Matematik 3, 1962–64

Werner Fenchel
Forelæsninger over Geometri, Kapitel I–III

Med supplerende sider fra 1964–65 i Kap. III

Kap. I. Euklidisk Geometri

§1. Indledning (kun øvelser)
§2. Euklids Elementer
§3. D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie

Kap. II. Talsystemets opbygning

§1. De naturlige tal
Addition (sætning 3), ordning (sætning 14), velordning (sætning 20-23). definition ved induktion (sætning 24), endelige mængders kardinaltal (sætning 26-28).
§2. De hele og de rationale tal
Udvidelse af halvgrupper (s.1-4), de hele tal og ordning af disse (s.5–6), ordnede legemer (s.13-20).
§3. De reelle tal efter Ch. Méray og G. Cantor
Fuldstændiggørelse af ordnet legeme (s.1-8), de reelle tals definition og grundlæggende egenskaber (s.9-13), fremstilling af et reelt tal i g-talsystemet (s.14-17).
§4. Kontinuert ordning. De reelle tals kontinuitet
Kontinuert ordnede mængder (s,1-6), de reelle tals kontinuitet (s.6-8).
§5. Divisionsalgebraer over de reelle tals legeme
Definition af algebraer (s.2-4), Frobenius' sætning (s.4-10), kvaternionerne (s.10-16).

Kap. III. Projektiv Geometri

§1. Elementær projektiv geometri
Udvidelse af euklidisk plan og euklidisk rum ved tilføjelse af uegentlige elementer (s.1-6), Desargues' sætning og firkantsætningen (s.7-12).
§2. Projektive rum
Definition (s.1-5), dimensionsformlen med anvendelser (s.5-9), dualitetsprincippet (s.2-4, 9-11), dobbeltforhold (s.11-17). Projektive koordinater (s.17-26), anvendelser (s.26-31).
§3. Koordinattransformationer, kollineationer
Koordinattransformationer (s.1-5), fundamentalsætningen om projektive kollineationer (s.5-9), matrixligninger for projektive kollineationer (s.10-13), fixpunkter ved projektive kollineationer, bestemmelse af fixpunkter og fixhyperplaner (s.17-22), homologier og elationer (s.22-26).
§4. Polariteter og kvadrikker
Polaritet, polar, konjugerede punkter, konjugeret par (s.1-7), polarsimplex (s.7-9), normalform (s.9-10), ækvivalens (s.10-12).

Tillæg til differentialgeometri

I. Kurver i en orienteret plan
II. Om udfoldelige flader
III. Lagranges multiplikatorregel

Øvelser til kap.I,§ 1.

1. I en babylonsk matematisk tekst behandles følgende opgave: En retvinklet trekant, hvis ene katet b er givet, skal ved et til denne parallelt liniestykke, hvis længde betegnes med x, deles i et trapez og en retvinklet trekant således, at disses arealer A_1 og A_2 har en given differens $D = A_1 - A_2$, og at de stykker y_1 og y_2, hvori den anden katet deles, har en given differens $d = y_2 - y_1$. Der er givet talværdier for b, D og d, og de ubekendte x, y_1, y_2, A_1, A_2 udregnes svarende til følgende formler:

$$x = \left\{\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{D}{d}+b\right)^2 + \left(\frac{D}{d}\right)^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{D}{d},$$

$$y_1 = (b-x)\frac{D}{\frac{1}{2}b^2 - x^2}, \qquad y_2 = y_1 + d,$$

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(b+x)y_1, \qquad A_2 = \tfrac{1}{2}xy_2.$$

Undersøg om løsningen er korrekt.

2. Ved et pythagoreisk talsæt forstås et sæt (a,b,c) af positive hele tal, som tilfredsstiller ligningen $a^2+b^2 = c^2$. Et sådant sæt siges at være primitivt, hvis tallene a,b,c har største fælles divisor 1. De har da to og to største fælles divisor 1, og et af tallene a,b er lige. Bevis dette. Vis, at hvert talsæt af formen

$$(2uv,\ u^2-v^2, u^2+v^2),$$

hvor u og $v < u$ er positive hele tal, som har største fælles divisor 1 og ulige sum, er et primitivt pythagoreisk talsæt. Vis, at hvert primitivt pythagoreisk talsæt kan fremstilles på denne måde. Angiv alle pythagoreiske talsæt samt alle par (x,y) af positive rationale tal, som tilfredsstiller ligningen $x^2+y^2 = 1$.

3. Der er givet et liniestykke AB. Man skal ved konstruktion bestemme et punkt P på AB, således at rektanglet med siderne AP og BP er lig med (d.v.s. har samme areal som) et givet kvadrat q. (Begynd med at konstruere et kvadrat som lagt til q giver samme areal som kvadratet med siden $\frac{1}{2}$AB.)

Løs den tilsvarende opgave, når det forlanges, at P deler AB udvendigt.

Angiv løsningsbetingelserne i begge tilfælde og gør rede for, at det drejer sig om konstruktive løsninger af vilkårlige andengradsligninger med mindst een positiv rod.

§ 2. Euklids Elementer.

Uddrag af Thyra Eibes oversættelse (1897-1912) af J.L. Heibergs græske udgave (1883).

I.

Definitioner.

I. Et Punkt er det, som ikke kan deles.

2. En Linie er en Længde uden Bredde.

3. En Linies Grænser ere Punkter.

4. En ret Linie er en Linie, som ligger lige mellem Punkterne på den.

5. En Flade er det, som kun har Længde og Bredde.

6. En Flades grænser ere Linier.

7. En plan Flade er en Flade, som ligger lige mellem de rette Linier i den.

8. En plan Vinkel er Heldningen mellem to Linier, som ligge i samme Plan, have et Punkt fælles og ikke ligge på ret Linie.

9. Naar de Linier, der indeslutte Vinkelen ere rette, kaldes Vinkelen retlinet.

10. Naar en ret Linie er oprejst paa en anden, saa at de ved Siden af hinanden liggende Vinkler blive ligestore, er enhver af de ligestore Vinkler ret; og den Linie, der er oprejst på den anden, kaldes lodret paa den anden.

11. En stump Vinkel er en, som er større end en ret.

12. En spids Vinkel er en, som er mindre end en ret.

13. Omkreds er Grænsen for noget.

14. En Figur er det, som indesluttes af en eller flere Omkredse.

15. En Cirkel er en plan Figur, indesluttet af een saadan Linie (som kaldes Periferien), at alle de rette Linier, der kunne

drages ud til den fra eet indenfor Figuren liggende Punkt, ere indbyrdes ligestore.

16. Dette Punkt kaldes Centrum i Cirkelen.

17. En Diameter i Cirkelen er en ret Linie, trukken gennem Centrum og begrænset til begge Sider af Cirkelperiferien; den halverer ogsaa Cirkelen.

18. En Halvcirkel er en Figur, som indesluttes af en Diameter og den af Diameteren afskaarne Periferi. Halvcirkelens Centrum er det samme som Cirkelens.

19. Retlinede Figurer ere saadanne, som indesluttes af rette Linier: tresidede, som indesluttes af tre, firsidede af fire, flersidede af flere end fire rette Linier.

20. Af tresidede Figurer kaldes den, der har alle tre Sider ligestore, en ligesidet, den som kun har to Sider ligestore, en ligebenet, og den, som har alle tre Sider uligestore, en skæv Trekant.

21. Af tresidede Figurer kaldes endvidere den, som har en ret Vinkel, en retvinklet, den, som har en stump Vinkel, en stumpvinklet, den som har alle tre Vinkler spidse, en spidsvinklet Trekant.

22. Af firsidede Figurer kaldes den, som baade er ligesidet og retvinklet, et Kvadrat, den som er retvinklet, men ikke ligesidet, et Rektangel, den som er ligesidet, men ikke retvinklet, en Rhombe, den som har baade modstaaende Sider og Vinkler ligestore, men hverken er ligesidet eller retvinklet, en Rhomboide; de øvrige Firsider kunne kaldes Trapezer.

23. Parallele ere de rette Linier, som ligge i samme Plan, og naar de forlænges ubegrænset til begge Sider, ikke mødes til nogen af Siderne.

Forudsætninger.

Lad det være forudsat:

I. At man kan trække en ret Linie fra et hvilketsomhelst Punkt til et hvilketsomhelst Punkt.

2. At man kan forlænge en begrænset ret Linie i ret Linie ud i eet.

3. At man kan tegne en Cirkel med et hvilketsomhelst Centrum og en hvilkensomhelst Radius.

4. At alle rette Vinkler ere ligestore.

5. At, naar en ret Linie skærer to rette Linier, og de indvendige Vinkler paa samme Side ere mindre end to rette, saa mødes de to Linier, naar de forlænges ubegrænset, paa den Side, hvor de to Vinkler ligge, der ere mindre end to rette.

Almindelige Begreber.

I. Størrelser, som ere ligestore med den samme, ere indbyrdes ligestore.

2. Naar ligestore Størrelser lægges til ligestore Størrelser, ere Summerne ligestore.

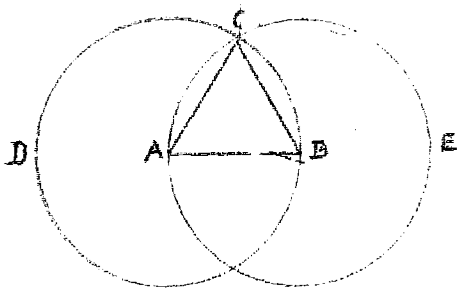
3. Naar ligestore Størrelser trækkes fra ligestore Størrelser, ere Resterne ligestore.

4. Størrelser, der kunne dække hverandre, ere indbyrdes ligestore.

5. Det hele er større end en Del af det.

I.

At konstruere en ligesidet Trekant paa en given begrænset ret Linie.



Lad AB være den givne begrænsede rette Linie. Man skal da konstruere en ligesidet Trekant paa den rette Linie AB.

Lad Cirkel BCD være tegnet med A som Centrum og AB som Radius og tillige Cirkel ACE med B som Centrum og BA som Radius, og lad de rette Linier CA og CB være dragne fra Cirklernes Skæringspunkt C til Punkterne A og B.

Da nu Punkt A er Centrum i Cirkel CDB, er AC = AB. Da endvidere Punkt B er Centrum i Cirkel CAE, er BC = BA. Men det blev ogsaa bevist, at CA er lig AB. Altsaa er baade CA og CB lig AB. Men Størrelser, der er ligestore med den samme Størrelse, ere indbyrdes ligestore. Altså er CA = CB. Altsaa ere de tre rette Linier CA, AB og BC indbyrdes ligestore.

Altså er ABC ligesidet, og den er konstrueret paa den givne begrænsede rette Linie AB; hvilket skulde gøres.

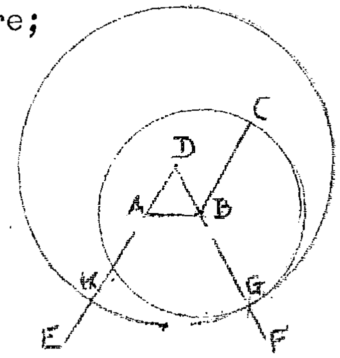
2.

Ud fra et givet Punkt at afsætte en ret Linie lig en given ret Linie.

Lad A være det givne Punkt og BC den givne rette Linie. Man skal da ud fra det givne Punkt A afsætte en ret Linie lig den den givne rette Linie BC.

Lad nemlig en ret Linie AB være dragen fra Punkt A til Punkt B, lad der paa den være konstrueret en ligesidet Trekant DAB, lad de rette Linier AE og BF være afsatte i Forlængelse af DA og DB, lad Cirkel CGH være tegnet med B som Centrum og BC som Radius, og lad Cirkel GIK være tegnet med D som Centrum og DG som Radius.

Da nu Punkt B er Centrum i Cirkel CGH, er BC = BG. Da endvidere Punkt D er Centrum i Cirkel GIK, er DK = DG; og paa dem ere Stykkerne DA og DB ligestore;



altså er Resten AK lig Resten BG. Men det blev ogsaa bevist, at BC er lig BG. Altsaa er baade AK og BC lig BG. Men Størrelser, som er ligestore med den samme Størrelse, ere indbyrdes ligestore. Altsaa er AK = BC.

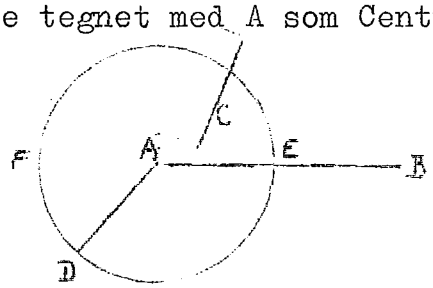
Altsaa er der ud fra det givne Punkt A afsat en ret Linie AK lig den givne rette Linie BC; h. s. g.

3.

Paa den største af to givne uligestore rette Linier at afskære en ret Linie lig den mindste.

Lad AB og C være de to givne uligestore rette Linier, og lad AB være den største af dem. Man skal da paa den største AB afskære en ret Linie lig den mindste C.

Lad AD være afsat ud fra Punkt A lig den givne rette Line C, og Cirkel DEF være tegnet med A som Centrum og AD som Radius.



Da nu Punkt A er Centrum i Cirkel DEF, er AE = AD. Men C er ogsaa lig AD. Altsaa er baade AE og C lig AD. Altså er AE = C.

Altså er der på den største AB af to givne uligestore rette Linier AB og C afskaaret AE lig den mindste C; h. s. g.

4.

Naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore og de Vinkler, der indesluttes af de ligestore rette Linier, ligestore, saa ville de ogsaa have Grundlinierne ligestore, og Trekanterne ville være ligestore, og de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore.

Lad ABC og DEF være to Trekanter, hvor de to Sider AB og AC parvis ere lig de to Sider DE og DF, nemlig AB = DE og AC = DF, og hvor ∠ BAC er lig ∠ EDF. Jeg siger da: at Grundlinie BC vil være lig Grundlinie EF, at △ ABC vil være lig △ DEF, og at de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore, ∠ ABC = ∠ DEF og ∠ ACB = ∠ DFE.

Naar nemlig △ ABC lægges paa △ DEF, idet Punkt A anbringes i Punkt D og den rette Linie AB paa den rette Linie DE, saa vil Punkt B træffe i E, fordi AB er lig DE. Men naar AB dækker DE, saa vil den rette Linie AC falde paa den rette Linie DF, fordi ∠ BAC er lig ∠ EDF. Følgelig vil her Punkt C træffe i Punkt F, fordi AC er lig DF. Men B traf jo i E; følgelig vil Grundlinie BC dække Grundlinie EF. Thi hvis Grundlinie BC ikke dækker EF, naar B træffer i E og C i F, saa ville to rette Linier indeslutte et Rum; og det er umuligt. Altsaa vil Grundlinie BC dække EF og være lig med den. Følgelig vil hele △ ABC dække hele △ DEF og være lig med den; og de øvrige Vinkler ville dække de øvrige Vinkler og være lig med dem, ∠ ABC = ∠ DEF og ∠ ACB = ∠ DFE.

Altså: naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore og og de Vinkler, der indesluttes af de ligestore rette Linier, ligestore, saa ville de også have Grundlinierne ligestore, og Trekanterne ville være ligestore, og de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore, hvilket skulde bevises.

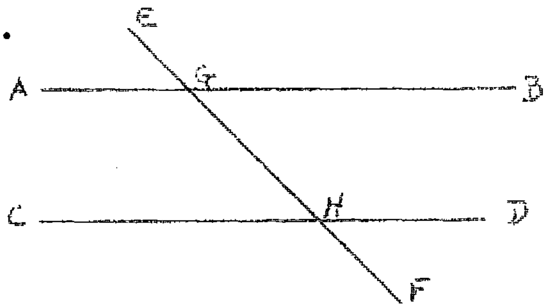
....

28.

Naar en ret Linie skærer to rette Linier, og den udvendige Vinkel er lig den indvendige og modstaaende paa samme Side, eller de indvendige Vinkler tilsammen ere lig to rette, ville de rette Linier være parallele.

Lad nemlig den rette Linie EF skære de to rette Linier AB og CD, og lad den udvendige Vinkel EGB være lig den indvendige og modstaaende Vinkel GHD, eller de indvendige Vinkler på samme Side BGH og GHD tilsammen være lig to rette. Jeg siger da, at AB er parallel med CD.

Thi da $\angle$EGB er lig $\angle$GHD, og $\angle$EGB er lig $\angle$AGH, saa er $\angle$AGH = $\angle$GHD.



Og de ere Vekselvinkler. Altså er AB parallel med CD.

Da endvidere $\angle$BGH + $\angle$GHD er lig to rette, og $\angle$AGH + $\angle$BGH også er lig to rette, saa er $\angle$BGH + $\angle$GHD = $\angle$AGH + $\angle$BGH. Lad den fælles Vinkel BGH være trukken fra, saa er Resten $\angle$AGH lig Resten $\angle$GHD. Og de ere Vekselvinkler. Altså er AB parallel med CD.

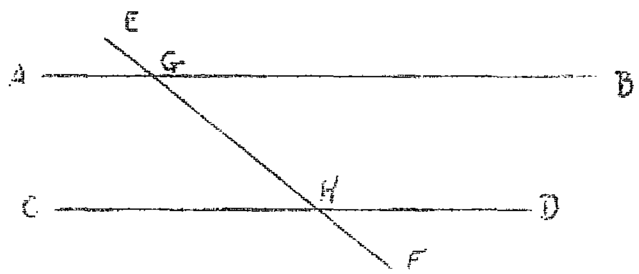
Altsaa: naar en ret Linie skærer to rette Linier, og den udvendige Vinkel er lig den indvendige og modstaaende paa samme Side, eller de indvendige Vinkler paa samme Side tilsammen ere lig to rette, ville de rette Linier være parallele; h. s. b.

29.

Naar en ret Linie skærer parallele rette Linier, ere Vekselvinklerne ligestore, den udvendige Vinkel er lig den indvendige og modstaaende, og de indvendige Vinkler paa samme Side ere tilsammen lig to rette.

Lad nemlig den rette Linie EF skære de parallele rette Linier AB og CD. Jeg siger da, at Vekselvinklerne AGH og GHD ere ligestore, at den udvendige Vinkel EGB er lig den indvendige og modstaaende Vinkel GHD, og at de indvendige Vinkler paa samme Side BGH og GHD tilsammen ere lig to rette.

Thi hvis $\angle$ AGH og $\angle$ GHD ere uligestore, er en af dem størst. Lad $\angle$AGH være størst, og lad $\angle$BGH være lagt til dem begge, saa er $\angle$AGH + $\angle$BGH større end $\angle$BGH + $\angle$GHD. Men $\angle$AGH + $\angle$BGH er lig to rette. Altsaa er $\angle$BGH + $\angle$GHD mindre end to rette. Men rette Linier mødes, naar de forlænges ubegrænset fra Vinkler, der tilsammen ere mindre end to rette. Altså ville AB og CD mødes, naar de forlænges ubegrænset. Men de mødes ikke, fordi det er givet, at de ere parallele. Altså er $\angle$AGH og $\angle$GHD ikke uligestore. Altsaa er $\angle$AGH = $\angle$GHD. Men $\angle$AGH er lig $\angle$EGB. Altså $\angle$EGB = $\angle$ GHD. Lad nu $\angle$BGH være lagt til dem begge, saa er $\angle$EGB + $\angle$BGH = $\angle$BGH + $\angle$GHD. Men $\angle$EGB + $\angle$BGH er lig to rette.



Altsaa er ogsaa $\angle$BGH + $\angle$GHD lig to rette.

Altsaa: naar en ret Linie skærer parallele rette Linier, ere Vekselvinklerne ligestore, den udvendige Vinkel er lig den indvendige og modstaaende, og de indvendige Vinkler paa samme Side ere tilsammen lig to rette; h. s. b.

V.

Definitioner.

I. En mindre Størrelse er Del af en større, naar den maaler den større.

2. En større er Mangefold af en mindre, naar den maales af den mindre.

3. Forhold er en vis storhedsrelation mellem to ensartede Størrelser.

4. Størrelser siges have et Forhold til hinanden, naar de ved at mangfoldiggøres kunne overgaa hinanden.

5. Størrelser siges at være i samme Forhold: den første til den anden som den tredie til den fjerde, naar samme, men vilkaarlige Mangefold af den første og tredje enten begge to hver for sig er større end, eller begge to hver for sig er lig med, eller begge to hver for sig er mindre end henholdsvis samme, men vilkaarlige Mangefold af den anden og fjerde.

6. Lad Størrelser, der have samme Forhold, hedde proportionale.

7. Naar af de ens Mangefold den førstes Mangefold er større end den andens Mangefold, mens den tredjes Mangefold ikke er større end den fjerdes Mangefold, saa siges den første at have et større Forhold til den anden end den tredje til den fjerde.

8. Til Proportionalitet hører mindst tre Led.

9. Naar tre Størrelser er proportionale, siges den første at have et dobbelt saa stort Forhold til den tredje som til den anden.

I.

Naar et hvilketsomhelst Antal Størrelser hver for sig er samme Mangefold af hver sin af et ligesaa stort Antal andre Størrelser, saa vil Summen af alle de første Størrelser være et ligesaa stort Mangefold af Summen af alle de andre, som een af de første af sin tilsvarende.

2.

Naar første Størrelse er samme Mangefold af anden som tredje af fjerde, og desuden femte er samme Mangefold af anden som sjette af fjerde, saa vil første og femte adderede være samme Mangefold af anden som tredje og sjette adderede af fjerde.

3.

Naar første Størrelse er samme Mangefold af anden som tredje af fjerde, og der tages samme Mangefold af baade første og tredje, saa vil ogsaa, ligeligt, hvert af de tagne Mangefold være samme Mangefold af henholdsvis anden og fjerde.

4.

Naar første Størrelse har samme Forhold til anden som tredje til fjerde, vil samme, men vilkaarlige Mangefold af første og tredje have samme Forhold til henholdsvis samme, men vilkaarlige Mangefold af anden og fjerde.

5.

Naar en Størrelse er samme Mangefold af en anden Størrelse som et Stykke af den af et Stykke af den anden, saa vil Resten af den være samme Mangefold af Resten af den anden, som hele Størrelsen af hele den anden.

6.

Naar to Størrelser ere samme Mangefold af to andre Størrelser, og Stykker af dem ere samme Mangefold af de samme to andre, saa ere Resterne enten lig med de samme to andre eller samme Mangefold af dem.

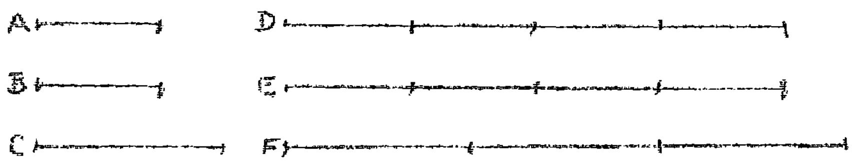
7.

Ligestore Størrelser have samme Forhold til samme Størrelse; og samme Størrelse har samme Forhold til ligestore Størrelser.

Lad A og B være ligestore Størrelser og C en anden vilkaarlig Størrelse. Jeg siger da, at hver af Størrelserne A og B har samme Forhold til C, og at C har samme Forhold til hver af Størrelserne A og B.

Lad der nemlig være taget samme Mangefold D og E af A og B og et andet vilkaarligt Mangefold F af C.

Da nu D er samme Mangefold af A som E af B, og A er lig B, saa er D = E. Og F er et andet vilkaarligt Mangefold. Hvis saa D er   F, er også E   F. Men D og E ere samme Mangefold af A og B, og F er et andet vilkaarligt Mangefold af C. Altsaa er A/C = B/C.



Jeg siger saa, at C har samme Forhold til hver af Størrelserne A og B.

Naar nemlig de samme Konstruktioner ere udførte, ville vi paa samme Maade kunne bevise, at D er lig E. Og F er en anden Størrelse. Hvis saa F er   D, er ogsaa F   E. Men F er et Mangefold af C, og D og E ere andre vilkaarlige samme Mangefold af A og B. Altså er C/A = C/B.

Altsaa: ligestore Størrelser have samme Forhold til samme Størrelse, og samme Størrelse har samme Forhold til ligestore Størrelser.

Følgesætning.

Heraf fremgaar, at naar Størrelser ere proportionale, saa ville de ogsaa være omvendt proportionale; h. s. b.

8.

Af to uligestore Størrelser har den største et større Forhold til samme Størrelse end den mindste; og samme Størrelse har et større Forhold til den mindste end til den største.

9.

Størrelser, som have samme Forhold til samme Størrelse, ere ligestore; og Størrelser, til hvilke samme Størrelse har samme Forhold, ere ligestore.

10.

Af to Størrelser, som have et Forhold til samme Størrelse, er den størst, som har det største Forhold; og den er mindst, til hvilken samme Størrelse har det største Forhold.

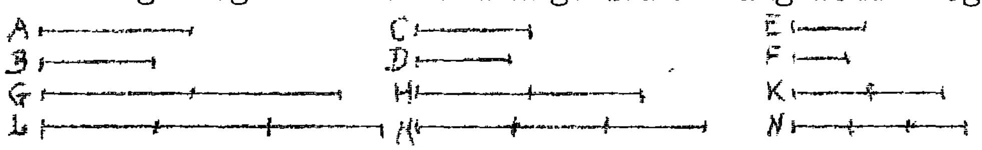
11.

Forhold, der ere lig med samme Forhold, ere indbyrdes ligestore.

Lad nemlig A/B være lig C/D og C/D være lig E/F. Jeg siger da: A/B = E/F.

Lad der nemlig være taget samme Mangefold G, H og K af A, C og E og andre vilkaarlige samme Mangefold L, M og N af B, D og F.

Da nu A/B er lig C/D, og der er taget samme Mangefold G og H af A og C og andre vilkaarlige samme Mangefold L og M af



B og D, saa hvis G er $\gtreqless$ L, er ogsaa H $\gtreqless$ M. Da endvidere C/D er lig E/F, og der er taget samme Mangefold H og K af C og E og andre vilkaarlige samme Mangefold M og N af D og F, saa hvis H er $\gtreqless$ M, er ogsaa K $\gtreqless$ N. Men hvis H er $\gtreqless$ M, er ogsaa G $\gtreqless$ L. Følgelig hvis G er $\gtreqless$ L, er ogsaa K $\gtreqless$ N. Men G og K ere samme Mangefold af A og E, og L og N andre vilkaarlige samme Mangefold af B og F. Altsaa er A/B = E/F.

Altsaa: Forhold, der ere lig med samme Forhold, ere indbyrdes ligestore; h. s. b.

Øvelser til kap.I, § 2.

1. Vis, at relationen "større" mellem forhold, som defineret af Euklid (Elementer, bog V, definition 7), er transitiv.

2. Sætning 25 i Euklids Elementers bog V lyder således: Naar fire Størrelser ere proportionale, saa er Summen af den største og mindste større end Summen af de to andre. (Hvis A er den største og D den mindste af størrelserne A,B,C,D, kan man af A:B = C:D slutte, at A+D > B+C.) Bevis dette. (Euklid benytter sætning 19: Naar en hel Størrelse forholder sig til en anden hel Størrelse som et Stykke af den første til et Stykke af den anden, saa vil Resten af den første forholde sig til Resten af den anden som hele den første til hele den anden.)

3. Den første sætning i Euklids Elementers bog X lyder således: Naar der er afsat to uligestore Størrelser, og der fra den største trækkes en, der er større end (eller lig med) Halvdelen, og fra Resten en, der er større end (eller lig med) Halvdelen, og man bliver ved med det, vil der blive en eller anden Størrelse til Rest, som vil være mindre end den afsatte mindste Størrelse. (Meningen er, at der skal foretages endelig, men tilstrækkelig mange subtrationer af den beskrevne art.)
Euklids bevis for denne sætning er baseret på forudsætninger om størrelser, nemlig de i bog I under "Almindelige Begreber" 1-5 nævnte samt et par andre. Gennemfør et sådant bevis og formuler de forudsætninger, der er lagt til grund.

Bevis ved hjælp af den nævnte sætning, at siden og diagonalen i et kvadrat er inkommensurable. (Konstruer ud fra et givet kvadrat et andet, hvis side er differensen mellem det førstes diagonal og side.)

Bevis, at siden i en regulær tikant og radius i dennes omskrevne cirkel er inkommensurable.

§ 3. D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie.

Uddrag af 7. udgave (1930).

So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.

Kant, Kritik der reinen Vernunft, Elementarlehre T.2.Abt.2.

Einleitung.

Die Geometrie bedarf - ebenso wie die Arithmetik - zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze. Diese Grundsätze heissen Axiome der Geometrie. Die Aufstellung der Axiome der Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges ist eine Aufgabe, die seit Euklid in zahlreichen vortrefflichen Abhandlungen der mathematischen Literatur sich erörtert findet. Die bezeichnete Aufgabe läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus.

Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein vollständiges und möglichst einfaches System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, dass dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen klar zutage tritt.

Erstes Kapitel.

Die fünf Axiomgruppen.

§ 1. Die Elemente der Geometrie und die fünf Axiomgruppen.

Erklärung. Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit A, B, C,...; die Dinge des zweiten Systems nennen wir Geraden und bezeichen sie mit a, b, c,...; die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; die Punkte heissen auch die Elemente der linearen Geometrie, die Punkte und Geraden heissen die Elemente der ebenen Geometrie, und die Punkte, Geraden und Ebenen heissen die Elemente der räumlichen Geometrie oder des Raumes.

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen die Beziehungen durch Worte wie "liegen", "zwischen", "kongruent", "parallel", "stetig"; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie.

Die Axiome der Geometrie können wir in fünf Gruppen teilen; jede einzelne dieser Gruppen drückt gewisse zusammengehörige Grundtatsachen unserer Anschauung aus. Wir benennen diese Gruppen von Axiomen in folgender Weise:

I	1-8.	Axiome der Verknüpfung,
II	1-4.	Axiome der Anordnung,
III	1-5.	Axiome der Kongruenz,
IV		Axiom der Parallelen,
V	1-2.	Axiome der Stetigkeit.

§ 2. Die Axiomgruppe I: Axiome der Verknüpfung.

Die Axiome dieser Gruppe stellen zwischen den oben eingeführten Dingen: Punkte, Geraden und Ebenen eine Verknüpfung her und lauten wie folgt:

I 1. Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.

I 2. Zu zwei Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.

Hier im Folgenden sind unter zwei, drei,... Punkten bzw. Geraden, Ebenen stets verschiedene Punkte, bzw. Geraden, Ebenen zu verstehen.

Statt "zusammengehören" werden wir auch andere Wendungen gebrauchen, z.B. a geht durch A und durch B, a verbindet A und oder mit B, A liegt auf a, A ist ein Punkt von a, es gibt den Punkt A auf a usw. Wenn A auf der Geraden a und ausserdem auf einer anderen Geraden b liegt, so gebrauchen wir auch die Wendungen: die Geraden a und b schneiden sich in A, haben den Punkt A gemein; usw.

I 3. Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

I 4. Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es stets eine Ebene α, die mit jedem der drei Punkte A, B, C zusammengehört. Zu jeder Ebene gibt es stets einen mit ihr zusammengehörigen Punkt.

Wir gebrauchen auch die Wendungen: A liegt in α; A ist Punkt von α; usw.

I 5. Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es nicht mehr als eine Ebene, die mit jedem der drei Punkte A, B, C zusammengehört.

I 6. <u>Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α</u>.

In diesem Falle sagen wir: die Gerade a liegt in der Ebene α ; usw.

I 7. <u>Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein</u>.

I 8. <u>Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte</u>.

Axiom I 7 bringt zum Ausdruck, dass der Raum nicht mehr als drei Dimensionen enthält, Axiom I 8 hingegen, dass der Raum nicht weniger als drei Dimensionen enthält,

Die Axiome I 1-3 mögen die <u>ebenen Axiome der Gruppe</u> I heissen zum Unterschied von den Axiomen I 4-8, die ich als die <u>räumlichen Axiome der Gruppe</u> I bezeichne.

Von den Sätzen, die aus den Axiomen I 1-8 folgen, erwähnen wir nur diese beiden:

Satz I. Zwei Geraden einer Ebene haben einen oder keinen Punkt gemein; zwei Ebenen haben keinen Punkt oder eine Gerade und sonst keinen Punkt gemein; eine Ebene und eine nicht in ihr liegende Gerade haben keinen oder einen Punkt gemein.

Satz 2. Durch eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt sowie auch durch zwei verschiedene Geraden mit einem gemeinsamen Punkt gibt es stets eine und nur eine Ebene.

<u>§ 3. Die Axiomgruppe II: Axiome der Anordnung.</u>[1)]

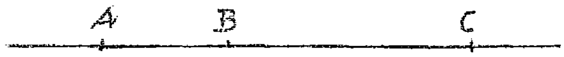
Die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff "zwischen" und

1) Diese Axiome hat zuerst M. Pasch in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, ausführlich untersucht. Insbesondere rührt das Axiom II_4 inhaltlich von M. Pasch her.

ermöglichen auf Grund dieses Begriffes die Anordnung der Punkte auf einer Geraden, in einer Ebene und im Raume.

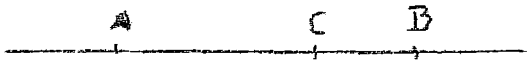
Erklärung. Die Punkte einer Geraden stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort "zwischen" dient.

II 1. Wenn ein Punkt B zwischen einem Punkt A und einem



Punkt C liegt, so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt dann auch zwischen C und A.

II 2. Zu zwei Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B auf der Geraden AC, so dass C zwischen A und B liegt.

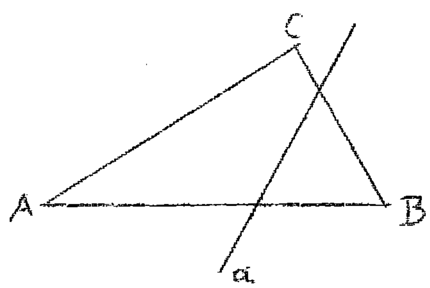


II 3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

Ausser diesen linearen Axiomen der Anordnung brauchen wir noch ein ebenes Anordnungsaxiom.

Erklärung. Wir betrachten auf einer Geraden a zwei Punkte A und B; wir nennen das System der beiden Punkte A und B eine Strecke und bezeichnen dieselbe mit AB oder mit BA. Die Punkte Zwischen A und B heissen Punkte der Strecke AB oder auch innerhalb der Strecke AB gelegen; die Punkte A, B heissen Endpunkte der Strecke AB. Alle übrigen Punkte der Geraden a heissen ausserhalb der Strecke AB gelegen.

II 4. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiss auch entweder durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC.



Anschaulich ausgedrückt: wenn eine Gerade ins Innere eines Dreiecks eintritt, tritt sie auch wieder heraus. Dass nicht beide Strecken AC und BC von der Geraden a geschnitten werden können, ist dann beweisbar.

---

§ 5. Die Axiomgruppe III: Axiome der Kongruenz.

Die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff der Kongruenz und damit auch den der Bewegung.

Erklärung. Die Strecken stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns die Worte "kongruent" oder "gleich" dienen.

III 1. Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen Punkt B' finden, so dass die Strecke AB der Strecke A'B' kongruent oder gleich ist, in Zeichen:

$$AB \equiv A'B'.$$

Dieses Axiom fordert die Möglichkeit der Streckenabtragung. Ihre Eindeutigkeit wird später bewiesen.

Die Strecke war als System zweier Punkte A, B schlechthin definiert, sie wurde mit AB oder BA bezeichnet. Die Reihenfolge der beiden Punkte wurde also in der Definition nicht berücksichtigt; daher sind die Formeln

$$AB \equiv A'B', \qquad AB \equiv B'A'$$

$$BA \equiv A'B', \qquad BA \equiv B'A'$$

gleichbedeutend.

III 2. Wenn eine Strecke A'B' und eine Strecke A"B" derselben Strecke AB kongruent sind, so ist auch die Strecke A'B' der Strecke A"B" kongruent; oder kurz: wenn zwei Strecken einer dritten kongruent sind, so sind sie untereinander kongruent.

