad Q_1Q_2'Q_3',\quad Q_1'Q_2Q_3'$$

$$Q_1Q_1'Q_2,\quad Q_1Q_1'Q_2',\quad Q_2Q_2'Q_3,\quad Q_2Q_2'Q_3',\quad Q_3Q_3'Q_1,\quad Q_3Q_3'Q_1'$$

danner en "ikke-orienteret lukket polyederflade", idet hver side i en af trekanterne også er side i netop én anden af trekanterne. Vis, at det ikke er muligt at orientere trekanterne således, at der opstår en orienteret lukket polyederflade. En polyederflade med denne egenskab siges at være <u>ikke-orienterbar</u>.

R e t t e l s e r

Side

III,6,7^4: Læs $\acute{A}'$ i stedet for A'.

III,6,7_{11}: " studiet " atudiet.

III,6,7_{10}: " bevares " besvares.

III,6,12^8: Indføj efter $\lambda_0 + \dots + \lambda_s = 0$,

og $\lambda_0 \underline{p}_0 + \dots + \lambda_s \underline{p}_s = 0$,

III,6,19^{12}: Læs $\acute{A}_1$ i stedet for $\acute{A}$.

III,7,2_7: Læs $- B(\underline{x},\underline{y})B(\underline{y},\underline{z})$ i stedet for $- B(\underline{x},\underline{y})B(\underline{x},\underline{z})$.

III,7,6_{9-8}: Læs "Hvis tre forskellige punkter X,Y,Z ligger på ret linie, ligger et af dem " i stedet for "Tre forskellige punkter X,Y,Z ligger på ret linie, hvis og kun hvis et af dem ligger " .

III,7,8^{11}: Læs $0 < df(XYX'Y') \leq 1$ i stedet for $df(XYX'Y') > 1$.

III,7,8_{10-9}: Tilføj (10) til venstre for formlen.

III,7,10_2: Læs $\frac{1}{2}c|\log df(XYUV)|$ i stedet for $\frac{1}{2}c \log df(XYUV)$.

III,7,19^{7-8}: Slet "En anden bevismetode herfor vil blive nævnt senere."

III,7,øv.6: Opgaven er vanskelig. Henvisningen til III,5,øv.24 er ikke tilstrækkelig. Man kan benytte, at en projektivitet af en linie er hyperbolsk, hvis den kan sammensættes af to involutioner, hvoraf mindst en er elliptisk. (Til to bilinearformer i et vektorrum, hvoraf mindst en er definit, findes en basis bestående af vektorer, som to og to er konjugerede med hensyn til begge bilinearformer.)

§ 7. Ikke-euklidske geometrier.

I det følgende betragtes det projektive rum Π^n bestemt ved et (n+1)-dimensionalt vektorrum V^{n+1} over de reelle tals legeme. Der antages givet en regulær polaritet ψ i Π^n. Lad B være en bilinearform, der bestemmer ψ. Om den tilhørende kvadratiske form forudsættes enten

(E) $B(\underline{x},\underline{x})$ <u>er positiv definit</u>

eller

(H) $B(\underline{x},\underline{x})$ <u>har positivitetsindex 1</u>.

I tilfældet (E) vil der blive defineret en metrik i Π^n, hvorved Π^n bliver til et metrisk rum E^n, der kaldes <u>det n-dimensionale elliptiske rum</u>. I tilfældet (H) vil der blive defineret en metrik i det "indre" af den ved ψ bestemte kvadrik, altså i den delmængde af Π^n, hvis punkters repræsentanter $\underline{x}$ tilfredsstiller $B(\underline{x},\underline{x}) > 0$. Herved bliver denne delmængde til et metrisk rum H^n, der kaldes <u>det n-dimensionale hyperbolske rum</u>. Under ét kaldes disse rum for <u>de ikke-euklidiske rum</u> (skønt dette navn også ville være passende for talrige andre rum). For begge gælder, at de har overordentlig mange egenskaber fælles med det n-dimensionale euklidiske rum, og dette kan opfattes som et grænsetilfælde af såvel E^n som H^n og kaldes derfor i denne forbindelse ofte <u>det n-dimensionale parabolske rum</u>.

Indførelsen af de nævnte metrikker beror på, at bilinearformen B under forudsætningerne (E) og (H) opfylder visse uligheder.

I det følgende betegner $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ fra $\underline{0}$ forskellige vektorer i V^{n+1} og λ,μ,γ reelle tal. For givne $\underline{x},\underline{y}$ betragtes den kvadratiske form

$$B(\lambda\underline{x}+\mu\underline{y},\lambda\underline{x}+\mu\underline{y}) = \lambda^2 B(\underline{x},\underline{x}) + 2\lambda\mu B(\underline{x},\underline{y}) + \mu^2 B(\underline{y},\underline{y})$$

i $\mathring{R}^2$. Den er definit, hvis og kun hvis

(1) $$B(\underline{x},\underline{x})B(\underline{y},\underline{y}) - B(\underline{x},\underline{y})^2 > 0 \ ,$$

udartet (og da semidefinit), hvis og kun hvis

(2) $$B(\underline{x},\underline{x})B(\underline{y},\underline{y}) - B(\underline{x},\underline{y})^2 = 0 \ ,$$

og indefinit, hvis og kun hvis

(3) $$B(\underline{x},\underline{x})B(\underline{y},\underline{y}) - B(\underline{x},\underline{y}) < 0 \ .$$

Under forudsætningen (E) gælder altid (1) eller (2), den sidste relation, hvis og kun hvis $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er lineært afhængige. Dette kan sammenfattes i: for hvert fast $\underline{y} \neq \underline{0}$ er den kvadratiske form

$$Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{x}) = B(\underline{x},\underline{x})B(\underline{y},\underline{y}) - B(\underline{x},\underline{y})^2$$

positiv semidefinit og har værdien 0 netop for vektorerne $\underline{x} = \mu\underline{y}$, $\mu \in \mathring{R}$. Den tilhørende symmetriske bilinearform er

$$Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{z}) = B(\underline{x},\underline{z})B(\underline{y},\underline{y}) - B(\underline{x},\underline{y})B(\underline{x},\underline{z}) \ .$$

Ved betragtning af $Q_{\underline{y}}(\lambda\underline{x}+\gamma\underline{z},\lambda\underline{x}+\gamma\underline{z})$ ses, at der for vilkårlige $\underline{x},\underline{y},\ \underline{z} \in V^{n+1}\setminus\{\underline{0}\}$ gælder

(4) $$Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{x})Q_{\underline{y}}(\underline{z},\underline{z}) - Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{z})^2 \geq 0 \ ,$$

med lighedstegnet, hvis og kun hvis der findes $(\lambda,\gamma) \neq (0,0)$, således at vektoren $\lambda\underline{x}+\gamma\underline{z}$ er proportional med $\underline{y}$, altså hvis og kun hvis $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ er lineært afhængige.

Under forudsætningen (H) er (4) i hvert fald også gyldig, når $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ tilhører et underrum af V^{n+1}, i hvilket B er definit, altså specielt et negativitetsrum. (Positivitetsrummene er her uden interesse, da de er 1-dimensionale og (4) derfor trivielt opfyldt med lighedstegn.) Endvidere vil (4) gælde for alle $\underline{x},\underline{z}$, når $\underline{y}$ er valgt således, at $B(\underline{y},\underline{y}) > 0$. For hvert $\underline{x}$ har man da nemlig (2) eller (3), så at $Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{x})$ er negativ semidefinit. Betingelsen for gyldigheden af lighedstegnet er i alle tilfælde, at $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ er lineært afhængige.

Vi betragter nu to forskellige ikke-konjugerde punkter X og Y i Π^n samt deres konjugerede X' og Y' på deres forbindelseslinie. Afstanden mellem X og Y vil blive defineret som en funktion af df(XYX'Y'). Vi begynder med at udtrykke dette dobbeltforhold ved B og repræsentanter $\underline{x}$ og $\underline{y}$ for X og Y.