Da die Kongruenz oder Gleichheit erst durch diese Axiome in die Geometrie eingeführt wird, so ist es zunächst durchaus nicht selbstverständlich, dass jede Strecke sich selbst kongruent ist; diese Tatsache folgt aber aus den beiden ersten Kongruenzaxiomen, wenn wir die Strecke AB auf irgendeinem Halbstrahl abtragen, etwa kongruent A'B', und dann auf die Kongruenzen $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A'B'$ das Axiom III 2 anwenden.

Auf Grund hiervon ergibt sich weiter durch Anwendung des Axioms III 2 die Symmetrie und die Transitivität der Streckenkongruenz, d.h. die Gültigkeit der Sätze:

Wenn $AB \equiv A'B'$

so ist auch $A'B' \equiv AB$;

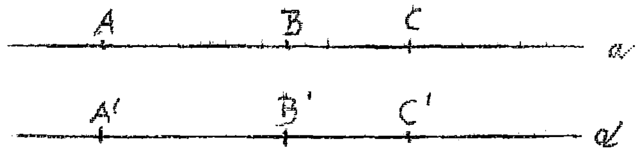
wenn $AB \equiv A'B'$

und $A'B' \equiv A''B''$,

so ist auch $AB \equiv A''B''$.

Zufolge der Symmetrie der Streckenkongruenz können wir die Redeweise gebrauchen: zwei Strecken sind "untereinander kongruent".

III 3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner A'B' und B'C' zwei Strecken



auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann

$$AB \equiv A'B' \quad \text{und} \quad BC \equiv B'C'$$

ist, so ist auch stets

$$AC \equiv A'B'.$$

Dieses Axiom bringt die Forderung der Addierbarkeit der Strecken zum Ausdruck.

Genau so wie das Abtragen von Strecken wird das Abtragen von Winkeln behandelt. Ausser der Möglichkeit des Abtragens von Winkeln muss allerdings noch die Eindeutigkeit axiomatisch gefordert werden; dagegen werden Transitivität und Addierbarkeit beweisbar sein.

Erklärung. Es sei α eine beliebige Ebene, und h,k seien irgend zwei Verschiedene von einem Punkte O ausgehende Halbstrahlen in α , die verschiedenen Geraden angehören. Das System dieser beiden Halbstrahlen h,k nennen wir einen Winkel und bezeichnen denselben mit $\sphericalangle(h,k)$ oder mit $\sphericalangle(k,h)$.

Die Halbstrahlen h,k heissen Schenkel des Winkels, und der Punkt O heisst der Scheitel des Winkels.

Gestreckte und überstumpfe Winkel sind nach dieser Definition ausgeschlossen.

Der Halbstrahl h möge zur Geraden $\bar{h}$, der Halbstrahl k zur Geraden $\bar{k}$ gehören. Die Halbstrahlen h und k, zusammengenommen mit dem Punkte O, teilen die übrigen Punkte in zwei Gebiete ein: alle Punkte, die mit h auf der gleichen Seite von $\bar{k}$ und mit k auf der gleichen Seite von $\bar{h}$ liegen, heissen im Innern des Winkels $\sphericalangle(h,k)$ gelegen, alle andern Punkte heissen im Äussern oder ausserhalb dieses Winkels gelegen.

Man erkennt leicht auf Grund der Axiome I und II, dass beide Gebiete Punkte enthalten, und dass eine Strecke, die zwei Punkte im Innern des Winkels verbindet, stets ganz im Innern verläuft. Ebenso leicht sind die folgenden Tatsachen beweisbar: liegt ein Punkt H auf h und ein Punkt K auf k, so verläuft die Strecke HK ganz im Innern. Ein von O ausgehender Halbstrahl verläuft entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des Winkels; ein im Innern verlaufender Halbstrahl trifft die Strecke HK. Ist A ein Punkt des einen und B ein Punkt des anderen Gebietes, so geht jeder Streckenzug, der A und B verbindet, entweder durch O oder hat mit h oder k wenigstens einen Punkt gemein; sind dagegen A, A' Punkte desselben Gebietes, so gibt es stets einen Streckenzug, der A mit A' verbindet und weder durch O noch durch einen Punkt der Halbstrahlen h,k hindurchläuft.

Erklärung. Die Winkel stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Bezeichnung uns ebenfalls die Worte "kongruent" oder "gleich" dienen.

III 4. Es sei ein Winkel $\sphericalangle(h,k)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α' sowie eine bestimmte Seite von a' in α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der vom Punkte O' ausgeht: dann gibt es in der Ebene α' einen und nur einen Halbstrahl k', so dass der Winkel $\sphericalangle(h,k)$ kongruent oder gleich dem Winkel $\sphericalangle(h',k')$ ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkel $\sphericalangle(h',k')$ auf der gegebenen Seite von a' liegen, in Zeichen:

$$\sphericalangle(h,k) \equiv \sphericalangle(h',k').$$

Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d.h. es ist stets

$$\sphericalangle(h,k) \equiv \sphericalangle(h,k).$$

Wir sagen auch kurz: ein jeder Winkel kann in einer gegebenen Ebene nach einer gegebenen Seite an einen gegebenen Halbstrahl auf eine eindeutig bestimmte Weise angetragen werden.

So wenig wir bei den Strecken die Richtung berücksichtigen, so wenig berücksichtigen wir bei der Definition der Winkel den Drehsinn. Daher bedeuten auch die Bezeichnungen

$$\sphericalangle(h,k) \equiv \sphericalangle(h',k'), \qquad \sphericalangle(h,k) \equiv \sphericalangle(k',h'),$$
$$\sphericalangle(k,h) \equiv \sphericalangle(h',k'), \qquad \sphericalangle(k,h) \equiv \sphericalangle(k',h')$$

dasselbe.

Erklärung. Ein Winkel mit dem Scheitel B, auf dessen beiden Schenkeln je ein Punkt A und C liegt, wird auch als $\sphericalangle ABC$ oder kurz als $\sphericalangle B$ bezeichnet. Winkel werden auch mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet.

III 5. Wenn für zwei Breiecke ABC und A'B'C' die Kongruenzen

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, so ist auch stets die Kongruenz

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \text{ erfüllt.}$$

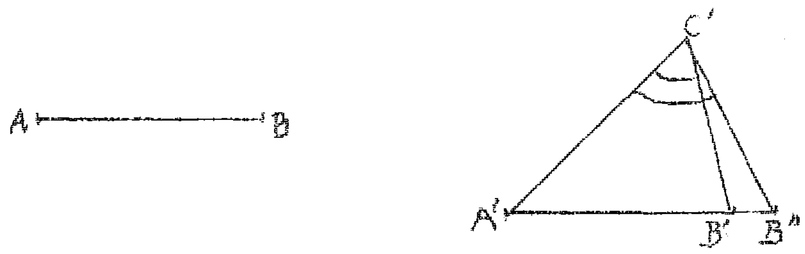
Der Begriff des Dreiecks ist auf S. 9 erklärt. Durch Bezeichnungswechsel ergibt sich, dass unter den Voraussetzungen des Axioms stets die beiden Kongruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$$

erfüllt sind.

Die Axiome III 1-3 enthalten nur Aussagen über die Kongruenz von Strecken; sie mögen daher die linearen Axiome der Gruppe III heissen. Das Axiom III 4 enthält Aussagen über die Kongruenz von Winkeln. Das Axiom III 5 knüpft das Band zwischen den Begriffen der Kongruenz von Strecken und von Winkeln. Die Axiome III 4 und III 5 enthalten Aussagen über die Elemente der ebenen Geometrie und mögen daher die <u>ebenen</u> Axiome der Gruppe III heissen.

Die Eindeutigkeit der Streckenabtragung folgt aus der Eindeutigkeit der Winkelabtragung mit Hilfe des Axioms III 5.



Angenommen, die Strecke AB sei auf einen von A' ausgehenden Halbstrahl auf zwei Weisen, bis B' und B" abgetragen. Dann wählen wir einen Punkt C' ausserhalb der Geraden A'B' und erhalten die Kongruenzen

$$A'B' \equiv A'B'', \quad A'C' \equiv A'C', \quad \sphericalangle B'A'C' \equiv \sphericalangle B''A'C',$$

also nach Axiom III 5

$$\sphericalangle A'C'B' \equiv \sphericalangle A'C'B'',$$

im Widerspruch zu der in Axiom III 4 geforderten Eindeutigkeit der Winkelantragung.

<u>§ 7. Die Axiomgruppe IV: Axiom der Parallelen.</u>

Es sei α eine beliebige Ebene, a eine beliebige Gerade in α und A ein Punkt in α, der ausserhalb a liegt. Ziehen wir dann in α eine Gerade c, die durch A geht und a schneidet, und sodann in α eine Gerade b durch A, so dass die Gerade c die Geraden a, b unter gleichen Gegenwinkeln schneidet, so folgt leicht aus dem Satze vom Aussenwinkel, Satz 22, dass die Geraden a,b keinen Punkt miteinander gemein haben, d.h. in einer Ebene α lässt sich durch einen Punkt A ausserhalb einer Geraden a stets eine Gerade ziehen, welche jene Gerade a nicht schneidet.

Das Parallelenaxiom lautet nun:

IV (Euklidisches Axiom). *Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt ausserhalb a: dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch A läuft und a nicht schneidet*.

Erklärung. Nach dem Vorhergehenden und auf Grund des Parallelenaxioms erkennen wir, dass es in der durch a und A bestimmten Ebene eine und nur eine Gerade gibt, die durch A läuft und a nicht schneidet; wir nennen dieselbe *die Parallele zu a durch A.*

Das Parallelenaxiom IV ist gleichbedeutend mit der folgenden Forderung:

Wenn zwei Geraden a,b in einer Ebene eine dritte Gerade c derselben Ebene nicht treffen, so treffen sie auch einander nicht. In der Tat, hätten a,b einen Punkt A gemein, so würden durch A in derselben Ebene die beiden Geraden a,b möglich sein, die c nicht treffen; dieser Umstand widerspräche dem Parallelenaxiom IV. Ebenso leicht folgt umgekehrt das Parallelenaxiom IV aus der genannten Forderung.

Das Parallelenaxiom IV ist ein *ebenes Axiom*.

Die Einführung des Parallelenaxioms vereinfacht die Grundlagen und erleichtert den Aufbau der Geometrie in erheblichem Masse.

Nehmen wir nämlich zu den Kongruenzaxiomen das Parallelenaxiom hinzu, so gelangen wir leicht zu den bekannten Tatsachen:

Satz 30. Wenn zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden, so sind die Gegenwinkel und Wechselwinkel kongruent, und umgekehrt: die Kongruenz der Gegen- oder Wechselwinkel hat zur Folge, dass die Geraden parallel sind.

Satz 31. Die Winkel eines Dreiecks machen zusammen zwei

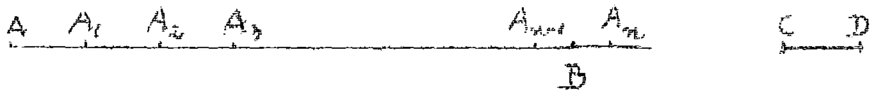
Rechte aus.

Erklärung. Wenn M ein beliebiger Punkt in einer Ebene α ist, so heisst eine Gesamtheit von allen solchen Punkten A in α für welche die Strecken MA einander kongruent sind, ein Kreis; M heisst der Mittelpunkt des Kreises.

Auf Grund diser Erklärung folgen mit Hilfe der Axiomgruppen III-IV leicht die bekannten Sätze über den Kreis, insbesondere die Möglichkeit der Konstruktion eines Kreises durch irgend drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte, sowie der Satz über die Kongruenz aller Peripheriewinkel über der nämlichen Sehne und der Satz von den Winkeln im Kreisviereck.

§ 8. Die Axiomgruppe V: Axiome der Stetigkeit.

V 1 (Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom). Sind AB und CD irgenwelche Strecken, so gibt es auf der Geraden AB eine Anzahl von Punkten $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, so dass die Strecken AA_1, $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ der Strecke CD kongruent sind und B zwischen A und A_n liegt.



V 2 (Axiom der linearen Vollständigkeit). Die Punkte einer Geraden bilden ein System, welches bei Aufrechterhaltung der linearen Anordnung (Satz 6), des ersten Kongruenzaksioms und des Archimedischen Axioms (d.h. der Axiome I 1-2, II, III 1, V 1) keiner Erweiterung mehr fähig ist, d.h. es ist nicht möglich, zu diesem System von Punkten Punkte auf a hinzuzufügen, so dass in dem durch Zusammensetzung entstehenden System sämtliche aufgeführten Axiome erfüllt sind.

Die Aufrechterhaltung sämtlicher Axiome, von der in diesem Axiom die Rede ist, hat man so zu verstehen, dass nach der Erweiterung sämtliche Axiome in der früheren Weise gültig bleiben sollen, d. h. die vorhandenen Beziehungen der Punkte, nämlich die vorhandene Anordnung und die vorhandene Kongruenz der Strecken soll nirgends gestört werden; z.B. soll ein Punkt A, der vor der Erweiterung zwischen zwei Punkten B und C liegt, dies auch nach der Erweiterung tun, und Strecken, die vorher einander kongruent sind, sollen dies auch nach der Erweiterung bleiben.

Die Erfüllbarkeit des Vollständigkeitsaxioms ist wesentlich dadurch bedingt, dass in ihm unter den Axiomen, deren Aufrechterhaltung gefordert wird, das Archimedische Axiom enthalten ist. In der Tat lässt sich zeigen: zu einem System von Punkten auf einer Geraden, welche die Axiome I 1-2, II und III 1 erfüllen, können stets noch Punkte hinzugefügt werden, derart, dass in dem durch Zusammensetzung entstehenden System die genannten Axiome ebenfalls gültig sind; d.h. ein Vollständigkeitsaxiom, in dem nur die Aufrechterhaltung der genannten Axiome, nicht aber auch die des Archimedischen oder eines entsprechenden Axioms gefordert wäre, würde einen Widerspruch einschliessen.

Die beiden Stetigkeitsaxiome sind <u>lineare</u> Axiome.

Wesentlich aus dem linearen Vollständigkeitsaxiom ergibt sich die folgende allgemeinere Tatsache:

Satz 32 (Satz der Vollständigkeit)[1]. Die Elemente (d.h. die Punkte, Geraden und Ebenen) der Geometrie bilden ein System, das bei Aufrechterhaltung der Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome, des ersten Kongruenzaxioms und des Archimedischen Axioms keiner

---

1) Dieser Satz war in den früheren Auflagen als Axiom aufgestellt. Die Bemerkung, dass das lineare Vollständigkeitsaxiom genügt, rührt von P. Bernays her.

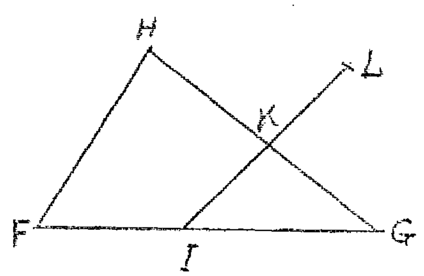
Erweiterung durch Punkte, Geraden, Ebenen mehr fähig ist; sie bilden also erst recht ein System, das bei Aufrechterhaltung sämtlicher Axiome keiner solchen Erweiterung mehr fähig ist.

Die Ausdrücke Erweiterung und Aufrechterhaltung sind dabei genau so zu verstehen wie in Axiom V 2.

Beweis. Die Elemente, die vor der Erweiterung existieren, seien als alte Elemente bezeichnet, diejenigen, die durch die Erweiterung hinzukommen, als neue Elemente. Die Annahme neuer Elemente führt unmittelbar auf die Annahme eines neuen Punktes N.

Nach Axiom I 8 gibt es vier alte, nicht in einer Ebene gelegene Punkte A, B, C, D. Die Bezeichnungen können so gewählt werden, dass A, B, N nicht in einer Geraden liegen. Die beiden voneinander verschiedenen Ebenen ABN und ACD haben nach Axiom I 7 ausser A noch einen Punkt E gemein. E liegt nicht auf der Geraden AB, denn sonst würde B in der Ebene ACD liegen. Falls E ein neuer Punkt ist, so liegt in der alten Ebene ACD ein neuer Punkt E; falls hingegen E ein alter Punkt ist, so liegt der neue Punkt N in einer alten Ebene, nämlich in der Ebene ABE. Jedenfalls also liegt ein neuer Punkt in einer alten Ebene.

In einer alten Ebene gibt es ein altes Dreieck FGH und auf der Strecke FG einen alten Punkt I. Verbinden wir einen neuen Punkt L mit I, so treffen sich nach dem Axiom II 4 die Geraden IL und FH oder die Geraden IL und GH in einem Punkte K, wenn



nicht der neue Punkt L auf der Geraden IH liegt. Falls K neu ist, so liegt ein neuer Punkt K auf einer alten Geraden FH bzw. GH; falls hingegen K alt ist, so liegt ein neuer Punkt L auf einer alten Geraden IK. Alle drei Annahmen stehen daher im Widerspruch zum Axiom der linearen Vollständigkeit. Die Annahme eines neuen Punktes in einer alten Ebene ist also zu verwerfen und damit überhaupt die Annahme neuer Elemente.

Der Vollständigkeitssatz lässt sich noch schärfer fassen; die Aufrechterhaltung einiger der in ihm genannten Axiome braucht nicht unbedingt gefordert zu werden. Wesentlich für seine Erfüllbarkeit ist aber z.B., dass in ihm unter den Axiomen, deren Aufrechterhaltung gefordert wird, das Axiom I 7 enthalten ist. In der Tat lässt sich zeigen: zu einem System von Elementen, welche die Axiome I-V erfüllen, können stets noch Punkte, Geraden und Ebenen hinzugefügt werden, so dass in dem durch Zusammensetzung entstehenden System die gleichen Axiome mit Ausnahme des Axioms I 7 gültig sind; d.h. ein Vollständigkeitssatz, in dem das Axiom I 7 oder ein ihm gleichwertiges Axiom nicht enthalten wäre, würde einen Widerspruch einschliessen.

Das Vollständigkeitsaxiom ist nicht eine Folge des Archimedischen Axioms. In der Tat reicht das Archimedische Axiom allein nicht aus, um mit Benutzung der Axiome I-IV unsere Geometrie als identisch mit der gewöhnlichen analytischen "Cartesischen" Geometrie nachzuweisen (vgl. § 9 und § 12). Dagegen gelingt es unter Hinzunahme des Vollständigkeitsaxioms - obwohl dieses Axiom unmittelbar keine Aussage über den Begriff der Konvergenz enthält - , die Existenz der einem Dedekindschen Schnitte entsprechenden Grenze und den Bolzanoschen Satz vom Vorhandensein der Verdichtungsstellen nachzuweisen, womit dann unsere Geometrie sich als identisch mit der Cartesischen Geometrie erweist.

Durch die vorstehende Betrachtungsweise ist die Forderung der Stetigkeit in zwei wesentlich verschiedene Bestandteile zerlegt worden, nämlich in das Archimedische Axiom, dem die Rolle zukommt, die Forderung der Stetigkeit vorzubereiten und in das Vollständigkeitsaxiom, das den Schlussstein des ganzen Axiomensystems bildet.

In den nachfolgendende Untersuchungen stützen wir uns wesentlich nur auf das Archimedische Axiom und setzen im allgemeinen das Vollständigkeitsaxiom nicht voraus.

Øvelser til kap.I,§ 3.

1. En mængde bestående af 4 elementer A_1, A_2, A_3, A_4 betragtes som mængden af "punkter". Ved "linierne" forstås delmængderne bestående af 2 elementer. At et "punkt" A_i "ligger på" en "linie" $\{A_j, A_k\}$ skal betyde, at A_i <u>ikke</u> tilhører $\{A_j, A_k\}$. Det fastsættes endvidere, at alle punkter "ligger i" een "plan". Undersøg, hvilke blandt Hilberts plane aksiomer I 1-3 og IV da er opfyldt.

2. Der betragtes et vektorrum (V,+,L) over et kommutativt legeme L. Ved et "punkt", en "linie", en "plan" forstås henholdsvis et en-, to-, tredimensionalt underrum af V. Ved relationen "ligger på" forstås inklusionsrelationen $\subseteq$. Undersøg, hvilke blandt Hilberts aksiomer I 1-8 og IV, der er opfyldt, når vektorrummets dimension er 3, 4 eller større end 4.
   Vis, at man kommer til samme resultat, når man ved "punkter", "linier", "planer" og relationen "ligger på" forstås henholdsvi tre-, to-, endimensionale underrum og inklusionen $\supseteq$.

3. Bevis på grundlag af Hilberts aksiomer I 1-3 og II 1-4 følgende supplement til aksiom II,3: Blandt tre forskellige punkter på en linie findes altid et, som ligger mellem de to andre. (Gentagen anvendelse af II 4 er nødvendig.)
   Bevis følgende supplement til aksiom II 4: Lad A,B,C være tre punkter, som ikke ligger på samme linie, og a en linie i planen ABC, som ikke går gennem noget af punkterne A,B,C. Hvis linien a da går gennem et punkt på liniestykket AB og gennem et punkt på liniestykket BC, vil den ikke gå gennem noget punkt på liniestykket AC.

4. I dette eksempel lægges den sædvanlige geometri til grund. Med K betegnes det indre af en kugle. Ved et "punkt" forstås et punkt i K, ved en "linie" en linie, der skærer K, og ved en "plan" en plan, der skærer K. Relationerne "ligger på" og "mellem" tillægges den sædvanlige betydning. Vis, at Hilberts aksiomgrupper I og II er opfyldt, og at IV ikke er opfyldt.

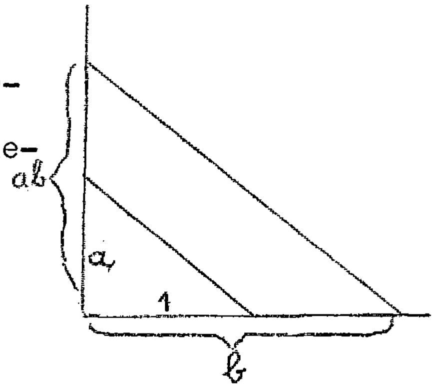
Undersøg, om det samme gælder, hvis man ved et "punkt" forstår et punkt tilhørende kuglens afslutning $\bar{K}$, medens de øvrige definitioner bibeholdes.

5. I en sædvanlig plan tænkes valgt et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Ved et "punkt" forstås et punkt med heltallige koordinater og ved en "linie" en linie, som indeholder mindst to "punkter". Relationerne "ligger på", "mellem" og "kongruent" tillægges den sædvanlige betydning. Vis, at aksiomerne I 1-3, II 1-3, III 2-3, III 5, V 1 samt negationerne af aksiomerne II 4, III 1 og IV er gyldige. Undersøg, hvilke ændringer der sker heri, når man ved et "punkt" forstår et punkt med rationale koordinater. Vis endvidere, at III 4 ikke er opfyldt.

* Undersøg, hvilke blandt de nævnte aksiomer der vil være opfyldte, når man ved et "punkt" forstår et punkt, hvis koordinater er reelle algebraiske tal.

[Et komplekst tal siges at være algebraisk, hvis det er rod i et egentligt polynomium med heltallige koefficienter, d.v.s. hvis det er algebraisk over de rationale tals legeme. Mængden af algebraiske tal er numerabel. Benyt den (ikke oplagte) sætning, at mængden af reelle algebraiske tal med sædvanlig addition og multiplikation som kompositionsforskrifter er et legeme, og at kvadratroden af et positivt algebraisk tal er et algebraisk tal.]

6. I Hilberts "Streckenrechnung" defineres, efter valg af et liniestykke 1, produktet ab af to liniestykker a og b ved den på figuren angivne konstruktion. Denne kompositionsforskrift er kommutativ og associativ. Bevis dette med benyttelse af



<u>Pappos' sætning</u>: Lad a og a' være to linier, som skærer hinanden i et punkt P, og lad A,B,C være fra P forskellige punkter på a og A',B',C' fra P forskellige punkter på a'. Hvis da linierne BC' og CB' er parallelle, og linierne CA' og C'A er parallelle, så vil også linierne AB' og A'B være parallelle.

* Bevis denne sætning med benyttelse af velkendte elementargeometriske sætninger.

7. Bevis følgende på grundlag af Hilberts aksiomer I 1-3 og II 1-4: Hvis a er en ret linie og O et punkt på a, defineres der ved $P \sim Q \iff O$ ikke mellem P og Q en ækvivalensrelation i mængden af punkter på a, forskellige fra O. Der er to ækvivalensklasser, og disse betegnes som de to halvlinier på a udfra O. Hvis P og Q er to punkter på en halvlinie vil ethvert punkt mellem P og Q ligge på halvlinien.
Er a en ret linie, defineres der ved $h \sim k \iff h \subsetneq k \vee k \subsetneq h$ en ækvivalensrelation i mængden af halvlinierne på a. Der er to ækvivalensklasser, og for ethvert punkt P på a gælder, at de to halvlinier på a udfra P ligger i hver sin klasse. Enhver af klasserne er totalt ordnet ved inklusionen.
Vis herved, at punkterne på en ret linie a kan ordnes ved en relation $-\!<$, således at der for $A,B,C \in A$ gælder:
A mellem B og $C \iff B -\!< A -\!< C \vee C -\!< A -\!< B$.

Kap. II. Talsystemets opbygning.

§ 1. De naturlige tal.

Mængden af de naturlige tal kan efter R. Dedekind (Was sind und was sollen die Zahlen?, 1887) og G. Peano (Arithmetices principia nova methodo exposita, 1889) karakteriseres ved nogle få egenskaber. De grundbegreber, ved hjælp af hvilke disse egenskaber formuleres, er "mængde", "element af en mængde", "delmængde af en mængde" og "afbildning". Idet en afbildning er en speciel relation og en sådan defineres ved hjælp af begreberne "mængdeprodukt" og "delmængde", kan man i listen af grundbegreber erstatte "afbildning" med "mængdeprodukt". Dedekinds og Peanos aksiomer for de naturlige tal gengiver i eksakt formulering disses mest primitive egenskaber som ordenstal, nemlig at der efter hvert naturligt tal følger et bestemt andet, og at man kan komme til hvert naturligt tal ved at begynde med tallet 1, tage det derpå følgende, dernæst det på dette følgende o.s.v. Med de i disse noter brugte logiske tegn kan Peanos aksiomer i det væsentlige gengives således:

Forklaringer.

N betegner mængden af naturlige tal.

1 betegner enheden.

a+1 betegner efterfølgeren af a eller a plus 1.

= betegner lighed.

Aksiomer.

1. $1 \in N$.
2. $\forall a \in N : a = a$.
3. $\forall a,b \in N : a = b \iff b = a$.
4. $\forall a,b,c \in N : (a = b \wedge b = c) \Rightarrow a = c$.
5. $\forall b \in N : a = b \Rightarrow a \in N$.

6. $\forall a \in N : a+1 \in N$.

7. $\forall a,b \in N : a = b \iff a+1 = b+1$.

8. $\forall a \in N : a+1 \neq 1$.

9. Hvis k betegner en mængde:

$$\{1 \in k \wedge \forall x\, [x \in N \wedge x \in k \Rightarrow x+1 \in k]\} \Rightarrow N \subseteq k.$$

"Forklaringerne" må ikke opfattes som definitioner. De tjener udelukkende til at fremkalde de rette associationer. De pågældende begreber "defineres implicit" ved, at de skal opfylde de i aksiomerne formulerede krav. Aksiomerne 2-5 fastlægger brugen af lighedstegnet. Med benyttelse af afbildningsbegrebet kan de resterende fem aksiomer erstattes af de nedenfor formulerede, som er ensbetydende med Dedekinds aksiomer, og som vil danne grundlaget for det følgende.

Om et par bestående af en ikke tom mængde N og en afbildning $\varepsilon : N \to N$ forudsættes:

I. Der findes et element $1 \in N$, således at $1 \notin \varepsilon(N)$.

II. Afbildningen ε er injektiv (enentydig).

III. Hvis det for en mængde $M \subseteq N$ gælder, at $1 \in M$ og $\varepsilon(M) \subseteq M$, så er $M = N$.

Billedelementet $\varepsilon(x)$ af et element $x \in N$ kaldes efterfølgeren af x og betegnes også med x'.

Det skal vises, at hvis disse krav er opfyldt, kan der i N defineres en kompositionsforskrift +, som har additionens velkendte egenskaber, og således at $\varepsilon(x) = x+1$. Det vil endvidere blive vist, at to par (N,ε) og (N^*,ε^*), som begge opfylder I-III, er isomorfe i den forstand, at der findes en enentydig korrespondance mellem N og N^*, således at $x \longleftrightarrow x^*$, $x \in N$, $x^* \in N^*$ medfører, at $\varepsilon(x) \longleftrightarrow \varepsilon^*(x^*)$. Spørgsmålet om eksistensen af et sådant par og det dermed sammenhængende om aksiomsystemets modsigelsesfrihed, kan ikke diskuteres på det valgte grundlag.

Man må nøjes med at konstatere, at man jo tilskriver mængden af naturlige tal de i aksiomerne udtrykte egenskaber.

Sætning 1. $\varepsilon(N) = N \setminus \{1\}$.

Bevis: Sæt $M = \varepsilon(N) \cup \{1\} \subseteq N$. Da gælder $1 \in M$, og hvis $x \in M$, så $\varepsilon(x) \in \varepsilon(N) \subseteq M$, altså $\varepsilon(M) \subseteq M$. Af III sluttes, at $M = N$, og heraf påstanden.

Sætning 2. $\forall x \in N : \varepsilon(x) \neq x$.

Bevis: Sæt $M = \{x \in N \mid \varepsilon(x) \neq x\}$. Da gælder $1 \in M$, idet $\varepsilon(1) \neq 1$ ifølge I. Hvis $x \in M$, altså $\varepsilon(x) \neq x$, fås af II, at $\varepsilon(\varepsilon(x)) \neq \varepsilon(x)$, altså $\varepsilon(x) \in M$. Dette viser, at $\varepsilon(M) \subseteq M$. Af III sluttes, at $M = N$.

Sætning 3. For hvert $a \in N$ eksisterer der en og kun een afbildning $\alpha_a : N \to N$, således at

(1) $$\alpha_a(1) = \varepsilon(a),$$

(2) $$\alpha_a \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \alpha_a.$$

For disse afbildninger gælder

(3) $$\alpha_1 = \varepsilon,$$

(4) $$\alpha_{\varepsilon(a)} = \varepsilon \circ \alpha_a.$$

Bevis: Antag, at afbildningerne α_a og α_a^* for et givet $a \in N$ opfylder (1) og (2). Sæt

$$M = \{x \in N \mid \alpha_a(x) = \alpha_a^*(x)\}.$$

Da gælder $1 \in M$; thi ifølge (1) er $\alpha_a(1) = \alpha_a^*(1) = \varepsilon(a)$. Hvis $x \in M$, altså $\alpha_a(x) = \alpha_a^*(x)$, fås ved hjælp af (2) anvendt på α_a og α_a^*, at

$$\alpha_a(\varepsilon(x)) = \varepsilon(\alpha_a(x)) = \varepsilon(\alpha_a^*(x)) = \alpha_a^*(\varepsilon(x)),$$

altså $\varepsilon(x) \in M$. Dette viser, at $\varepsilon(M) \subseteq M$. Af III sluttes, at $M = N$. Dermed er bevist, at der højst kan findes een afbildning af den forlangte art.

Lad L betegne mængden af de elementer $a \in N$, for hvilke der eksisterer en afbildning $\alpha_a : N \to N$, som tilfredsstiller (1) og (2). Da gælder $1 \in M$; thi for den ved $\alpha_1 = \varepsilon$ (altså (3)) definerede afbildning er (1) og (2) øjensynlig opfyldt. Hvis $a \in L$, hvis der altså findes en afbildning α_a, for hvilken (1) og (2) gælder, vil den ved

$$\alpha_{\varepsilon(a)} = \varepsilon \circ \alpha_a$$

(altså ved (4)) definerede afbildning ligeledes opfylde (1) og (2); thi

$$\alpha_{\varepsilon(a)}(1) = \varepsilon(\alpha_a(1)) = \varepsilon(\varepsilon(a)),$$

$$\alpha_{\varepsilon(a)} \circ \varepsilon = (\varepsilon \circ \alpha_a) \circ \varepsilon = \varepsilon \circ (\alpha_a \circ \varepsilon) = \varepsilon \circ (\varepsilon \circ \alpha_a) = \varepsilon \circ \alpha_{\varepsilon(a)}.$$

Dette viser, at $\varepsilon(L) \subseteqq L$. Af III sluttes, at $L = N$. Dermed er sætning 3 bevist, idet (3) og (4) gælder ifølge de opstillede definitioner.

<u>Definition</u>. I N defineres en kompositionsforskrift, betegnet som <u>addition</u>, ved

$$x+a = \alpha_a(x).$$

Man har da specielt ifølge (3)

(5) $\forall a \in N : \alpha_1(a) = \varepsilon(a) = a+1,$

og (1), (2) og (4) kan skrives

(6) $\forall a \in N : 1+a = a+1,$

(7) $\forall a,x \in N : (x+1)+a = (x+a)+1.$

(8) $\forall a,x \in N : x+(a+1) = (x+a)+1.$

<u>Sætning 4</u>. $\forall a,x \in N : x+a = a+x.$

Bevis: For et fast $a \in N$ sættes

$$M = \{x \in N \mid x+a = a+x\}.$$

Da gælder $1 \in M$ på grund af (6), og hvis $x \in M$, altså $x+a = a+x$, fås ved hjælp af (7) og (8)

$$(x+1)+a = (x+a)+1 = (a+x)+1 = a+(x+1),$$

altså $x+1 = \varepsilon(x) \in M$. Følgelig er $\varepsilon(M) \subseteqq M$, altså $M = N$ ifølge III.

<u>Sætning 5</u>. $\forall a,b,x \in N : x+(a+b) = (x+a)+b$.

Bevis: For faste $a,x \in N$ sættes

$$M = \{b \in N \mid x+(a+b) = (x+a)+b\}.$$

Da gælder $1 \in M$ ifølge (8). Hvis $b \in M$, fås ved hjælp af (8), (8), $b \in M$ og (8).

$$x+(a+(b+1)) = x+((a+b)+1) = (x+(a+b))+1$$
$$= ((x+a)+b)+1 = (x+a) + (b+1),$$

altså $b+1 = \varepsilon(b) \in M$. Dette viser, at $\varepsilon(M) \subseteq M$, hvoraf $M = N$ ifølge III.

<u>Sætning 6</u>. $\forall a,x,y \in N : x+a = y+a \Rightarrow x = y$.

For givne $a,b \in N$ har ligningen $x+a = b$ altså højst een løsning $x \in N$.

Bevis: Sæt

$$M = \{a \in N \mid \forall x,y \in N : x+a = y+a \Rightarrow x = y\}.$$

Da gælder $1 \in M$ ifølge (5) og II. Ved hjælp af sætning 5 sluttes af $x+(a+1) = y+(a+1)$, at $(x+a)+1 = (y+a)+1$, og heraf ved hjælp af II, at $x+a = y+a$. Hvis $a \in M$, kan heraf sluttes, at $x = y$, altså at da også $a+1 = \varepsilon(a) \in M$. Man har altså $\varepsilon(M) \subseteq M$ og derfor $M = N$ ifølge III.

<u>Sætning 7</u>. $\forall a,x \in N : x+a \neq x$.

Bevis: For et fast $a \in N$ sættes $M = \{x \in N \mid x+a \neq x\}$. Da gælder $1 \in M$ ifølge (5) og sætning 2. Hvis $x \in M$, fås ved hjælp af (7) og II, at

$$(x+1)+a = (x+a)+1 \neq x+1,$$

altså at $x+1 = \varepsilon(x) \in M$. Dette viser, at $\varepsilon(M) \subseteq M$, og dermed $M = N$ ifølge III.

<u>Sætning 8</u>. For givne $a,b \in N$, $a \neq b$, har en og kun een af ligningerne $x+a = b$ og $y+b = a$ en løsning henholdsvis $x \in N$ og $y \in N$.

Bevis: For fast $a \in N$ sættes

$$M = \{b \in N \mid a = b \ \vee (\exists x \in N : x+a = b) \vee (\exists y \in N : y+b = a)\}.$$

Da gælder $1 \in M$. Dette er klart, hvis $a = 1$, og hvis $a \neq 1$, findes der ifølge (5) og sætning 1 et $x \in N$, således at $x+1 = a$. Det antages nu, at $b \in M$. Der foreligger da tre muligheder:

1° $a = b$. Da er $1+a = a+1 = b+1$, og ligningen $x+a = b+1$ har løsningen $x = 1$, altså $b+1 \in M$.

2° $\exists x \in N : x+a = b$. Da er $(x+1)+a = (x+a)+1 = b+1$, hvilket viser, at $b+1 \in M$.

3° $\exists y \in N : y+b = a$. Er $y = 1$, altså $a = b+1$, fås $b+1 \in M$. Er $y = 1$, finde der ifølge sætning 1 et $z \in N$, således at $\varepsilon(z) = z+1 = y$. Man har da

$$(z+1)+b = z+(b+1) = a,$$

altså også i dette tilfælde $b+1 \in M$.

Dermed er vist, at $\varepsilon(M) \subseteq M$, hvoraf $M = N$ ifølge III. For $a \neq b$ har altså mindst een af de to ligninger en løsning.

At ikke såvel $x+a = b$ som $y+b = a$ kan have en løsning, følger af at

$$(y+x)+a = y+(x+a) = y+b = a$$

ville stride mod sætning 7.

Tilsvarende sætninger vedrørende multiplikation anføres uden bevis.

<u>Sætning 9</u>. For hvert $a \in N$ eksisterer der en og kun een afbildning $\mu_a : N \to N$, således at

(9) $$\mu_a(1) = a,$$

(10) $$\forall x \in N : \mu_a(x+1) = \mu_a(x) + a.$$

For disse afbildninger gælder

(11) $$\forall x \in N : \mu_1(x) = x,$$

(12) $$\forall x \in N : \mu_{a+1}(x) = \mu_a(x) + x.$$

<u>Definition</u>. I N defineres en kompositionsforskrift, betegnet som <u>multiplikation</u>, ved

$$xa = \mu_a(x).$$

Ligningerne (9)-(12) kan da skrives

$$1a = a \tag{13}$$

$$(x+1)a = xa+a, \tag{14}$$

$$x1 = x, \tag{15}$$

$$x(a+1) = xa+x. \tag{16}$$

<u>Sætning 10</u>. $\forall a,x,y \in N : (x+y)a = xa+ya$.

<u>Sætning 11</u>. $\forall a,x \in N : xa = ax$.

<u>Sætning 12</u>. $\forall a,b,x \in N : x(ab) = (xa)b$.

<u>Sætning 13</u>. $\forall a,x,y \in N : xa = ya \Rightarrow x = y$.

<u>Definition</u>. I N defineres en relation, betegnet med $<$, ved

$$a < b \iff \exists x \in N : x+a = b.$$

<u>Sætning 14</u>. <u>Relationen</u> $<$ <u>er en ikke-refleksiv, total ordningsrelation</u>.

Bevis: At $a \nless a$, følger af sætning 7. Af $a < b$ og $b < c$, altså af eksistensen af $x,y \in N$, således at $x+a = b$ og $y+b = c$, følger

$$(y+x)+a = y+(x+a) = y+b = c,$$

altså $a < c$. Sætning 8 viser, at der for $a \neq b$ enten gælder $a < b$ eller $b < a$.

Den til $<$ inverse relation $>$, som ligeledes er en ikke-refleksiv, total ordningsrelation, defineres ved

$$a > b \iff b < a,$$

og de tilhørende refleksive ordningsrelationer er bestemt ved

$$a \leqq b \iff (a < b \quad \vee \quad a = b) \iff a \ngtr b,$$

$$a \geqq b \iff (a > b \quad \vee \quad a = b) \iff a \nless b.$$

<u>Sætning 15</u>. $\forall\, a,b \in N : a < a+b$,

Bevis: $b+a = a+b$.

<u>Sætning 16</u>. $\forall\, a,b,c \in N : a < b \iff a+c < b+c$.

Bevis: $\Rightarrow$ Af $x+a = b$ følger

$$x+(a+c) = (x+a)+c = b+c.$$

$\Leftarrow$ Af $b \leqq a$ ville man ifølge det allerede viste kunne slutte, at $b+c \leqq a+c$, hvilket strider mod det givne.

<u>Sætning 17</u>. $\forall\, a,b,c \in N : a < b \iff ac < bc$.

Bevis: $\Rightarrow$ Af $x+a = b$ følger

$$xc + ac = (x+a)c = bc.$$

$\Leftarrow$ Af $b \leqq a$ ville man ifølge det allerede viste kunne slutte, at $bc \leqq ac$, hvilket strider mod det givne.

Den indførte ordningsrelation i N har foruden de nævnte egenskaber (som f.eks. den sædvanlige ordning i mængden af positive rationale tal også har) visse særlige, for de naturlige tals ordning karakteristiske egenskaber. For nemt at kunne formulere disse, anføres nogle definitioner og sætninger vedrørende ordnede mængder.

Lad $(M, \precsim)$ være en mængde, hvori der er defineret en refleksiv, ikke nødvendigvis total ordningsrelation. Et element a i en ordnet mængde M siges at være dens <u>første element</u>, hvis $a \precsim x$ for alle $x \in M$. Det er klart, at hvis der overhovedet findes et sådant element, er det entydig bestemt, idet $a \precsim a'$ og $a' \precsim a$ medfører $a = a'$. Tilsvarende defineres <u>sidste element</u>. Idet ordningsrelationens restriktion til en delmængde er en ordningsrelation i denne, overføres disse definitioner umiddelbart til delmængder af $(M, \precsim)$.

En delmængde M' af en ordnet mængde M siges at være <u>nedad (opad) begrænset</u>, hvis den har en <u>minorant</u> (<u>majorant</u>), hvormed menes et element $m \in M$, for hvilket $m \preceq x$ ($x \preceq m$) for alle $x \in M'$.

En mængde M siges at være velordnet ved en ordningsrelation $\preceq$, hvis hver ikke tom delmængde, ordnet ved relationens restriktion til den, har et første element. (Dette medfører, at ordningsrelationen er total; thi da delmængden $\{x,y\}$ bestående af to forskellige elementer har et første, må der gælde $x \prec y$ eller $y \prec x$.)

Det er klart, at hver delmængde af en velordnet mængde er velordnet ved ordningsrelationens restriktion til den.

Sætning a. I en velordnet mængde $(M, \preceq)$ findes der til hvert element x, som ikke er sidste element, et (og selvfølgelig kun eet) umiddelbart følgende, d.v.s. et element x', således at $x \prec x'$ og at $x \prec y$ medfører $x' \preceq y$.

Bevis: Da $x \in M$ ikke er sidste element, er mængden $\{y \in M \mid x \prec y\}$ ikke tom. Den har altså et første element x', og dette opfylder de stillede krav.

Sætning b (Transfinit induktion). Hvis det for en delmængde $(M', \preceq)$ af en velordnet mængde $(M, \preceq)$ gælder, at

$$\forall a \in M : M_a \subseteq M' \quad \Rightarrow \quad a \in M',$$

hvor $M_a = \{x \in M \mid x \prec a\}$ er det ved a bestemte "afsnit" af M, så er $M' = M$.

Bevis: Hvis delmængden $M \setminus M'$ af M ikke var tom, ville den have et første element a, og for dette havde man $x \in M'$ for $x \prec a$, altså $M_a \subseteq M'$. Ifølge forudsætningen ville dette medføre $a \in M'$ i strid med $a \in M \setminus M'$.

(Bemærk, at den indirekte slutning også er gyldig, hvis $M \setminus M'$ indeholdt det første element af M, som så ville være det betragtede element a. Man havde da $M_a = \emptyset$. Men da $\emptyset \subseteq M'$, ville forudsætningen også i dette tilfælde medføre $a \in M'$.)

Nu betragtes igen parret (N,ε) bestående af en mængde N og en afbildning $\varepsilon : N \to N$, som opfylder aksiomerne I-III.

Sætning 18. $\forall x \in N : 1 \leqq x$,

d.v.s., N har 1 som første element.

Bevis: Ifølge sætning 1 findes der for hvert $x \neq 1$ et $z \in N$, således at $\varepsilon(z) = z+1 = x$. Dette viser, at $1 < x$.

Sætning 19. $\forall x,y \in N : x < y \Rightarrow x+1 \leqq y$,

d.v.s., hvert element $x \in N$ har et umiddelbart følgende, nemlig $x+1$.

Bevis: Idet $x < y$, findes der et $z \in N$, således at $z+x = y$. Ifølge sætning 18 er $1 \leqq z$, altså $x+1 = 1+x \leqq z+x = y$ ifølge sætning 16.

Sætning 20. Mængden N er velordnet ved relationen $\leqq$.

Bevis: Lad M være en ikke tom delmængde af N, og lad L være mængden af alle minoranter for M, altså

$$L = \{y \in N \mid \forall x \in M \mid y \leqq x\}.$$

Da er $1 \in L$, altså $L \neq \emptyset$ ifølge sætning 18. Mængden $N \setminus L$ er heller ikke tom; thi for et element $x \in M$ vil $x+1 \notin L$, da $x < x+1$. Der findes derfor et element $a \in L$, for hvilket $a+1 \notin L$, da ellers $L = N$ ifølge aksiom III. Dette element a påstås at være første element i M. Idet a som element af L er en minorant for M, er det tilstrækkeligt at vise, at $a \in M$. Var $a \notin M$, ville man ifølge definition af L, have at $a < x$ for alle $x \in M$. Ifølge sætning 19 ville dette imidlertid medføre, at $a+1 \leqq x$ for alle $x \in M$, altså at $a+1 \in L$, i strid med bestemmelsen af a. Dermed er vist, at hver delmængde af M har et første element.

Herefter ses af sætning b, at følgende fra III forskellige induktionsslutning er gyldig i N:

Sætning 21. Hvis det for en delmængde M af N gælder, at

$$\forall a \in N : N_a \subseteq M \Rightarrow a \in M,$$

hvor $N_a = \{x \in N \mid x < a\}$, så er $M = N$.

Sætning 22. Hver ikke tom opad begrænset delmængde L af N har et sidste element.

Bevis: Sæt $M = \{y \in N \mid \forall x \in L : x \leqq y\}$. Da er $M \neq \emptyset$, idet L er opad begrænset. Lad b være det første element i M. Da b ifølge definition af M er en majorant til L, drejer det sig kun om at vise, at $b \in L$. Hvis $b = 1$, må L være $\{1\}$, da $L \neq \emptyset$, og påstanden er indlysende. Hvis $1 < b$, findes der ifølge sætning 8 (eller 1) et $c \in N$, således at $c+1 = b$. For dette gælder $c \notin M$, idet $c < b$. Der eksisterer altså et $d \in L$, således at $c < d$. Af sætning 19 kan da sluttes, at $c+1 = b \leqq d$. Men $b < d$ er udelukket, da $b \in M$ og $d \in L$. Følgelig har man $b = d \in L$ som påstået.

Sætning 23. Nødvendige og tilstrækkelige betingelser for, at en ordnet mængde $(N, -\!\!\leqq)$ tillader en afbildning $\varepsilon : N \to N$, således at aksiomerne I-III er opfyldt og den ved ε bestemte ordning $\leqq$ stemmer overens med $-\!\!\leqq$, er at $(N, -\!\!\leqq)$ er velordnet ved $-\!\!\leqq$ og ikke har noget sidste element, og at hver ikke tom, opad begrænset delmængde af N har et sidste element.

Bevis: At betingelserne er nødvendige, viser sætningerne 20,15,22.

Tilstrækkeligheden indses på følgende måde. Idet det forudsættes, at $(N, -\!\!\leqq)$ ikke har noget sidste element og er velordnet, sluttes af sætning a, at hvert element $x \in N$ har et umiddelbart følgende x'. Ved $\varepsilon(x) = x'$ defineres en afbildning $\varepsilon : N \to N$. Betegnes det første element i N med 1, har man $1 -\!\!< \varepsilon(x)$. Aksiom I er altså opfyldt. Er x og y to forskellige elementer af N, vil der gælde $x -\!\!< y$ eller $y -\!\!< x$, da $-\!\!<$ er total. Antag, at betegnelserne er valgt således, at $x -\!\!< y$. Man har da

$\varepsilon(x) \mathrel{-\!\!\leqq} y$, da $\varepsilon(x)$ følger umiddelbart efter x. Endvidere gælder $y \prec \varepsilon(y)$. Transitiviteten af $\prec$ giver da $\varepsilon(x) \prec \varepsilon(y)$. Afbildningen ε er altså ordenstro for den ikke-refleksive relation $\prec$, altså specielt injektiv. Dermed er gyldigheden af aksiom II bevist. For at bevise III betragtes en mængde $M \subseteqq N$, for hvilken $1 \in M$ og $\varepsilon(M) \subseteqq M$. Antag, at mængden $N \setminus M$ ikke er tom. Den har da et første element b. Mængden $N_b = \{x \in N \mid x \prec b\}$ er en opad begrænset delmængde af M. Den er ikke tom, da $1 \in M$, og har følgelig et sidste element a. Ifølge det om M forudsatte gælder $\varepsilon(a) \in M$. Da $a \prec b$ og $\varepsilon(a)$ følger umiddelbart efter a, har man $\varepsilon(a) \preceq b$. Da a er det sidste element før b, har man $b \preceq \varepsilon(a)$, altså $b = \varepsilon(a) \in M$. Men dette strider mod, at $b \in N \setminus M$. Dermed er også III bevist.

For endelig at vise, at den ved ε bestemte ordningsrelation $\leqq$ stemmer overens med den givne $\preceq$, behøver man blot at bemærke, at 1 er første element af N ved begge ordninger, og at $\varepsilon(x)$ er det umiddelbart efter x følgende element, ved $\prec$ ifølge definition af ε, ved $<$ ifølge sætning 19. For $a \in N$ betragtes de to mængder

$$N_{\prec a} = \{x \in N \mid x \prec a\}, \qquad N_{<a} = \{x \in N \mid x < a\}.$$

Påstanden går ud på, at de stemmer overens for hvert a. Lad $M \subseteqq N$ være mængden af de $a \in N$, for hvilke $N_{\prec a} = N_{<a}$. For $a = 1$ er begge mængder tomme, altså $1 \in M$. Idet

$$N_{\prec \varepsilon(a)} = N_{\prec a} \cup \{a\}, \qquad N_{<\varepsilon(a)} = N_{<a} \cup \{a\},$$

kan man af $N_{\prec a} = N_{<a}$ slutte, at $N_{\prec \varepsilon(a)} = N_{<\varepsilon(a)}$.
Dette viser, at $\varepsilon(M) \subseteqq M$, og anvendelsen af III giver $M = N$, hvilket skulle vises.

Man lægger mærke til, at forudsætningen om, at hver opad begrænset delmængde af N har et sidste element, i beviset for betingelsernes tilstrækkelighed kun blev anvendt på afsnittene $N_b = \{x \in N \mid x \prec b\}$, $b \neq 1$. At N_b har et sidste element, er ensbetydende med, at b har et umiddelbart forudgående element.

Sætning 23 viser, at Dedekinds aksiomer I-III kan erstattes med aksiomer, der vedrører en ordningsrelation i den betragtede mængde N (E. Schmidt, ca. 1920):

<u>Om en ordnet mængde</u> $(N,\leq)$ <u>forudsættes</u>:

1. N <u>er velordnet ved</u> $\leq$.
2. N <u>har ikke noget sidste element</u>.
3. <u>Hvert element af</u> N, <u>som er forskelligt fra det første, har et umiddelbart forudgående</u>.

Et af de grundlæggende spørgsmål, som endnu ikke er besvaret, er, om Dedekinds aksiomsystem er kategorisk, d.v.s. om det fastlægger parret (N,ε) på nær isomorfi. At dette er tilfældet, vil vise sig at være en konsekvens af nedenstående sætning 24.

Om parret (N,ε) forudsættes at aksiomerne I-III og dermed sætningerne 1-23 er opfyldt. Det element, der går umiddelbart forud for et element $a \neq 1$ af N, betegnes med $a-1$. Med N_a betegnes som hidtil det ved a bestemte afsnit $\{x \in N \mid x < a\}$.

<u>Sætning 24</u>. Lad der være givet en mængde Ω, et element $\alpha \in \Omega$ og en afbildning $\varphi : \Omega \to \Omega$.

For hvert $p \in N$ eksisterer da en og kun een afbildning $f_p : N_{p+1} \to \Omega$, således at

$$f_p(1) = \alpha, \quad f_p(i+1) = \varphi(f_p(i)) \qquad \text{for } i \in N_p.$$

Der eksisterer en og kun een afbildning $f : N \to \Omega$, således at

$$f(1) = \alpha, \quad f(i+1) = \varphi(f(i)) \qquad \text{for } i \in N.$$

Bevis: Først vises, at der for et givet $p \in N$ højst kan findes een afbildning med de forlangte egenskaber. Lad f_p og g_p have dem. Da er $f_p(1) = \alpha = g_p(1)$. Antag, at $f_p(i) = g_p(i)$ for $i \in N_a$, hvor $a \in N_{p+1}$. Da er

$$f_p(a) = \varphi(f_p(a-1)) = \varphi(g_p(a-1)) = g_p(a).$$

Sætning b kan altså anvendes på den velordnede mængde N_{p+1} som mængden M og med mængden $\{i \in N_{p+1} \mid f_p(i) = g_p(i)\}$ som delmængden M'.

Lad nu L betegne mængden af de elementer $p \in N$, for hvilke der eksisterer afbildninger f_p af den forlangte art. Det er klart, at $1 \in L$, idet $f_1(1) = \alpha$ opfylder det første krav, og det andet falder bort. Antag, at der eksisterer en afbildning $f_p : N_{p+1} \to \Omega$, således at $f_p(1) = \alpha$ og $f_p(i+1) = \varphi(f_p(i))$ for $i \in N_p$. Afbildningen $f_{p+1} : N_{(p+1)+1} \to \Omega$ bestemt ved

$$\begin{aligned} f_{p+1}(i) &= f_p(i) \qquad \text{for } i \in N_{p+1}, \\ f_{p+1}(p+1) &= \varphi(f_p(p)) \end{aligned}$$

opfylder da øjensynlig kravene med p+1 i stedet for p. Påstanden følger altså af aksiom III.

For $p < q$ vil restriktionen af f_q til N_{p+1} opfylde de til f_p stillede krav. På grund af entydigheden af f_p har man altså $f_q(i) = f_p(i)$ for $i \in N_{p+1}$. Sættes $f(i) = f_i(i)$ for $i \in N$, fås en afbildning af N ind i Ω, for hvilken $f(1) = f_1(1) = \alpha$ og

$$f(i+1) = f_{i+1}(i+1) = \varphi(f_{i+1}(i)) = \varphi(f_i(i)) = \varphi(f(i)).$$

At der kun kan findes een afbildning $f : N \to \Omega$ med disse egenskaber, følger af, at dens restriktion til et afsnit N_{p+1} for hvert $p \in N$ opfylder de til f_p stillede krav og følgelig må stemme overens med f_p. Dermed er sætning 24 bevist.

<u>Sætning 25</u>. Lad (N, ε) og (N^*, ε^*) være to par, hvert bestående af en mængde og en afbildning af denne ind i sig selv,

således at begge par tilfredsstiller Dedekinds aksiomer I-III med henholdswis $1 \in N$ og $1^* \in N^*$. Da er de to par isomorfe i den forstand, at der findes en (og kun een) bijektiv afbildning $f:N \to N^*$, således at $f(1) = 1^*$ og $f(\varepsilon(x)) = \varepsilon^*(f(x))$ for alle $x \in N$.

Bevis: Sætning 24 med N^* i stedet for Ω, 1^* i stedet for α og ε^* i stedet for φ giver eksistensen af en (og kun een) afbildning $f:N \to N^*$ med de sidstnævnte egenskaber. Det skal vises, at denne afbildning er bijektiv. Hertil benyttes, at der ifølge det sagte også findes en afbildning $f^*: N^* \to N$, for hvilken $f^*(1^*) = 1$ og $f^*(\varepsilon^*(x)) = \varepsilon\ (f^*(x^*))$. Den sammensatte afbildning $f^* \circ f$ er den identiske afbildning af N. Mængden

$$M = \{x \in N \mid f^*(f(x)) = x\} \subseteq N$$

opfylder nemlig forudsætningerne af III; thi $f^*(f(1)) = f^*(1^*) = 1$, og hvis $f^*(f(x)) = x$, har man

$$f^*(f(\varepsilon(x))) = f^*(\varepsilon^*(f(x))) = \varepsilon(f^*(f(x))) = \varepsilon(x).$$

Af $f^*(f(x)) = x$ for alle $x \in N$ følger, at f er injektiv; thi af $f(x) = f(y)$ følger

$$x = f^*(f(x)) = f^*(f(y)) = y.$$

Endvidere ses, at f^* er surjektiv. Men da f og f^* kan bytte rolle, må f også være surjektiv. Dermed er sætningen bevist.

Herefter er der mening i følgende definition:

<u>Ved mængden</u> $\hat{N}$ <u>af naturlige tal forstås en mængde</u> N <u>organiseret ved en afbildning</u> $\varepsilon:N \to N$, <u>som opfylder Dedekinds aksiomer I-III.</u>

Det følgende går ud på ud fra det valgte grundlag at gøre rede for de naturlige tals brugbarhed som kardinaltal for endelige mængder.

Sætning 26. Hvis der for to naturlige tal a og b eksisterer en injektiv afbildning f af afsnittet $\dot{N}_{a+1}$ ind i afsnittet $\dot{N}_{b+1}$, så er $a \leqq b$.

Bevis: Lad M betegne mængden af de $a \in \dot{N}$, for hvilke påstanden er rigtig for alle $b \in \dot{N}$. Det er klart, at $1 \in M$, idet $1 \leqq b$ for alle b. Antag, at $a \in M$, og lad f være en injektiv afbildning af $\dot{N}_{(a+1)+1}$ ind i et afsnit $\dot{N}_{b+1}$. Det skal vises, at $a+1 \leqq b$. Der skelnes mellem tre tilfælde:

$$1^\circ \qquad b \notin f(\dot{N}_{(a+1)+1}),$$
$$2^\circ \qquad b = f(a+1),$$
$$3^\circ \qquad b = f(c), \quad c \neq a+1.$$

I tilfældene 1° og 2° vil restriktionen af f til $\dot{N}_{a+1}$ være en injektiv afbildning af $\dot{N}_{a+1}$ ind i N_b. På grund af antagelsen $a \in M$ følger heraf, at $a \leqq b-1$, altså $a+1 \leqq b$. I tilfældet 3° defineres en afbildning $f':\dot{N}_{(a+1)+1} \rightarrow \dot{N}_{b+1}$ ved

$$f'(x) = f(x) \qquad \text{for } x \in \dot{N}_{(a+1)+1} \setminus \{c, a+1\},$$
$$f'(c) = f(a+1),$$
$$f'(a+1) = f(c) = b.$$

Denne afbildning er injektiv og falder under 2°.
Følgelig har man $a+1 \leqq b$ også i dette tilfælde. Dermed er vist, at $a+1 \in M$. Ifølge aksiom III er altså $M = \dot{N}$, hvilket skulle vises.

Sætning 27. Hvis en mængde A er ækvipotent såvel med afsnittet $\dot{N}_{a+1}$ som med afsnittet $\dot{N}_{b+1}$ af $\dot{N}$, så er $a = b$.

Bevis: Lad $\varphi: A \rightarrow \dot{N}_{a+1}$ og $\psi: A \rightarrow \dot{N}_{b+1}$ være bijektive afbildninger. Da er $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ en bijektiv afbildning af $\dot{N}_{a+1}$ på $\dot{N}_{b+1}$

og f^{-1} en bijektiv afbildning af $\grave{N}_{b+1}$ på $\grave{N}_{a+1}$. Sætning 26 anvendt på disse to afbildninger giver $a \leqq b$ og $b \leqq a$.

Definition. En mængde A siges at være en endelig mængde, hvis den er tom eller ækvipotent med et afsnit $\grave{N}_{a+1}$ af mængden $\grave{N}$ af naturlige tal. I det sidstnævnte tilfælde er det naturlige tal a entydig bestemt (ifølge sætning 27) og kaldes antallet af elementer i A eller kardinaltallet kt A for A.

Det er klart, at hvis en af to ækvipotente mængder er endelig, er den anden det også, og de to mængder har samme kardinaltal.

Ikke endelige mængder kaldes uendelige mængder.

Sætning 28. Hver ægte delmængde B af en endelig mængde A er endelig, og hvis $B \neq \emptyset$, gælder kt B < kt A.

Bevis: Idet A er ækvipotent med et afsnit $\grave{N}_{a+1}$, hvor a = kt A, vil B være ækvipotent med en delmængde af $\grave{N}_{a+1}$. Det drejer sig altså om at vise, at hver ægte og ikke tom delmængde af $\grave{N}_{a+1}$ er ækvipotent med et afsnit $\grave{N}_{b+1}$, hvor $b < a$. Lad M betegne mængden af de $a \in \grave{N}$, for hvilke det gælder, at hver ægte og ikke tom delmængde af $\grave{N}_{a+1}$ er ækvipotent med et afsnit N_{b+1} med $b < a$. At $1 \in M$, følger af, at $\grave{N}_{1+1} = \{1\}$ ikke har sådanne delmængder. Antag, at $a \in M$, og lad $P \neq \emptyset$ være en ægte delmængde af $\grave{N}_{(a+1)+1}$. Idet mængden P har (a+1)+1 som majorant, har den et sidste element p. Hvis $P = \{p\}$, er P ækvipotent med $\grave{N}_{1+1} = \{1\}$, og kt P = 1 < a+1. Er $P\setminus\{p\}$ ikke tom, vil denne mængde ikke indeholde a+1. Altså er $P\setminus\{p\} \subseteq \grave{N}_{a+1}$. Her er lighed imidlertid umulig, da denne ville medføre p = a+1 og følgelig $P = \grave{N}_{(a+1)+1}$ i strid med forudsætningen om P. Ifølge induktionsantagelsen findes der en bijektiv afbildning af $P\setminus\{p\}$ på et afsnit $\grave{N}_{b+1}$ med $b < a$. Lader man til p svare b+1, får man i alt en bijektiv afbildning af P på $\dot{N}_{(b+1)+1}$, og man har $b+1 < a+1$. Dermed er vist, at $a+1 \in M$. Af aksiom III sluttes, at $M = \dot{N}$. Hermed er sætningen bevist.

Sætning 29. Er A og B disjunkte endelige mængder, vil $A \cup B$ være endelig og $\mathrm{kt}(A \cup B) = \mathrm{kt}\, A + \mathrm{kt}\, B$.

Bevis: Med M betegnes mængden af de $a \in \dot{N}$, for hvilke det gælder, at $\dot{N}_{b+1}$ for hvert $b \in \dot{N}$ er ækvipotent med $\dot{N}_{(a+b)+1} \setminus \dot{N}_{a+1}$. Idet der ved $x \to x+1$ defineres en bijektiv afbildning af $\dot{N}_{b+1}$ på $\dot{N}_{(b+1)+1} \setminus \dot{N}_{1+1}$, haves $1 \in M$. Antag, at $a \in M$, altså at der for hvert $b \in \dot{N}$ eksisterer en bijektiv afbildning

$$f_b : \dot{N}_{b+1} \to \dot{N}_{(a+b)+1} \setminus \dot{N}_{a+1}.$$

Ved til $x \in \dot{N}_{b+1}$ at lade svare $f_b(x)+1$, fås en bijektiv afbildning af $\dot{N}_{b+1}$ på $\dot{N}_{((a+1)+b)+1} \setminus \dot{N}_{(a+1)+1}$. Dette viser, at $a+1 \in M$. Af aksiom III kan altså sluttes, at $M = \dot{N}$. Er nu A og B disjunkte endelige mængder med kardinaltallene a og b, vil der findes en bijektiv afbildning $\varphi : A \to \dot{N}_{a+1}$ og en bijektiv afbildning $\psi : B \to \dot{N}_{b+1}$. Den sidstnævnte sammensat med afbildningen f_b, altså $f_b \circ \psi$ er da en bijektiv afbildning af B på $\dot{N}_{(a+b)+1} \setminus \dot{N}_{a+1}$. Ved til $\gamma \in A \cup B$ at lade svare $\varphi(\gamma)$, når $\gamma \in A$, og $f_b(\psi(\gamma))$, når $\gamma \in B$, fås en bijektiv afbildning af $A \cup B$ på $\dot{N}_{(a+b)+1}$. Dermed er sætningen bevist.

Uden bevis nævnes:

Sætning 30. Er A og B endelige mængder, vil $A \times B$ være endelig og $\mathrm{kt}(A \times B) = \mathrm{kt}\, A \cdot \mathrm{kt}\, B$.

Øvelser til kap.II,§1.

1. Bevis, at Dedekinds aksiomer I,II,III er indbyrdes uafhængige, ved at angive mængder N og afbildninger $\varepsilon: N \to N$, således at hvilkesomhelst to af aksiomerne er opfyldte, medens det tredie ikke er det. (I det tilfælde, hvor I kræves at være falsk, skal III forstås således, at der findes et element $1 \in N$, for hvilket det i III forlangte er opfyldt.)

2. Giv beviser for sætningerne 9-13.

3. For $a < b$ betegnes løsningen x til ligningen $x+a = b$ med $b-a$. Vis, at hvis de venstre sider i de følgende relationer eksisterer, vil også de højre sider eksistere og relationerne være gyldige:

$$(b-a) + (d-c) = (b+d) - (a+c),$$
$$(b-a)c = bc-ac,$$
$$(b-a)(d-c) = (bd+ac)-(ad+bc).$$

Vis endvidere, at hvis $b-a$ og $d-c$ eksisterer, vil $b-a < d-c$ være ensbetydende med $b+c < a+d$.

4. Der er givet et element $a \in N$. Om en mængde $M \subseteq N$ forudsættes, at $a \in M$, og for hvert $x \in N$, at hvis $x \geqq a$ og $x \in M$, så er $x+1 \in M$. Vis, at $M = N$.

5. Er mængderne

$$\{p + 1/q \mid p,q \in \dot{N}\}, \quad \{p - 1/q \mid p,q \in \dot{N}\}$$

af rationale tal velordnede ved den sædvanlige relation $<$? Ved $>$?

6. Lad M være velordnet ved relationen $\prec$. Vis, at der for hver ordenstro afbildning $f: M \to M$ gælder $x \preceq f(x)$ for alle

$x \in M$.

Slut heraf, at den eneste surjektive ordenstro afbildning $f : M \to M$ er den identiske, og at der ikke findes nogen surjektiv ordenstro afbildning af et afsnit $M_a = \{x \in M \mid x \prec a\}$ af M på M.

7. Find fejlslutningen i følgende induktions"bevis" for "sætningen": Hvilkesomhelst endelig mange indbyrdes forskellige linier i planen har et punkt fælles.

Påstanden er indlysende for 1 linie. Lad der være givet n indbyrdes forskellige linier $l_1, \dots, l_n$. Hvis påstanden er rigtig for n-1 linier, vil såvel linierne $l_1, \dots, l_{n-1}$ som linierne $l_1, \dots, l_{n-2}, l_n$ have et punkt fælles. Disse to punkter må falde sammen, da begge ligger på l_1 og l_2. Antagelsen medfører altså, at $l_1, \dots, l_n$ har et punkt fælles, så at aksiom III kan anvendes.

8. Find fejlslutningen i følgende induktions"bevis" for "sætningen": For alle naturlige tal n er $|\sin n\pi/3| \leqq \frac{1}{2}$ og $|\cos n\pi/3| \leqq \frac{1}{2}$.

Lad n være et naturligt tal, og antag, at påstanden er rigtig for alle naturlige tal mindre end n. Da er

$$|\sin n\pi/3| = |\sin \pi/3 \cos(n-1)\pi/3 + \cos \pi/3 \sin(n-1)\pi/3|$$
$$\leqq \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2},$$

og tilsvarende sluttes, at $|\cos n\pi/3| \leqq \frac{1}{2}$. Følgelig kan sætning 21 anvendes.

9. For naturlige tal p og n sættes $s_p(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^p$. Find (ved at anvende binomialformlen på $(\nu+1)^{p+1}$) $s_p(n)$ udtrykt ved $s_1(n), \dots, s_{p-1}(n)$. Vis, at der for hvert $p \in \mathbb{N}$ eksisterer et polynomium P_{p+1} af graden p+1 og med rationale koefficienter, således at $s_p(n) = P_{p+1}(n)$.

10. Bevis sætning 30.

11.* Vis, at en mængde er endelig, hvis og kun hvis den ikke er ækvipotent med nogen af sine ægte delmængder. [Ved beviset for betingelsens tilstrækkelighed kan man begynde med at vise, at hvis en mængde er uendelig, kan hvert afsnit af $\dot{N}$ og også $\dot{N}$ selv afbildes injektivt i den. (Hver uendelig mængde har en numerabel delmængde.)]

12.* Vis, at en ikke tom mængde er endelig, hvis og kun hvis der findes en afbildning af den ind i sig selv, ved hvilken ingen ægte og ikke tom delmængde afbildes ind i sig selv. (Benyt sætning 24.)

13. Der er givet en mængde Ω med en kompositionsforskrift $\$$. Bevis følgende: Til hver afbildning $\alpha : \dot{N}_{p+1} \to \Omega$ findes der en og kun een afbildning $\sigma : \dot{N}_{p+1} \to \Omega$, således at $\sigma(1) = \alpha(1)$ og

$$\sigma(j+1) = \sigma(j) \ \$ \ \alpha(j+1) \qquad \text{for } j \in \dot{N}_p .$$

Når kompositionsforskriften er betegnet som addition eller multiplikation, skrives henholdsvis

$$\sigma(j) = \sum_{i=1}^{j} \alpha(i), \qquad \sigma(j) = \prod_{i=1}^{j} \alpha(i),$$

og ellers

$$\sigma(j) = \int_{i=1}^{j} \alpha(i) .$$

Vis, at hvis kompositionsforskriften $\$$ er associativ, gælder for hvert $q \in \dot{N}_p$

$$\int_{i=1}^{p} \alpha(i) = \left(\int_{i=1}^{q} \alpha(i)\right) \$ \left(\int_{i=1}^{p-q} \alpha(q+i)\right) .$$

Man skriver da også

$$\mathop{\$}_{i=1}^{p} \alpha(i) = \alpha(1) \$ \dots \$ \alpha(p).$$

* Vis, at hvis kompositionsforskriften $\$$ desuden er kommutativ, gælder for hver permutation f af $\dot{N}_{p+1}$

$$\mathop{\$}_{i=1}^{p} \alpha(f(i)) = \mathop{\$}_{i=1}^{p} \alpha(i).$$

§ 2. De hele og de rationale tal.

Mængden af naturlige tal kan ved visse konstruktioner udvides til de hele tals integritetsring (integritetsområde) og derefter til de rationale tals legeme (eller, hvad der svarer bedre til den historiske udvikling, først til mængden af positive rationale tal og derefter til de rationale tals legeme). Disse udvidelser har et fælles træk, som finder sit udtryk i en almen sætning om mængder med en associativ og kommutativ kompositionsforskrift, for hvilken forkortningsreglen gælder.

Definition. Ved en halvgruppe $(H,\$)$ forstås en mængde H med en associativ kompositionsforskrift $\$$, for hvilken forkortningsreglerne gælder.

Udvidelsessætning for halvgrupper. Til hver kommutativ halvgruppe $(H,\$)$ findes der en og på isomorfi nær kun een kommutativ gruppe $(G,\tilde{\$})$, som indeholder en med $(H,\$)$ isomorf delmængde $(\tilde{H},\tilde{\$})$, således at hvert element $\gamma \in G$ kan skrives $\gamma = \alpha \tilde{\$} \beta^{-1}$, hvor $\alpha,\beta \in \tilde{H}$.