Vektorerne

$$\underline{x}' = B(\underline{x},\underline{y})\underline{x} - B(\underline{x},\underline{x})\underline{y} \,,$$

$$\underline{y}' = B(\underline{y},\underline{y})\underline{x} - B(\underline{x},\underline{y})\underline{y}$$

$$= \frac{B(\underline{y},\underline{y})}{B(\underline{x},\underline{y})} B(\underline{x},\underline{y})\underline{x} - \frac{B(\underline{x},\underline{y})}{B(\underline{x},\underline{x})} B(\underline{x},\underline{x})\underline{y}$$

er repræsentanter for X' og Y', idet de opfylder $B(\underline{x},\underline{x}') = 0$ og $B(\underline{y},\underline{y}') = 0$. Heraf aflæses, at

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{df}(XYX'Y') = \frac{B(\underline{x},\underline{x})B(\underline{y},\underline{y})}{B(\underline{x},\underline{y})^2}$$

(hvilket også er rigtigt, hvis $B(\underline{x},\underline{x}) = 0$).Hvis X og Y er konjugerede, altså X' = Y og Y' = X, er dobbeltforholdet ikke defineret. Men da $X \neq Y$ her medfører $X \neq X'$ og $Y \neq Y'$, har vi $B(\underline{x},\underline{x}) \neq 0$ og $B(\underline{y},\underline{y}) \neq 0$, men $B(\underline{x},\underline{y}) = 0$. Det er derfor rimeligt i dette tilfælde at tillægge dobbeltforholdet værdien ∞. Hvis $X = Y$, men $X \neq X' = Y'$, vil (5) være rigtig, hvis dobbeltforholdet $df(XXX'X')$ tillægges værdien 1. Med disse fastsættelser gælder altså (5), når blot ikke alle fire punkter falder sammen.

Lad $X^*, X^{*\prime}, Y^*, Y^{*\prime}$ være hyperplaner i Π^{n*}, som tilhører samme hyperplanbundt, og som ikke alle falder sammen. Er da $X^{*\prime}$ og $Y^{*\prime}$ konjugerede til henholdvis X^* og Y^*, har vi dualistisk svarende til (5)

$$df(X^*Y^*X^{*\prime}Y^{*\prime}) = \frac{B^{-1}(\underline{x}^*,\underline{x}^*)B^{-1}(\underline{y}^*,\underline{y}^*)}{B^{-1}(\underline{x}^*,\underline{y}^*)^2},$$

hvor $\underline{x}^*, \underline{y}^*$ er repræsentanter for henholdsvis X^* og Y^*. Betegner X, X', Y, Y' hyperplanernes poler, har vi

$$df(X^*Y^*X^{*\prime}Y^{*\prime}) = df(XYX'Y') .$$

Vi kan derfor også skrive

$$df(X^*Y^*X^{*\prime}Y^{*\prime}) = \frac{B(\underline{x},\underline{x})B(\underline{y},\underline{y})}{B(\underline{x},\underline{y})^2}, \tag{6}$$

hvor $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er repræsentanter for polerne for X^* og Y^*.

Efter disse forberedelser defineres under forudsætningen (E) afstanden mellem to vilkårlige punkter X og Y i Π^n ved

$$\begin{aligned} |XY| &= c \operatorname{Arccos} df(XYX'Y')^{-\frac{1}{2}} \\ &= c \operatorname{Arccos} \frac{|B(\underline{x},\underline{y})|}{B(\underline{x},\underline{x})^{\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})^{\frac{1}{2}}} . \end{aligned} \tag{7}$$

Her betegner c en positiv konstant, som almindeligvis kan vælges lig med 1, og $\underline{x}$, $\underline{y}$ er repræsentanter for X,Y. Idet (1) eller (2) gælder, defineres herved $|XY| \in [0,\frac{1}{2}\pi c]$, og $|XY| = 0$ er ensbetydende med, at $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er lineært afhængige, altså med $X = Y$. Endvidere gælder øjensynlig $|YX| = |XY|$. Vi skal vise, at der for tre punkter X,Y,Z gælder trekantsuligheden

$$|XZ| \leqq |XY| + |YZ| .$$

Til dette formål bemærkes, at der af (7) følger

$$\cos(c^{-1}|XY|) = \frac{|B(\underline{x},\underline{y})|}{B(\underline{x},\underline{x})^{\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})^{\frac{1}{2}}} ,$$

$$\sin(c^{-1}|XY|) = \left(1 - \frac{B(\underline{x},\underline{y})^2}{B(\underline{x},\underline{x})B(\underline{y},\underline{y})}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{x})^{\frac{1}{2}}B(\underline{x},\underline{x})^{-\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})^{-\frac{1}{2}} .$$

Idet $\underline{z}$ betegner en repræsentant for Z, får vi derfor ved hjælp af (4)

$$\begin{aligned}
&\sin(c^{-1}|XY|)\sin(c^{-1}|YZ|) \\
&= Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{x})^{\frac{1}{2}}Q_{\underline{y}}(\underline{z},\underline{z})^{\frac{1}{2}}B(\underline{x},\underline{x})^{-\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})^{-1}B(\underline{z},\underline{z})^{-\frac{1}{2}} \\
&\geqq -Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{z})B(\underline{x},\underline{x})^{-\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})^{-1}B(\underline{z},\underline{z})^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\cos(c^{-1}|XZ|) + \cos(c^{-1}|XY|)\cos(c^{-1}|YZ|) ,
\end{aligned}$$

hvoraf

$$\cos(c^{-1}|XZ|) \geqq \cos(c^{-1}|XY| + c^{-1}|YZ|)$$

og dermed påstanden. Lighedstegnet i trekantsuligheden gælder, hvis og kun hvis det gælder i (4) og $Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{z}) \leqq 0$. Lighed i (4) er ensbetydende med, at $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ er lineært afhængige, altså at X,Y,Z ligger på ret linie, og uligheden $Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{z}) \leqq 0$ kan da vises at være ensbetydende med $df(XZYY') \leqq 0$, som løst sagt bringer til udtryk, at Y tilhører det "korteste" af de to liniestykker, hvori den projektive linie, hvorpå punkterne ligger, deles af X of Z.

der, defineres herved $|XY| \in [0,\frac{1}{2}\pi c]$, og $|XY| = 0$ er ensbetydende med, at $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er lineært afhængige, altså med $X = Y$. Endvidere gælder øjensynlig $|YX| = |XY|$. Vi skal vise, at der for tre punkter X,Y,Z gælder trekantsuligheden

$$|XZ| \leq |XY| + |YZ| .$$

Til dette formål bemærkes, at der af (7) følger

$$\cos(c^{-1}|XY|) = \frac{|B(\underline{x},\underline{y})|}{B(\underline{x},\underline{x})^{\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})^{\frac{1}{2}}} ,$$

$$\sin(c^{-1}|XY|) = \left(1 - \frac{B(\underline{x},\underline{y})^2}{B(\underline{x},\underline{x})B(\underline{y},\underline{y})}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{x})^{\frac{1}{2}}B(\underline{x},\underline{x})^{-\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})^{-\frac{1}{2}} .$$

Idet $\underline{z}$ betegner en repræsentant for Z, får vi derfor ved hjælp af (4)

$$\sin(c^{-1}|XY|)\sin(c^{-1}|YZ|)$$

$$= Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{x})^{\frac{1}{2}}Q_{\underline{y}}(\underline{z},\underline{z})^{\frac{1}{2}}B(\underline{x},\underline{x})^{-\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})^{-1}B(\underline{z},\underline{z})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\geq |Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{z})|B(\underline{x},\underline{x})^{-\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})^{-1}B(\underline{z},\underline{z})^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{|B(\underline{x},\underline{z})B(\underline{y},\underline{y}) - B(\underline{x},\underline{y})B(\underline{y},\underline{z})|}{B(\underline{x},\underline{x})^{\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})B(\underline{z},\underline{z})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\geq \frac{|B(\underline{x},\underline{y})B(\underline{y},\underline{z})| - |B(\underline{x},\underline{z})B(\underline{y},\underline{y})|}{B(\underline{x},\underline{x})^{\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})B(\underline{z},\underline{z})^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \cos(c^{-1}|XY|)\cos(c^{-1}|YZ|) - \cos(c^{-1}|XZ|),$$

hvoraf

$$\cos(c^{-1}|XZ|) \geq \cos(c^{-1}|XY| + c^{-1}|YZ|)$$

og dermed påstanden.

Lighedstegnet gælder i trekantsuligheden, hvis og kun hvis det gælder i (4) og tillige ved vurderingen af $|Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{z})|$. Lighed i (4) er ensbetydende med, at $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ er lineært afhængige, altså at X,Y,Z ligger på ret linie. Den anden betingelse er ensbetydende med, at enten $B(\underline{x},\underline{z}) = 0$ eller $B(\underline{x},\underline{y})B(\underline{y},\underline{z})$ har samme fortegn som $B(\underline{x},\underline{z})B(\underline{y},\underline{y})$ og

$$|B(\underline{x},\underline{y})B(\underline{y},\underline{z})| \geq |B(\underline{x},\underline{z})B(\underline{y},\underline{y})|,$$

altså i alt med $B(\underline{x},\underline{z}) = 0$ eller

$$\frac{B(\underline{x},\underline{y})B(\underline{y},\underline{z})}{B(\underline{x},\underline{z})B(\underline{y},\underline{y})} \geq 1 .$$

Den sidste ulighed kan (under forudsætning af, at X,Y,Z ligger på ret linie) vises at være ensbetydende med uligheden

$$df(XY'YZ') \leq 0 ,$$

som løst sagt bringer til udtryk, at Y tilhører det "korteste" af de to liniestykker, hvori linien deles af X og Z. Er X,Y,Z indbyrdes forskellige, siges Y da at ligge mellem X og Z.