Bevis: I $H \times H$ defineres ved

$$(a_1,a_2) \$' (b_1,b_2) = (a_1 \$ b_1, a_2 \$ b_2), \qquad a_1,a_2,b_1,b_2 \in H,$$

en kompositionsforskrift $\$'$, som øjensynlig er associativ og kommutativ. Desuden defineres i $H \times H$ en relation $\sim$ ved

$$(a_1,a_2) \sim (a_1',a_2') \iff a_1 \$ a_2' = a_2 \$ a_1'.$$

Den er en ækvivalensrelation; thi den er åbenbart refleksiv og symmetrisk, og transitiviteten sluttes ved hjælp af egenskaberne ved $\$$ af, at

$$(a_1,a_2) \sim (a_1',a_2'), \qquad (a_1',a_2') \sim (a_1'',a_2''),$$

altså

$$a_1 \$ a_2' = a_2 \$ a_1', \qquad a_1' \$ a_2'' = a_2' \$ a_1''$$

medfører

$$a_1 \$ a_2'' \$ a_1' = a_1 \$ a_2' \$ a_1'' = a_2 \$ a_1' \$ a_1'',$$

altså $a_1 \$ a_2'' = a_2 \$ a_1''$. Denne ækvivalensrelation harmonerer med $\$'$, idet

$$(a_1,a_2) \sim (a_1',a_2'), \qquad (b_1 b_2) \sim (b_1',b_2'),$$

altså

$$a_1 \$ a_2' = a_2 \$ a_1', \qquad b_1 \$ b_2' = b_2 \$ b_1'$$

medfører

$$(a_1 \$ b_1) \$ (a_2' \$ b_2') = (a_1 \$ a_2') \$ (b_1 \$ b_2')$$

$$= (a_2 \$ a_1') \$ (b_2 \$ b_1') = (a_2 \$ b_2) \$ (a_1' \$ b_1'),$$

altså

$$(a_1,a_2) \$ (b_1,b_2) \sim (a_1',a_2') \$ (b_1',b_2').$$

I mængden G af ækvivalensklasser kan der følgelig defineres en kompositionsforskrift $\tilde{\$}$ ved

$$kl(a_1,a_2) \tilde{\$} kl(b_1,b_2) = kl(a_1 \$ b_1, a_2 \$ b_2).$$

Det skal vises, at $(G,\tilde{\$})$ har de forlangte egenskaber.

At $(G,\tilde{\$})$ er en kommutativ gruppe, ses på følgende måde. Ved til hvert par (a_1,a_2) at lade svare den klasse $kl(a_1,a_2)$, som det er indeholdt i, defineres en homomorf og surjektiv afbildning af $(H \times H,\$')$ på $(G,\tilde{\$})$. Idet $\$'$ er associativ og kommutativ, kan heraf sluttes, at også $\tilde{\$}$ er associativ og kommutativ. Klassen $\varepsilon = kl(x,x)$, hvor x er et vilkårlig element af H, udgøres netop af alle par bestående af to ens elementer fra H, idet $(x,x) \sim (y_1,y_2)$ jo er ensbetydende med $x \$ y_2 = x \$ y_1$, altså på grund af forkortningsreglen med $y_1 = y_2$. Klassen ε er neutralt element for $\tilde{\$}$; thi

$$kl(x,x) \tilde{\$} kl(a_1,a_2) = kl(x \$ a_1, x \$ a_2) = kl(a_1,a_2),$$

idet $(x \$ a_1) \$ a_2 = (x \$ a_2) \$ a_1$. Endvidere er $kl(a_2,a_1)$ invers til $kl(a_1,a_2)$, idet

$$kl(a_1,a_2) \tilde{\$} kl(a_2,a_1) = kl(a_1 \$ a_2, a_2 \$ a_1) = \varepsilon.$$

Dernæst vises, at $(G,\tilde{\$})$ indeholder en med $(H,\$)$ isomorf halvgruppe. For hvert element $a \in H$ udgør parrene $(a \$ x,x)$, $x \in H$, en ækvivalensklasse, idet

$$(a \$ x,x) \sim (y_1,y_2)$$

er ensbetydende med

$$(a \$ x) \$ y_2 = x \$ y_1,$$

altså med $y_1 = a \$ y_2$. Heraf fremgår tillige, at

$$kl(a \$ x,x) \neq kl(b \$ y,y) \quad \text{for } a \neq b.$$

Idet mængden $\{kl(a \$ x,x) \mid a \in H\}$ af sådanne klasser betegnes med $\tilde{H}$, defineres altså ved

$$a \to kl(a \$ x,x)$$

en bijektiv afbildning $f : H \to \tilde{H}$. Den er homomorf, altså isomorf, idet

$$f(a) \tilde{\$} f(b) = kl(a \$ x,x) \tilde{\$} kl(b \$ y,y)$$
$$= kl((a \$ b) \$ (x \$ y), x \$ y) = f(a \$ b).$$

Hvert element $\gamma = kl(c_1,c_2) \in G$ har en fremstilling af formen

$$\gamma = \alpha \tilde{\$} \beta^{-1},$$

hvor $\alpha = kl(c_1 \$ x,x) \in \tilde{H}$ og $\beta = kl(c_2 \$ y,y) \in \tilde{H}$ med vilkårlig valgte $x,y \in H$. Dette ses af

$$kl(c_1 \$ x,x) \tilde{\$} kl(c_2 \$ y,y)^{-1}$$
$$= kl(c_1 \$ x,x) \tilde{\$} kl(y,c_2 \$ y)$$
$$= kl(c_1 \$ (x \$ y), c_2 \$ (x \$ y)) = kl(c_1,c_2).$$

Der er tilbage at bevise, at to grupper $(G,\tilde{\$})$ og $(G^*,\tilde{\$}^*)$, der har de i sætningen nævnte egenskaber, er isomorfe. Lad $\tilde{H} \subseteq G$ og $\tilde{H}^* \subseteq G^*$ være de med H isomorfe delmængder. De er da indbyrdes isomorfe. Lad $\varphi : \tilde{H} \to \tilde{H}^*$ være en isomorfi. Det skal vises, at denne kan udvides til en isomorfi $\Phi : G \to G^*$. Hertil benyttes, at hvert element $\gamma \in G$ kan skrives $\gamma = \alpha \tilde{\$} \beta^{-1}$, hvor $\alpha,\beta \in \tilde{H}$, og at tilsvarende gælder for elementerne i G^*. Man har for $\alpha,\beta,\bar{\alpha},\bar{\beta} \in \tilde{H}$, at

$$\varphi(\alpha) \tilde{\$}^* \varphi(\beta)^{-1} = \varphi(\bar{\alpha}) \tilde{\$}^* \varphi(\bar{\beta})^{-1},$$

når og kun når

$$\varphi(\alpha \tilde{\$} \bar{\beta}) = \varphi(\alpha) \tilde{\$}^* \varphi(\bar{\beta}) = \varphi(\bar{\alpha}) \tilde{\$}^* \varphi(\beta) = \varphi(\bar{\alpha} \tilde{\$} \beta),$$

altså når og kun når

$$\alpha \tilde{\$} \bar{\beta} = \bar{\alpha} \tilde{\$} \beta,$$

altså når og kun når

$$\alpha \tilde{\$} \beta^{-1} = \bar{\alpha} \tilde{\$} \bar{\beta}^{-1}.$$

Ved til γ at lade svare $\gamma^* = \varphi(\alpha) \tilde{\$}^* \varphi(\beta)^{-1}$, hvor $\alpha \tilde{\$} \beta^{-1}$, $\alpha,\beta \in \tilde{H}$, er en eller anden fremstilling af γ, defineres derfor en afbildning $\Phi : \tilde{H} \to \tilde{H}^*$, idet γ^* kun afhænger af γ, men ikke af den valgte fremstilling. Endvidere er Φ injektiv ifølge det ovenstående og surjektiv, fordi hvert element $\gamma^* \in \tilde{H}^*$ har en fremstilling $\alpha^* \tilde{\$}^* \beta^{*-1}$, $\alpha^*,\beta^* \in \tilde{H}^*$, og φ er surjektiv. At Φ er en homomorfi, altså en isomorfi, følger af, at φ er en isomorfi. At Φ er en udvidelse af φ ses ved for et element $\alpha \in \tilde{H}$ at benytte fremstillingen $\alpha = (\alpha \tilde{\$} \alpha) \tilde{\$} \alpha^{-1}$. Man finder da

$$\Phi(\alpha) = \varphi(\alpha) \tilde{\$}^* \varphi(\alpha) \tilde{\$}^* \varphi(\alpha)^{-1} = \varphi(\alpha).$$

Dermed er beviset for udvidelsessætningen afsluttet.

Ved de anvendelser, der vil blive gjort af denne sætning, giver det ikke anledning til misforståelser, når $(\tilde{H},\tilde{\$})$ "identificeres" med den givne halvgruppe $(H,\$)$ og kompositionen i G i overensstemmelse hermed betegnes med \$. I stedet for kl(a \$ x,x) skrives simpelthen a, og de omtalte fremstillinger af elementerne i G skrives $a \$ b^{-1}$, $a,b \in H$.

Udvidelsessætningen kan anvendes på mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal på to forskellige måder; idet $(\mathbb{N},+)$ er en kommutativ halvgruppe ifølge sætningerne 4-6 (side II,1,4-5), og $(\mathbb{N},\cdot)$ er en kommutativ halvgruppe ifølge sætningerne 11-13 (side II,1,7).

Ved udvidelse af $(\mathbb{N},+)$ fås en gruppe $(\mathbb{Z},+)$, hvis elementer kaldes de <u>hele tal</u>. I overensstemmelse med, at kompositionerne $\$$ og $\tilde{\$}$ nu skrives $+$, betegnes det neutrale element i $(\mathbb{Z},+)$ med 0 og det til et element $\alpha \in \mathbb{Z}$ inverse, det modsatte til α, med $-\alpha$. Hverken 0 eller det modsatte til et element i $\mathbb{N}$ tilhører $\mathbb{N}$, idet $0 \in \mathbb{N}$ ville føre til en modstrid ifølge sætning 15 (side II, 1,6), og $a, -a \in \mathbb{N}$ ville give $0 = a+(-a) \in \mathbb{N}$. Hvert element $\gamma \in \mathbb{Z}$ har en fremstilling af formen $\gamma = b+(-a)$, hvor $a,b \in \mathbb{N}$. Dette betyder, at γ er løsningen til ligningen $\xi + a = b$ og kan derfor også skrives $\gamma = b-a$. Hvis $a \neq b$, har man ifølge sætning 8 (side II,1,5) enten $b-a \in \mathbb{N}$ eller $a-b \in \mathbb{N}$, men ikke begge dele. I det sidste tilfælde er $\gamma = -(a-b)$. Dette viser, at hvert fra 0 forskelligt element i $\mathbb{Z}$ er enten et element $c \in \mathbb{N}$ eller det modsatte $-c$ til et element $c \in \mathbb{N}$. De førstnævnte elementer kaldes <u>positive hele tal</u>, og deres mængde betegnes også $\mathbb{Z}_+$, de sidstnævnte kaldes <u>negative hele tal</u>, og deres mængde betegnes med $\mathbb{Z}_-$. Man har

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+,$$

hvor de tre mængder på højre side er disjunkte. Ved $\gamma \to -\gamma$ defineres en involutorisk, altså specielt bijektiv afbildning af $\mathbb{Z}$ på sig selv, ved hvilken 0 er fixelement, Z_+ afbildes på Z_- og Z_- på Z_+.

Den i $\mathbb{N}$ indførte ordningsrelation $<$ kan udvides til $\mathbb{Z}$, således at sætning 16 (men ikke sætning 15, side II,1,8) forbliver gyldig. Til dette formål defineres for $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ relationen $<$ v

$$\alpha < \beta \iff \beta-\alpha \in \mathbb{Z}_+.$$

Den er en ikke-refleksiv ordningsrelation, idet $\alpha - \alpha = 0 \notin \check{Z}_+$ og

$$\beta - \alpha \in \check{Z}_+ \wedge \gamma - \beta \in \check{Z}_+ \Rightarrow \gamma - \alpha = (\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) \in \check{Z}_+.$$

Af $(\beta+\gamma)-(\alpha+\gamma) = \beta-\alpha$ for alle $\alpha, \beta, \gamma \in \check{Z}$ sluttes, at

$$\alpha < \beta \iff \alpha+\gamma < \beta+\gamma.$$

For den modsatte ordning $>$ har man

$$\alpha > \beta \iff -(\beta-\alpha) = \alpha-\beta \in \check{Z}_+.$$

Heraf sluttes, at den omtalte involutoriske afbildning $\gamma \to -\gamma$ er en ordenstro afbildning af $(\check{Z},<)$ på $(\check{Z},>)$.

Hver nedad (opad) begrænset delmængde af $(\check{Z},<)$ har et første (sidste) element.

Bevis: Idet $(\check{Z},<)$ kan afbildes ordenstro på $(\check{Z},>)$, er det tilstrækkeligt at bevise en af de to påstande. Lad M være en nedad begrænset delmængde af $\check{Z}$ og μ en minorant for den. Hvis $\mu \in M$, er μ første element i M og påstanden altså rigtig. Hvis $\mu \notin M$, har man

$$M \subseteqq \{\gamma \in \check{Z} \mid \mu < \gamma\} = L.$$

Hvert element $\gamma \in L$ kan på en og, ifølge forkortningsreglen, kun een måde skrives $\gamma = \mu + c$, hvor $c \in \check{N}$; og omvendt, for hvert $c \in \check{N}$ er $\mu + c \in L$. Begge dele følger af, at $\mu < \gamma$ er ensbetydende med $\gamma - \mu \in \check{N}$. Ved $c \to \mu + c$ defineres følgelig en bijektiv afbildning af $\check{N}$ på L. Denne er ordenstro, idet $c_1 < c_2$ er ensbetydende med $\mu+c_1 < \mu+c_2$. Den givne mængde $M \subseteqq L$ er billede af en delmængde af $\check{N}$. Da denne har et første element og afbildningen er ordenstro, gælder det samme om M, hvilket skulle bevises.

Ved hjælp af sætning a (side II,1,9) sluttes af det viste: Hvert element i $(\check{Z},<)$ har et umiddelbart forudgående og et umiddelbart efterfølgende.

Der mangler endnu udvidelsen af den i $\check{N}$ indførte multiplikation til $\check{Z}$. (Herved er det vigtigt at have for øje, at de velkendte regler for addition og subtration vides at være gyldige i gruppen $\check{Z}$, medens der for multiplikationens vedkommende kun må benyttes, at $(\check{N},\cdot)$ er en halvgruppe. Som hidtil betegnes elementer i $\check{N}$ med latinske og elementer i $\check{Z}$, om hvilke det ikke vides, om de tilhører $\check{N}$, med græske bogstaver.)

Idet elementer $\alpha,\beta \in \check{Z}$ har fremstillinger

$$\alpha = a_1-a_2, \qquad \beta = b_1-b_2, \qquad a_1,a_2,b_1,b_2 \in \check{N},$$

må produktet $\alpha\beta$ defineres ved

$$\alpha\beta = (a_1b_1+a_2b_2) - (a_1b_2+a_2b_1),$$

idet de sædvanlige regneregler jo ønskes opfyldt. Men en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at der herved overhovedet defineres en komposition i $\check{Z}$, er, at den højre side er uafhængig af de valgte fremstillinger af α og β som differenser af naturlige tal. Det skal altså bevises, at

$$a_1+a_2' = a_2+a_1', \qquad b_1+b_2' = b_2+b_1'$$

medfører, at

$$(a_1b_1+a_2b_2) + (a_1'b_2'+a_2'b_1') = (a_1b_2+a_2b_1) + (a_1'b_1'+a_2'b_2').$$

Det elementære, men ikke helt oplagte bevis skal ikke gennemføres her (se øv. 5).

Når $\alpha = a \in \check{N}$ og $\beta = b \in \check{N}$, stemmer det ovenfor definerede produkt $\alpha\beta$ overens med produktet ab i $\check{N}$. Man har nemlig fremstillinger $\alpha = (a+x)-x$ og $\beta = (b+y)-y$ og finder

$$\alpha\beta = [(a+x)(b+y)+xy] - [(a+x)y+x(b+y)]$$
$$= [ab+ay+xb+xy+xy] - [ay+xy+xb+xy],$$

altså en fremstilling af ab som differens af to naturlige tal.

Det verificeres uden vanskelighed, at den indførte multiplikation i $\check{Z}$ er <u>kommutativ</u>, <u>associativ</u> og <u>distributiv</u> med hensyn til additionen i $\grave{Z}$. Heraf følger specielt, at

$$\alpha\cdot 0 = 0$$

for alle $\alpha \in \grave{Z}$, idet $\alpha\cdot 0 = \alpha(0+0) = \alpha\cdot 0+\alpha\cdot 0$; endvidere

$$(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -(\alpha\beta),$$

idet $(-\alpha)\beta+\alpha\beta = (-\alpha+\alpha)\beta = 0\cdot\beta = 0$ og $\alpha(-\beta)+\alpha\beta =$ $\alpha(-\beta+\beta) = \alpha\cdot 0 = 0$, samt

$$(-\alpha)(-\beta) = -(\alpha(-\beta)) = -(-(\alpha\beta)) = \alpha\beta.$$

Der gælder endvidere

$$(\alpha-\beta)\gamma = \alpha\gamma-\beta\gamma,$$

idet $(\alpha+(-\beta))\gamma = \alpha\gamma+(-\beta)\gamma = \alpha\gamma+(-(\beta\gamma)) = \alpha\gamma-\beta\gamma$.
Tallet $1 \in \grave{N}$ er <u>neutralt element</u>; thi $\alpha\cdot 1 = \alpha$, når $\alpha \in \grave{N}$ og når $\alpha = 0$, og ellers er $-\alpha \in \grave{N}$ og følgelig $\alpha\cdot 1 = -(-(\alpha\cdot 1)) =$ $-((-\alpha)\cdot 1) = -(-\alpha) = \alpha$.

For multiplikationen i $\grave{Z}$ gælder <u>nulreglen</u>

$$\alpha\xi = 0 \wedge \alpha \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \xi = 0.$$

Er nemlig $\alpha = a_1-a_2$ og $\xi = x_1-x_2$, vil $\alpha\xi = 0$ være ensbetydende med $a_1x_1+a_2x_2 = a_1x_2+a_2x_1$, og da $\alpha \neq 0$, er enten $a_1-a_2 = c$ eller $a_2-a_1 = c$, hvor $c \in \grave{N}$. Indsættes $a_1 = c+a_2$, fås

$$cx_1+a_2x_1+a_2x_2 = cx_2+a_2x_2+a_2x_1,$$

heraf ved hjælp af forkortningsreglen for additionen $cx_1 = cx_2$ og heraf $x_1 = x_2$, idet forkortningsreglen gælder for multiplikationen i $\grave{N}$. Tilsvarende sluttes i det andet tilfælde. Af nulreglen følger

$$\alpha\gamma = \beta\gamma \wedge \gamma \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha = \beta,$$

idet $0 = \alpha\gamma-\beta\gamma = (\alpha-\beta)\gamma$ medfører $\alpha-\beta = 0$. Endelig nævnes, at

$$\alpha < \beta \wedge 0 < \gamma \quad\Rightarrow\quad \alpha\gamma < \beta\gamma,$$

hvilket følger af, at $\beta-\alpha \in \grave{N}$ og $\gamma \in \grave{N}$ medfører $\beta\gamma-\alpha\gamma =$ $(\beta-\alpha)\gamma \in \grave{N}$.

Idet man ved en <u>ordnet ring</u> forstår en (ikke nødvendigvis kommutativ) ring $(M,+,\cdot,<)$, hvori der er defineret en total ordningsrelation $<$, således at der for $a,b,c \in M$ gælder

$$a < b \Rightarrow a+c < b+c,$$

$$a < b \wedge 0 < c \Rightarrow ac < bc \wedge ca < cb,$$

hvor 0 betegner ringens nulelement, kan de fundne resultater sammenfattes på følgende måde:

$(\grave{Z},+,\cdot,<)$ er en kommutativ ordnet ring med etelement, i hvilken nulreglen gælder [altså en integritetsring (integritetsområde)], og hvor hver nedad eller opad begrænset delmængde har henholdsvis et første eller sidste element. Mængden $\grave{N}$ af naturlige tal er delmængden $\{\xi \mid 0 < \xi\}$ af $\grave{Z}$, og af to modsatte, fra 0 forskellige elementer af $\grave{Z}$ er netop eet indeholdt i $\grave{N}$.

På grundlag af disse egenskaber ved de hele tal kan bl.a. den elementære talteori udvikles. Med henblik på senere anvendelser fremhæves nogle begreber og sætninger: Division med rest, største fælles divisor og mindste fælles multiplum, primtal, talteoriens hovedsætning om den entydige primtalopløsning (se AT §2); endvidere, at restklasserne modulo et tal $m \in \grave{N}$ danner en ring, og at denne er et legeme, hvis og kun hvis m er et primtal (se AT §2,17).

Det næste skridt i talsystemets opbygning består i udvidelsen af ringen $(\grave{Z},+,\cdot)$ til de rationale tals legeme $(\grave{Q},+,\cdot)$. Det drejer sig her om en anvendelse af sætningen om eksistens og entydighed (på nær isomorfi) af et kvotientlegeme for en kommutativ ring, i hvilken nulreglen gælder (AT § 1,17-19). Her skal tilføjes et bevis for, at ordningsrelationen i $\grave{Z}$ kan udvides til en ordningsrelation i $\grave{Q}$, samt en undersøgelse af dennes vigtigste egenskaber. Da tilsvarende betragtninger vil finde anvendelse i andre tilfælde, indskydes nogle definitioner og sætninger vedrørende vilkårlige legemer.

Først bemærkes, at man ved hjælp af sætning 24 (side II, 1,13) i en vilkårlig mængde $(M,\$)$ med en komposition kan definere potenser med naturlige tal som eksponenter. Lad α være et element af M. Ved $\xi \to \xi \, \$ \, \alpha$ defineres en afbildning $\varphi : M \to M$. Sætning 24 med $\Omega = M$ udsiger da, at der findes en og kun een afbildning $f : \grave{N} \to M$, for hvilken

$$f(1) = \alpha, \qquad f(i+1) = f(i) \, \$ \, \alpha \qquad \text{for } i \in \grave{N}.$$

Sættes $f(i) = \alpha^i$, har man altså

$$\alpha^1 = \alpha, \qquad \alpha^{i+1} = \alpha^i \, \$ \, \alpha \qquad \text{for } i \in \grave{N}.$$

Er $\$$ associativ, kan man nu bevise potensreglen

$$\alpha^m \, \$ \, \alpha^n = \alpha^{m+n} \qquad \text{for } m,n \in \grave{N}.$$

Lad $m \in \grave{N}$ være vilkårlig valgt. For $n = 1$ er påstanden rigtig ifølge definition. Antag, at påstanden er rigtig for n. Da har man

$$\alpha^m \, \$ \, \alpha^{n+1} = \alpha^m \, \$ (\alpha^n \, \$ \, \alpha) = (\alpha^m \, \$ \, \alpha^n) \, \$ \, \alpha$$
$$= \alpha^{m+n} \, \$ \alpha = \alpha^{m+n+1}.$$

Dermed er potensreglen bevist. Forudsættes nu desuden, at der findes et neutralt element $\varepsilon \in M$, og at α er invertibel (regulær), kan man definere $\alpha^0 = \varepsilon$ og $\alpha^p = (\alpha^{-1})^{-p}$ for $p \in \grave{Z}_-$ og derefter bevise potensreglerne

$$\alpha^p \, \$ \, \alpha^q = \alpha^{p+q}, \qquad (\alpha^p)^q = \alpha^{pq} \qquad \text{for } p,q \in \grave{Z}$$

(se AG,side II,2,3-5).

Skrives kompositionerne som addition og $p\alpha$ i stedet for α^p, har man altså

$$p\alpha + q\alpha = (p+q)\alpha, \qquad q(p\alpha) = (qp)\alpha \qquad \text{for } p,q \in \grave{Z}.$$

Specielt gælder dette for alle elementer i en ring $(M,+,\cdot)$, idet disse jo er invertible med hensyn til additionen. Derudover har man for $\alpha,\beta \in M$ og $p \in \grave{Z}$

$$(p\alpha)\beta = \alpha(p\beta) = p(\alpha\beta).$$

(Bemærk, at der her indgår to forskellige kompositionsforskrifter, nemlig dels multiplikationen i M, som er en afbildning af $M \times M$ ind i M, og "multiplikationen" af et helt tal med et ringelement, som er en afbildning af $\grave{Z} \times M$ ind i M.) Påstanden er øjensynlig rigtig for $p = 0$. For $p > 0$ bevises den ved induktion. For $p = 1$ er den rigtig, idet $1 \cdot \alpha = \alpha$, $1 \cdot \beta = \beta$ og $1 \cdot (\alpha\beta) = \alpha\beta$. Antag, at den er rigtig for $p > 0$. Da er

$$\begin{aligned}((p+1)\alpha)\beta &= (p\alpha+\alpha)\beta = (p\alpha)\beta + \alpha\beta \\ &= p(\alpha\beta)+1\cdot\alpha\beta = (p+1)(\alpha\beta),\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\alpha((p+1)\beta) &= \alpha(p\beta+\beta) = \alpha(p\beta)+\alpha\beta \\ &= p(\alpha\beta)+1\cdot\alpha\beta = (p+1)\alpha\beta.\end{aligned}$$

For $p < 0$ har man $p\alpha = -((-p)\alpha) = (-1)((-p)\alpha)$,
altså

$$(p\alpha)\beta = (-1)[((-p)\alpha)\beta] = (-1)[(-p)(\alpha\beta)] = (-p)(\alpha\beta),$$

og tilsvarende sluttes i det andet tilfælde. Ved at anvende det fundne resultat to gange fås for $\alpha, \beta \in M$ og $p, q \in \grave{Z}$

$$(p\alpha)(q\beta) = (pq)(\alpha\beta).$$

Lad nu $(M,+,\cdot)$ være et vilkårligt, ikke nødvendigvis kommutativt legeme, om hvilket det blot forudsættes, at det indeholder mindst to forskellige elementer. Dette vil sige, at $(M,+)$ er en kommutativ gruppe, $(M\setminus\{\nu\},\cdot)$, hvor ν er nulelementet, d.v.s. additionens neutrale element, er en gruppe, og multiplikationen er distributiv med hensyn til additionen. Man har da $\varepsilon \neq \nu$, hvor ε betegner etelementet, d.v.s. multiplikationens neutrale element; thi var $\varepsilon = \nu$, ville man for hvert $\alpha \in M$ have $\alpha\varepsilon = \alpha\nu = \nu$, i strid med, at M har to forskellige elementer.

Det mindste dellegeme af $(M,+,\cdot)$, som indeholder ε, altså fællesmængden af alle dellegemer, som indeholder ε, kaldes <u>primlegemet</u> i $(M,+,\cdot)$ og betegnes med $(M_0,+,\cdot)$. Det kan bestemmes på følgende måde. Idet $(M_0,+)$ er en gruppe, må hele den af ε frembragte cykliske undergruppe

$$C = \{p\varepsilon \mid p \in \grave{Z}\}$$

tilhøre M_0. Idet

$$(p\varepsilon)(q\varepsilon) = (pq)\varepsilon \in C \qquad \text{for } p,q \in \grave{Z},$$

er $(C,+,\cdot)$ en delring af $(M_0,+,\cdot)$. Ved $p \to p\varepsilon$ bestemmes en homomorf afbildning af $(\grave{Z},+,\cdot)$ på $(C,+,\cdot)$. Nu er kernen ved en homomorf afbildning af $(\grave{Z},+,\cdot)$ af formen $(m\grave{Z},+,\cdot)$, hvor m er et ikke-negativt helt tal og $m\grave{Z} = \{mp \mid p \in \grave{Z}\}$. Hvis $m = 0$, altså $m\grave{Z} = \{0\}$, foreligger en isomorfi. Tilfældet $m = 1$ kan ikke forekomme, da C indeholder mindst to forskellige elementer, nemlig $0\cdot\varepsilon = \nu$ og $1\cdot\varepsilon = \varepsilon$. For $m > 1$ er $(C,+,\cdot)$ isomorf med restklasseringen $(\grave{Z} \bmod m,+,\cdot)$. Da nulreglen gælder i $(M,+,\cdot)$, altså specielt i $(C,+,\cdot)$, må m være et primtal. Men så er $(\grave{Z} \bmod m,+,\cdot)$ og dermed også $(C,+,\cdot)$ et legeme. I dette tilfælde er altså $(C,+,\cdot) = (M_0,+,\cdot)$. I tilfældet $m = 0$, hvor $(C,+,\cdot)$ er isomorf med $(\grave{Z},+,\cdot)$, altså en kommutativ delring af $(M_0,+,\cdot)$, må kvotientlegemet af $(C,+,\cdot)$ tilhøre og følgelig være lig med $(M_0,+,\cdot)$. (Se AT § 1, side 15-16, hvor dette ganske vist kun er påstået for en delring i et kommutativt legeme, og det vides ikke på forhånd om $(M_0,+,\cdot)$ er kommutativ. Men i beviset benyttes kun, at delringen er kommutativ.) Da $(C,+,\cdot)$ er isomorf med $(\grave{Z},+,\cdot)$, er kvotientlegemet isomorft med $(\grave{Q},+,\cdot)$. Dermed er vist:

<u>Et legemes primlegeme er enten isomorft med de rationale tals legeme, og legemet siges da at have karakteristik 0, eller isomorft med restklasselegemet modulo et primtal m, og legemet siges da at have karakteristik m.</u>

I et legeme med karakteristik $m \geq 0$ gælder for hvert element $\alpha \neq \nu$ og $p \in \grave{Z}$, at

$$p\alpha = \nu \iff m|p,$$

hvilket for m = 0 betyder, at p = 0. Dette aflæses af omskrivningen $p\alpha = (p\varepsilon)\alpha$.

Det er klart, at hvert legeme med endelig mange elementer, kort et <u>endeligt legeme</u>, har en karakteristisk $m > 0$. Man kan vise, at antallet af elementer i et sådant legeme er en potens af primtallet m, og endvidere at der for hver primtalpotens m^h, $h \in \mathring{N}$, findes et og på isomorfi nær kun et kommutativt legeme med m^h elementer. Der gælder følgende sætning først bevist af <u>J.H.M. Wedderburn</u> (1905): <u>Hvert endeligt legeme er kommutativt.</u> Beviset kan ikke gennemføres her.

Ved et <u>ordnet legeme</u> $(L,+,\cdot,<)$ forstås et legeme, hvori der er defineret en total ikke-refleksiv ordningsrelation $<$, således at der for $\alpha,\beta,\gamma \in L$ gælder

(1) $$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

(2) $$\alpha < \beta \wedge \nu < \gamma \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma \wedge \gamma\alpha < \gamma\beta,$$

hvor ν betegner legemets nulelement.

Ved at anvende (1) to gange fås

$$\alpha < \beta \wedge \gamma < \delta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta,$$

specielt

$$\nu < \beta \wedge \nu < \delta \Rightarrow \nu < \beta + \delta.$$

Ved at anvende (2) to gange fås

$$\nu < \alpha < \beta \wedge \nu < \gamma < \delta \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\delta,$$

og af (2) for $\alpha = \nu$ sluttes, at

$$\nu < \beta \wedge \nu < \gamma \Rightarrow \nu < \beta\gamma.$$

Ved hjælp af (1) med henholdsvis $\gamma = -\alpha + (-\beta)$ og $\gamma = \alpha + \beta$ fås

$$\alpha < \beta \iff -\beta < -\alpha,$$

specielt

$$\nu < \beta \iff -\beta < \nu .$$

Af disse resultater sluttes, at legemets fra ν forskellige elementer kan fordeles på to disjunkte mængder

$$L_+ = \{\xi \mid \nu < \xi\}, \qquad L_- = \{\xi \mid \xi < \nu\},$$

således at for hvert $\alpha \neq 0$ netop eet af elementerne α og $-\alpha$ hører til L_+ og det andet til L_-, og at

$$\alpha, \beta \in L_+ \Rightarrow \alpha + \beta \in L_+ \wedge \alpha\beta \in L_+ .$$

Elementerne i L_+ kaldes <u>positive</u> og elementerne i L_- <u>negative</u>.

Når man skal bevise, at et forelagt legeme $(L,+,\cdot)$ kan ordnes til et ordnet legeme, kan følgende bemærkning være nyttig.

<u>Hvis mængden L af elementer i et legeme</u> $(L,+,\cdot)$ <u>kan indeles i disjunkte delmængder</u> L_-, $\{\nu\}$, L_+, <u>således at netop eet af to modsatte, fra ν forskellige elementer tilhører</u> L_+, og at

$$\alpha, \beta \in L_+ \Rightarrow \alpha + \beta \in L_+ \wedge \alpha\beta \in L_+ ,$$

<u>så kan der i</u> L <u>defineres en relation</u> $<$, <u>således at</u> $(L,+,\cdot,<)$ <u>bliver et ordnet legeme</u>, <u>og at</u> L_+ og L_- <u>bliver henholdsvis mængden af positive og mængden af negative elementer i</u> L.

Bevis: Den ved

$$\alpha < \beta \iff \beta - \alpha \in L_+$$

definerede relation $<$ i L er ikke-refleksiv, idet $\alpha - \alpha = \nu \notin L_+$; den er transitiv, idet

$$\beta - \alpha \in L_+ \wedge \gamma - \beta \in L_+ \Rightarrow \gamma - \alpha = (\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) \in L_+ ;$$

og den er total, idet der for $\alpha \neq \beta$ gælder $\beta - \alpha \in L_+$ eller $-(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in L_+$. Ifølge definitionen er endvidere

$$\nu < \beta \iff \beta - \nu = \beta \in L_+$$

og

$$\alpha < \nu \iff \alpha \notin \{\nu\} \cup L_+ \iff \alpha \in L_- .$$

Endelig viser

$$\beta - \alpha \in L_+ \Rightarrow (\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma) = \beta - \alpha \in L_+$$

og

$$\beta - \alpha \in L_+ \wedge \gamma \in L_+ \Rightarrow \begin{cases} \beta\gamma - \alpha\gamma = (\beta-\alpha)\gamma \in L_+ \\ \gamma\beta - \gamma\alpha = \gamma(\beta-\alpha) \in L_+ \end{cases}$$

gyldigheden af (1) og (2).

Som en anvendelse heraf udvides den i ringen $(\grave{Z},+,\cdot)$ indførte ordning < til kvotientlegemet $(\grave{Q},+,\cdot)$. Elementer i $\grave{Z}$, altså hele tal, betegnes med latinske og elementer i $\grave{Q}$, altså rationale tal, med græske bogstaver. Hvert element i $\grave{Q}$ er en ækvivalensklasse af par af hele tal, hvoraf det andet er forskelligt fra 0, og disse par skrives som brøker. To par a_1/a_2 og a_1'/a_2' hører til sammme klasse, hvis og kun hvis $a_1a_2' = a_2a_1'$. Er $\alpha = \text{kl } a_1/a_2$ og $\beta = \text{kl } b_1/b_2$, har man ifølge definitionen

$$\alpha + \beta = \text{kl } \frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_2b_2}, \quad \alpha\beta = \text{kl } \frac{a_1b_1}{a_2b_2}.$$

For i $\grave{Q}$ at definere mængden $\grave{Q}_+$ af positive og mængden $\grave{Q}_-$ af negative tal, bemærkes følgende. Hvis det for en repræsentant a_1/a_2 af en klasse af brøker gælder, at $a_1a_2 > 0$ (< 0), vil det tilsvarende gælde for enhver anden repræsentant a_1'/a_2', dvs.

$$a_1a_2' = a_2a_1' \wedge \begin{cases} 0 < a_1a_2 \Rightarrow 0 < a_1'a_2' \\ a_1a_2 < 0 \Rightarrow a_1'a_2' < 0 \end{cases}.$$

Dette ses således: Idet $a_2' \neq 0$ og ifølge forudsætning også $a_1 \neq 0$, er

$$0 < (a_1a_2')^2 = a_1a_2'a_2a_1' = (a_1a_2)(a_1'a_2')$$

altså enten $0 < a_1a_2$ og $0 < a_1'a_2'$ eller $a_1a_2 < 0$ og $a_1'a_2' < 0$.

(Herved er benyttet, at $0 < p^2$ for hvert $p \neq 0$, hvilket følger umiddelbart, hvis $0 < p$, og ved hjælp af omskrivningen $p^2 = (-p)^2$, hvis $p < 0$; endvidere at

$$0 < pq \Rightarrow (0 < p \wedge 0 < q) \vee (p < 0 \wedge q < 0)$$

hvilket følger af, at $0 < p$ og $0 < -q$ eller $0 < -p$ og $0 < q$ ville medføre $0 < -pq$ i strid med det givne.)

Herefter kan defineres

$$\dot{Q}_+ = \{ \text{kl } a_1/a_2 \mid 0 < a_1 a_2 \}, \quad \dot{Q}_- = \{ \text{kl } a_1/a_2 \mid a_1 a_2 < 0 \}.$$

Da kl a_1/a_2 er nulelementet 0 i $\dot{Q}$, hvis og kun hvis $a_1 = 0$, altså på grund af $a_2 \neq 0$, hvis og kun hvis $a_1 a_2 = 0$, hører hvert element af $\dot{Q}$ til netop een af mængderne $\dot{Q}_-$, $\{0\}$, $\dot{Q}_+$. Af to modsatte, fra 0 forskellige elementer kl a_1/a_2 og kl $-a_1/a_2$ vil et tilhøre $\dot{Q}_+$ og det andet $\dot{Q}_-$. Endelig ses, at

$$\alpha = \text{kl } a_1/a_2 \in \dot{Q}_+ \wedge \beta = \text{kl } b_1/b_2 \in \dot{Q}_+$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta \in \dot{Q}_+ \wedge \alpha\beta \in Q_+;$$

thi af $0 < a_1 a_2$ og $0 < b_1 b_2$ følger

$$0 < a_1 a_2 b_2^2 + a_2^2 b_1 b_2 = (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, a_2 b_2$$

og

$$0 < a_1 a_2 b_1 b_2 = (a_1 b_1)(a_2 b_2).$$

Ovenstående sætning viser altså, at der i $\dot{Q}$ kan defineres en ordning $\prec$, ved hvilken $(\dot{Q},+,\cdot,\prec)$ bliver til et ordnet legeme, således at $\dot{Q}_+$ og $\dot{Q}_-$ er henholdsvis mængden at positive og mængden af negative elementer. At denne ordnings restriktion til $\dot{Z}$ stemmer overens med $<$, følger af, at et helt tal a i $\dot{Q}$ er repræsenteret ved $a/1$ og $0 \prec a$ er ensbetydende med $0 < a \cdot 1 = a$. Man kan altså uden fare for misforståelser skrive $<$ i stedet for $\prec$.

Dermed er vist, at $\dot{Q}$ kan ordnes til et ordnet legeme.

Lad $(L,+,\cdot,\prec)$ være et ordnet legeme, ν dets nulelement og ε dets etelement . Da er

$$\nu \prec \varepsilon;$$

thi var $\varepsilon \prec \nu$, havde man $\nu \prec -\varepsilon$, altså $\nu \prec (-\varepsilon)(-\varepsilon) = \varepsilon^2 = \varepsilon$. Heraf kan sluttes, at for $p \in \check{Z}$ gælder

$$0 < p \iff \nu \prec p\varepsilon.$$

At $\Rightarrow$ er rigtig, ses ved induktion. For $p = 1$, er det bevist, og hvis $\nu \prec p\varepsilon$, haves

$$\nu = \nu + \nu \prec p\varepsilon + 1\cdot\varepsilon = (p+1)\varepsilon.$$

At $\Leftarrow$ er rigtig, ses således: Af $\nu \prec p\varepsilon$ følger $p \neq 0$. Var $p < 0$, havde man $0 < -p$, altså ifølge det allerede viste $\nu \prec (-p)\varepsilon = -(p\varepsilon)$ i strid med det givne.

Specielt er altså $p\varepsilon \neq \nu$ for $p > 0$. Heraf følger:

<u>Hvert ordnet legeme har karakteristik 0</u>.

Det ordnede legeme $(L,+,\cdot,\prec)$ har altså et med $(\check{Q},+,\cdot)$ isomorft primlegeme $(L_0,+,\cdot)$, som er kvotientlegeme for den med $(\check{Z},+,\cdot)$ isomorfe delring bestående af elementerne $p\varepsilon$, $p \in \check{Z}$. Elementerne i L_0 kan altså skrives på formen $(p\varepsilon)(q\varepsilon)^{-1}$, hvor $p,q \in \check{Z}$, $q \neq 0$. Det skal vises, at isomorfien $p/q \to (p\varepsilon)(q\varepsilon)^{-1}$ af $(\check{Q},+,\cdot)$ på $(L_0,+,\cdot)$ er en ordenstro afbildning af $(\check{Q},+,\cdot,\prec)$ på $(L_0,+,\cdot,\prec)$. Dette går ud på, at man af $0 < pq$ kan slutte, at $\nu < (p\varepsilon)(q\varepsilon)^{-1}$, og omvendt. Af det ovenfor viste ses, at

$$0 < pq \iff \nu \prec (pq)\varepsilon = (p\varepsilon)(q\varepsilon) = (p\varepsilon)(q\varepsilon)^{-1}(q\varepsilon)^2.$$

Desuden haves $\nu \prec ((q\varepsilon)^{-1})^2$. Påstanden følger da ved multiplikation. Vi har altså:

<u>I hvert ordnet legeme er primlegemet ordenstro isomorft med de rationale tals legeme.</u>

Der er derfor ikke noget i vejen for i et ordnet legeme at identificere primlegemet med de rationale tals legeme og at betegne ordningsrelationen som i dette. I det følgende tænkes dette gjort og der tales om naturlige, hele og rationale tal i et ordnet legeme.

I et ordnet legeme $(L,+,\cdot,<)$ defineres den <u>absolutte</u> <u>værdi</u> af et element a ved

$$|a| = \max\{a,-a\},$$

altså $|a| = a$ for $0 \leqq a$ og $|a| = -a$ for $a \leqq 0$. Der gælder øjensynlig

$$0 \leqq |a|, \quad |-a| = |a|, \quad -|a| \leqq \begin{Bmatrix} a \\ -a \end{Bmatrix} \leqq |a|.$$

Ved at anvende det sidste på a og b fås

$$-(|a| + |b|) \leqq \begin{Bmatrix} a + b \\ -(a + b) \end{Bmatrix} \leqq |a| + |b|,$$

altså

$$|a + b| \leqq |a| + |b|.$$

Heraf sluttes videre, at $|b| = |a + b - a| \leqq |a| + |b - a|$. Dette og uligheden, der fås ved at ombytte a og b, giver

$$||b| - |a|| \leqq |b - a|.$$

Endvidere gælder

$$|ab| = |a||b|.$$

For $a = 0$ eller $b = 0$ er dette klart, og ellers aflæses det af den af den venstre sides fremstillinger $|ab| = |(-a)b| = |a(-b)| = |(-a)(-b)|$, hvor begge faktorer er positive. Anvendes dette for $b = a^{-1}$, fås

$$|a^{-1}| = |a|^{-1}.$$

Med henblik på en anvendelse bemærkes, at der i et ordnet legeme gælder

$$0 < a \iff 0 < a^{-1}, \quad 0 < a < b \iff 0 < b^{-1} < a^{-1}.$$

At $\Leftarrow$ er rigtig for den første påstand, ses ved at multiplicere med a^2, som vides at være positiv, og $\Rightarrow$ fås ved at anvende $\Leftarrow$ på a^{-1} i stedet for a. At $\Leftarrow$ er rigtig for den anden påstand, ses ved at multiplicere med ab, hvilket er positivt, idet $0 < a^{-1}$ og $0 < b^{-1}$ medfører $0 < a$ og $0 < b$. Derefter fås $\Rightarrow$ ved at anvende $\Leftarrow$ med a^{-1} og b^{-1} i stedet for b og a.

En mængde M siges at være <u>tæt ordnet</u> ved en total ikke-refleksiv ordningsrelation $\prec$, hvis der til hvilkesomhelst elementer $a,b \in M$, for hvilke $a \prec b$, findes et element c i M, således at $a \prec c \prec b$.

Hvert ordnet legeme $(L,+,\cdot,<)$ er tæt ordnet ved $<$, idet man for to elementer a og b i L, hvor $a < b$, har $a < \frac{1}{2}(a + b) < b$.

Et ordnet legeme $(L,+,\cdot,<)$ siges at være <u>eudoxisk</u> eller <u>arkimedisk ordnet</u>, hvis der til hvert element a i L findes et naturligt tal n, således at $a < n$.

Det er klart, at $(\mathbf{Q},+,\cdot,<)$ er arkimedisk ordnet.

Det ses let, at et ordnet legeme $(L,+,\cdot,<)$ er arkimedisk ordnet, hvis og kun hvis der til hvilkesomhelst elementer a og b, for hvilke $0 < b < a$, findes et naturligt tal n, således at $a < nb$.

<u>Et ordnet legeme</u> $(L,+,\cdot,<)$ <u>er arkimedisk ordnet, hvis og kun hvis der til hvilkesomhelst elementer</u> a <u>og</u> b, <u>for hvilke</u> $a < b$, <u>findes et rationalt tal</u> r, <u>således at</u> $a < r < b$ (<u>hvis og kun hvis de rationale tal "ligger overalt tæt" i</u> L).

Bevis: At betingelsen er tilstrækkelig, er indlysende; thi, hvis den er opfyldt, findes der et rationalt tal p/q, $p,q \in \mathbf{Z}$, $0 < q$, således at $a < p/q < a + 1$, og da $1 \leq q$, er $p/q \leq p$, altså $a < p$.

Betingelsens nødvendighed ses således. Idet ordningen er arkimedisk, findes der et naturligt tal n, således at $0 < (b - a)^{-1} < n$, altså

$$1/n < b - a.$$

Endvidere findes der hele tal p, således at $na < p$. Lad m være det mindste af disse tal. (Et sådant findes, idet der eksisterer et naturligt tal r, således at $-na < r$, altså $-r < na < p$.) For dette tal m har man

$$(m - 1)/n \leqq a < m/n,$$

altså

$$m/n \leqq a + 1/n < a + (b - a) = b,$$

altså i alt $a < m/n < b$. Hermed er påstanden bevist.

Hvert arkimedisk ordnet legeme er kommutativt.

Bevis: Antag, at der findes to elementer a og b i legemet, for hvilke $ab \neq ba$. Det kan yderligere antages, at a, b og $ab - ba$ er positive, idet dette, om fornødent, kan opnås ved fortegnskifte og ombytning af betegnelserne. Der findes et naturligt tal n, således at

$$a + b + 1 < n(ab - ba).$$

Lad p være det mindste af de naturlige tal m, for hvilke $na < m$, og q det mindste af de naturlige tal m, for hvilke $nb < m$. Da har man

$$p - 1 \leqq na < p, \qquad q - 1 \leqq b < q,$$

altså

$$n^2ab < pq, \qquad -n^2ba \leqq -(p - 1)(q - 1),$$

hvoraf ved addition og multiplikation med $1/n$

$$n(ab - ba) < (p + q - 1)/n \leqq a + b + 1/n \leqq a + b + 1.$$

Dette strider imidlertid mod bestemmelsen af n.

Øvelser til kap.II, § 2.

1. I mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal defineres en komposition $\$$ ved
$$a \$ b = a+b+ab.$$
Vis, at $(\mathbb{N},\$)$ er en kommutativ halvgruppe, som er isomorf med $(\mathbb{N}\setminus\{1\},\cdot)$. Den gruppe, til hvilken $(\mathbb{N},\$)$ ifølge udvidelsessætningen kan udvides, er isomorf med $(Q_+,\cdot)$. Eftervis dette.

2. Ved anvendelse af udvidelsessætningen på $(\mathbb{N},\cdot)$ fås gruppen $(Q_+,\cdot)$. Vis på grundlag af de naturlige tals egenskaber, at additionen i $\mathbb{N}$ kan udvides til $\mathbb{Q}_+$, således at $(Q_+,+)$ bliver en kommutativ halvgruppe, og at multiplikationen i Q_+ bliver distributiv med hensyn til additionen.

3. Lad $(H,\$)$ være en kommutativ halvgruppe og $(G,\$)$ den tilhørende gruppe med de i udvidelsessætningen nævnte egenskaber. Vis, at $(G,\$)$ er den "mindste" udvidelse af $(H,\$)$ til en gruppe i den forstand, at hver gruppe, som har en med $(H,\$)$ isomorf delmængde, har en med $(G,\$)$ isomorf undergruppe.

4. Vis, at en totalt ordnet mængde $(M,\prec)$, som hverken har et første eller sidste element, og hvor hver nedad begrænset delmængde har et første og hver opad begrænset delmængde et sidste element, kan afbildes surjektivt og ordenstro på $(\mathbb{Z},<)$.

5. Bevis den ovenfor benyttede hjælpesætning: Hvis det for naturlige tal $a_1, a_2, a_1', a_2', b_1, b_2, b_1', b_2'$ gælder, at
$$a_1+a_2' = a_2+a_1', \qquad b_1+b_2' = b_2+b_1',$$
så er
$$(a_1b_1+a_2b_2) + (a_1'b_2'+a_2'b_1') = (a_1b_2+a_2b_1) + (a_1'b_1'+a_2'b_2').$$

6. Vis, at der kun findes een ordningsrelation i mængden $\mathbb{Z}$ af hele tal, ved hvilken $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ bliver til en ordnet ring. Vis det tilsvarende for de rationale tals legeme.

7. Vis, at de komplekse tals legeme ikke kan ordnes til et ordnet legeme.

8. Definer kompositioner + og $\cdot$ i en mængde bestående af 4 elementer, således at der opstår et legeme.

9. Et kommutativt endeligt legeme kaldes et Galoisfelt (efter É. Galois, 1811-32) og betegnes med $GF(n)$, hvis n er elementantallet. Vis, at n er en potens p^h af legemets karakteristik p. (Benyt, at hvert legeme kan opfattes som et vektorrum over sit primlegeme, og vælg en basis.)
Vis, at hvert element c i et Galoisfelt $GF(p^h)$ er rod i polynomiet $X^{p^h} - X$. (Benyt, at legemets multiplikative gruppe har ordnenen p^h-1.)
Vis, at den ved $c \to c^p$ bestemte afbildning af $GF(p^h)$ ind i sig selv er en automorfi, ved hvilken primlegemets elementer er fixelementer.

10. I mængden $\mathbb{Q}^2$ af par af rationale tal (eller i mængden $\mathbb{R}^2$ af par af reelle tal) defineres kompositioner + og $\cdot$ ved

$$(a_1,a_2) + (b_1,b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2),$$
$$(a_1,a_2)\,(b_1,b_2) = (a_1a_2,\ a_1b_2 + b_2a_1).$$

Vis, at der herved fås en kommutativ ring $(D,+,\cdot)$ med etelement, som har et med $(\mathbb{Q},+,\cdot)$(henholdsvis $(\mathbb{R},+,\cdot)$) isomorft dellegeme. Identificeres dette med $\mathbb{Q}$ (henholdsvis $\mathbb{R}$), kan hvert element i D skrives

$$(a_1,a_2) = a_1 + \rho a_2,\quad a_1,a_2 \in \mathbb{Q}\ (\mathbb{R}),$$

hvor $\rho = (0,1)$, $\rho^2 = 0$. (Duale tal.)

Vis, at der ved

$$a_1 + \rho a_2 < b_1 + \rho b_2 \iff a_1 < b_1 \lor (a_1 = b_1 \land a_2 < b_2)$$

defineres en ordningsrelation i D, således at $(D,+,\cdot,<)$ er en ordnet ring.

Ordningen i en ordnet ring, som indeholder $(\mathbb{Z},+,\cdot,<)$, siges at være arkimedisk, hvis der til to elementer a,b, for hvilke $0 < a < b$, findes et naturligt tal n, således at $b < na$. Vis, at $(D,+,\cdot,<)$ ikke er arkimedisk ordnet.

11. Vis, at man i polynomringen $\mathbb{Q}[X]$ (eller $\mathbb{R}[X]$) kan definere en ordningsrelation, der gør den til en ordnet ring, således at netop de fra nulpolynomiet forskellige polynomier med positiv højeste koefficient bliver de positive elementer. Idet ordningen udvides til kvotientlegemet, fås et ikke-arkimedisk ordnet legeme. Bevis dette.

§ 3. De reelle tal efter Ch. Méray og G. Cantor.

Det er velkendt, at mange nærliggende opgaver vedrørende tal ikke kan løses inden for de rationale tals legeme. Opdagelsen, at der ikke findes noget rationalt tal, som multipliceret med sig selv giver 2, medens forholdet mellem diagonalen og siden i et kvadrat opfylder dette krav, førte de græske matematikere til overbevisningen om talbegrebets utilstrækkelighed og gav stødet til udviklingen af den såkaldte proportionslære. Denne er baseret på geometriens aksiomer, som de findes i Euklids "Elementer" og handler om forhold mellem geometriske størrelser, dvs. par af "ensartede størrelser", f.eks. linjestykker, og sådanne forholds indbyrdes relationer. Efter moderne opfattelse svarer der til hvert forhold et reelt tal og til proportionslærens sætninger regneregler for reelle tal.

I den nyere tids matematik betragtede man indtil midten af forrige århundrede de geometriske størrelser som værende til i forvejen og i besiddelse af de egenskaber, der følger af de geometriske aksiomer. Et reelt tal tænktes defineret som et forhold mellem linjestykker. Bortset fra, at en nærmere analyse af Euklids aksiomsystem viser, at det ikke medfører eksistensen af forhold svarende til alle irrationale tal, er herimod at indvende, at talbegrebet stillet på et indviklet geometrisk grundlag. Opgaven at give en eksakt definition af reelt tal baseret udelukkende på de rationale tal blev først klart formuleret og løst på forskelligmåder af K. Weierstrass (omkring 1860 i forelæsninger), af Ch. Méray (1869) og G. Cantor (1872) of af R. Dedekind (1872). I denne paragraf gengives i moderniseret form Mérays og Cantors fremgangsmåde og i den følgende omtales kort Dedekinds.

Tanken, der ligger til grund for Ch. Mérays og G. Cantors indførelse af de reelle tal kan kort karakteriseres således: Man ønsker at udvide de rationale tals legeme til et legeme, hvori hver fundamentalfølge er konvergent. I moderne udtryksmåde kommer dette ud på udvidelsen til et legeme, som er et fuldstændigt metrisk rum. De rationale tals legeme bliver ved definitionen

$$\operatorname{dist}(x,y) = |y - x|, \qquad x,y \in \mathring{Q},$$

til et metrisk rum, men dette er ikke fuldstændigt. Udvidelsen til et "fuldstændigt legeme" kan gennemføres for et vilkårligt ordnet legeme.

Lad $(L,+,\cdot,<)$ være et ordnet legeme. Med L_+ og L_- betegnes henholdsvis mængden af positive og mængden af negative elementer i L. Som omtalt tidligere (side II, 2, 18) kan der for elementerne i L defineres en absolut værdi med de sædvanlige egenskaber.

En følge (x_i), $i \in \mathring{N}$, af elementer i L siges at være <u>konvergent</u>, hvis

$$\exists_L x \ \forall_{L_+} \varepsilon \ \exists_{\mathring{N}} n \ \forall_{\mathring{N}} i \ [i \geqq n \Rightarrow |x - x_i| \leqq \varepsilon].$$

"Grænseelementet" x er entydig bestemt, og følgen siges at konvergere mod x.

En følge (x_i), $i \in \mathring{N}$, af elementer i L siges at være en <u>fundamentalfølge</u>, hvis

$$\forall_{L_+} \varepsilon \ \exists_{\mathring{N}} n \ \forall_{\mathring{N}} i,j \ [i,j \geqq n \Rightarrow |x_j - x_i| \leqq \varepsilon].$$

Der gælder følgende sætninger, hvis simple beviser forbigås:

Hver konvergent følge er en fundamentalfølge.

Hver fundamentalfølge er begrænset.

Hvis (x_i) og (y_i) er fundamentalfølger, er også $(x_i + y_i)$, $(x_i - y_i)$, (x_iy_i) fundamentalfølger.

Heraf sluttes let, at mængden $\tilde{L}$ af fundamentalfølger i L er en ring med kompositionerne + og · defineret ved

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \quad (x_i)(y_i) = (x_iy_i).$$

Ringens nulelement er følgen (0), hvis samtlige elementer er 0, og den har et etelement, nemlig følgen (1), hvis samtlige elementer er 1.

Der findes nuldivisorer i $\tilde{L}$.

Endvidere ses, at $\tilde{L}$ vil være kommutativ, hvis L er kommutativ.

Nu betragtes delmængden $\tilde{O}$ af $\tilde{L}$ bestående af alle følger, som konvergerer mod 0, kort nulfølger. Det ses let, at hvis (x_i) og (y_i) er nulfølger, vil $(x_i + y_i)$ og $(x_i - y_i)$ også være nulfølger. Endvidere er (x_iy_i) og (y_ix_i) nulfølger, når (x_i) er en nulfølge og (y_i) er begrænset, hvilket jo er tilfældet, når (y_i) er en fundamentalfølge. Der gælder altså

$$\forall_{\tilde{O}}(x_i),(y_i)\ [(x_i) - (y_i) \in \tilde{O}],$$

hvoraf kan sluttes, at $\tilde{O}$ er en undergruppe i den additive gruppe af $\tilde{L}$, og

$$\forall_{\tilde{O}}(x_i)\ \forall_{\tilde{L}}(y_i)\ [(x_i)(y_i) \in \tilde{O} \ \wedge\ (y_i)(x_i) \in \tilde{O}].$$

Mængden $\tilde{O}$ er følgelig et ideal i ringen $(\tilde{L},+,\cdot)$ (jfr., også til det følgende, AT 1, 9-11).

Ved

$$(x_i) \equiv (y_i) \iff (y_i - x_i) \in \tilde{O}$$

defineres en ækvivalensrelation i $\tilde{L}$, som harmonerer såvel med additionen som med multiplikationen. Kompositionerne i $\tilde{L}$ bestemmer altså kompositioner i mængden $\tilde{L}/\tilde{O}$ af ækvivalensklasser, hvorved denne bliver til en ring, faktorringen $(\tilde{L}/\tilde{O},+,\cdot)$ (hvis kompositioner igen betegnes med + og $\cdot$).

Det element af $\tilde{L}/\tilde{O}$, som indeholder fundamentalfølgen (x_i) betegnes med $kl(x_i)$. Hvis en klasse indeholder en følge, der konvergerer mod et element x, består den netop af alle følger, der konvergerer mod x. Den kan altså betegnes med $kl(x)$, idet (x) står for følgen, hvis samtlige elementer er lig x. Den ved

$$x \to kl(x)$$

bestemte afbildning af L ind i $\tilde{L}/\tilde{O}$ er øjensynlig injektiv og homomorf. Billedmængden, altså mængden af alle klasser, der består af konvergente følger, er følgelig et med L isomorft dellegeme af $\tilde{L}/\tilde{O}$.

Vi ønsker nu at definere en ordning i $\tilde{L}/\tilde{O}$, som vi i det følgende betegner med L^*. Hertil vises følgende hjælpesætning:

<u>For hver fundamentalfølge</u> $(x_i) \notin \tilde{O}$ <u>gælder</u>

$$\exists_{L_+}\delta\ \exists_{\dot{N}} m\ [\forall_{\dot{N}} j \geqq m : \delta < x_j \quad \vee \quad \forall_{\dot{N}} j \geqq m : x_j < -\delta].$$

Bevis: Da (x_i) er en fundamentalfølge, gælder

$$\forall_{L_+}\varepsilon\ \exists_{\dot{N}} n\ \forall_{\dot{N}} i,j\ [i,j \geqq n \ \Rightarrow\ |x_j - x_i| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon],$$

og da (x_i) ikke konvergerer mod 0, gælder

$$\exists_{L_+}\varepsilon\ \forall_{\dot{N}} n\ \exists_{\dot{N}} i\ [i \geqq n \ \wedge\ |x_i| > \varepsilon].$$

Først vælges et $\varepsilon = 2\delta$, for hvilket det andet udsagn er sandt. Dernæst vælges et $n = m$ således, at det første udsagn er sandt. Endelig vælges et $i = k$ således, at det andet udsagn er sandt for $n = m$. Da gælder

$$|x_k| > 2\delta,$$

$$-\delta \leqq x_j - x_k \leqq \delta \qquad \text{for } j \geqq m.$$

Er nu $x_k > 0$, altså $2\delta < x_k$, fås heraf

$$\delta < x_j \quad \text{for } j \geqq m.$$

Er $x_k < 0$, altså $x_k < -2\delta$, fås

$$x_j < -\delta \quad \text{for } j \geqq m.$$

Dermed er hjælpesætningen bevist.

Hjælpesætningen viser, at L^* kan ordnes. Først bemærkes, at hvis det for en fundamentalfølge (x_i) gælder, at der findes et positivt element δ og et naturligt tal m, således at $\delta < x_i$ for $i \geqq m$, vil det samme være tilfældet for alle følger i $kl(x_i)$ (dog måske ikke med samme δ, og ikke med samme m). Tilsvarende gælder for en fundamentalfølge (x_i) og dens klasse, når $x_i < -\delta$ fra et vist nummer m. Idet ifølge hjælpesætningen netop eet af disse tilfælde foreligger ved hver fra $\tilde{0}$ forskellig klasse, får vi en klasseinddeling

$$L^* = L^*_- \cup \{\tilde{0}\} \cup L^*_+$$

af L^* ved at lade L^*_+ og L^*_- bestå af de fra $\tilde{0}$ forskellige klasser, for hvilke henholdsvis det første og det andet tilfælde foreligger. Denne inddeling har de egenskaber, som ifølge en tidligere sætning (side II, 2, 14) gør det muligt at indføre en ordning i L^*, ved hvilken L^*_+ er mængden af positive elementer. Af to modsatte fra $\tilde{0}$ forskellige elementer $kl(x_i)$ og $-kl(x_i) = kl(-x_i)$ af L^* hører nemlig netop eet til L^*_+, og summen og produktet af to elementer fra L^*_+ hører også til L^*. Ved

$$kl(x_i) \prec kl(y_i) \iff kl(y_i) - kl(x_i) = kl(y_i - x_i) \in L^*_+$$

defineres altså en total ordningsrelation i L^*, der gør L^* til en ordnet ring. At $kl(x_i) \prec kl(y_i)$, betyder, at der findes et $\delta > 0$ i L, således at der fra et vist nummer gælder $y_i - x_i > \delta$.

Lad L' betegne det ovenfor omtalte dellegeme af L^*, som udgøres af klasserne bestående af konvergente følger. Den isomorfe afbildning $x \to kl(x)$ af L på L' er øjensynlig ordenstro:

$$x < y \Rightarrow kl(x) \prec kl(y).$$

Den ordnede ring $(L^*,+,\cdot,\prec)$ indeholder altså et ordenstro isomorft billede $(L',+,\cdot,\prec)$ af det givne legeme $(L,+,\cdot,<)$. Vi kan derfor uden fare for misforståelser betegne ordningen i L^* med $<$.

Dernæst bevises, at L' er overalt tæt i L^*. Lad $kl(x_i)$ og $kl(y_i)$ være elementer af L^*, for hvilke $kl(x_i) < kl(y_i)$. Der findes da et positivt element $\delta \in L$ og et $n \in \dot{N}$, således at

$$y_i - x_i > \delta \quad \text{for } i \geq n.$$

Da (x_i) og (y_i) er fundamentalfølger, findes der $p,q \in \dot{N}$, således at

$$|x_j - x_i| \leq \delta/4 \quad \text{for } i,j \geq p,$$
$$|y_j - y_i| \leq \delta/4 \quad \text{for } i,j \geq q.$$

For $i,j \geq m = \max\{n,p,q\}$ gælder alle tre uligheder. Lad $a \in \dot{N}$ være fast valgt, således at $a \geq m$. Med $i = a$ fås da for $j \geq m$

$$x_j \leq x_a + \delta/4 = \tfrac{1}{2}(x_a + y_a) - \tfrac{1}{2}(y_a - x_a) + \delta/4$$
$$< \tfrac{1}{2}(x_a + y_a) - \delta/4,$$
$$y_j \geq y_a - \delta/4 = \tfrac{1}{2}(x_a + y_a) + \tfrac{1}{2}(y_a - x_a) - \delta/4$$
$$> \tfrac{1}{2}(x_a + y_a) + \delta/4.$$

Heraf aflæses, at

$$kl(x_i) < kl(\tfrac{1}{2}(x_a + y_a)) < kl(y_i),$$

hvor $(\frac{1}{2}(x_a + y_a))$ betegner den konstante følge, hvis elementer alle er lig $\frac{1}{2}(x_a + y_a)$. Da denne følges klasse tilhører L', er påstanden hermed bevist.

Vi beviser nu, at L^* med den indførte ordning er fuldstændig, d.v.s. at enhver fundamentalfølge i L^* er konvergent. Der skelnes her mellem to tilfælde:

1. <u>For enhver nulfølge (x_i) i L gælder $x_i = 0$ fra et vist trin.</u>

Er (x_i) en fundamentalfølge i L vil $(x_{i+1} - x_i)$ være en nulfølge, følgelig findes et $n \in \grave{N}$, så $x_n = x_{n+1} = \dots$. Enhver fundamentalfølge i L er altså konstant fra et vist trin og altså konvergent. Dette betyder, at L er et fuldstændigt legeme og at L^* bliver isomorf med L.

2. Der findes i L en nulfølge med uendelig mange elementer forskellige fra 0.

Man slutter da let, at der i L findes en strengt aftagende nulfølge (Δ_i). For følgen (Δ_i) gælder altså:

$$\Delta_i > \Delta_{i+1} > 0 \text{ for alle } i, \text{ og}$$

$$\forall_{L+} \varepsilon \, \exists_{\grave{N}} n \, [i \geqq n \Rightarrow \Delta_i \leqq \varepsilon].$$

Lad (x^*_μ) være en fundamentalfølge i L^*. Vi skal vise, at følgen (x^*_μ) er en konvergent følge i L^*. Da L er overalt tæt i L^*, findes der til ethvert $\mu \in \grave{N}$ et element $r_\mu \in L$, således at

$$x^*_\mu - \Delta_\mu < r_\mu < x^*_\mu + \Delta_\mu .$$

Man har da

$$|r_\mu - r_\nu| < |x^*_\mu - x^*_\nu| + \Delta_\mu + \Delta_\nu .$$

Til ethvert $\varepsilon \in L_+$ findes der, da (Δ_i) er en nulfølge, et $m \in \grave{N}$, således at $\varepsilon > 3\Delta_m$.

Endvidere findes der, da (x^*_μ) er forudsat at være en fundamentalfølge i L^*, et $n \in \grave{N}$, således at

$$|x^*_\mu - x^*_\nu| \leqq \Delta_m \qquad \text{for } \mu,\nu \geqq n.$$

Heraf fås

$$|r_\mu - r_\nu| \leqq 3\Delta_m \leqq \varepsilon \qquad \text{for } \mu,\nu \geqq \max\{m,n\},$$

hvilket viser, at (r_μ) er en fundamentalfølge i L. Følgen (r_μ) bestemmer altså et element $r^* = \mathrm{kl}(r_\mu)$ i L^*.

Der gælder nu, at følgen (x^*_μ) konvergerer mod r^* i L^*: Lad $\varepsilon^* \in L^*_+$. Da L er overalt tæt i L^* findes der et $\varepsilon \in L_+$ med

$\varepsilon < \varepsilon^*$. Endvidere findes der et $m \in \dot{N}$, således at $2\Delta_m \leqq \varepsilon$, da (Δ_i) er en nulfølge i L.

Endelig vil der, da (r_μ) er vist at være en fundamentalfølge i L, findes et $n \in \dot{N}$, således at

$$|r_\mu - r_\nu| \leqq \Delta_m \quad \text{for } \mu,\nu \geqq n.$$

Specielt har vi da, at der for ethvert fast $k \geqq \max\{m,n\}$ vil gælde, at

$$r_k - \Delta_m < r_\mu < r_k + \Delta_m \quad \text{for } \mu \geqq \max\{m,n\}.$$

Ifølge ordningens definition i L^* får vi heraf

$$r_k - \Delta_m \leqq r^* \leqq r_k + \Delta_m \quad \text{for } k \geqq \max\{m,n\}.$$

Dette sammenholdt med de to uligheder fra tidligere:

$$x^*_\mu - \Delta_\mu < r_\mu < x^*_\mu + \Delta_\mu \quad \text{og} \quad \Delta_\mu < \Delta_m \quad \text{for } \mu > m,$$

giver

$$|x^*_\mu - r^*| < 2\Delta_m < \varepsilon^* \quad \text{for } \mu \geqq \max\{m,n\},$$

hvormed konvergensen er vist.

(Man bemærker, at resultaterne indtil nu er gyldige for en vilkårlig ordnet ring, idet vi endnu ikke har benyttet andet om L, end at det er en ordnet ring).

Vi beviser nu, at L^* er et legeme. Det er hertil tilstrækkeligt at vise, at ethvert fra 0 forskelligt element har et inverst.

Ifølge den tidligere hjælpesætning findes der til en fundamentalfølge (x_i) fra L, som ikke konvergerer mod 0, et $\delta \in L_+$ og et nummer $m \in \dot{N}$, således at $|x_i| > \delta$ for alle $i \geqq m$. Ved

$$x'_i = \begin{cases} 1 & \text{for } i < m \\ x_i^{-1} & \text{for } i \geqq m \end{cases}$$

defineres en følge (x'_i) i L, som skal vises at være en fundamentalfølge.

Lad $\varepsilon \in L_+$ være givet. Da (x_i) er en fundamentalfølge og $\delta\,\varepsilon\,\delta \in L_+$ findes et tal $n \in \mathbb{N}$, således at

$$|x_i - x_j| < \delta\,\varepsilon\,\delta \quad \text{for } i,j \geq n.$$

For $i,j \geq \max\{m,n\}$ får vi da:

$$|x_i' - x_j'| = |x_i^{-1} - x_j^{-1}| = |x_i^{-1}(x_j - x_i)x_j^{-1}|$$
$$= |x_i|^{-1}|x_i - x_j||x_j|^{-1} < \delta^{-1}(\delta\,\varepsilon\,\delta)\delta^{-1} = \varepsilon.$$

Følgen (x_i') er altså en fundamentalfølge, og det er klart, at $(x_i x_i')$ konvergerer mod 1, altså at $\mathrm{kl}(x_i)\mathrm{kl}(x_i') = 1$. Dermed er vist, at L^* er et legeme.

Nu forudsættes yderligere, at L <u>er arkimedisk ordnet</u>. Da har L^* den samme egenskab. Er nemlig a^* og b^*, $a^* < b^*$ elementer i L^*, findes der et element $x \in L$, således at $a^* < x < b^*$, og et element $y \in L$, således at $x < y < b^*$. Da L er arkimedisk ordnet, findes der et element ρ af primlegemet L_o i L (som tillige er primlegemet i L^*, og som kan identificeres med $\mathbb{Q}$), således at $x < \rho < y$, altså $a^* < \rho < b^*$. Heraf ses, at L^* er arkimedisk ordnet.

Resultaterne kan sammenfattes i:

<u>Lad L være et ordnet legeme. Mængden L^* af klasser af fundamentalfølger i L vil da være et fuldstændigt, ordnet legeme med L som overalt tæt, ordnet dellegeme. Hvis L er kommutativt vil L^* også være kommutativt. Hvis L er arkimedisk ordnet vil L^* også være arkimedisk ordnet.</u>

(Endvidere har vi følgende sætning om ordnede ringe:

<u>Lad L være en ordnet ring. Mængden L^* af klasser af fundamentalfølger i L vil da være en fuldstændig, ordnet ring med L som overalt tæt, ordnet delring.</u>)

I følge Méray og Cantor definerer man nu legemet $\grave{R}$ af reelle tal som det legeme, der fremkommer ved at underkaste de rationale tals legeme $\grave{Q}$ denne udvidelsesproces. Et reelt tal er altså en klasse af fundamentalfølger med rationale elementer.