En nærmere diskussion af den anden af vurderingerne i beviset for trekantsuligheden viser: Tre forskellige punkter X, Y,Z ligger på ret linie, hvis og kun hvis et af dem ligger mellem de to andre eller der gælder

$$|XY| + |YZ| + |ZX| = c\pi .$$

Som allerede nævnt kaldes det med metrikken (7) forsynede projektive rum Π^n for <u>det n-dimensionale elliptiske rum</u> og betegnes med E^n. Metrikkens restriktion til et vilkårligt P-underrum gør dette til et elliptisk rum, som da kaldes et underrum af E^n.

I E^n defineres også et <u>mål</u> $|X^*Y^*|$ <u>for vinklen mellem to hyperplaner</u> X^* og Y^* ved

(8) $$|X^*Y^*| = \text{Arccos}\ \text{df}(X^*Y^*X^{*\prime}Y^{*\prime})^{-\frac{1}{2}} ,$$

hvor $X^{*\prime}$ og $Y^{*\prime}$ er konjugerede til henholdsvis X og Y og alle fire hyperplaner tilhører samme hyperplanbundt. Af (6) sluttes, at

(9) $$|X^*Y^*| = c^{-1}|XY| ,$$

hvor X og Y er polerne for X^* og Y^*. Afstandens egenskaber overføres altså til vinkelmålet.

To punkter er konjugerede, hvis og kun hvis deres afstand er $\frac{1}{2}c\pi$. Et punkt har altså denne konstante afstand fra punkterne på sin polar. To hyperplaner er konjugerede, hvis og kun hvis deres vinkel er $\frac{1}{2}\pi$. De siges da at være <u>ortogonale</u> eller den ene at være en <u>normal-hyperplan</u> til den anden. En hyperplan er ortogonal til alle hyperplaner gennem sin pol. En linie l siges at være en <u>normal til en hyperplan</u> X^*, hvis enhver hyperplan gennem l er normal til X^*. Dette vil være tilfældet, hvis og kun hvis l går gennem polen X for X^*. Gennem hvert fra X forskelligt punkt går netop én normal til X^*, nemlig punktets forbindelseslinie med X. To forskellige hyperplaner har netop én fælles normal, nemlig deres polers forbindelseslinie.

Vi antager nu, at B opfylder forudsætningen (H). Polariteten ψ bestemmer da en kvadrik K. Ved dens indre K_+ forstås mængden af punkter $X \in \Pi^n$, hvis repræsentanter tilfredsstiller $B(\underline{x},\underline{x}) > 0$, og ved dens ydre K_- mængden af punkter $X \in \Pi^n$, hvis repræsentanter tilfredsstiller $B(\underline{x},\underline{x}) < 0$. Da B har negativitetsindex n, findes der (n-1)-dimensionale P-underrum af Π^n, som helt tilhører K_-, og hvert P-underrum af dimension mindst 1 har punkter fælles med K_-.

I K_+ defineres en metrik på følgende måde: For $X,Y \in K_+$ betegnes med X' og Y' konjugerede punkter til X og Y, således at de fire punkter ligger på ret linie. På denne linie er B indefinit, og (3) gælder følgelig for repræsentanter for hvilkesomhelst to forskellige punkter på den. Heraf sluttes for det første, at $X',Y' \in K_-$, og for det andet ved hjælp af (5), at

$$df(XYX'Y') \geq 1 .$$

Betegnes med $\underline{x}$ og $\underline{y}$ repræsentanter for X og Y, kan afstanden mellem X og Y derfor defineres ved

$$|XY| = c \operatorname{Arcosh} df(XYX'Y')^{-\frac{1}{2}}$$

$$= c \operatorname{Arcosh} \frac{|B(\underline{x},\underline{y})|}{B(\underline{x},\underline{x})^{\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})^{\frac{1}{2}}} ,$$

hvor c betegner en positiv konstant. Her har man $|XY| \in [0,\infty[$; det er klart, at $|YX| = |XY|$; og det ses som i det elliptiske tilfælde, at $|XY| = 0$ er ensbetydende med $X = Y$. Ved beviset for trekantsuligheden benyttes, at

$$\cosh(c^{-1}|XY|) = |B(\underline{x},\underline{y})|B(\underline{x},\underline{x})^{-\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})^{-\frac{1}{2}} ,$$

$$\sinh(c^{-1}|XY|) = (-\,Q_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{x}))^{\frac{1}{2}}B(\underline{x},\underline{x})^{-\frac{1}{2}}B(\underline{y},\underline{y})^{-\frac{1}{2}} .$$

For $X,Y,Z \in K_+$ fås da ved hjælp af (4), som er gyldig, da $B(\underline{y},\underline{y}) > 0$ for en repræsentant $\underline{y}$ for Y, at

$$\sinh(c^{-1}|XY|)\sinh(c^{-1}|YZ|)$$
$$\geq \cosh(c^{-1}|XZ|) - \cosh(c^{-1}|XY|)\cosh(c^{-1}|YZ|) ,$$

altså

$$\cosh(c^{-1}|XZ|) \leq \cosh(c^{-1}|XY| + c^{-1}|YZ|) .$$

Som betingelser for lighed fås her, at X,Y,Z ligger på ret linie, og at der for repræsentanter $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ for X,Y,Z gælder

$$\frac{B(\underline{x},\underline{z})B(\underline{y},\underline{y})}{B(\underline{x},\underline{y})B(\underline{y},\underline{z})} \geq 1 .$$

Denne ulighed kan (under forudsætning af, at X,Y,Z ligger på ret linie) vises at være ensbetydende med

$$df(XY'YZ') \geq 0 .$$

Dersom de tre punkter er indbyrdes forskellige, siges Y da at ligge mellem X og Z. Tre indbyrdes forskellige punkter ligger på ret linie, hvis og kun hvis et af dem ligger mellem de to andre.

Mængden K_+ med metrikken (10) kaldes som nævnt <u>det n-dimensionale hyperbolske rum</u> og betegnes med H^n. Er Π^m et m-dimensionalt P-underrum af Π^n, som har punkter fælles med K_+, vil mængden $K_+ \cap \Pi^m$ med metrikkens restriktion til denne være et hyperbolsk rum H^m. Det kaldes et underrum af H^n. I beviser for sætninger om H^n er det imidlertid ofte hensigtsmæssigt at inddrage det projektive rums øvrige punkter og underrum. I denne forbindelse kaldes punkterne i K_+ for det hyperbolske rums <u>egentlige punkter</u> og betegnes her kort som h-punkter. Punkterne på K kaldes det hyperbolske rums <u>uegentlige</u> eller <u>uendelig fjerne punkter</u> (hvilket motiveres med, at (10) for $X \in K_+$ og $Y \in K$ giver $|XY| = \infty$), og de betegnes kort som u-punkter. Punkterne i K_- kaldes det hyperbolske rums idealpunkter og betegnes her kort som i-punkter.