Som en umiddelbar følge af denne definition og af det viste har vi:

<u>De reelle tals legeme $\grave{R}$ er fuldstændigt og arkimedisk ordnet og har legemet $\grave{Q}$ af rationale tal som overalt tæt dellegeme.</u>

Om arkimedisk ordnede legemer gælder følgende sætning:

<u>Lad L være et arkimedisk ordnet legeme. Der findes da netop een ordenstro homomorfi φ af L ind i de reelle tals legeme $\grave{R}$. Hvis legemet L er fuldstændigt, vil φ være bijektiv.</u>

Bevis: Da L er et ordnet legeme, er dets primlegeme L_o isomorft med $\grave{Q}$ (II, 2, side 17), og vi kan derfor opfatte $\grave{Q}$ som dellegeme af L ved denne isomorfi.

Da L endvidere er artimedisk ordnet <u>vil der til ethvert element $a \in L$ findes følger</u> (r_n) <u>af rationale tal</u> (d.v.s. elementer fra L_o), <u>som konvergerer mod a i L.</u> Dette ses således:

Lad $a \in L$. Da L er arkimedisk ordnet findes der til ethvert naturligt tal n et rationalt tal r_n, således at

$$a - \frac{1}{n} < r_n < a + \frac{1}{n}.$$

Følgen (r_n) vil da konvergere mod a i L. Lad nemlig $\varepsilon \in L_+$. Der findes da, atter på grund af den artimediske ordning, et naturligt tal n, så $\varepsilon \geqq \frac{1}{n}$.

Man har da

$$m > n \Rightarrow |a - r_n| < \frac{1}{n} \leqq \varepsilon \ .$$

Om mængden F_a af følger af rationale tal, som i L konvergerer mod a gælder:

<u>For ethvert $a \in L$ er $F_a \neq \emptyset$.</u>

<u>Hvis $(r_n) \in F_a$, er (r_n) en fundamentalfølge i $\dot{Q}$.</u>

<u>Hvis (r_n), $(s_n) \in F_a$, er $(r_n - s_n)$ en nulfølge i $\dot{Q}$.</u>

Den første påstand har vi netop vist, de to sidste følger trivielt af definitionerne.

Det har nu en mening at definere afbildningen φ af L ind i $\dot{R}$ ved at sætte

$$\varphi(a) = kl(r_n), \quad \text{hvor } (r_n) \in F_a.$$

Af den således definerede afbildning φ er en homomorfi, følger umiddelbart ved den sædvanlige regning med talfølger.

At φ er ordenstro ses således: Hvis $a,b \in L$ og $a < b$ findes der ifølge den artimediske ordning rationale tal r og s, således at $a < r < s < b$.

Er $(r_n) \in F_a$ og $(s_n) \in F_b$ gælder da fra et vist trin, at $r_n < r$, og fra et vist trin, at $s < s_n$. Ifølge ordningens definition i $\dot{R}$ gælder da $kl(r_n) \leqq r$ og $s \leqq kl(s_n)$, altså $\varphi(a) < \varphi(b)$ ifølge definitionen af φ.

Hermed har vi eftervist eksistensen af en homomorfi af den forlangte art.

For at vise entydigheden bemærkes først, at restriktionen af φ til $\dot{Q}$ nødvendigvis må være identiteten. Dette ses f.eks. således: At $\varphi(0) = 0$, følger af, at φ er en homomorfi. Endvidere følger af $\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1) \cdot \varphi(1)$ og $\varphi(1) \neq \varphi(0)$ (på grund af ordenstroskaben), at $\varphi(1) = 1$. Ved induktion sluttes, at $\varphi(n) = n$ for $n \in \dot{N}$, og derefter ses let, at $\varphi(p) = p$ for $p \in \dot{Z}$, og endelig, at $\varphi(r) = r$ for $r \in \dot{Q}$.

Entydigheden følger nu af, at $\dot{Q}$ ligger overalt tæt i $\dot{R}$:

Lad φ og ψ være to homomorfier af den betragtede art. Antag, at der findes et $a \in L$, således at $\alpha = \varphi(a) \neq \beta = \psi(a)$, f.eks. $\alpha < \beta$. Der findes da et rationalt tal r, således at $\alpha < r < \beta$. Hvis nu $a < r$, får vi

$$\psi(a) < \psi(r) = r < \beta,$$

idet ψ er ordenstro, og hvis $a \geqq r$, får vi tilsvarende

$$\varphi(a) \geqq \varphi(r) = r > \alpha,$$

altså i begge tilfælde en modstrid. Der kan følgelig ikke findes to forskellige ordenstro homomorfier af L ind i $\dot{R}$.

Beviset fortsættes.

Tilbage at vise er nu, at hvis L er fuldstændigt, vil φ være bijektiv. Hertil er det nok at vise, at φ er surjektiv, da φ som ordenstro afbildning er injektiv. Vi bemærker, at da L er arkimedisk ordnet, vil enhver fundamentalfølge i $\grave{Q}$ være fundamentalfølge, opfattet som følge i L, thi til $\varepsilon \in L_+$ findes $\varepsilon_1 \in \grave{Q}_+$, med $\varepsilon_1 \leqq \varepsilon$. Et reelt tal $r^* \in \grave{R}$, repræsenteret ved en fundamentalfølge (r_n) fra $\grave{Q}$, vil da ifølge definitionen af φ være billede af $a = \lim_n r_n \in L$, som eksisterer, da L er forudsat at være fuldstændig.

Som en umiddelbar følge af sætningen har vi følgende karakterisering af de reelle tals legeme $\grave{R}$:

<u>Ethvert fuldstændigt, arkimedisk ordnet legeme er ordenstro isomorft med de reelle tals legeme.</u>

Sætningen udsiger, at hvert arkimedisk ordnet legeme er ordenstro isomorft med et dellegeme af de reelle tals legeme. Selve legemet $\grave{R}$ er altså, løst udtrykt, det mest omfattende arkimedisk ordnede legeme:

<u>Et arkimedisk ordnet legeme er ordenstro isomorft med de reelle tals legeme, når og kun når det som ordnet legeme ikke er ægte dellegeme af noget arkimedisk ordnet legeme.</u>

Som en simpel konsekvens har vi endvidere:

<u>De reelle tals legeme tillader ikke andre automorfier end identiteten.</u>

Bevis: Ifølge sætningen findes der præcis én ordenstro automorfi af $\grave{R}$, og den må da netop være identiteten. Det er altså tilstrækkeligt at vise, at en automorfi af $\grave{R}$ nødvendigvis er ordenstro. Hertil bemærkes, at hvert positivt reelt tal α er kvadratet på et positivt reelt tal $\sqrt{\alpha}$. (Dette bevises nedenfor.) For $\alpha < \beta$, altså $\beta - \alpha > 0$ fås følgelig

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \varphi(\beta - \alpha) = \varphi(\sqrt{\beta - \alpha})\, \varphi(\sqrt{\beta - \alpha})$$
$$= [\varphi(\sqrt{\beta - \alpha})]^2 > 0,$$

altså $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$. Dermed er sætningen bevist.

På det udviklede grundlag bevises, at hvert positivt reelt tal α har en positiv kvadratrod.

Først vises, at der til hvert reelt tal $\varepsilon > 0$ findes et rationalt tal p/q, $p,q \in N$, således at

$$\alpha - \varepsilon < p^2/q^2 < \alpha.$$

Til dette formål vælges et naturligt tal n, så $n^2 > \alpha$, et naturligt tal m, så $m > 1/\varepsilon$, og et naturligt tal $q > 2mn$. For $p = 1,\ldots,nq-1$ gælder da

$$\frac{(p+1)^2}{q^2} - \frac{p^2}{q^2} = \frac{2p+1}{q^2} < \frac{2nq}{q^2} < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Heraf ses, at mindst eet af tallene p^2/q^2, $p = 1,\ldots,nq - 1$, må falde i intervallet $]\alpha - \varepsilon, \alpha[$.

Herefter vælges en aftagende følge (δ_i), hvor $\delta_1 < \alpha$, af positive tal, der konvergerer mod 0, og for hvert $i \in \mathring{N}$ bestemmes induktivt $r_i = p_i/q_i$, således at

$$\alpha - \varepsilon_i < r_i^2 < \alpha, \text{ hvor } \varepsilon_1 = \delta_1 \text{ og } \varepsilon_{i+1} = \min\{\delta_{i+1}, \alpha - r_i^2\}.$$

Følgen (r_i^2) konvergerer da mod α, og følgen (r_i) er en fundamentalfølge, idet der, da følgen (r_n) åbenbart er voksende, gælder

$$|r_j - r_i| = \frac{|r_j^2 - r_i^2|}{r_j + r_i} < \frac{\delta_k}{2r_1},$$

hvor $k = \min\{i,j\}$. Det ses umiddelbart, at der for det ved (r_i) bestemte reelle tal β gælder $\beta^2 = \alpha$.

Efter Mérays og Cantor har vi defineret de reelle tal som ækvivalensklasser af fundamentalfølger. Det ligger nær at forsøge efter en vis regel at udvælge een repræsentant for hver klasse. Derved vil man opnå, at hvert reelt tal bliver fremstillet ved en bestemt fundamentalfølge. (Man kunne da simpelthen definere de reelle tal som disse specielle fundamentalfølger. En sådan, principielt meget simpel definition har imidlertid den ulempe, at indførelsen af kompositionerne og beviserne for deres egenskaber bliver omstændelige.) Forskellige fremstillinger af denne art har været benyttet længe før den her omtalte eksakte indførelse af de reelle tal blev gennemført. Den mest anvendte er fremstillingen ved uendelige decimalbrøker, som her vil blive begrundet med en nærliggende generalisering.

Lad der være valgt et naturligt tal $g > 1$. For et reelt tal α sættes

$$a_o = [\alpha]$$

(det største hele tal mindre end eller lig med α), så at

$$0 \leqq \alpha - a_o < 1.$$

Videre sættes

$$a_1 = [g(\alpha - a_o)],$$

så at

$$0 \leqq g\alpha - ga_o - a_1 < 1,$$

altså

$$0 \leqq a_1 < g.$$

Dernæst sættes

$$a_2 = [g^2\alpha - g^2 a_o - ga_1],$$

så at

$$0 \leqq g^2\alpha - g^2 a_0 - ga_1 - a_2 < 1,$$

altså

$$0 \leqq a_2 < g.$$

For $n \in \dot{N}$ defineres induktivt

$$a_n = [g^n\alpha - \sum_{i=0}^{n-1} g^{n-i} a_i],$$

så at

(1)
$$0 \leqq g^n\alpha - \sum_{i=0}^{n} g^{n-i} a_i < 1,$$

og det vises let ved induktion, at

$$0 \leqq a_n < g.$$

Af (1) fås

$$|\alpha - \sum_{i=0}^{n} a_i g^{-i}| < g^{-n},$$

altså at følgen

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i g^{-i}.$$

konvergerer mod α, hvilket vil sige at

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}.$$

Hvert reelt tal kan følgelig fremstilles som sum af en uendelig række med rationale led $a_i g^{-1}$, hvor $0 \leqq a_i < g$ for $i \in \dot{N}$. For $g = 10$ er dette en decimalbrøkfremstilling af α. I analogi med dette tilfælde vil vi skrive

$$\alpha = a_o + 0_g a_1 a_2 \ldots ,$$

hvor g i tilfældet g = 10 erstattes med decimalkommaet. Hvis $a_o > 0$, skrives også $a_{og} a_1 a_2 \ldots$. Tallet α siges at være fremstillet som en g-<u>adisk brøk</u> eller i g-<u>talsystemet</u>. Den g-adiske brøk siges at være endelig, hvis $a_i = 0$ fra et vist nummer. Det ses let, at hvis et tal kan fremstilles ved en endelig g-adisk brøk, er det rationalt og lig med en brøk, hvis nævner er en potens af g. Omvendt kan et sådant rationalt tal, hvis uforkortelige brøkfremstillings nævner altså kun indeholder primfaktorer, som er divisorer i g, fremstilles ved en endelig g-adisk brøk. Men det kan også fremstilles ved en uendelig. Er a_k det sidste fra 0 forskellige a_i, har man nemlig

$$a_k g^{-k} = (a_k - 1)g^{-k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (g - 1)g^{-i},$$

hvoraf ses, at tallet har en fremstilling med $a_i = g - 1$ fra et vist nummer.

På den anden side giver den ovenfor beskrevne fremgangsmåde for hvert reelt tal een bestemt fremstilling som g-adisk brøk. Vi skal vise, at der om denne gælder, at $a_i < g - 1$ for uendelig mange i. Antag, at fremgangsmåden for et tal α gav

$$\alpha = \sum_{i=0}^{k} a_i g^{-i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (g - 1)g^{-i}.$$

Da havde man

$$\alpha - \sum_{i=0}^{k} a_i g^{-i} = g^{-k},$$

altså

$$g^k\alpha - \sum_{i=0}^{k} a_i g^{k-i} = 1,$$

hvilket strider mod (1) for n = k.

Endelig bevises, at hvert reelt tal α har kun een fremstilling

$$\alpha = a_o + 0_g a_1 a_2 \ldots$$

som en g-adisk brøk med $a_i < g - 1$ for uendelig mange $i \in \mathring{N}$. Lad

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}, \qquad \beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i g^{-i}$$

være to sådanne g-adiske brøker, som ikke er identiske, og lad k betegne det første nummer, for hvilket $a_k \neq b_k$. Det kan antages, at $c_k = b_k - a_k > 0$. For alle $i \in \mathring{N}$ er $b_i - a_i \geqq -(g - 1)$ og for mindst eet $i > k$ er $b_i - a_i > -(g - 1)$. Man har derfor

$$\begin{aligned}\beta - \alpha &= c_k g^{-k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (b_i - a_i) g^{-i} \\ &> c_k g^{-k} - (g - 1) \sum_{i=k+1}^{\infty} g^{-i} \\ &= (c_k - 1) g^{-k} \geqq 0.\end{aligned}$$

Dette viser, at to forskellige g-adiske brøker af den betragtede art fremstiller forskellige reelle tal, hvilket er ensbetydende med påstanden.

Dermed er bevist:

<u>Hvert reelt tal</u> α <u>har en og kun een fremstilling</u>

$$\alpha = a_o + 0_g a_1 a_2 \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i},$$

<u>hvor</u> $0 \leqq a_i \leqq g - 1$ <u>for</u> $i \in \mathring{N}$ <u>og</u> $a_i < g - 1$ <u>for uendelig mange i.</u>

Øvelser til kap. II, § 3.

1*. Vis, at et ordnet legeme L da og kun da er arkimedisk ordnet og fuldstændigt, når enhver voksende og begrænset følge i L er konvergent.

2. Vis, at en g-adisk brøk $0_g a_1 a_2 \ldots$ fremstiller et rationalt tal, hvis og kun hvis den er periodisk fra et vist nummer, dvs. hvis og kun hvis der findes naturlige tal k og p, således at $a_{n+p} = a_n$ for $n \geq k$.
Vis, at hvis dette er tilfældet, vil den mindste "periodelængde" p være mindre end nævneren i det fremstillede rationale tal.
Vis, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} g^{-n^2}$$

er irrational for hvert naturligt tal $g > 1$.

3*. Lad der være givet en følge (g_i) af naturlige tal $g_i > 1$, $i \in \dot{N}$. Vis, at hvert reelt tal α har en og kun én fremstilling af formen

$$\alpha = a_o + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{g_1 g_2 \cdots g_i} ,$$

hvor a_i, $i = 0,1,\ldots$, er hele tal, $0 \leq a_i < g_i$ for $i = 1,2,\ldots$ og $a_i < g_i - 1$ for uendelige mange $i \in \dot{N}$ (G. Cantor, 1869). (Bevis og benyt, at

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_{n+i}-1}{g_{n+1} g_{n+2} \cdots g_{n+i}} = 1$$

for $n \in \dot{N}$.)

Forudsæt, at (g_i) er valgt således, at hvert primtal er divisor i uendelig mange g_i. Vis, at α er irrationalt, hvis uendelig mange af tallene a_i er forskellige fra 0. Benyt dette til at vise, at e er et irrationalt tal.

4. Lad α være et irrationalt tal. Vis, at der for hvert tal $n \in \mathbb{N}$ findes tal $p \in \mathbb{Z}$ og $q \in \{1,2,\dots,n\}$, således at

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qn} ,$$

og slut heraf, at der findes uendelig mange rationale tal p/q, for hvilke

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < q^{-2}.$$

(Inddel intervallet $[0,1]$ i n lige store delintervaller og betragt de n+1 tal $k\alpha - [k\alpha]$, $k = 0,1,\dots,n$.)
Vis, at hvis α er et rationalt tal og σ et positivt tal, kan der kun findes endelig mange rationale tal p/q, således at

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \sigma q^{-2}.$$

5. Lad α være et reelt tal, som er algebraisk af n-te grad over $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ (altså rod i et med hensyn til $\mathbb{Q}$ irreducibelt polynomium af n-te grad med rationale koefficienter). Lad endvidere σ være et positivt tal. Vis, at der kun kan findes endelig mange rationale tal p/q, for hvilke

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \sigma q^{-n-1}.$$

(Bevis og benyt følgende: Lad f betegne et polynomium af n-te grad med heltallige koefficienter. Er det rationale tal p/q ikke rod i f, da gælder $|f(p/q)| \geq q^{-n}$. Til hvert positivt tal k findes et positivt tal K, således at

$$|f(y) - f(x)| < K|y - x| \qquad \text{for } x,y \in [-k,k].)$$

Vis, at tallet

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$$

er transcendent, og angiv en ikke numerabel mængde af transcendente tal. (J. Liouville, 1851.)

6. Et udtryk af formen

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

hvor $a_0 \in \mathbb{R}$ og $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$, kaldes en endelig <u>kædebrøk</u>. (Tælleren 1 kan også erstattes med andre tal, men sådanne kædebrøker vil ikke blive betragtet her.) Man plejer at betegne ovenstående kædebrøk med

$$[a_0, a_1, \dots, a_n].$$

(Da denne betegnelse for $n = 0$ ville give $[a_0] = a_0$, men ikke det største hele tal mindre end eller lig med a_0, må en "kædebrøk" med $n = 0$ betegnes på anden måde, f.eks. $[a_0,]$.)

Bevis følgende:

(1) $[a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i] = [a_0, a_1, \dots, a_{i-1} + 1/a_i]$

for $1 \leqq i \leqq n$. (Sammen med $[a_0, a_1] = a_0 + 1/a_1$ kunne dette tjene til at definere kædebrøker ved induktion.)

(2) $[a_0, \dots, a_j] = [a_0, \dots, a_{i-1}, [a_i, \dots, a_j]]$

for $1 \leqq i < j \leqq n$.

Talsættene $(p_o,\dots,p_n)$ og $(q_o,\dots,q_n)$ defineres induktivt ved

$$p_o = a_o, \quad p_1 = a_1 a_o + 1, \quad p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \quad \text{for } 2 \leqq i \leqq n.$$

$$q_o = 1, \quad q_1 = a_1, \quad q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$$

Bevis følgende:

(3) $[a_o, a_1, \dots, a_i] = p_i/q_i$, for $1 \leqq i \leqq n$,

(4) $p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^{i-1}$ for $1 \leqq i \leqq n$,

(5) $\dfrac{p_i}{q_i} - \dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \dfrac{(-1)^{i-1}}{q_{i-1} q_i}$ for $1 \leqq i \leqq n$,

(6) $\dfrac{p_i}{q_i} - \dfrac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = \dfrac{(-1)^{i} a_i}{q_{i-2} q_i}$ for $2 \leqq i \leqq n$,

(7) $\dfrac{p_{2i-2}}{q_{2i-2}} < \dfrac{p_{2i}}{q_{2i}} (\leqq) [a_o, \dots, a_n] (\leqq) \dfrac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} < \dfrac{p_{2j-1}}{q_{2j-1}}$

for $1 \leqq i \leqq \frac{1}{2}n$ og $1 \leqq j \leqq \frac{1}{2}(n-1)$, hvor det venstre lighedstegn i parentes kun gælder, hvis n er lige og $i = \frac{1}{2}n$, og det højre lighedstegn i parentesen kun, hvis n er ulige og $j = \frac{1}{2}(n-1)$.

7. Er a_o et helt tal og $a_1, \dots, a_n$ positive hele tal, siges kædebrøken $[a_o, a_1, \dots, a_n]$ at være regulær. Den er da et rationalt tal a.

For en regulær kædebrøk gælder

$$q_1 \geqq 1, \quad q_i > q_{i-1} \qquad \text{for } 1 < i \leqq n,$$

$$q_2 \geqq 2, \quad q_i > i \qquad \text{for } 2 < i \leqq n,$$

og at p_i/q_i er uforkortelig for $1 \leqq i \leqq n$.

Idet

$$[a_o, \dots, a_{n-1}, 1] = [a_o, \dots, a_{n-1} + 1],$$

kan hver regulær kædebrøk, hvis sidste nævner a_n er lig 1, erstattes med en "kortere", hvis sidste nævner $a_{n-1} + 1$ er større end 1. I det følgende betragtes derfor kun regulære kædebrøker, hvis sidste nævner er større end 1.

Vis, at der for

$$r_i = [a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n], \quad 0 \leqq i \leqq n,$$

gælder $a_i = [r_i]$ (det største hele tal mindre end eller lig med r_i).

* Vis med benyttelse heraf og af resultaterne i øv. 6, at hvis to regulære kædebrøker $[a_o, \ldots, a_m]$ og $[b_o, \ldots, b_n]$, hvor $a_m > 1$ og $b_n > 1$, fremstiller det samme rationale tal, er de identiske, dvs. da er $m = n$ og $a_i = b_i$ for $0 \leqq i \leqq n$.

8. Lad α være et reelt tal. Tallene $a_o \in Z$, $a_i \in N$ og $r_i \in R$, $i = 1,2,\ldots$, bestemmes på følgende måde:

$$\begin{array}{ll}
a_o = [\alpha] & r_1 = 1/(\alpha - a_o) > 1, \\
a_1 = [r_1] & r_2 = 1/(r_1 - a_1) > 1, \\
\vdots & \vdots \\
a_i = [r_i], & r_{i+1} = 1/(r_i - a_i) > 1, \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Dette kan fortsættes sålænge tallene $r_i - a_i$ er forskellige fra 0.

Vis, at hvis α er et rationalt tal, ender processen ved at r_n for et $n \geqq 0$ bliver et helt tal, så at $a_n = r_n$. Vis endvidere, at der da gælder

$$\alpha = [a_o, \ldots, a_n].$$

Hvis α er irrational, kan processen ikke ende. Vis, at der da gælder

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} [a_0,\dots,a_n].$$

I dette tilfælde skrives den højre side $[a_0,a_1,\dots]$ og kaldes en uendelig regulær kædebrøk. Resultaterne kan herefter sammenfattes til:

Hvert reelt tal kan udvikles i en regulær kædebrøk, som er endelig eller uendelig, efter som tallet er rationalt eller irrationalt.

Vis, at to uendelige regulære kædebrøker, som fremstiller det samme tal, er identiske.

Udvikl tallene $355/126$, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ i regulære kædebrøker.

§ 4. Kontinuert ordning. De reelle tals kontinuitet.

I det foregående afsnit har vi indført de reelle tals legeme $(\dot{R},+,\cdot,<)$ efter Méray og Cantor og vist, at det er et legeme, som er arkimedisk ordnet, og hvori hver fundamentalfølge er konvergent. Idet disse egenskaber er karakteristiske i den forstand, at hvert legeme, der har dem, er ordenstro isomorft med de reelle tals legeme, kan opbygningen af den matematiske analyse baseres på dem. Man kan imidlertid også vælge andre grundlæggende egenskaber, f.eks. eksistens af øvre grænse for en opad begrænset talmængde, som udgangspunkt. I dette afsnit diskuteres sådanne egenskaber ved de reelle tals legeme.

Lad $(M,\prec)$ være en mængde, som er ordnet tæt (altså specielt totalt) ved relationen $\prec$, og som hverken har et første eller et sidste element. Ved et <u>snit</u> i M forstås en delmængde A af M med følgende egenskaber:

S1. $A \neq \emptyset \quad \wedge \quad A \neq M$.

S2. $\forall_A x \; \exists_A y \; [x \prec y]$

(dvs. A har ikke noget sidste element.)

S3. $\forall_M x,y \; [x \in A \quad \wedge \quad y \prec x \quad \Rightarrow \quad y \in A\,]$

(dvs. hvert element af M, som går forud for et element tilhørende A, tilhører A).

Heraf følger umiddelbart, at hvert element af M, som ikke tilhører A, er majorant for A. Idet A ikke har noget sidste element, er altså $\complement A$ identisk med mængden af majoranter for A.

Ved det ved et element $a \in M$ bestemte <u>afsnit</u> forstås mængden

$$A_a = \{x \in M \mid x \prec a\}$$

Det er klart ifølge antagelserne om M, at ethvert afsnit er et snit. Det omvendte behøver imidlertid ikke at være tilfældet:

I mængden $(\dot{Q}_+, <)$ af positive rationale tal med den sædvanlige ordning er mængden $\{x | x^2 < 2\}$ et snit, men ikke et afsnit (hvilket hænger nøje sammen med at ligningen $x^2 = 2$ ikke har nogen løsning i $\dot{Q}_+$).

Lad $(M, -\!\!<)$ være en tæt ordnet mængde uden første og sidste element, og M' en ikke tom, opad ("til højre") begrænset delmængde af M. Et element $a \in M$ siges da at være øvre grænse eller supremum for M', hvis

$$\forall_{M'} x \, [x \mathrel{\underline{-\!\!<}} a]$$

og

$$\forall_M x \, [x -\!\!< a \Rightarrow \exists_{M'} y \, [x \mathrel{\underline{-\!\!<}} y]],$$

eller sagt i ord, hvis a er en mindste majorant for M'. Det er klart, at der højst kan findes ét element i M, som er supremum for M'.

Analogt defineres begrebet infimum eller nedre grænse for en nedad begrænset delmængde af M.

Der gælder nu:

<u>I en tæt ordnet mængde $(M, -\!\!<)$ uden første og sidste element er ethvert snit et afsnit når og kun når enhver opad (nedad) begrænset ikke tom delmængde af M har en øvre (nedre) grænse.</u>

Bevis:

Vi nøjes med beviset for den del af sætningen, som omhandler øvre grænse. Den tilsvarende sætning for nedre grænse fås heraf ved at benytte, at en mængdes nedre grænse er den øvre grænse for mængden, bestående af dens minoranter (sml. opg. 8.)

Det forudsættes, at enhver opad begrænset ikke tom delmængde M' af M har en øvre grænse. Lad A være et snit i M. A er da en opad begrænset delmængde af M. Lad a = sup A. Der gælder da, at

$$A = A_a.$$

Er nemlig $x \in A$ findes der $y \in A$, således at $x \prec y$ (egenskaben S2), og da a er majorant for A har vi, at $x \prec y \preceq a$, altså $x \in A_a$. Er omvendt $x \in A_a$, altså $x \prec a$, er x ikke majorant for A, da a er den mindste majorant. Følgelig findes der et $y \in A$, således at $x \prec y$. Ifølge egenskaben S3 gælder da $x \in A$. Et snit i M er altså altid et afsnit.

Dernæst forudsættes, at ethvert snit i M er et afsnit. Lad M' være en opad begrænset ikke tom delmængde af M. Vi betragter mængden

$$A = \{ x \in M | \exists_{M'} y \ [x \preceq y] \}.$$

Mængderne A og M har de samme elementer af M som majoranter. At en majorant for A er majorant for M' følger nemlig af, at M' er en delmængde af A, og er z majorant for M' og $x \in A$, har vi $x \preceq y$ for et element $y \in M'$, og dermed $x \preceq y \preceq z$; følgelig er z majorant for A.

Har A et sidste element, vil dette åbenbart være øvre grænse for M'. Vi antager da, at A ikke har noget sidste element. Det ses da, at A er et snit. Ifølge forudsætningen findes der da et element $a \in M$, således at

$$A = A_a = \{x \in M | x \prec a\}.$$

Dette element a er da åbenbart den mindste majorant for A og følgelig også for M'.

Hermed er sætningen bevist.

I en **tæt** ordnet mængde $(M, \prec)$ uden første og sidste element kan man indføre en topologi på følgende måde. Ved to elementer

$p, q \in M$, for hvilke $p \prec q$, bestemmes det åbne interval

$$]p,q[= \{x \in M \mid p \prec x \prec q\},$$

som ikke er tomt, da M er tæt ordnet. Ved en omegn U(a) af et element $a \in M$ forstås en delmængde af M, som indeholder et åbent interval, til hvilket a hører. De krav, der stilles til mængden af omegne af et element a, er øjensynlig opfyldt: 1) Hvert element $a \in M$ har omegne, da a hverken er første eller sidste element i M. 2) Hver omegn af a indeholder a. 3) Hvis U(a) er en omegn af a, vil hver mængde $V \subseteq M$, for hvilken $U(a) \subseteq V$, også være en omegn af a. 4) Fællesmængden af to omegne af a er en omegn af a, idet fællesmængden af to åbne intervaller indeholdende a er et åbent interval indeholdende a. 5) Hver omegn U(a) af a indeholder en omegn V(a) af a, således at U(a) er en omegn af hvert element $b \in V(a)$. Som V(a) kan nemlig vælges et åbent interval indeholdt i U(a) og indeholdende a. Det således definerede omegnssystem bestemmer altså en topologi i den ordnede mængde, den såkaldte <u>ordningstopologi</u>. Den opfylder <u>Hausdorffs adskillelsesaksiom</u>: 6) Er a og b forskellige elementer af M, så findes der disjunkte omegne U(a) og V(b) af a og b. Antages nemlig, at f.eks. $a \prec b$, findes der et element p, for hvilket $a \prec p \prec b$; og $\{x \mid x \prec p\}$ og $\{x \mid p \prec x\}$ er da omegne af den forlangte art. Forsynet med ordningstopologien er M et <u>Hausdorffrum.</u>

En delmængde M' af et topologisk rum M siges at være <u>åben</u>, hvis hvert af dens elementer har en omegn, der er indeholdt i M'. En delmængde af M siges at være <u>afsluttet</u>, hvis dens komplementærmængde er åben.

Et topologisk rum M siges at være <u>sammenhængende</u>, hvis det ikke er foreningsmængde af to ikke tomme, åbne disjunkte delmængder. Ensbetydende hermed er, at der ikke findes nogen fra Ø og M forskellig delmængde, som er såvel åben som afsluttet.

<u>Lad</u> $(M, \prec)$ <u>være en tæt ordnet mængde uden første og sidste element. Da er hvert snit i M et afsnit, hvis og kun hvis M forsynet med ordningstopologien er et sammenhængdende topologisk rum.</u>

Bevis: Antag først, at M er et sammenhængende topologisk rum. Et snit A er en åben delmængde af M. Til hvert $y \in A$ findes der nemlig $x, z \in A$, således at $x \prec y \prec z$, idet jo y hverken er første eller sidste element i A, og $]x,z[$ er da indeholdt i A. Hvis A ikke var et afsnit, ville komplementærmængden $\complement A$, som jo består af majoranterne for A, ikke have noget første element, og man kunne slutte analogt, at $\complement A$ var åben. Men dette ville stride mod at M er sammenhængende.

Antag dernæst, at hvert snit i M er et afsnit, og lad U være en ikke tom, åben og ægte delmængde af M. Det skal vises, at komplementærmængden ikke kan være åben. Lad x være et element i U og y et element i $\complement U$. Uden væsentlig indskrænkning kan antages, at $x \prec y$.*) Da vil $U \cap A_y$ være en ikke tom, åben mængde, idet det ved y bestemte afsnit A_y er åbent. Endvidere er $U \cap A_y$ opad begrænset og har altså ifølge den foregående sætning en øvre grænse a. Denne kan ikke tilhøre U, idet ikke noget element mellem a og y og derfor heller ikke noget åbent interval omkring a kan tilhøre U. Men så kan $\complement U$ ikke være åben, idet hvert åbent interval omkring a indeholder elementer af U. Dermed er sætningen bevist.

De beviste sætninger kan sammenfattes i følgende:

Hvis $(M, \prec)$ er en tæt ordnet mængde uden første og sidste element, er følgende 3 egenskaber ved M ensbetydende:

1. <u>Ethvert snit i M er et afsnit.</u>
2. <u>Enhver opad begrænset, ikke tom delmængde af M har en øvre grænse.</u>
3. <u>M er sammenhængende i ordningstopologien.</u>

*) idet man ellers kan lade U og $\complement U$ bytte roller i det følgende ræsonnement, Antagelsen at $\complement U$ er åben vil da komme i modstrid med forudsætningen at U er åben.

Hvis $(M,\prec)$ har en af disse egenskaber, og dermed dem alle, siges $(M,\prec)$ at være kontinuert ordnet.

De reelle tals legeme er kontinuert ordnet.

Bevis: Lad A være et snit i $\dot{R}$. Der findes da elementer c og d fra $\dot{R}$, således at $c \in A$, $d \notin A$, og vi har åbenbart, at

$$x \leqq c \Rightarrow x \in A, \qquad d \leqq x \Rightarrow x \notin A.$$

For hvert fast $n \in \dot{N}$ findes der, da $\dot{R}$ er arkimedisk ordnet, tal p og $q \in \dot{Z}$, således at

$$p\cdot 2^{-n} \leqq c, \qquad d \leqq q\cdot 2^{-n},$$

altså

$$p\cdot 2^{-n} \in A, \qquad q\cdot 2^{-n} \notin A.$$

Der findes da et største helt tal r, således at

$$r\cdot 2^{-n} \in A.$$

Betegner r_n dette, og sættes $r_n\cdot 2^{-n} = a_n$, har vi

$$a_n \in A, \qquad a_n + 2^{-n} \notin A.$$

Det ses af definitionen på a_n, at talfølgen (a_n) er voksende. Der gælder endda, at talfølgen (a_n) er en fundamentalfølge i $\dot{R}$. Lad nemlig $\varepsilon \in \dot{R}_+$. På grund af den arkimediske ordning findes der et tal $n \in \dot{N}$, således at

$$2^{-n} \leqq \varepsilon \,.$$

Man har da for $i > j \geqq n$

$$|a_i - a_j| = a_i - a_j < a_j + 2^{-j} - a_j = 2^{-j} \leqq 2^{-n} \leqq \varepsilon$$

hvor uligheden $a_i < a_j + 2^{-j}$ følger af, at $a_i \in A$, mens $a_j + 2^{-j} \notin A$.
Lad $a = \lim(a_n)$, som findes, da $\dot{R}$ er fuldstændig. Snittet A vil da være det ved a bestemte afsnit i $\dot{R}$. Er nemlig $x < a$ har vi fra et vist trin $x < a_n$, og dermed $x \in A$. Er omvendt $x \in A$ findes der på grund af egenskaben S2 ved A og den arkimediske ordning af $\dot{R}$ et $n \in \dot{N}$, således at

$$x + 2^{-n} \in A.$$

Der gælder da $x < a_n$, og dermed $x < a$, da $a_n \leq a$, fordi talfølgen (a_n) er voksende.

Hermed er sætningen bevist.

Omvendt gælder der:

Ethvert kontinuert ordnet legeme $(L,+,\cdot,\prec)$ er ordenstro isomorft med de reelle tals legeme.

Bevis: Først vises, at L er arkimedisk ordnet. Dette gøres indirekte: Mængden

$$A = \{x \in L \mid \exists_{\mathbb{N}} n\, [\, x \prec n\,]\}$$

opfylder betingelserne S2 og S3. Var L ikke arkimedisk ordnet, ville mængden A have en majorant og følgelig være et snit, da den ikke er tom. Ifølge forudsætningen fandtes der da et $a \in L$, således at

$$A = A_a = \{x \in L \mid x \prec a\}.$$

Dette ville imidlertid føre til en modstrid. Man havde nemlig $a - 1 \in A_a$, altså $a - 1 \in A$, men

$$a - 1 \in A \Rightarrow \exists_{\mathbb{N}} n\, [a - 1 \prec n],$$

hvoraf ville følge, at $a \prec n + 1$, altså $a \in A$ i modstrid med $A = A_a$.

Det skal nu vises, at L er fuldstændig. Lad (a_i) være en fundamentalfølge i L. Mængden A defineret ved

$$A = \{x \in L \mid \exists_{\mathbb{N}} p\, \forall_{\mathbb{N}} i\, [i \geqq p \Rightarrow x \prec a_i]\}$$

opfylder S1, da fundamentalfølgen er begrænset, og øjensynlig også S3. Hvis mængden A har et sidste element a, er $A \setminus \{a\}$ det ved a bestemte afsnit A_a. Hvis mængden A ikke har noget sidste element, altså opfylder S2, er den et snit, og ifølge forudsætning findes der et $a \in L$, således at A er det ved a bestemte afsnit A_a. Følgen (a_i) vil i begge tilfælde konvergere mod a. Lad nemlig $\varepsilon \in L_+$ være givet. Da (a_i) er en fundamentalfølge, findes der et $n \in \mathbb{N}$, således at

$$|a_i - a_j| \preceq \tfrac{1}{2}\varepsilon \qquad \text{for } i,j \geqq n.$$

Idet $a - \frac{1}{2}\varepsilon \in A$, findes et tal $p \in \mathbb{N}$, som kan vælges større end n, således at

$$a - \tfrac{1}{2}\varepsilon \prec a_i \qquad \text{for } i \geqq p.$$

Endvidere har vi $a + \frac{1}{2}\varepsilon \notin A$, hvoraf følger, at der findes et naturligt tal $j \geqq p$, således at

$$a_j \succeq a + \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Der gælder altså

$$a - \tfrac{1}{2}\varepsilon \prec a_j \preceq a + \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

hvilket sammen med

$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon \preceq a_i - a_j \preceq \tfrac{1}{2}\varepsilon \qquad \text{for } i \geqq p$$

giver

$$|a_i - a| \preceq \varepsilon \qquad \text{for } i \geqq p.$$

Hermed er vist, at følgen (a_i) konvergerer mod a.

Sætningens påstand følger herefter af et tidligere resultat (side II, 3, 12).

Dedekinds indførelse af de reelle tal består i en udvidelse af de rationale tals legeme $(\dot{Q},+,\cdot,<)$ til et kontinuert ordnet legeme. Et reelt tal defineres som et snit i $(\dot{Q},<)$. [Dedekind forstår ved et snit et par $(A,\complement A)$ af delmængder, hvor A er et snit som defineret ovenfor. Men denne forskel er uvæsentlig.] Om den ved inklusionen $\subset$ ordnede mængde $(\dot{Q}^*,\subset)$ af alle snit i $(\dot{Q},<)$ kan vises, at den er kontinuert ordnet (jfr. opg. 1). Ved til hvert rationalt tal a at lade svare det ved a bestemte afsnit A_a af $(\dot{Q},<)$, defineres en bijektiv ordenstro afbildning φ af $(\dot{Q},<)$ på delmængden af $(\dot{Q}^*,\subset)$ bestående af afsnittene. Dernæst defineres kompositionerne + og . i $\dot{Q}^*$, således at φ bliver en isomorfi og $(\dot{Q}^*,+,\cdot,\subset)$ et ordnet legeme (jfr. opg. 2,3 og 4). Derved fås et kontinuert ordnet legeme, som har et med $(\dot{Q},+,\cdot,<)$ ordenstro isomorft dellegeme. At det på nær isomorfi stemmer overens med de reelle tals legeme i Mérays og Cantors forstand, fremgår af ovenstående sætning.

Øvelser til kap. II, § 4.

1. Hvis $(M,\prec)$ er en tæt ordnet mængde uden første og sidste element, definerer inklusionen en ordningsrelation i mængden M^* af snit i M. Vis følgende: Afbildningen φ af M ind i M^*, som til hvert element af M knytter det tilsvarende afsnit, er ordenstro, og billedet ved φ ligger tæt i M^*. Mængden M^* er kontinuert ordnet.

2. Vis, at hvis $(L,+,\circ,\prec)$ er et arkimedisk ordnet legeme, defineres der ved

$$A + B = \{x+y \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

en komposition i mængden L^* af snit i L, hvorved L^* bliver en kommutativ gruppe.

3. Vis, at hvis $(L,+,\circ,\prec)$ er et ordnet legeme, defineres der ved

$$A \circ B = \{x \circ y \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

en komposition i mængden L_+^* af snit i L_+, hvorved L_+^* bliver en gruppe.

4. Vis, under brug af opgaverne 1, 2 og 3, at mængden $\grave{Q}^*$ af snit i $\grave{Q}$, med ordningen defineret ved inklusion, kan organiseres til et ordnet legeme, således at afbildningen φ af $\grave{Q}$ ind i $\grave{Q}^*$, bestemt som i opgave 1, bliver en homomorfi.
Det således konstruerede ordnede legeme er ifølge opg. 1 kontinuert ordnet og følgelig ordenstro isomorft med de reelle tals legeme.

5. Lad $(M,\prec)$ være en tæt ordnet mængde uden første eller og sidste element. Vis, at hvis M er kontinuert ordnet, vil enhver voksende og begrænset følge (x_n) af elementer i M være kon-

vergent i ordningstopologien. Vis, at hvis M har en overalt tæt numerabel delmængde, og hvis enhver voksende og begrænset følge i M er konvergent, da er M kontinuert ordnet.

6. Vis, at en tæt ordnet mængde uden første og sidste element er kontinuert ordnet, hvis og kun hvis ethvert afsluttet interval er kompakt i ordningstopologien.

7*. Vis, at enhver numerabel, tæt ordnet mængde uden første og sidste element kan afbildes ordenstro på $(\mathbb{Q},<)$.
Vis, at enhver tæt ordnet mængde uden første og sidste element, som har en overalt tæt numerabel delmængde, kan afbildes ordenstro ind i $(\mathbb{R},<)$.

8. Lad $(M,\prec)$ være en tæt ordnet mængde uden første og sidste element. Vis, at enhver nedad begrænset delmængde af M har en nedre grænse, når og kun når enhver opad begrænset delmængde af M har en øvre grænse.

§ 5. Divisionsalgebraer over de reelle tals legeme.

Regning med komplekse tal forekommer for første gang hos G. Cardano (Ars magna, 1545) og mere systematisk hos R. Bombelli (Algebra, 1572), især i forbindelse med diskussionen af den af S. del Ferro (omkring 1500) angivne metode til løsning af en vilkårlig tredjegradsligning. Cardano siger imidlertid om de komplekse tal, at de er rent formelle og ikke tillader nogen fortolkning. Tiltroen til, at der er mening i regning med dem, voksede gradvis, især i 1700-tallet, efter at bl.a. A. de Moivre, J. Bernoulli og L. Euler havde betragtet funktioner af en kompleks variabel og opdaget relationerne mellem arctg og log og mellem exp, sin og cos i det komplekse område.

Den første eksakte indførelse af de komplekse tal skyldes C. Wessel (Om Directionens analytiske Betegning, 1799). Den er baseret på den euklidiske geometri og går ud på, at de komplekse tal defineres som vektorer i planen. Omtrent samtidig har C.F. Gauss kendt denne fremgangsmåde, men han har først publiceret den i 1831. Endvidere har R. Argand (Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, 1806) fundet den selvstændigt. Men alment kendt blev den først efter fremkomsten af Gauss' afhandling (derfor det hyppigt brugte navn Gauss' plan for de komplekse tals plan). En anden metode, bestående i en udvidelse af $(\mathbb{R},+,\cdot)$ til et legeme, hvori polynomiet $X^2 + 1$ har en rod (se AT, 2, 20-21), skyldes A. Cauchy (1847). En tredje velkendt indførelse er W.R. Hamiltons (1837): I mængden $\mathbb{R}^2$ af reelle talpar defineres to kompositioner $+$ og $\cdot$ ved

$$(\alpha_1,\alpha_2) + (\beta_1,\beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1,\alpha_2 + \beta_2),$$
$$(\alpha_1,\alpha_2)(\beta_1,\beta_2) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_2,\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1),$$

og det vises, at $\mathring{R}^2$ med disse kompositioner er et legeme. Endvidere vises, at parrene $(\alpha,0)$, $\alpha \in \mathring{R}$, danner et med $(\mathring{R},+,\cdot)$ isomorft dellegeme, som identificeres med $\mathring{R}$, og at hvert element $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathring{R}^2$ kan skrives

$$(\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 i,$$

hvor $i = (0,1)$, $i^2 = -1$.

Den geometriske og den sidstnævnte indførelse af de komplekse tal går ud på, at der i det todimensionale vektorrum $(V_2,+,\mathring{R})$ defineres en som multiplikation betegnet komposition, således at der opstår et legeme. Det ligger nær at spørge, om man også i reelle vektorrum af andre dimensioner kan definere et "vektorprodukt", således at rummet med vektoradditionen og denne multiplikation som kompositioner danner et legeme. (Det sædvanlige vektorprodukt $\underline{u} \times \underline{v}$ af vektorer i det tredimensionale reelle vektorrum opfylder ikke dette krav, bl.a. fordi det ikke er associativt.) Problemstillingen præciseres ved hjælp af følgende, også i andre forbindelser vigtige begreb:

Lad L være et kommutativt legeme. Dets elementer betegnes med græske bogstaver. Lad $(V,+,L)$ være et vektorrum over L. Vektorerne i V betegnes med latinske bogstaver (for simpelheds skyld uden understregning). Det antages, at der i V er defineret en komposition $\times$ betegnet som multiplikation. Det således organiserede vektorrum $(V,+,\times,L)$ kaldes en <u>algebra over L</u>, hvis der gælder

$$\forall_V u,v,w\ [u \times (v + w) = u \times v + u \times w],$$
$$\forall_V u,v,w\ [(u + v) \times w = u \times w + v \times w],$$
$$\forall_V u,v\ \forall_L \alpha\ [(\alpha u) \times v = u \times (\alpha v) = \alpha(u \times v)].$$

Har V den endelige dimension n, tales om en n-dimensional algebra eller en algebra af graden n over L. Også den ældre benævnelse <u>hyperkomplekst talsystem</u> er i brug, navnlig i tilfældet $L = \mathring{R}$.

Eksempler:

1) Det tredimensionale reelle vektorrum med det sædvanlige vektorprodukt som multiplikation.

2) Vektorrummet af alle lineære afbildninger (lineære operatorer) af et vektorrum (U,+,L) ind i sig selv med sammensætning $\circ$ som komposition $\times$. Har U den endelige dimension m, fås en m^2-dimensional algebra, som er isomorf med den m^2-dimensionale fuldstændige matrixalgebra over L, hvorunder forstås vektorrummet af alle $(m \times m)$-matricer med elementer fra L og med matrixmultiplikationen som komposition $\times$. I et uendelig dimensionalt normeret vektorrum $(U,+,\grave{R})$ eller $(U,+,\grave{C})$ danner de begrænsede (kontinuerte) lineære operatorer en "delalgebra" af den betragtede.

3) Vektorrummet af alle funktioner $\varphi: M \to L$, hvor M er en vilkårlig given mængde, med multiplikation af funktionerne som komposition $\times$. Som specielt tilfælde kan nævnes vektorrummet af alle funktioner $\varphi: \grave{R} \to \grave{R}$. Delalgebraer af denne er f.eks. mængden af alle målelige funktioner, mængden af alle kontinuerte funktioner, mængden af alle differentiable funktioner, mængden af alle reelle polynomier.

Dersom kompositionen $\times$ er associativ, siges algebraen at være associativ. Med undtagelse af 1) er de nævnte eksempler associative algebraer. Enhver associativ algebra er en ring med vektoradditionen som addition og kompositionen $\times$ som multiplikation. Er en algebra specielt et legeme, kaldes den en divisionsalgebra.

Lad $(V,+,\times,L)$ være en divisionsalgebra, og lad e betegne dens etelement. Vi har da for $\alpha,\beta \in \grave{R}$

$$\alpha e + \beta e = (\alpha + \beta)e, \quad (\alpha e) \times (\beta e) = (\alpha\beta)(e \times e) = (\alpha\beta)e.$$

Dette viser, at der ved $\alpha \to \alpha e$ defineres en isomorf afbildning af L på delmængden

$$L^* = \{\xi e \mid \xi \in L\}$$

af V. Hver divisionsalgebra over et legeme L har altså et med L isomorft dellegeme L^*. Endvidere haves for $\alpha \in \cancel{\check{R}}\,L$ og $u \in V$

$$(\alpha e) \times u = \alpha(e \times u) = \alpha u,$$
$$u \times (\alpha e) = \alpha(u \times e) = \alpha u.$$

Heraf ses, at elementerne af L^* er ombyttelige med alle elementer i V (L^* tilhører divisionsalgebraens "centrum"), og at $\times$-multiplikationen af en vektor med et element αe giver samme resultat som multiplikationen af vektoren med skalaren α. Man kan derfor uden fare for misforståelser for det første skrive kompositionen $\times$ som en sædvanlig multiplikation, og for det andet kan man identificere L^* med L, altså skrive 1 i stedet for e og α i stedet for αe. Denne gængse betegnelsesmåde vil blive anvendt i det følgende.

Vi stiller os nu opgaven at bestemme samtlige endelig-dimensionale divisionsalgebraer over de reelle tals legeme. Hovedresultatet, der skyldes *G. Frobenius* (1878) lyder:

På isomorfi nær findes der kun tre endelig-dimensionale divisionsalgebraer over de reelle tals legeme, en endimensional, nemlig $(\check{R},+,\cdot)$, *en todimensional, nemlig* $(\check{C},+,\cdot)$, *og en firedimensional* $(K,+,\cdot)$.

Den sidstnævnte blev opdaget af *W.R. Hamilton* (1843). Den er et ikke-kommutativt legeme, hvis elementer Hamilton kaldte "quaternions", og som derfor har fået navnet *kvaternionlegeme*. Det vil blive defineret senere.

Beviset for Frobenius' sætning føres i flere skridt. Det forudsættes, at $(V,+,\cdot,\check{R})$ er en divisionsalgebra af dimensionen n.

I. For $n = 1$ er $V = \check{R}$, idet $\check{R}$ er et endimensionalt underrum af V.

I det følgende antages, at $n > 1$.

II. Lad x være et vilkårligt element af V. De $n + 1$ elementer $1, x, x^2, \ldots, x^n$ er da lineært afhængige, dvs. der findes tal $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \dot{R}$, således at

$$\gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_m x^m = 0. \quad 1 \leqq m \leqq n \text{ og } \gamma_m \neq 0.$$

Ifølge algebraens fundamentalsætning kan hvert polynomium med reelle koefficienter skrives som et produkt af reelle førstegradspolynomier og reelle andengradspolynomier uden reel rod. For en ubestemt X gælder altså en ligning af formen

$$\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu X^\nu = \gamma_m \prod_{\nu=1}^{p} (X^2 + 2\alpha_\nu X + \beta_\nu) \prod_{\nu=1}^{q} (X - \delta_\nu),$$

hvor $\alpha_\nu, \beta_\nu, \delta_\nu \in \dot{R}$, $\alpha_\nu^2 - \beta_\nu < 0$ og $2p + q = m$. Her kan sættes x i stedet for X, idet potenserne af x er ombyttelige såvel indbyrdes som med de reelle tal. Da nulreglen gælder i divisionsalgebraen, sluttes, at x tilfredsstiller en første- eller andengradsligning med reelle koefficienter. Det første tilfælde indtræffer, hvis og kun hvis x er et reelt tal. Til hvert element $x \notin \dot{R}$ findes der altså $\alpha, \beta \in \dot{R}$, således at

$$x^2 + 2\alpha x + \beta = (x + \alpha)^2 + \beta - \alpha^2 = 0, \quad \alpha^2 - \beta < 0.$$

III. Med V' betegnes mængden af de elementer $x' \in V$, hvis kvadrat er et ikke-positivt reelt tal, altså, med betegnelsen $\dot{R}_{0-} = \dot{R}_- \cup \{0\}$,

$$V' = \{x' \in V \mid x'^2 \in \dot{R}_{0-}\}.$$

Da gælder

$$\dot{R} \cap V' = \{0\}$$

samt

$$[\lambda \in \dot{R} \wedge x' \in V'] \Rightarrow \lambda x' \in V'.$$

Det påstås, at hvert $x \in V$ har en og kun een fremstilling

$$x = \xi + x', \quad \xi \in \dot{R}, \ x' \in V'.$$

For $x \notin \dot{R}$, sluttes af ovenstående andengradsligning, at $x + \alpha = x' \in V'$, hvilket viser, at $x = -\alpha + x'$ er en fremstilling af den forlangte art. For $x \in \dot{R}$ er $x = x + 0$ en sådan. Er $x = \xi_1 + x'_1$ en anden fremstilling, fås

$$x_1' = (\xi - \xi_1) + x',$$

altså

$$x_1'^2 = (\xi - \xi_1)^2 + x'^2 + 2(\xi - \xi_1)x'.$$

Da de tre kvadrater er reelle, og det sidste led tilhører V', fås

$$(\xi - \xi_1)x' = 0.$$

Heraf sluttes, at $\xi = \xi_1$ og dermed $x' = x_1'$, eller at $x' = 0$, hvoraf $x_1' = \xi - \xi_1 \in \dot{R}$, altså $x_1' = 0$ og $\xi = \xi_1$. Dermed er også fremstillingens entydighed bevist.

IV. Det påstås, at V' er et underrum i $(V,+,\dot{R})$. Det er allerede nævnt, at man af $\lambda \in \dot{R}$ og $x' \in V'$ kan slutte, at $\lambda x' \in V'$. Det er altså tilstrækkeligt at vise, at $x' \in V'$ og $y' \in V'$ medfører $x' + y' \in V'$. Til dette formål betragtes fremstillingerne

$$x' + y' = \lambda + l', \quad \lambda \in \dot{R},\ l' \in V',$$

$$x' - y' = \mu + m', \quad \mu \in \dot{R},\ m' \in V'.$$

Påstanden er da ensbetydende med $\lambda = 0$. Nu er

$$x'y' + y'x' = (x' + y')^2 - x'^2 - y'^2$$
$$= \lambda^2 + l'^2 - x'^2 - y'^2 + 2\lambda l',$$

$$x'y' + y'x' = x'^2 + y'^2 - (x' - y')^2$$
$$= x'^2 + y'^2 - \mu^2 - m'^2 - 2\mu m'$$

to fremstillinger af $x'y' + y'x'$ af formen reelt tal plus henholdsvis $2\lambda l' \in V'$og $-2\mu m' \in V'$. Ifølge III er altså

$$\lambda l' = -\mu m'.$$

Var nu $\lambda \neq 0$, havde man

$$x' + y' = \lambda - \frac{\mu}{\lambda} m',$$

$$x' - y' = \mu + m',$$

hvoraf

$$2x' = \lambda + \mu + (1 - \frac{\mu}{\lambda})m',$$
$$2y' = \lambda - \mu - (1 + \frac{\mu}{\lambda})m'.$$

Ifølge III havde man da $\lambda + \mu = \lambda - \mu = 0$, altså $\lambda = 0$ i strid med antagelsen. Dermed er påstanden bevist.

V. For $n = 2$ er $(V,+,\cdot,\grave{R})$ isomorf med $(\grave{C},+,\cdot)$. Idet $\grave{R}$ er et endimensionalt underrum og V' et underrum, som kun har 0 fælles med $\grave{R}$, må V' være endimensional. Er $x' \neq 0$ et element i, altså en basis for V', vil også

$$i = (-x'^2)^{-\frac{1}{2}}x'$$

være en basis for V'. Hvert element $x \in V$ har følgelig en og kun een fremstilling af formen $x = \xi + \eta i$, hvor $\xi,\eta \in \grave{R}$ og $i^2 = -1$. Dermed er påstanden, at hver todimensional divisionsalgebra over $\grave{R}$ er isomorf med de komplekse tals legeme bevist (H. Hankel 1867).

I det følgende antages, at $n > 2$.

VI. For hvilkesomhelst $x',y' \in V'$ er $x'y' + y'x' \in \grave{R}$. Da $(x' + y')^2 \in \grave{R}$ ifølge IV, aflæses dette af

$$x'y' + y'x' = (x' + y')^2 - x'^2 - y'^2.$$

VII. Er elementerne $x'_1,\ldots,x'_r \in V'$ lineært uafhængige, vil også $1,x'_1,\ldots,x'_r$ være lineært uafhængige. Er nemlig

$$\lambda + \lambda_1 x'_1 + \ldots + \lambda_r x'_r = 0,$$

hvor $\lambda,\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \grave{R}$, fås ved hjælp af III, at $\lambda = 0$ og $\lambda_1 x'_1 + \ldots + \lambda_r x'_r = 0$, da denne sum tilhører V'. Vælges specielt en basis $(x'_1,\ldots,x'_r)$ for V', bliver $(1,x'_1,\ldots,x'_r)$ ifølge III en basis for V. Man har da altså $n = 1 + r$ og følgelig $\dim V' = n - 1$.

VIII. Lad $x',y' \in V'$ være lineært uafhængige. Der findes da et $\rho \in \grave{R}$ således, at der for

$$y'' = y' + \rho x'$$

gælder

$$x'y'' + y''x' = 0.$$

På grund af VI og da $x' \neq 0$, findes der nemlig netop eet reelt tal ρ, for hvilket

$$x'(y' + \rho x') + (y' + \rho x')x' = x'y' + y'x' + 2\rho x'^2 = 0.$$

Elementerne x' og y'' er øjensynlig også lineært uafhængige. Om elementerne

$$i = (-x'^2)^{-\frac{1}{2}}x', \qquad j = (-y'^2)^{-\frac{1}{2}}y'$$

gælder da, at de er lineært uafhængige, og at

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad ij = -ji.$$

Sættes

$$k = ij,$$

fås

$$k^2 = ijij = -ijji = i^2 = -1,$$

$$ki = iji = -i^2j = j, \quad ik = i^2j = -j,$$

$$jk = jij = -ij^2 = i, \quad kj = ij^2 = -i.$$

IX. Elementerne i, j, k, og derfor (ifølge VII) også 1, i, j, k, er lineært uafhængige, så at $n \geqq 4$. Af

$$\rho i + \sigma j + \tau k = 0, \qquad \rho, \sigma, \tau \in R,$$

fås nemlig ved multiplikation med k fra højre

$$\rho ik + \sigma jk - \tau = 0,$$

$$-\rho j + \sigma i - \tau = 0,$$

og da i og j, og følgelig også 1, i, j er lineært uafhængige, kan dette kun gælde for $\rho = \sigma = \tau = 0$.

X. Dimensionen n af V kan ikke være større end 4. Med andre ord, de tre under VIII indførte elementer i, j, k danner en basis for V'. For at vise dette betragtes et vilkårligt element $z' \in V'$. Ifølge VI er

(1) $\qquad iz' + z'i = \rho,$

(2) $\qquad jz' + z'j = \sigma,$

(3) $\qquad kz' + z'k = \tau$

reelle tal. Multipliceres (1) med j fra venstre, fås med benyttelse af (2)

$$jiz' + jz'i = jiz' + \sigma i - z'ji$$
$$= -kz' + \sigma i + z'k = \rho j.$$

Elimineres kz' ved hjælp af (3), fås

$$2z'k = \rho j - \sigma i + \tau$$

og heraf ved multiplikation med k fra højre

$$-2z' = \rho i + \sigma j + \tau k.$$

Denne ligning viser, at det vilkårlige element $z' \in V'$ tilhører det af i,j,k udspændte underrum, og dette må følgelig være identisk med V'.

Hermed er bevist: Nødvendige betingelser for, at en algebra $(V,+,\cdot,\dot{R})$ af en dimension $n > 2$ er en divisionsalgebra, er, at $n = 4$ og at $(V,+,\dot{R})$ har en basis (1,i,j,k), hvor 1 er algebraens etelement, og for hvilken

$$\begin{aligned} &i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ &jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad ij = -ji = k. \end{aligned} \tag{4}$$

Ved disse relationer er produkterne af hvilkesomhelst to basiselementer bestemt. På grund af de distributive love og de reelle tals ombyttelighed med alle elementer i V må der altså for hvilkesomhelst to elementer

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k, \qquad b = \beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k$$

gælde

$$\begin{aligned} ab = \ & \alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 \\ & + (\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_2\beta_3)i \\ & + (\alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3)j \\ & + (\alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_0\beta_3)k. \end{aligned}$$

Dette viser, at multiplikationen i V er entydig bestemt, når en basis af den betragtede art er valgt. Heraf sluttes, at der på nær isomorfi ikke kan eksistere mere end een firedimensional divisionsalgebra over $\grave{R}$.

Der mangler endnu beviset for, at der overhovedet findes en sådan. I det firedimensionale reelle vektorrum $(V_4,+,\grave{R})$ vælges en basis. Produktet ab af de to vektorer a og b med koordinatsættene

$$(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \quad (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

defineres som vektoren med koordinatsættet

$$\begin{aligned}(&\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3,\\ &\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_2\beta_3,\\ &\alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3,\\ &\alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_0\beta_3).\end{aligned}$$

Med denne multiplikation er vektorrummet i hvert fald en algebra $(V_4,+,\cdot,\grave{R})$; thi da produktets koordinater er homogene lineære funktioner af hver faktors koordinater, er kravene til en sådan (side II,5,2) øjensynlig opfyldt. Endvidere ses, at den har et etelement, nemlig (1,0,0,0). Elementerne $(\lambda,0,0,0) = \lambda(1,0,0,0)$, $\lambda \in \grave{R}$, danner et med $\grave{R}$ isomorft legeme, som kan identificeres med $\grave{R}$, idet multiplikation af en vektor med $(\lambda,0,0,0)$ giver samme resultat som vektorrummets multiplikation af vektoren med λ. Specielt kan altså skrives 1 i stedet for (1,0,0,0).

For i = (0,1,0,0), j = (0,0,1,0), k = (0,0,0,1) gælder ligningerne (4), hvilket verificeres med benyttelse af produktets definition. (Det bemærkes, at det er tilstrækkeligt at eftervise, at $i^2 = j^2 = -1$ og $k = ij = -ji$, idet man af disse, som vist under VIII kan udlede de øvrige ligninger.) Elementet $a = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ i algebraen kan skrives

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$$

og kaldes kvaternion. Produktet af to kvaternioner kan udregnes som angivet ovenfor (side II,5,9) med benyttelse af de distributive love og relationerne (4).

Algebraen $(V_4, +, \cdot, \mathring{R})$ er associativ. Dette kan eftervises direkte ud fra produktets definition. Men udregnes produkterne på den sidstnævnte måde, ses, at det er tilstrækkeligt at bevise associativiteten for produkter af tre basiselementer. Dette kan ske ved hjælp af ligningerne (4). Typiske eksempler er

$$i(jk) = i^2 = -1, \quad (ij)k = k^2 = -1,$$
$$i(ij) = ik = -j, \quad (ii)j = i^2 j = -j.$$

Endelig skal vises, at hver fra 0 forskellig kvaternion har en invers. Dette sker let ved hjælp af følgende begreb: Ved den til en kvaternion

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$$

konjugerede kvaternion forstås

$$\bar{a} = \alpha_0 - \alpha_1 i - \alpha_2 j - \alpha_3 k.$$

Man har da $\bar{\bar{a}} = a$, og ved udregning findes

$$a\bar{a} = \bar{a}a = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

Dette tal betegnes med $N(a)$ og kaldes kvaternionens norm. (Det er, trods dette gamle navn, ikke nogen norm i vektorrummet $(V_4, +, \mathring{R})$, men kvadratet på en sådan.) For $a \neq 0$ er $N(a) > 0$, og der gælder

$$a\frac{\bar{a}}{N(a)} = \frac{\bar{a}}{N(a)}a = 1.$$

Kvaternionen

$$a^{-1} = \frac{\bar{a}}{N(a)}$$

er altså invers til a.

Hermed er bevist, at den definerede "kvaternionalgebra" er en divisionsalgebra, altså specielt et legeme. Den kaldes derfor også kvaternionlegemet og betegnes med $(K,+,\cdot)$.

Der tilføjes nogle bemærkninger om regning med kvaternioner.

For $a,b \in K$, $a \neq 0$, har hver af ligningerne

$$ax = b, \quad ya = b$$

netop een løsning, nemlig henholdsvis

$$x = a^{-1}b, \; y = ba^{-1},$$

som almindeligvis er forskellige.

For $a,b \in K$ og $\lambda \in \mathring{R}$ findes

$$\overline{\lambda a} = \lambda \bar{a}, \quad \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \overline{ab} = \bar{b}\bar{a}.$$

Heraf ses, at den ved $x \to \bar{x}$ bestemte afbildning af K på sig selv er en lineær afbildning af vektorrummet $(V_4,+,\mathring{R})$ på sig selv, men på grund af den sidste ligning kun en såkaldt antiautomorfi og ikke, som den tilsvarende afbildning af $(\mathring{C},+,\cdot)$ på sig selv, en automorfi af legemet. Idet $\bar{\bar{x}} = x$ for $x \in K$, er afbildningen involutorisk.

For $a,b \in K$ gælder

$$N(ab) = ab\overline{ab} = ab\bar{b}\bar{a} = aN(b)\bar{a} = N(a)N(b).$$

Den ved $x \to N(x)$ definerede afbildning af $K \setminus \{0\}$ på $\mathring{R}_+$ er altså en homomorfi af kvaternionlegemets multiplikative gruppe $(K \setminus \{0\} \cdot)$ på de positive reelle tals multiplikative gruppe $(\mathring{R}_+,\cdot)$. Kernen ved denne homomorfi udgøres af "enhedskvaternionerne", dvs. kvaternionerne med norm 1. Denne normale undergruppe i legemets multiplikative gruppe betegnes med $(K_1,\cdot)$.

Til relationen $N(ab) = N(a)N(b)$ bemærkes yderligere: Den er en identitet i 8 reelle variable, der giver en fremstilling af et produkt, hvor hver faktor er en sum af 4 kvadrater, som en sum af 4 kvadrater. Den benyttes bl.a. i et bevis for en sætning af Lagrange, ifølge hvilken hvert ikke-negativt helt tal kan skrives som en sum af 4 kvadrater på hele tal. Ved hjælp af identiteten ses, at det er tilstrækkeligt at bevise Lagranges sætning for primtal.

Efter Hamilton kaldes α_0 og $\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$ henholdsvis for skalardelen og vektordelen af kvaternionen $\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$. For produktet af to "vektorkvaternioner" findes

$$(\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k)(\beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k)$$
$$= -(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3) + (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)i + (\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)j + (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)k.$$

Fortolkes i,j,k som grundvektorer for et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem i rummet, bliver de to vektorkvaternioner sædvanlige vektorer, produktets skalardel, bortset fra fortegnet, deres skalarprodukt og vektordelen deres vektorprodukt. Dette var grundlaget for Hamiltons indførelse af disse produkter. Den elementære vektoralgebra har altså sit udspring i kvaternionalgebraen.

Kvaternionlegemet er isomorft med en matrixalgebra. Der gælder tilsvarende for enhver endelig-dimensional associativ algebra. Dette vil her blive bevist for associative algebraer med etelement.

Lad (V,+,L) være et vektorrum over et kommutativt legeme L. Med E_V betegnes mængden af alle endomorfier af vektorrummet (V,+,L), altså alle lineære afbildninger af dette ind i sig selv. Idet summen af to lineære afbildninger og produktet af et element fra L med en lineær afbildning igen er lineære afbildninger, ses let, at E_V ved disse kompositioner organiseres til et vektorrum $(E_V,+,L)$. Som allerede nævnt (eksempel 2) bliver dette med afbildningernes sammensætning $\circ$ som multiplikation en associativ algebra $(E_V,+,\circ,L)$. Man har nemlig for alle $x \in V$, $\lambda \in L$ og $f,g,h \in E_V$,

$$f\circ(g+h)(x) = f(g(x) + h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) = (f\circ g + f\circ h)(x),$$
$$(f+g)\circ h(x) = (f+g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) = (f\circ h + g\circ h)(x),$$
$$(\lambda f)\circ g(x) = \lambda f(g(x)) = f(\lambda g(x)) = f\circ(\lambda g)(x).$$

Denne algebra kaldes den til vektorrummet $(V,+,L)$ hørende <u>endomorfialgebra</u>.

Har $(V,+,L)$ den endelige dimension n, og vælges en basis for V, hører der til hver endomorfi f en $(n \times n)$-matrix $\underline{\underline{A}}_f$ med elementer fra L, og omvendt. Idet

$$\underline{\underline{A}}_{f+g} = \underline{\underline{A}}_f + \underline{\underline{A}}_g, \quad \underline{\underline{A}}_{\lambda f} = \lambda\underline{\underline{A}}_f, \quad \underline{\underline{A}}_{f\circ g} = \underline{\underline{A}}_f\underline{\underline{A}}_g,$$

bestemmes ved $f \to \underline{\underline{A}}_f$ en isomorf afbildning Φ af $(E_V,+,\circ,L)$ på den <u>fuldstændige matrixalgebra af n-te grad over</u> L, dvs. det n^2-dimensionale vektorrum af alle $(n \times n)$-matricer med elementer fra L og med matrixmultiplikationen som yderligere komposition. Denne matrixalgebra vil blive betegnet med $(M_n,+,\cdot,L)$.

Lad nu $(V,+,\cdot,L)$ være en associativ algebra, og lad a være et fast element af V. Ved

$$x \to ax, \quad x \in V,$$

bestemmes en afbildning $f_a : V \to V$. Denne er lineær; thi for $x,y \in V$ og $\lambda \in L$ gælder

$$f_a(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f_a(x) + f_a(y),$$
$$f_a(\lambda x) = a(\lambda x) = \lambda(ax) = \lambda f_a(x).$$

Endvidere fås for $a,b,x \in V$

$$f_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = f_a\circ f_b(x),$$

hvorved algebraens associativitet er benyttet. Disse resultater viser, at der ved

$$a \to f_a, \quad a \in V,$$

bestemmes en homomorf afbildning $\varphi : V \to E_V$ af algebraen $(V,+,\cdot,L)$

ind i endomorfialgebraen $(E_V,+,\circ,L)$. Billedet $\varphi(V)$ er en delalgebra af $(E_V,+,\circ,L)$ i den oplagte betydning. Har $(V,+,\cdot,L)$ den endelige dimension n, kan denne homomorfi sammensættes med den ovenfor omtalte isomorfi $\Phi:E_V \to M_n$ af endomorfialgebraen på den fuldstændige matrixalgebra $(M_n,+,\cdot,L)$. Derved fås en homomorfi $\Phi\circ\varphi:V \to M_n$.

Forudsættes nu, at algebraen $(V,+,\cdot,L)$ har et etelement e, vil homomorfien φ være injektiv; thi af $f_a = f_b$, altså $ax = bx$ for alle $x \in V$, specielt for $x = e$, følger $a = b$.

Dermed er bevist:

Enhver associativ algebra $(V,+,\cdot,L)$ med etelement er isomorf med en delalgebra af endomorfialgebraen $(E_V,+,\circ,L)$ for vektorrummet $(V,+,L)$. Har $(V,+,L)$ den endelige dimension n, er $(V,+,\cdot,L)$ også isomorf med en matrixalgebra, nemlig en delalgebra af $(M_n,+,\cdot,L)$.

En homomorf afbildning af en algebra ind i endomorfialgebraen for et vektorrum (som ikke behøver at stemme overens med algebraens vektorrum), specielt ind i en fuldstændig matrixalgebra kaldes en repræsentation af algebraen. Er homorfien injektiv, siges repræsentationen at være tro. Den ovenfor angivne kaldes algebraens regulære repræsentation. Ved en (tro) repræsentation af en gruppe forstås tilsvarende en (injektiv) homomorf afbildning af denne ind i gruppen af lineære afbildninger af et vektorrum på sig selv, specielt ind i den generelle lineære gruppe over et legeme. Grupperepræsentationer spiller bl.a. en fremtrædende rolle i kvantefysikken. Deres teori kan med metodisk fordel indordnes under teorien for repræsentationer af algebraer. Herved benyttes, at hver endelig gruppe kan udvides til en såkaldt gruppealgebra eller gruppering.

Kvaternionalgebraens regulære repræsentation fås ved at bemærke, at kvaternionligningen

$$y = ax,$$

hvor

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k,$$
$$x = \xi_0 + \xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 k,$$
$$y = \eta_0 + \eta_1 i + \eta_2 j + \eta_3 k,$$

er ensbetydende med matrixligningen

$$\begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_0 & -\alpha_1 \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Idet den her optrædende (4×4)-matrix betegnes med $\underline{\underline{A}}$, er altså den regulære repræsentation den ved $a \to \underline{\underline{A}}$ bestemte afbildning af K ind i M_4. De almene resultater viser, at de af reelle talsæt $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ dannede matricer A udgør et med $(K, +, \cdot)$ isomorft legeme. Man kunne derfor også definere kvaternionerne som disse matricer. Men man måtte da bevise, at produktet af to af dem og den inverse til en fra $\underline{\underline{0}}$ forskellig af dem er af samme form. Associativiteten og de øvrige krav til et legeme vides derimod på forhånd at være opfyldt.