I det hyperbolske tilfælde kan udtrykket for afstanden mellem to punkter forenkles. Lad X og Y være to vilkårlige punkter i H^n. Med l betegnes linien (eller, hvis X = Y, en linie), der indeholder dem. Idet $X,Y \in K_+$, er l en sekant for K. Skæringspunkterne betegnes U og V. Man har da

$$\mathrm{df}(XX'UV) = \mathrm{df}(YY'UV) = -1,$$

hvor $X',Y' \in K_-$ er de til X,Y konjugerede punkter på l. Ved hjælp heraf fås

$$\mathrm{df}(XY'UV) = \mathrm{df}(XYUV)\mathrm{df}(YY'UV) = -\mathrm{df}(XYUV),$$
$$\mathrm{df}(X'YUV) = \mathrm{df}(X'XUV)\mathrm{df}(XYUV) = -\mathrm{df}(XYUV),$$

og endvidere har man

$$\mathrm{df}(X'Y'UV) = \mathrm{df}(XYUV) .$$

Disse relationer benyttes til at udtrykke df(XYX'Y') ved df(XYUV):

$$\begin{aligned}\mathrm{df}(XYX'Y') &= \mathrm{df}(XUX'Y')\mathrm{df}(UYX'Y')\\ &= \mathrm{df}(XUX'V)\mathrm{df}(XUVY')\mathrm{df}(UYX'V)\mathrm{df}(UYVY')\\ &= \frac{2}{1-\mathrm{df}(XY'UV)}\ \frac{2\mathrm{df}(X'YUV)}{\mathrm{df}(X'YUV)-1}\\ &= \frac{4\mathrm{df}(XYUV)}{(1+\mathrm{df}(XYUV))^2} .\end{aligned}$$

Da $0 < \mathrm{df}(XYX'Y') \leqq 1$, gælder $\mathrm{df}(XYUV) > 0$. Sættes

$$d = \tfrac{1}{2}c|\log \mathrm{df}(XYUV)|,$$

fås

$$df(XYX'Y')^{-1} = \frac{(1 + \exp 2d/c)^2}{4 \exp 2d/c}$$

$$= \frac{1}{4}(\exp \frac{d}{c} + \exp(-\frac{d}{c}))^2 = \cosh^2 \frac{d}{c} .$$

Heraf kan sluttes, at $d = |XY|$, altså

(11) $$|XY| = \tfrac{1}{2}c|\log df(XYUV)| .$$

Ved at vælge ét af parrene (U,V) og (V,U) kan h-linien $l \cap H^n$ orienteres og afstandene mellem punkter på den regnes med fortegn. Vælges (U,V) som positivt og sættes

(12) $$(XY) = -\tfrac{1}{2}c \log df(XYUV),$$

har man $(XY) = |XY|$ eller $(XY) = -|XY|$, efter som $df(XYUV) \lessgtr 1$, altså $df(XUYV) \gtrless 0$, eller $df(XYUV) \geq 1$, altså $df(XUYV) \leq 0$. I det første tilfælde ligger punkterne i rækkefølgen U,X,Y,V og i det andet i rækkefølgen U,Y,X,V. For hvilkesomhelst punkter X,Y,Z på linien gælder

$$(XY) + (YZ) = (XZ) .$$

Ombyttes U og V, skifter alle afstande på linien fortegn.

Lad X^* og Y^* være hyperplaner i Π^n, som begge har punkter fælles med K_+. Deres poler X og Y ligger da i K_- og er altså i-punkter. De i X^* og Y^* indeholdte h-hyperplaner betegnes X^*_h og Y^*_h. Som hidtil betegner $X^{*\prime}$ og $Y^{*\prime}$ hyperplaner, som er konjugerede til X^* og Y^* og tilhører sammen med disse et hyperplanbundt. Polerne X' og Y' for $X^{*\prime}$ og $Y^{*\prime}$ ligger da sammen med X og Y på ret linie.

Først antages, at $X^*_h \cap Y^*_h \neq \emptyset$. Er $X^* \neq Y^*$, vil dette tilfælde foreligger, hvis og kun hvis hele linien XY ligger i K_-, altså kun består af i-punkter. Formen B er da negativ definit på linien, og for repræsentanter $\underline{x}$ og $\underline{y}$ for X og Y gælder derfor (3). Ved

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
|X_h^* Y_h^*| &= \operatorname{Arccos} \operatorname{df}(X^* Y^* X^{*\prime} Y^{*\prime})^{-\frac{1}{2}} \\
&= \operatorname{Arccos} \operatorname{df}(XYX'Y')^{-\frac{1}{2}} \\
&= \operatorname{Arccos} \frac{|B(\underline{x},\underline{y})|}{|B(\underline{x},\underline{x})|^{\frac{1}{2}}|B(\underline{y},\underline{y})|^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

defineres som i det elliptiske tilfælde et måltal for vinklen mellem hyperplanerne.

Et måltal for vinklen mellem to hinanden skærende linier i H^n defineres på samme måde ved at betragte dem som hyperplaner af den hyperbolske plan H^2, som de udspænder.

To hinanden skærende hyperplaner (linier) siges at være <u>ortogonale</u> eller den ene at være en <u>normal</u> til den anden, hvis vinkelmåltallet er lig med $\frac{1}{2}\pi$. Dette er ensbetydende med, at de er konjugerede. En linie l siges at være en normal til en hyperplan X_h^*, hvis den skærer X_h^*, og enhver hyperplan gennem l er ortogonal til X_h^*. Dette ses let at være ensbetydende med, at l går gennem polen for X^*. Ækvivalent hermed er endvidere, at enhver linie i X_h^*, som går gennem skæringspunktet mellem l og X_h^*, er ortogonal til l.

Vi betragter nu to hyperplaner X_h^* og Y_h^*, for hvilke $X_h^* \cap Y_h^* = \emptyset$. Først antages, at alle fællespunkter for X^* og Y^* er i-punkter. Hyperplanerne siges da at være <u>hyperparallelle</u>. Linien l, der forbinder deres poler X og Y, skærer X^* og Y^* i punkter X' og Y', der tilhører H^n. Ved polaritetens restriktion til X^* vil nemlig X' være polen for $X^* \cap Y^*$, og da denne hyperplan af X^* ligger helt uden for kvadrikken $X^* \cap K$, må X' være et indre punkt for denne, og altså også for K. Tilsvarende ses, at $Y' \in H^n$. Vi har altså: To hyperparallelle hyperplaner har netop én fællesnormal. Ved deres afstand forstås afstanden $|X'Y'|$ mellem skæringspunkterne X' og Y' med fællesnormalen.

Endelig antages, at hyperplanerne X^* og Y^* har et u-punkt U, men ikke noget h-punkt fælles. De fra U forskellige fællespunkter er da alle i-punkter. Hyperplanerne siges i dette tilfælde at være <u>parallelle</u>. Forbindelseslinien l mellem polerne X og Y er her tangent til K med U som røringspunkt. De til X og Y konjugerede punkter X' og Y' på l falder sammen med U, så at

$$\mathrm{df}(XYX'Y') = \mathrm{df}(XYUU) = 1 .$$

Benyttes (8) og (13) til at definere et vinkelmåltal og en afstand, fås altså for begge værdien 0.

I det følgende behandles det elliptiske og det hyperbolske tilfælde under ét. I Π^n vælges et koordinatsystem $(E_0,\dots,E_n;E)$. Koordinatsættene for repræsentanter $\underline{x},\underline{y}$ for punkter $X,Y \in \Pi^n$ betegnes $(x_0,\dots,x_n)$, $(y_0,\dots,y_n)$. For et fra 0 forskelligt reelt tal k betragtes polariteten ψ bestemt ved bilinearformen

$$B(\underline{x},\underline{y}) = x_0y_0 + k\Sigma x_\nu y_\nu$$

(hvor summationen over ν, som overalt i det følgende, udstrækkes fra 1 til n). Fundamentalsimplexet er da selvpolært. Den til polariten hørende ikke-euklidiske metrik er elliptisk eller hyperbolsk, efter som $k > 0$ eller $k < 0$.

Vi betragter $\acute{A}^n = \Pi^n \setminus E_0^*$, hvor E_0^* er hyperplanen med ligningen $x_0 = 0$, tillige som et affint rum. For hvert punkt X i dette kan de projektive koordinatsæt $(x_0,x_1,\dots,x_n)$ normeres ved $x_0 = 1$, og $(x_1,\dots,x_n)$ er da det affine koordinatsæt for X med hensyn til koordinatsystemet $(E_0,\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$, hvor $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ er repræsentanterne for $E_1,\cdots,E_n$, for hvilke $\Sigma \underline{e}_\nu = \overrightarrow{E_0E}$. Defineres for vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ fra det til $\acute{A}^n$ hørende vektorrum et indre produkt ved

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = \Sigma u_\nu v_\nu ,$$

hvor $(u_1,\cdots,u_n)$ og $(v_1,\cdots,v_n)$ er koordinatsættene for $\underline{u}$ og $\underline{v}$, bliver $\acute{A}^n$ et euklidisk rum, og det betragtede affine koordinatsystem er ortonormeret. For to punkter $X(1,x_1,\cdots,x_n)$ og $Y(1,y_1,\cdots,y_n)$ i $\acute{A}_n$ har vi da den euklidiske afstand

$$|XY|_0 = (\Sigma(y_\nu - x_\nu)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

I udtrykkene (7) og (10) for de ikke-euklidiske afstande vælges

$$c = |k|^{-\frac{1}{2}},$$

og afstandene betegnes nu $|XY|_k$. I det elliptiske tilfælde har vi da for $X,Y \in \acute{A}^n = E^n \setminus E_0^*$, at

$$|XY|_k$$

$$= k^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{(1+k\Sigma x_\nu{}^2)(1+k\Sigma y_\nu{}^2) - (1+k\Sigma x_\nu y_\nu)^2}{(1+k\Sigma x_\nu{}^2)(1+k\Sigma y_\nu{}^2)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= k^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin}\left(k\,\frac{\Sigma(y_\nu - x_\nu)^2 + k(\Sigma x_\nu{}^2\Sigma y_\nu{}^2 - (\Sigma x_\nu y_\nu)^2)}{(1+k\Sigma x_\nu{}^2)(1+k\Sigma y_\nu{}^2)}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Heraf sluttes (f.eks. ved hjælp af Taylors formel for funktionen Arcsin), at

$$\lim_{k\to 0} |XY|_k = |XY|_0 .$$

Det ses også let, at konvergensen er ligelig i enhver i euklidisk forstand begrænset delmængde af $\acute{A}^n$. I det hyperbolske tilfælde fås for $X,Y \in H^n \subset \acute{A}^n$ et ganske tilsvarende udtryk for $|XY|_k$. Det fremgår af ovenstående, ved atberstatte $k^{-\frac{1}{2}}$Arcsin med $(-k)^{-\frac{1}{2}}$ Arsinh og at skifte fortegn for udtrykket i den store parentes. (Man bemærker, at på grund af

$$\operatorname{Arsinh} t = - i \operatorname{Arcsin} it$$

og $k^{\frac{1}{2}} = i(-k)^{\frac{1}{2}}$ har man, når komplekse tal inddrages, det samme udtryk som i tilfældet (E).) Man får derfor den samme limesrelation som i det elliptiske tilfælde. Konvergensen er ligelig i enhver kompakt delmængde af $\acute{A}^n$.

Tilsvarende resultater for vinkelmålet fås meget simplere. Lad X^* og Y^* være to fra E_0^* forskellige hyperplaner, som i det hyperbolske tilfælde har fællespunkter i H^n, og lad $\underline{x}^*$ og $\underline{y}^*$ være repræsentanter for dem. Man har da i begge tilfælde (jf.(8),(13) og side III,7,4)

$$(14) \qquad |X^*Y^*|_k = \operatorname{Arccos} \frac{|B^{-1}(\underline{x}^*,\underline{y}^*)|}{|B^{-1}(\underline{x}^*,\underline{x}^*)|^{\frac{1}{2}}|B^{-1}(\underline{y}^*,\underline{y}^*)|^{\frac{1}{2}}} .$$

Betegner $(x_0^*,\dots,x_n^*)$ og $(y_0^*,\dots,y_n^*)$ koordinatsættene for $\underline{x}^*$ og $\underline{y}^*$, har vi ifølge $X^* \neq E_0^*$ og $Y^* \neq E_0^*$, at

$$(x_1^*,\dots,x_n^*) \neq (0,\dots,0), \qquad (y_1^*,\dots,y_n^*) \neq (0,\dots,0).$$

Idet

$$kB^{-1}(\underline{x}^*,\underline{y}^*) = kx_0^*y_0^* + \Sigma x_\nu^*y_\nu^* ,$$

sluttes af (14),hvor B^{-1} kan erstattes med kB^{-1}, at

$$\lim_{k\to 0} |X^*Y^*|_k = \operatorname{Arccos} \frac{|\Sigma x_\nu^* y_\nu^*|}{(\Sigma x_\nu^{*2})^{\frac{1}{2}}(\Sigma y_\nu^{*2})^{\frac{1}{2}}} ,$$

og dette er det euklidske vinkelmål, idet $(x_1^*,\dots,x_n^*)$ og

$(y_1^*,\dots,y_n^*)$ er koordinatsæt for euklidiske normalvektorer til hyperplanerne X^* og Y^*.

Man ser, at ved grænseovergangen $k \to 0$ går den ved kB^{-1} bestemte polaritet ψ^{-1} over i den singulære H-polaritet, der med hensyn til det valgte koordinatsystem er bestemt ved $\Sigma x_\nu^* y_\nu^*$. Denne har rang n, og dens singulære hyperplan er E_0^*. Den bestemmer den euklidske vinkelmåling. Den ved B bestemte polaritet ψ går derimod over i den singulære P-polaritet af rang 1 med P-underrummet E_0^* som singulært rum. Denne stærkt udartede P-polaritet, der til hvert punkt i $\Pi^n \setminus E_0^*$ lader svare E_0^*, bestemmer naturligvis ikke den euklidiske metrik. Dette afspejler sig i, at ved grænseovergangen $k \to 0$ med et af k uafhængigt c i udtrykkene for afstandene går disse alle med 0.

Endvidere bemærkes, at grænseovergangen i det hyperbolske tilfælde kan beskrives på en anskuelig måde: den absolutte kvadrik K er i det euklidiske rum $\dot{A}^n$ ikke andet end kuglen med centrum E_0 og radius $(-k)^{\frac{1}{2}}$, og grænseovergangen består i at lade denne radius vokse ud over alle grænser.

Sammenfattende kan siges, at <u>den euklidiske geometri er et grænsetilfælde af såvel den elliptiske som den hyperbolske geometri</u> og indtager en mellemstilling mellem disse.

En karakteristisk forskel mellem de tre geometrier er følgende: Er der i en plan givet en linie l og et punkt P uden for denne, findes der i planen i det elliptiske tilfælde ingen linie gennem P, som ikke har noget punkt fælles med l, i det euklidiske tilfælde netop én sådan linie og i det hyperbolske tilfælde uendelig mange. På den anden side har geometrierne mange fælles træk, hvilket først og fremmest beror på, at deres grupper af isometrier løst sagt er lige omfattende. Dette præciseres i det følgende.

Lad der i Π^n være givet en polaritet ψ, som opfylder (E) eller (H). En projektiv kollineation $\varphi:\Pi^n \to \Pi^n$, ved hvilken der til et par af konjugerede punkter altid svarer et par af konjugerede punkter er i tilfældet (E) åbenbart en isometri af det ved ψ bestemte elliptiske rum E^n. Er nemlig X og Y to forskellige punkter og X' og Y' deres konjugerede på forbindelseslinien, har vi

$$df(\varphi(X)\varphi(Y)\varphi(X')\varphi(Y')) = df(XYX'Y') \ ,$$

og da $\varphi(X')$ og $\varphi(Y')$ er konjugerede til $\varphi(X)$ og $\varphi(Y)$, følger $|\varphi(X)\varphi(Y)| = |XY|$ af (7). I tilfældet (H) kan man slutte på samme måde, at φ er en isometri, forudsat at H^n afbildes på sig selv ved φ. At dette er tilfældet, vil fremgå af det følgende.

Idet polaren X^* for et punkt X er mængden af de til X konjugerede punkter, vil φ afbilde hvert par (pol, polar) på et par (pol, polar). Omvendt, ved en projektiv kollineation med denne egenskab afbildes konjugerede punkter på konjugerede punkter. De betragtede afbildninger kan derfor karakteriseres som <u>de projektive kollineationer</u> φ, <u>som er ombyttelige med polariteten</u> ψ i den forstand, at de opfylder

(15) $$\psi\circ\varphi = \varphi^{*-1}\circ\psi \ ,$$

hvor φ^{*-1} betegner den til kollineationen φ hørende hyperplanafbildning (jf. side III,5,15). Den inverse kollineation (φ^{-1},φ^*) har da den samme egenskab, idet (15) kan omskrives til

$$\varphi^*\circ\psi = \psi\circ\varphi^{-1} \ .$$

Det fremgår heraf, at i tilfældet (H) vil selvkonjugerede punkter og hyperplaner ved φ afbildes på selvkonjugerede punkter og hyperplaner. Den absolutte kvadrik K og den tilhørende hyperplankvadrik afbildes altså på sig selv. Heraf sluttes videre, at for K ydre hyperplaner må afbildes på ydre hyperplaner og dermed indre punkter for K på indre punkter. Tilsvarende sluttes, at det ydre for K afbildes ind i sig selv. Dermed er den ovenfor fremsatte påstand bevist.

Det er indlysende, at de betragtede kollineationer danner en undergruppe af den projektive gruppe for Π^n. I tilfældet (E) er de isometrier af E^n, og i tilfældet (H) er deres restriktioner til H^n isometrier af dette rum. Vi har således i hvert af de to tilfælde en gruppe af isometrier, som vi vil betegne med henholdsvis $\mathrm{Isom}(E^n)$ og $\mathrm{Isom}(H^n)$.

Der rejser sig her spørgsmålet, om disse grupper omfatter alle isometrier af henholdsvis E^n og H^n.

I tilfældet (E) kan for $n > 1$ umiddelbart sluttes, at ved enhver isometri af E^n må hyperplaner afbildes på hyperplaner; thi en hyperplan er mængden af punkter, der har afstanden $\frac{1}{2}\pi$ fra et vist punkt (nemlig polen), og denne egenskab må bevares ved en isometri. Heraf følger også, at et par (pol,polar) må afbildes på et par (pol,polar). Idet ethvert $(n-2)$-dimensionalt P-underrum kan fås som snit af to hyperplaner, ethvert $(n-3)$-dimensionalt som snit af en hyperplan og et $(n-2)$-dimensionalt osv., følger endvidere, at enhver isometri af E^n er en kollineation. Nu gælder for reelle projektive rum af dimension større end 1, at der ikke findes andre kollineationer end de projektive (hvilket imidlertid ikke kan bevises her). Gruppen $\mathrm{Isom}(E^n)$ omfatter følgelig alle isometrier.

I tilfældet (H) må en isometri afbilde h-linier på h-linier. Dette følger af, at tre h-punkter ligger på ret linie, hvis og kun hvis lighed gælder i en af de tre trekantsuligheder for punkterne (jf.øv.7). Man kan så vise, at afbildningen kan udvides til en kollineaticn af Π^n, ved hvilken den absolutte kvadrik K afbildes på sig selv. (Herved spiller Desargues' sætning en afgørende rolle.) Af den nævnte (ikke beviste) sætning følger, at kollineationen er projektiv. At den er ombyttelig med polariteten, følger let af, at K afbildes på sig selv.

Grupperne $\mathrm{Isom}(E^n)$ og $\mathrm{Isom}(H^n)$ omfatter følgelig samtlige isometrier af henholdsvis E^n og H^n. En anden bevismetode herfor vil blive nævnt senere.

Lad B betegne en bilinearform, som bestemmer polariteten ψ og opfylder (E) eller (H). Lad endvidere $f:V^{n+1} \to V^{n+1}$ være en lineær afbildning, der inducerer en isometri φ af E^n eller H^n. At φ og φ^{-1} afbilder konjugerede punkter på konjugerede punkter, er da ensbetydende med, at der for $\underline{x},\underline{y} \in V^{n+1}$ gælder

$$B(\underline{x},\underline{y}) = 0 \iff B(\underline{f}(\underline{x}),\underline{f}(\underline{y})) = 0.$$

Dette medfører, at der findes en, nødvendigvis positiv, konstant γ, således at

$$B(f(\underline{x}),f(\underline{y})) = \gamma B(\underline{x},\underline{y}) .$$

(Dette indses således: For hvert fast $\underline{x} \neq \underline{0}$ er $B(\underline{x},\underline{y})$ og $B(f(\underline{x}),f(\underline{y}))$ linearformer i $\underline{y}$ med samme nulrum (kerne) og derfor proportionale. Proportionalitetsfaktoren kan kun afhænge af $\underline{x}$. Ved at lade $\underline{x}$ og $\underline{y}$ bytte rolle, ses, at den må være uafhængig af $\underline{x}$ og $\underline{y}$.) Blandt de lineære afbildninger, som inducerer φ findes derfor netop to, nemlig $\gamma^{-\frac{1}{2}}f$ og $-\gamma^{-\frac{1}{2}}f$, som lader formen B invariant, dvs. tilhører den til B hørende ortogonale gruppe $O(n+1,\hat{R},B)$. Ved til hver lineær afbildning tilhørende denne gruppe at lade svare den inducerede projektive kollineation fås en surjektiv homomorfi af $O(n,\hat{R},B)$ på henholdsvis $\mathrm{Isom}\,(E^n)$ eller $\mathrm{Isom}(H^n)$. Kernen ved homomorfien ses at være gruppen J af orden 2, der består af identiteten og afbildningen $\underline{x} \to -\underline{x}$ af V^{n+1}. Grupperne Isom(E^n) og Isom(H^n) er altså isomorfe med kvotientgruppen $O(n+1,\grave{R},B)/J$ for den pågældende form B.

Vælges under forudsætningen (E) et koordinatsystem i Π^n, således at polariteten ψ med hensyn til dette er bestemt ved

$$(16) \qquad B(\underline{x},\underline{y}) = x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0,$$

ses, at $O(n+1,\grave{R},B)$ i dette tilfælde er den sædvanlige ortogonale gruppe $O(n+1,\grave{R})$. Under forudsætningen (H) kan koordinatsystemet vælges således, at polariteten ψ med hensyn til dette er bestemt ved

$$(17) \qquad B(\underline{x},\underline{y}) = x_0y_0 - x_1y_1 - \cdots - x_ny_n = 0 ,$$

og $O(n+1,\grave{R},B)$ er den såkaldte Lorentzgruppe (der for n = 4 indgår i den specielle relativitetsteories grundlag).

En nærmere undersøgelse af isometrigrupperne kan baseres på en karakterisering af de koordinatsystemer $(E_0,\ldots,E_n;E)$, med hensyn til hvilke polariteten er bestemt ved henholdsvis (16) eller (17). I begge tilfælde vil bilinearformens matrix være en diagonalmatrix, hvis og kun hvis fundamentalsimplexet er selvpolært. I tilfældet (H) kan antages, at E_0 er h-punkt, hvilket medfører, at $E_1,\ldots,E_n$ er i-punkter. I begge tilfælde er betingelsen da ensbetydende med, at linierne $E_0E_1,\ldots,E_0E_n$ er parvis ortogonale og punkterne $E_1,\ldots,E_n$ konjugerede til E_0. Idet B kan erstattes med en proportional form, er betingelsen ækvivalent med, at polariteten kan bestemmes ved

$$(18) \qquad x_0'y_0' + b_{11}x_1'y_1' + \cdots + b_{nn}x_n'y_n' = 0 ,$$

hvor $b_{11},\dots,b_{nn}$ i tilfældet (E) alle er positive og i tilfældet (H) alle negative.

Endvidere skal udledes betingelser, som enhedspunktet E må opfylde, for at $b_{\nu\nu} = 1$ henholdsvis -1 for $\nu = 1,\dots,n$. Antag først, at der er valgt et vilkårligt enhedspunkt E' og at polariteten med hensyn til $(E_0,\dots,E_n;E')$ er bestemt ved (18). Overgangen til et nyt enhedspunkt E svarer til en koordinattransformation med en diagonalmatrix, altså af formen

$$x_0' = x_0, \quad x_\nu' = \rho_\nu x_\nu, \quad \nu = 1,\dots,n .$$

Punktet E vil da tilfredsstille kravet, hvis og kun hvis

$$\rho_\nu = \pm |b_{\nu\nu}|^{-\frac{1}{2}}, \quad \nu = 1,\dots,n ,$$

hvor fortegnene kan vælges uafhængigt af hinanden. Til et valgt selvpolært fundamentalsimplex findes altså 2^n enhedspunkter, således at polariteten bestemmes ved (16) eller (17). Hvert af disse 2^n punkter svarer til én af de 2^n mulige måder, på hvilke linierne $E_0E_1,\dots,E_0E_n$ kan orienteres. Dette beror på, at projektionen $E_{0\nu}$ af E på fundamentalsimplexets 1-dimensionale side E_0E_ν fra dennes modstående ((n-2)-dimensionale) side tilhører det ene eller det andet af de to liniestykker, hvori linien E_0E_ν deles af E_0 og E_ν, efter som $\rho_\nu > 0$ eller $\rho_\nu < 0$. Orienteres linien ved at fastsætte omløbet $E_0E_{0\nu}E_\nu$ som positivt, fås en enentydig korrespondance af den påståede art. Et koordinatsystem, med hensyn til hvilket polariteten er bestemt ved (16) eller (17), fås altså ved at vælge et punkt E_0 i E^n eller H^n samt n parvis ortogonale, orienterede linier $e_1,\dots,e_n$ gennem E_0. De øvrige fundamentalpunkter $E_1,\dots,E_n$ er da bestemt som de til E_0 konjugerede punkter på henholdsvis $e_1,\dots,e_n$, og enhedspunktet E er fastlagt ved orienteringerne. Sådanne koordinatsystemer betegnes i det følgende som <u>ortonormerede koordinatsystemer</u> i E^n eller H^n.

I hvert af tilfældene (E) og (H) kan enhedspunkterne for ortonormerede koordinatsystemer også bestemmes direkte ved hjælp af polariteten ψ, når det selvpolære fundamentalsimplex er valgt.

Først betragtes tilfældet (E). Er polariteten bestemt ved (18), vil polaren til enhedspunktet $(x_0,\dots,x_n) = (1,\dots,1)$ have

$$y_0 + b_{11}y_1 + \dots + b_{nn}\,y_n = 0$$

som ligning. Denne polar vil være enhedshyperplanen for koordinatsystemet netop, når $b_{11} = \dots = b_{nn} = 1$. Et enhedspunkt er altså et af de 2^n brugbare, hvis og kun hvis dets polar tillige er koordinatsystemets enhedshyperplan.

I tilfældet (H) er det hensigtsmæssigt at betragte enhedspunktets projektioner $E_{01},\dots,E_{0n}$ på linierne $E_0E_1,\dots,E_{0n}$ fra disses modstående sider i fundamentalsimplexet. Punktet $E_{0\nu}$, hvor $\nu = 1,\dots,n$, har som koordinatsæt $(1,0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, hvor det andet ettal står på den $(\nu+1)$-te plads. Dette punkt ligger på kvadrikken

$$K: \quad x_0{}^2 + b_{11}x_1{}^2 + \dots + b_{nn}x_n{}^2 = 0 \ ,$$

hvis og kun hvis $b_{\nu\nu} = -1$. Et punkt E er altså et af de 2^n brugbare, hvis og kun hvis projektionerne $E_{0\nu}$, $\nu = 1,\dots,n$, ligger på den absolutte kvadrik K. Idet punkterne $E_1,\dots,E_{\nu-1},E_{\nu+1},\dots,E_n$ da er konjugerede til $E_{0\nu}$, udspænder de sammen med dette punkt tangenthyperplanen til K i $E_{0\nu}$. Er der valgt orienteringer af linierne $E_0E_1,\dots,E_0E_n$, kan det tilhørende enhedspunkt E derfor fås på følgende måde: For hver af linierne E_0E_ν betegnes med $E_{0\nu}$ det skæringspunkt med K, for hvilket omløbet $E_0E_{0\nu}E_\nu$ er i overensstemmelse med orienteringen, og E er da skæringspunktet mellem tangenthyperplanerne i disse punkter $E_{0\nu}$.

Vi kan nu slutte:

<u>Ved enhver isometri af</u> E^n <u>eller</u> H^n <u>afbildes et ortonormeret koordinatsystem på et ortonormeret koordinatsystem</u>.

Det er nemlig klart, at et selvpolært simplex afbildes på et selvpolært simplex, og af ovenstående karakterisering af de brugbare enhedspunkter i de to tilfælde fremgår, at de pågældende egenskaber bevares ved isometrier.

Der gælder endvidere følgende hovedsætning om isometrier i de ikke-euklidiske rum:

<u>Til to ortonormerede koordinatsystemer</u> $(E_0,\dots,E_n;E)$ <u>og</u> $(F_0,\dots,F_n;F)$ <u>i et n-dimensionalt ikke-euklidisk rum findes netop én isometri</u> φ <u>af rummet, ved hvilken</u> $\varphi(E_\nu) = F_\nu$ <u>for</u> $\nu = 0,\dots,n$ <u>og</u> $\varphi(E) = F$.

Ifølge den foregående sætning kan enhver isometri fås på denne måde.

Sætningen bevises således: Der findes ifølge projektivgeometriens fundamentalsætning netop én projektiv kollineation φ af det underliggende projektive rum, som opfylder kravet. Da de givne koordinatsystemer er ortonormerede, bestemmes polariteten med hensyn til disse ved den samme ligning, nemlig (16) i tilfældet (E) og (17) i tilfældet (H). Da endvidere billedpunktet $\varphi(X)$ af et punkt X har samme koordinatsæt med hensyn til $(F_0,\dots,F_n;F)$ som X har med hensyn til $(E_0,\dots,E_n;E)$, sluttes, at konjugerede punkter afbildes på konjugerede punkter. Den projektive kollineation φ er altså en isometri.

En speciel klasse af isometrier, de såkaldte spejlinger, er af særlig interesse.

En projektiv kollineation φ af Π^n kaldes en <u>homologi</u>, hvis dens fixpunktmængde udgøres af punkterne i en hyperplan A^*, <u>homo-</u>

logihyperplanen, og ét punkt A uden for denne, homologicentret (jf. side III,3,21). Dette er ensbetydende med, at en (og da enhver) til φ hørende matrix har to forskellige egenværdier, en med egenværdimultiplicitet 1 og en med egenværdimultiplicitet n. Med hensyn til et koordinatsystem $(E_0,\dots,E_n;E)$, hvor $E_0 = A$ og E_1, $\dots,E_n$ tilhører A^*, er de til φ hørende matricer diagonalmatricer, og der findes én af dem med diagonalelementerne $\lambda,1,\dots,1$, hvor $\lambda \neq 1$. Er homologien involutorisk, hvilket er tilfældet, hvis og kun hvis $\lambda = -1$, kaldes den en harmonisk homologi. Til givne A,A^* findes der netop én sådan. For billedpunktet $\varphi(X)$ af et punkt $X \neq A$ gælder, at det ligger på linien AX og tilfredsstiller

(19) $$\mathrm{df}(AA_X X\varphi(X)) = -1 \ ,$$

hvor A_X betegner skæringspunktet mellem A^* og linien AX.

Forudsættes nu, at A^* er polaren for A ved polariteten ψ, vil den harmoniske homologi φ med homologihyperplanen A^* og homologicentret A være en isometri. Vælges nemlig et ortonormeret koordinatsystem med ét fundamentalpunkt $E_\nu = A$ og de øvrige i A^*, fås et koordinatsæt for $\varphi(X)$ ved i et koordinatsæt for X at skifte fortegn for koordinaten med nummer ν. Er nu X og Y konjugerede punkter, vil koordinatsæt $(x_0,\dots,x_n)$ og $(y_0,\dots,y_n)$ for dem tilfredsstille (16) eller (17), og det samme vil da øjensynlig gælde for koordinatsæt for $\varphi(X)$ og $\varphi(Y)$.

Lad φ være en sådan harmonisk homologi. En linie l gennem A, altså en normal til A^*, afbildes da på sig selv. Det fremgår af (19), at hvert af de to liniestykker, hvori l deles af A og A^*, afbildes på det andet, således at A og skæringspunktet med A^* forbliver fast. I det elliptiske tilfælde er φ derfor en spejling såvel i punktet A som i hyperplanen A^*. I det hyperbolske tilfælde er φ en punktspejling, nemlig i A, hvis A er et h-punkt, og en hyperplanspejling, nemlig i den i A^* indeholdte h-hyperplan, hvis

A er et i-punkt. Idet det var forudsat, at A ikke ligger i A^*, kommer tilfældet $A \in K$ ikke i betragtning.

Der tilføjes nogle bemærkninger om tilfældene $n = 1$ og $n = 2$.

Grupperne $\mathrm{Isom}(E^1)$ og $\mathrm{Isom}(H^1)$ har undergrupper af index 2 bestående af de isometrier, som bevarer en valgt orientering af henholdsvis E^1 og H^1. Isometrierne tilhørende disse undergrupper er, bortset fra identiteten, fixpunktfri i E^1 henholdsvis H^1. (I det sidste tilfælde er de to uendelig fjerne punkter fixpunkter ved den pågældende projektivitet.) Disse isometrier svarer til den euklidiske linies translationer. Isometrierne, der vender orienteringen, som altså udgør sideklasserne til undergrupperne, har i det elliptiske tilfælde to indbyrdes konjugerede fixpunkter og i det hyperbolske ét fixpunkt på H^1. En sådan isometri er en spejling i henholdsvis fixpunktparret eller fixpunktet.

Den elliptiske plan E^2 kan ikke orienteres, og der kan derfor ikke skelnes mellem isometrier, der bevarer, og isometrier, der ikke bevarer orienteringen. Enhver isometri af E^2 har mindst et fixpunkt A, idet den er en projektiv kollineation af den reelle projektive plan. Polaren A^* for A er da fixlinie. Hvis isometriens restriktion til A^* bevarer orienteringen, er isometrien en drejning om A, specielt identiteten eller en spejling i A (og dermed i A^*). Hvis restriktionen vender orienteringen, har den som omtalt et par af indbyrdes konjugerede fixpunkter på A^*, og isometrien er spejlingen i ét af disse.

Den hyperbolske plan kan orienteres. De isometrier, der bevarer orienteringen, udgør en undergruppe af index 2 i $\mathrm{Isom}(H^2)$.

Lad φ være en isometri af H^2, som ikke er den identiske. Betragtet som projektiv kollineation har den mindst et fixpunkt A. Dettes polar A^* vil da være fixlinie.

Først antages, at A er et h-punkt. Isometrien φ er da enten en drejning om (specielt en punktspejling i) A og bevarer planens orientering eller en liniespejling i en linie gennem A og vender orienteringen.

Dernæst antages, at A er et i-punkt, og at ikke noget h-punkt er fixpunkt. Den i A^* indeholdte h-linie A_h^* afbildes da fixpunktfrit og derfor med bevaring af orienteringen på sig selv. Liniens uendelig fjerne punkter U og V er følgelig fixpunkter. Da φ ikke er den identiske afbildning, kunne eventuelle andre fixpunkter kun ligge på linierne AU og AV. Fandtes der et sådant fixpunkt P f.eks. på AU, ville linien PV være fixlinie og skære det absolutte keglesnit K i et fixpunkt uden for de nævnte linier. Der findes altså kun de tre fixpunkter A,U,V. Heraf sluttes, at ikke nogen fra A_h^* forskellig h-linie er fixlinie. Hvis isometrien φ afbilder hver af de ved A_h^* bestemte halvplaner på sig selv, bevarer den planens orientering og kaldes en translation med akse A_h^*. Hvis den ombytter halvplanerne, kan den tænkes sammensat af en translation med akse A_h^* og spejlingen i denne linie. Den vender planens orientering og kaldes en glidespejling med akse A_h^*.

Endelig betragtes tilfældet, hvor ikke noget h-eller i-punkt er fixpunkt, og A altså ligger på K. Der findes da heller ikke noget fra A forskelligt fixpunkt på K, idet der ellers fandtes en fixlinie, hvis pol er et i-punkt. Den eneste fixlinie er polaren til A, altså tangenten til K i A. En isometri φ med disse egenskaber viser sig at være orienteringsbevarende og kaldes en grænsedrejning med det (uendelig fjerne) centrum A.

1. Bevis den side III,7,6 fremsatte påstand, at i et elliptisk rum er uligheden

$$\frac{B(\underline{x},\underline{y})B(\underline{y},\underline{z})}{B(\underline{x},\underline{z})B(\underline{y},\underline{y})} \geq 1$$

ensbetydende med

$$df(XY'YZ') \leq 0 \text{ .}$$

Her betegner X,Y,Z,Y',Z' punkter på en ret linie, Y' og Z' er konjugerede til henholdsvis X og Z, og $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ er repræsentanter for henholdsvis X,Y,Z.

2. På en elliptisk linie E^1 er valgt et koordinatsystem $(A_0,A_1;A)$, hvor A_0 og A_1 er konjugerede og $|A_0A| = \pi/4$. Find $|A_0X|$ udtrykt ved et koordinatsæt (x_0,x_1) for punktet X. (Konstanten c i metrikken sættes lig med 1.)

3. I den elliptiske plan E^2 er givet tre punkter A_1,A_2,A_3 som ikke ligger på ret linie, og således, at A_1 og A_3 er konjugerede. Vis, at der findes netop to punkter A_4 og A_5, således at femkanten $A_1A_2A_3A_4A_5$ er selvpolær. Hermed menes, at hver side $a_i = A_{i-2}A_{i+2}$, hvor i regnes modulo 5, er polaren for den modstående vinkelspids A_i.
Ved femkantens sidelængder forstås afstandene $|A_iA_{i+1}|$. Benyt resultaterne i III,2,øv.5 til at udlede trigonometriske relationer mellem hvilkesomhelst tre af femkantens sidelængder.
Dualiser, og benyt resultatet til at udlede relationer mellem hvilkesomhelst tre af en retvinklet trekants fem stykker. Hermed menes de tre sidelængder og måltallene for de to vinkler, der ikke forudsættes at være rette.

4. Lad A^*, B^*, C^* være linier i den elliptiske plan E^2, som ikke går gennem samme punkt. Vis, at hvis $|A^*B^*| = \frac{1}{2}\pi$, så gælder

$$|A^*C^*| + |B^*C^*| > \tfrac{1}{2}\pi .$$

(Dette kan fortolkes som en sætning om en retvinklet trekants vinkler. Herved må det imidlertid tages i betragtning, at vinkelmåltallene per definition tilhører $[0,\frac{1}{2}\pi]$ og derfor ikke nødvendigvis er måltal for trekantens vinkler, men muligvis for deres nabovinkler.)

5. På en elliptisk linie E^1 (hvor konstanten c er sat lig med 1) er givet et punkt X. Endvidere er der givet et tal $d \in]0,\frac{1}{2}\pi[$. Vis, at der findes netop to punkter Y_1 og Y_2 på E^1, for hvilke $|XY_1| = |XY_2| = d$. Vis endvidere, at sættene (X,Y_1,X') og (X,Y_2,X'), hvor X' er det til X konjugerede punkt på E^1, bestemmer modsatte orienteringer af E^1 (dvs. at projektiviteten, ved hvilken X,Y_1,X' afbildes på henholdsvis X,Y_2,X' har negativ determinant).

6. Lad l være en linie i det elliptiske rum E^3 og l^* dens polar (jf.III,5,øv,17). Vis, at hver linie, der skærer l og l^*, er fællesnormal for l og l^*.
Lad m være en linie i E^3, således at l og m er vindskæve. Vis, at l og m enten har netop to eller uendelig mange fællesnormaler, og opstil en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for det sidstnævnte tilfælde. (Benyt III,5,øv.24.)

7. Gennemfør et bevis for, at tre indbyrdes forskellige punkter i det hyperbolske rum H^n ligger på ret linie, hvis og kun hvis ét af dem ligger mellem de to andre.

8. I den hyperbolske plan H^2 er givet en linie X^* og et punkt P uden for denne. Normalen N^* til X^* gennem P skærer X^* i punktet Q. Afstanden $|PQ|$ betegnes d. Den ene af de to linier gennem P, der er parallelle (har et uendelig fjernt punkt fælles) med X^*, betegnes Y^*. Vis, at der for Lobachevskis "parallelvinkel" $\alpha = |X^*Y^*|$ gælder

$$\cos \alpha = \operatorname{tgh} d/c \; .$$

Beregn ved hjælp heraf længden af den retvinklede projektion af hele linien X^* på normalen Z^* til N^* gennem P.

9. Lad ABC være en retvinklet trekant med den rette vinkel C i den hyperbolske plan H^2.

Vis med benyttelse af et projektivt koordinatsystem $(E_0,E_1,E_2;E)$, hvor trekant $E_0E_1E_2$ er selvpolært, $E_0 = C$, og B og C ligger på henholdsvis E_0E_1 og E_0E_2, at

$$(1) \qquad \cosh(c^{-1}|AB|) = \cosh(c^{-1}|AC|)\cosh(c^{-1}|BC|) \; .$$

Vis endvidere med benyttelse af et projektivt koordinatsystem $(E_0,E_1,E_2;E)$, hvor trekant E_0,E_1,E_2 er selvpolært, $E_0 = A$, og C og B ligger på henholdsvis E_0E_1 og E_0E_2, at

$$(2) \qquad \cos A = \frac{\operatorname{tgh}(c^{-1}|AC|)}{\operatorname{tgh}(c^{-1}|AB|)} \; .$$

Udled ved hjælp af (1) og (2) otte andre relationer, hver mellem tre af trekantens fem stykker.

Vis, at vinkelsummen i trekant ABC er mindre end π.

10. Bevis (ved hjælp af resultater i øv. 9), at afstanden mellem to hyperparallelle linier i den hyperbolske plan H^2 er den mindste afstand mellem et punkt på den ene linie og et punkt på den anden.

11. Find længden af en cirkel med radius $r > 0$ i den elliptiske plan (for $r < \frac{1}{2}\pi$) og i den hyperbolske plan. (Længden defineres som i det euklidiske tilfælde som øvre grænse for mængden af indskrevne brudte liniers længder.)

12. Ved en afstandslinie til en h-linie l i den hyperbolske plan H^2 forstås mængden af h-punkter, som har en given afstand d fra l. Vis, at en afstandslinie i projektiv fortolkning er et keglesnit, hvorfra der er fjernet to punkter, og at dette keglesnit fremgår af det absolutte keglesnit K ved en homologi med l som akse og polen for l som centrum.

13. Vis, at enhver isometri af en hyperbolsk linie H^1 på sig selv er en spejling eller kan på uendelig mange måder fås som sammensætning af to spejlinger.
Vis det tilsvarende for en elliptisk linie E^1.

14. Vis, at enhver isometri af den elliptiske plan E^2 enten er en spejling eller kan fås som sammensætning af to spejlinger.
Vis, at enhver isometri af den hyperbolske plan H^2, som ikke er en spejling i et punkt eller en linie, kan fås som sammensætning af to liniespejlinger eller en punkt- og en liniespejling. Slut heraf, at enhver isometri kan sammensættes af højst tre liniespejlinger. Beskriv de isometrier, der fås ved sammensætning af to punktspejlinger.