Ved udregning ses, at

$$\det \underline{\underline{A}} = N(a).$$

Relationen $N(ab) = N(a)N(b)$ kunne altså også sluttes af multiplikationssætningen for determinanter.

Øvelser til kap. II, §5.

1. Lad

$$P(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$$

være et tredjegradspolynomium med komplekse koefficienter. Vis, at der findes et komplekst tal k, således at der for alle komplekse z gælder

$$Q(z) = P(z + k) = z^3 + 3pz + 2q,$$

hvor p og q kun afhænger af a_o, a_1, a_2.
Rødderne i dette polynomium Q betegnes med z_1, z_2, z_3. Ved dets diskriminant forstås tallet

$$D = (z_2 - z_3)^2(z_3 - z_1)^2(z_1 - z_2)^2.$$

Find D udtrykt ved p og q.
Vis, at bestemmelsen af rødderne i Q kan føres tilbage til løsning af to binome ligninger. (Indfør en ny ubekendt y ved at sætte $z = y - p/y$.)
Find for reelle koefficienter p og q en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at ligningen har 3 reelle rødder.
Vis, at man i dette tilfælde kan angive rødderne i trigonometrisk form. (Benyt, at $\cos 3\Theta = 4\cos^3\Theta - 3\cos \Theta$.)

2. Vis, at matricerne

$$\Xi = \begin{pmatrix} X & X^* \\ -\overline{X}^* & \overline{X} \end{pmatrix}, \qquad X, X^* \in \mathbb{C},$$

danner en matrixalgebra over de komplekse tals legeme, som er isomorf med kvaternionlegemet. (Betegn de komplekse tals imaginære enhed f.eks. med $\sqrt{-1}$ for at undgå forveksling med kvaternionenheden i.)
Vis, at gruppen $(K_1,\cdot)$ af enhedskvaternioner er isomorf med den specielle (unimodulære) unitære gruppe SU(2).

3. Vis, at kvaternionenhederne $1,-1,i,-i,j,-j,k,-k$ danner en gruppe med multiplikationen som komposition, og opstil en gruppetavle.

Denne gruppe har den særlige egenskab, at alle dens undergrupper er normale. Bevis dette.

4. Vektorerne $\underline{x} = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ i det tredimensionale euklidiske rum tænkes repræsenteret ved vektorkvaternionerne $\xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 k$. For hver kvaternion $a = \alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k$, for hvilken $N(a) = 1$, bestemmes da ved

$$y = axa^{-1} = ax\bar{a}$$

en lineær afbildning g_a af rummet på sig selv. Vis, at den er egentlig ortogonal, og at der ved $a \to g_a$ defineres en homomorf afbildning af gruppen $(K_1,\cdot)$ af enhedskvaternioner på gruppen $O^+(3,\mathring{R})$.

Sæt $a = \cos\frac{1}{2}\omega + \sin\frac{1}{2}\omega\ (\delta_1 i + \delta_2 j + \delta_3 k)$, hvor $\omega \in \mathring{R}$ og $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = 1$. Vis, at g_a da er en drejning, hvis drejningsakses retning er bestemt ved enhedsvektoren $\underline{d} = (\delta_1,\delta_2,\delta_3)$, og hvis drejningsvinkel er ω. (Herved skal denne regnes med fortegn således, at en positiv drejning ω sammen med retningen af $\underline{d}$ svarer til den ved koordinatsystemet bestemte orientering af rummet.)

Slut heraf, at homomorfien $a \to g_a$ af $(K_1,\cdot)$ ind i $O^+(3,\mathring{R})$ er surjektiv, og bestem dens kerne.

Slut endvidere, at der findes en surjektiv homomorfi af $SU(2)$ på $O^+(3,\mathring{R})$. (Jfr. øv. 2.)

Kap.III. Projektiv geometri.

§ 1. Indledning.

Den projektive geometri er en gren af geometrien, der er fremgået af studiet af egenskaber ved geometriske figurer, som bevares ved centralprojektion. Enkelte herhen hørende sætninger findes allerede hos Pappos (ca. 300).

Lad der i planen være givet et punkt Ø samt to rette linier l og l', som skærer hinanden og ikke går gennem Ø. Ved til hvert punkt P på l at lade svare skæringspunktet P' af linien ØP med l' fås en afbildning af l på l', som kaldes en centralprojektion fra Ø af l på l' eller kort en <u>perspektivitet</u>. Her optræder imidlertid to undtagelser: skæringspunktet mellem l og den med l' parallelle linie gennem Ø har ikke noget billedpunkt, og skæringspunktet mellem l' og den med l parallelle linie gennem Ø har ikke noget originalpunkt. Bortset herfra er afbildningen bijektiv. Afstanden mellem to punkter A og B på l er almindeligvis forskellig fra afstanden mellem deres billedpunkter A' og B' på l'. Det forhold, hvori et tredie punkt C på l deler liniestykket AB er almindeligvis forskelligt fra det forhold, hvori billedpunktet C' deler liniestykket A'B'. Længder og delingsforhold bevares altså ikke ved centralprojektion.

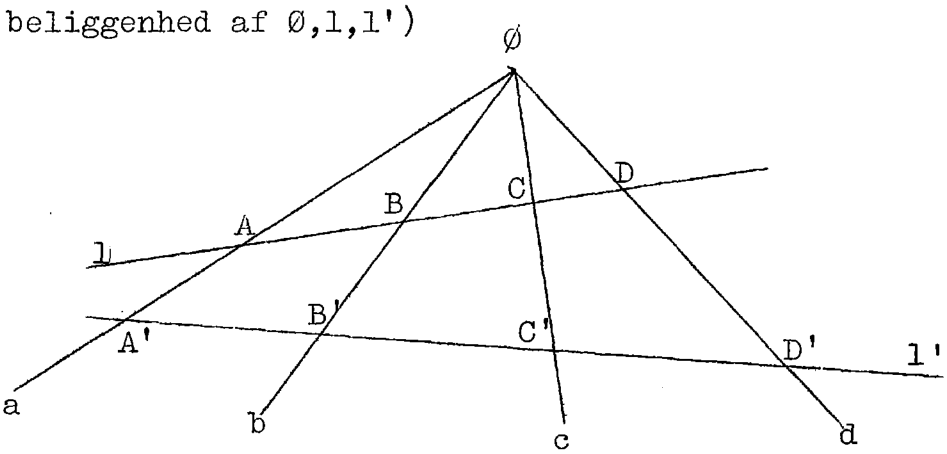
Man kan imidlertid til et sæt A,B,C,D af fire forskellige punkter på linien l knytte en "projektiv invariant", det såkaldte <u>dobbeltforhold</u>

$$\mathrm{df}(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD} ,$$

hvor AC,BC,... betegner længderne af de pågældende liniestykker regnet med fortegn svarende til en vilkårlig valgt orientering af linien l. At der for billedpunkterne A',B',C',D' gælder

$$df(A'B'C'D') = df(ABCD)$$

(Pappos) ses således: Med figurens betegnelser fås ved hjælp af sinusrelationen (med passende fortegnsregning for enhver indbyrdes beliggenhed af Ø,l,l')



$$\frac{AC}{BC} = \frac{ØA\ \sin(a,c)}{ØB\ \sin(b,c)}, \qquad \frac{AD}{BD} = \frac{ØA\ \sin(a,d)}{ØB\ \sin(b,d)}$$

og heraf ved division

$$df(ABCD) = \frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} : \frac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)} .$$

Tallet på højre side afhænger kun af de fire linier a,b,c,d gennem Ø, og heraf følger påstanden.

At punktparrene A,B og C,D er <u>harmonisk forbundne</u>, altså at C og D deler AB i modsatte forhold, er ensbetydende med, at

$$df(ABCD) = -1.$$

Ved centralprojektion afbildes altså harmoniske punktpar på harmoniske punktpar.

Lad der være givet en linie ø og to punkter L og L', som ikke ligger på den. Man kan da definere en afbildning af liniebundtet med toppunkt L på liniebundtet med toppunkt L' ved til hver linie p gennem L at lade svare linien p', som forbinder L' med skæringspunktet mellem p og ø. Herved optræder igen undtagelser: linien gennem L parallel med ø har ikke noget billede, og linien gennem L' parallel med ø har ikke nogen originallinie. Bortset herfra er afbildningen bijektiv. Den kaldes en <u>perspekti-</u>

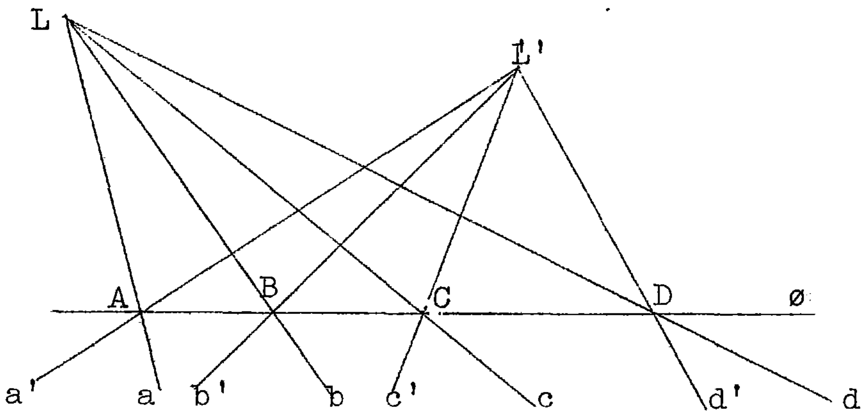
vitet eller perspektiv afbildning af det ene liniebundt på det andet.

Defineres dobbeltforholdet af et sæt a,b,c,d af linier tilhørende et liniebundt ved

$$\mathrm{df}(abcd) = \frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} : \frac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)} ,$$

kan man af ovenstående slutte, at der for linierne a,b,c,d i liniebundtet med toppunkt L og deres billeder a',b',c',d' i liniebundtet med toppunkt L' gælder

$$\mathrm{df}(a'b'c'd') = \mathrm{df}(abcd).$$



De omtalte undtagelser forsvinder, når man tilskriver hver ret linie et "uendelig fjernt" eller uegentligt punkt og fastsætter, at to linier har dette fælles, hvis og kun hvis de er parallelle. Dette kan gøres ved at definere: Ved et uegentligt punkt forstås et parallelbundt af linier; en linie siges at gå gennem et uegentligt punkt, hvis den tilhører det pågældende parallelbundt. Hver linie bliver derved udvidet med netop ét uegentligt punkt og kaldes da en projektiv linie. Mængden af planens uegentlige punkter kaldes planens uegentlige linie og den med denne udvidede plan den projektive plan. Det er let at se, at der i denne gælder:

Gennem hvilkesomhelst to forskellige punkter går netop én linie.

Hvilkesomhelst to forskellige linier har netop ét punkt fælles.

Heraf sluttes, at de to omtalte perspektiviteter bliver bijektive afbildninger, når de uegentlige elementer inddrages. Er Ø et uegentligt punkt fås en parallelprojektion. Er ø den uegentlige linie, vil tilsvarende linier i de to liniebundter være parallelle.

Definitionen af dobbeltforholdet for et sæt A,B,C,D af fire forskellige punkter på en linie l kan udvides til det tilfælde, at et af punkterne, f.eks. D, er det uegentlige. Man sætter da

$$df(ABCD) = df(abcd),$$

hvor a,b,c, d||l er linierne, der forbinder et punkt uden for l med punkterne A,B,C,D. Dette dobbeltforhold bliver lig med delingsforholdet AC/BC. Det samme fås som grænseværdi for dobbeltforholdet for egentlige punkter A,B,C,D, når A,B,C holdes fast og D fjerner sig ubegrænset til den ene eller anden side. To punktpar A,B og C,D på en linie, hvor D er dennes uegentlige punkt, er harmonisk forbundne, når og kun når C er midtpunktet af liniestykket AB.

Fire linier a,b,c,d, som har et uegentligt punkt L fælles, er enten indbyrdes parallelle, eller tre af dem er indbyrdes parallelle og den fjerde er den uegentlige linie. Dobbeltforholdet df(abcd) defineres her som dobbeltforholdet for de punkter, hvori linierne skæres af en vilkårlig linie, som ikke går gennem L.

Med disse definitioner gælder sætningerne om dobbeltforholdenes invarians ved perspektiviteter i alle tilfælde.

Man lægger mærke til, at disse sætninger fremgår af hinanden ved ombytning af "punkt" og "linie", "forbindelseslinie" og "skæringspunkt". Dette er et specielt tilfælde af det i planens projektive geometri gyldige <u>dualitetsprincip</u>, hvorefter hver gyldig sætning vedrørende "projektive egenskaber" ved de nævnte ombytninger går over i en ligeledes gyldig sætning. Principets nøjagtige formulering og et bevis for det vil blive givet senere.

Også det euklidiske rum udvides ved tilføjelse af uegentlige elementer til det <u>projektive rum</u>. Ved et <u>uegentligt punkt</u> forstås et parallelknippe af linier, dvs. en mængde bestående af alle med en bestemt linie parallelle linier. At en linie går gennem et uegentligt punkt, skal betyde, at den tilhører det pågældende parallelknippe. Ved en <u>uegentlig linie</u> forstås et parallelbundt af planer, dvs. en mængde bestående af alle med en bestemt plan parallelle planer. Et punkt siges at ligge på en uegentlig linie, når og kun når det er uegentligt, og linierne i parallelknippet, som bestemmer det, er parallelle med planerne i planbundtet, som bestemmer den uegentlige linie. At en plan indeholder eller går igennem en uegentlig linie, skal betyde, at den tilhører parallelbundtet, som bestemmer denne. Mængden af uegentlige punkter kaldes den <u>uegentlig plan</u>.

Ved at gennemgå de forskellige muligheder ses, at der i det projektive rum gælder de følgende simple sætninger vedrørende "incidens" af punkter, linier og planer.

<u>Gennem to forskellige punkter går én linie</u>.

<u>To forskellige planer skærer hinanden i én linie</u>.

<u>Gennem en linie og et punkt, som ikke ligger på den, går én plan</u>.

<u>En linie og en plan, som ikke indeholder den, skærer hinanden i ét punkt</u>.

<u>Gennem tre punkter, som ikke ligger på samme linie, går én plan</u>.

Tre planer, som ikke går gennem samme linie, har ét punkt fælles.

To linier har et punkt fælles, hvis og kun hvis de ligger i samme plan.

Ved ombytning af "punkt" og "plan", "forbindelse" og "skæring" (og passende verbale ændringer) fremgår de første seks sætninger parvis af hinanden, og den sidste går over i sig selv. Dette er kernen i det for den projektive geometri i rummet gyldige dualitetsprincip, som vil blive præciseret senere.

Lad der i det projektive rum være givet to planer π og π' samt et punkt Ø uden for begge. Ved til hvert punkt $P \in \pi$ at lade svare skæringspunktet P' mellem π' og linien ØP, fås ifølge ovenstående sætninger en bijektiv afbildning af π på π', som kaldes en centralprojektion eller perspektivitet fra Ø. Er π og π' parallelle, vil de to planers uegentlige punkter svare til hinanden. Antag, at π og π' ikke er parallelle. Billedet U' af et uegentligt punkt U af π er da skæringspunktet mellem π' og den linie gennem Ø, som går gennem U, som altså tilhører det parallelknippe, der bestemmer U. Parallelbundtet af linier i π gennem U afbildes på liniebundtet med toppunkt U'. Den uegentlige linie af π afbildes på skæringslinien mellem π' og den med π parallelle plan gennem Ø. Disse forhold har en velkendt anskuelig fortolkning i perspektive billeder. Repræsenterer π jordoverfladen (betragtet som plan), π' billedplanen og Ø "øjepunktet", fra hvilket π betragtes, vil den uegentlige linie af π "ses" som horizonten og parallelle linier i π som linier, der skærer hinanden på denne.

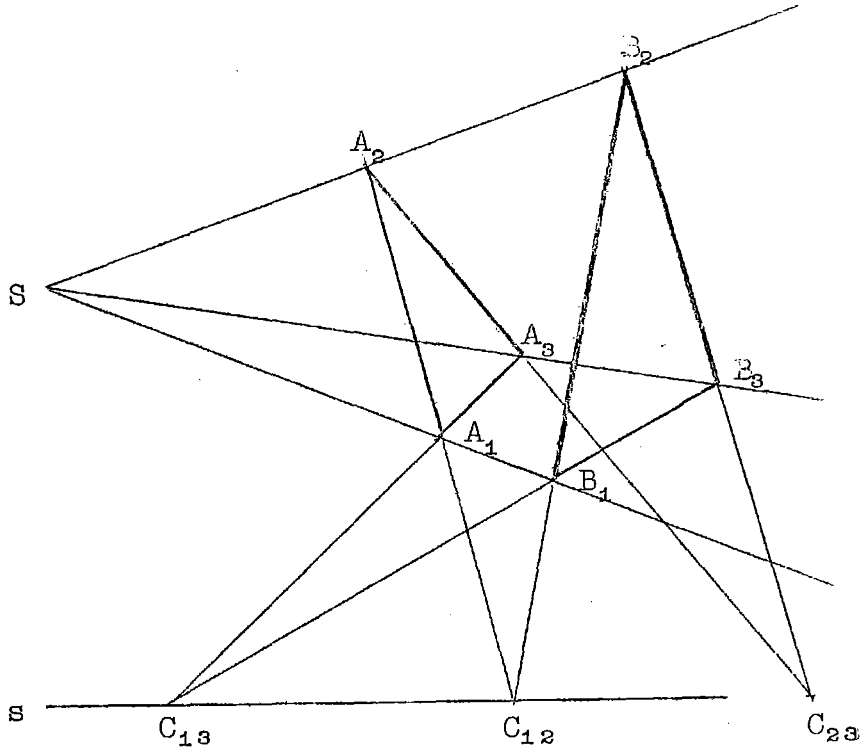
Et bevis for, at en plan figur har en projektiv egenskab, kan ofte føres ved, at figuren underkastes en passende centralprojektion, ved hvilken den overføres i en mere speciel figur, for hvilken den pågældende egenskab er lettere at udlede. Med benyttelse af de uegentlige elementer har G. Desargues (Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan, 1639) på denne måde bevist flere for den projektive geometri grundlæggende sætninger, deriblandt adskillige om keglesnit. Ved de sidstnævnte benyttes, at hvert keglesnit ved passende centralprojektion kan afbildes på en cirkel. (Dette er blot en anden måde at formulere på, at hvert keglesnit kan fås som snitkurve af en omdrejningskegle og en plan.) Om en egenskab, som cirklen har, og som bevares ved centralprojektion, kan man derfor slutte, at hvert keglesnit har den. Med benyttelse heraf har B. Pascal (1640) bevist en fundamental sætning om keglesnit, som vil blive omtalt senere.

Som eksempel på metodens anvendelse bevises <u>Desargues' trekantssætning</u> for planen:

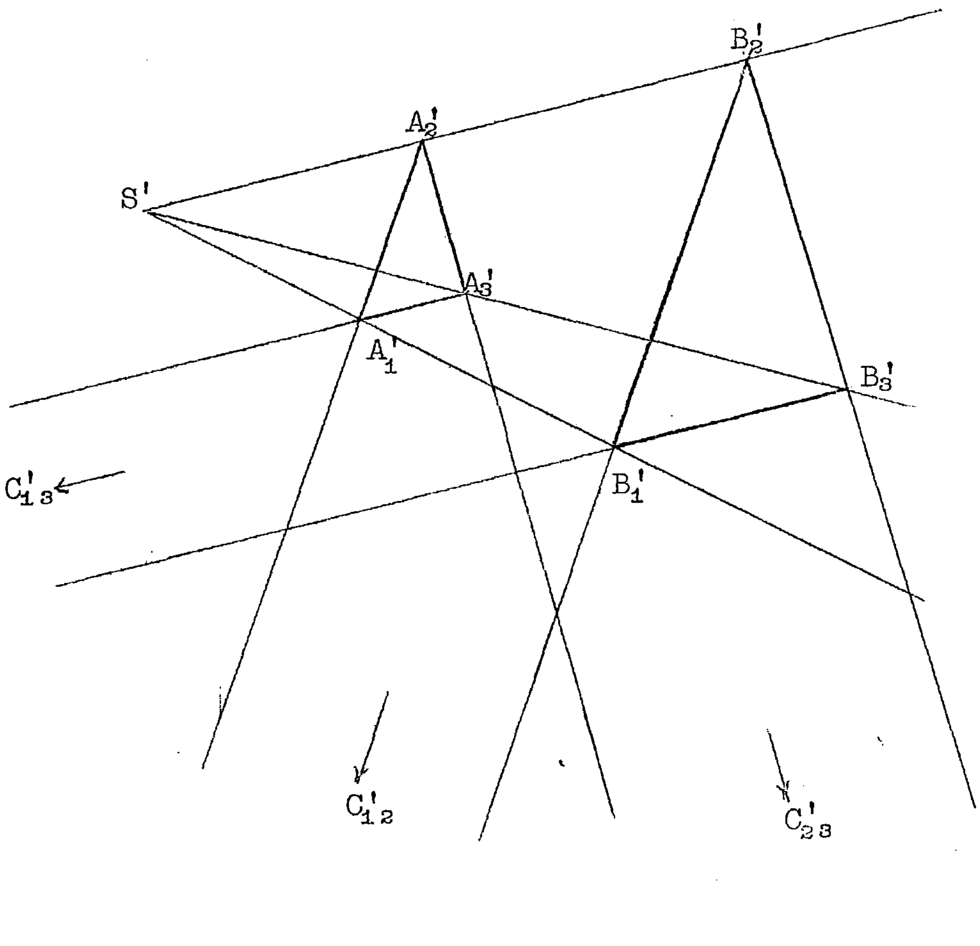
<u>Om to trekanter</u> $A_1A_2A_3$ <u>og</u> $B_1B_2B_3$ <u>i en plan</u> π <u>forudsættes, at</u> $A_i \neq B_i$, $i = 1,2,3$, <u>at der for siderne gælder</u> $A_iA_j \neq B_iB_j$, $i,j = 1,2,3$, $i \neq j$, <u>og at tilsvarende vinkelspidsers forbindelseslinier</u> A_iB_i, $i = 1,2,3$, <u>går gennem samme punkt</u> S. <u>Da ligger skæringspunkterne</u> C_{ij} <u>mellem tilsvarende sider</u> A_iA_j <u>og</u> B_iB_j <u>på samme rette linie</u> s.

Bevis: Der benyttes, at man til en plan π og en given linie s i denne kan finde et øjepunkt $Ø$ og en plan π', således at s ved centralprojektion fra $Ø$ af π på π' afbildes på den uegentlige linie i π'. Vælges nemlig $Ø$ vilkårligt uden for π, vil en plan π' parallel med, men ikke sammenfaldende med den ved $Ø$ og s bestemte plan opfylde kravet.

Påstanden går ud på, at linien $C_{12}C_{13}$ går gennem punktet C_{23}



B_2
A_2
S
A_3
B_3
A_1
B_1
s
C_{13}
C_{12}
C_{23}



B'_2
A'_2
S'
A'_3
A'_1
B'_3
C'_{13}
B'_1
C'_{12}
C'_{23}

(jfr. den øverste figur på side 8). Underkastes figuren en centralprojektion af den omtalte art, ved hvilken linien $s = C_{12}C_{13}$ afbildes på billedplanens uegentlige linie, fås en figur (jfr. den nederste på side 8), hvori der for billederne A_i', B_i' af A_i, B_i gælder $A_1'A_2' \parallel B_1'B_2'$ og $A_1'A_3' \parallel B_1'B_3'$, og påstanden går ud på, at $A_2'A_3' \parallel B_2'B_3'$. Dette bevises let ved hjælp af sætninger om ensvinklede trekanter.

Der gælder også den følgende omvendte sætning, som svarer til Desargues' sætning ved det omtalte dualitetsprincip for planen.

<u>Om de to trekanter forudsættes, at tilsvarende siders skæringspunkter</u> C_{12}, C_{13}, C_{23} <u>ligger på samme rette linie</u> s, <u>og konklusionen er, at tilsvarende vinkelspidsers forbindelseslinier går gennem samme punkt</u>.

Betegnes skæringspunktet mellem linierne A_1B_1 og A_2B_2 med S, går påstanden ud på, at linien A_3B_3 også går gennem S. Ved en centralprojektion, ved hvilken s afbildes på billedplanens uegentlige linie, fås to trekanter $A_1'A_2'A_3'$ og $B_1'B_2'B_3'$, hvis tilsvarende sider er parallelle (jfr. den nederste figur på side 8), og det drejer sig om at vise, at linien $A_3'B_3'$ går gennem skæringspunktet S' mellem linierne $A_1'B_1'$ og $A_2'B_2'$. Også dette kan gøres ved hjælp af sætninger om ensvinklede trekanter.

Ved en <u>fuldstændig firkant</u> i den projektive plan forstås en figur bestående af 4 "vinkelspidser" A_1, A_2, A_3, A_4, således at ikke 3 ligger på ret linie, og deres 6 forbindelseslinier, "siderne", $a_{ij} = A_iA_j$, $i,j = 1,2,3,4$, $i \neq j$. De 3 skæringspunkter $D_{12,34}$, $D_{13,24}$, $D_{14,23}$ mellem "modstående sider" henholdsvis a_{12} og a_{34}, a_{13} og a_{24}, a_{14} og a_{23} kaldes firkantens <u>dia-</u>

gonalpunkter.

Den til en fuldstændig firkant duale figur kaldes en fuldstændig firside. Den består af 4 "sider" a_1, a_2, a_3, a_4, således at ikke 3 går gennem samme punkt, og de 6 skæringspunkter, "vinkelspidserne", A_{ij} mellem a_i og a_j, $i,j = 1,2,3,4$, $i \neq j$. De 3 forbindelseslinier $d_{12,34} = A_{12}A_{34}$, $d_{13,24} = A_{13}A_{24}$, $d_{14,23} = A_{14}A_{23}$ af "modstående vinkelspidser" kaldes firsidens diagonaler.

Om fuldstændige firkanter gælder følgende sætning:

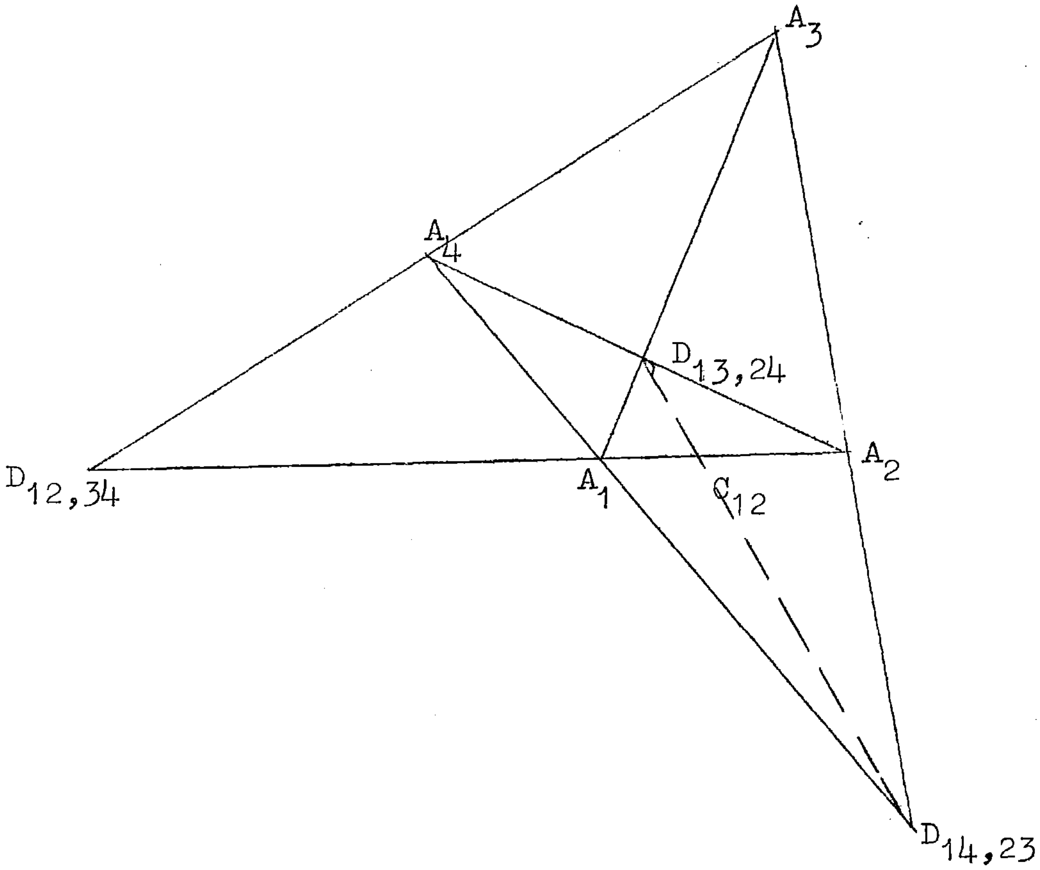
Hvilkesomhelst to vinkelspidser i en fuldstændig firkant er harmonisk forbundne med diagonalpunktet på siden, der forbinder dem, og denne sides skæringspunkt med de to andre diagonalpunkters forbindelseslinie.

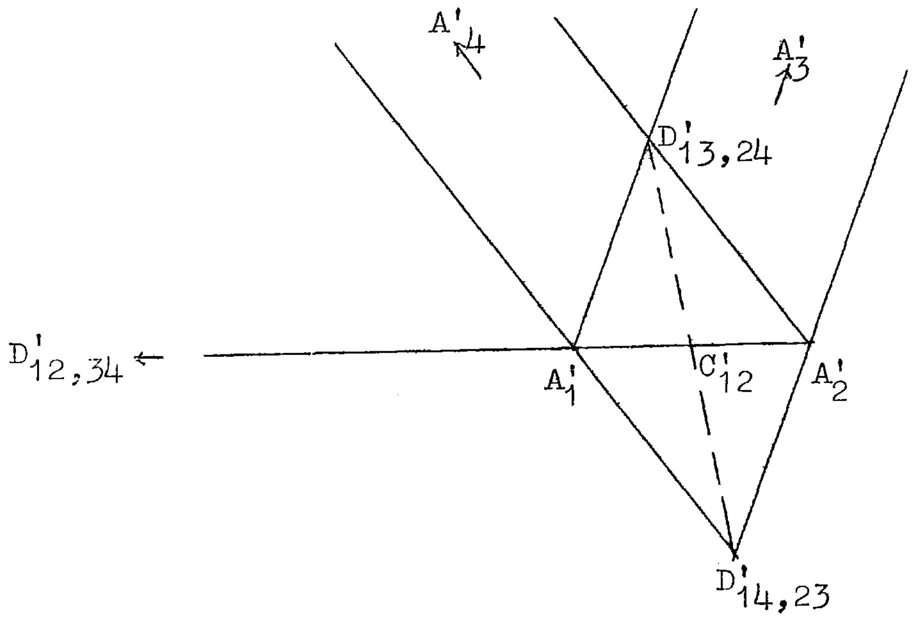
Bevis: Lad A_1 og A_2 være de to vinkelspidser. På siden a_{12}, der forbinder dem, ligger diagonalpunktet $D_{12,34}$. Skæringspunktet mellem a_{12} og $D_{13,24}D_{14,23}$ betegnes med C_{12}. Figuren underkastes en centralprojektion, således at siden a_{34} afbildes på billedplanens uegentlige linie. Billedet $D'_{12,34}$ af $D_{12,34}$ er da det uegentlige punkt på billedet a'_{12} af a_{12}. Endvidere er med oplagte betegnelser $a'_{13} \parallel a'_{23}$ og $a'_{14} \parallel a'_{24}$, altså $A'_1D'_{14,23}A'_2D_{13,24}$ et parallelogram. Idet C'_{12} er diagonalernes skæringspunkt, altså midtpunktet af liniestykket $A'_1A'_2$, er parrene A'_1, A'_2 og $C'_{12}, D'_{12,34}$ harmonisk forbundne. (Jfr. figurene på side 11.)

Af sætningen fremgår, at man til 3 givne punkter på en linie med linealen alene kan konstruere "det fjerde harmoniske punkt".

Den duale sætning om firsiden kan formuleres således:

Hvilkesomhelst to sider i en fuldstændig firside er harmonisk forbundne med diagonalen gennem deres skæringspunkt og dettes forbindelseslinie med de to andre diagonalers skæringspunkt.


A_3
A_4
$D_{13,24}$
A_2
$D_{12,34}$
A_1
C_{12}
$D_{14,23}$


A'_4
A'_3
$D'_{13,24}$
$D'_{12,34} \leftarrow$
A'_1
C'_{12}
A'_2
$D'_{14,23}$

Dette fås umiddelbart ved at anvende den foregående sætning på en fuldstændig firkant, hvis vinkelspidser er 4 af firsidens 6 vinkelspidser udvalgt således, at ikke 3 ligger på ret linie.

Den projektive geometris udvikling til et omfattende område skyldes i første række J.V. Poncelet (Traité des propriétés projectives des figures, 1822; undersøgelserne gennemført i russisk krigsfangenskab 1813-14), og J. Steiner (Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Erster Teil, 1832). Alle disse undersøgelser er baseret på den euklidiske geometri. Projektiv-invariante begreber er defineret ved hjælp af begreber, der ikke er det. Som fundamentalt eksempel kan nævnes dobbeltforholdet, i hvis definition der indgår afstands- og vinkelmål. En begrundelse og opbygning af den projektive geometri, hvori der kun indgår projektiv-invariante begreber skyldes G.K. Chr. von Standt (Geometrie der Lage, 1847, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856-60).

I moderne terminologi kan denne opbygning kort beskrives på følgende måde. De på side 5-6 formulerede sætninger om incidens af punkter, linier og planer i rummet tjener som incidensaksiomer. (Nogle kan undværes, idet de følger af de andre.) Tilsammen er de ækvivalente med Hilberts "Axiome der Verknüpfung" (side I, 3,2-4) og "Axiom der Parallelen" (side I,3,11-12). Det sidste gør indførelsen af de uegentlige elementer mulig, således at de ovenfor nævnte sætninger er gyldige uden undtagelser. Desuden gøres forudsætninger om ordning, som er ækvivalente med Hilberts "Axiome der Anordnung" (side I,3,4-6). De må imidlertid formuleres på helt anden måde, idet begrebet "et punkt ligger mellem to andre" ikke har nogen mening på den projektive linie, som jo er en "lukket kurve". I stedet for dette begreb træder "et punktpar skiller et andet".

Dette fås umiddelbart ved at anvende den foregående sætning på en fuldstændig firkant, hvis vinkelspidser er 4 af firsidens 6 vinkelspidser udvalgt således, at ikke 3 ligger på ret linie.

Er der givet tre forskellige punkter A, B, C på en projektiv linie, findes der netop ét punkt X på linien, for hvilket df(A B C X) har en given værdi ξ. For $\xi = 0$ er X = B, for $\xi = 1$ er X = C, og ellers er X forskellig fra A, B og C. Udvider man de reelle tals legeme $\hat{R}$ ved tilføjelse af et element, betegnet ∞, på den fra de komplekse tals legeme velkendte måde, kan man fastsætte, at der til $\xi = \infty$ skal svare X = A. Dette motiveres ved, at $|df(A\ B\ C\ X)|$ går mod uendelig, når X går mod A. På denne måde fås en enentydig korrespondance mellem mængden af punkter på linien ogden udvidede mængde af reelle tal. Den kaldes det <u>projektive koordinatsystem</u> (A, B; C) på linien. Vælges A i liniens uegentlige punkt, fås et sædvanligt koordinatsystem med begyndelsespunkt B og basisvektor $\vec{BC}$.

På dualistisk tilsvarende måde defineres et projektivt koordinatsystem i et liniebundt. Er der valgt tre forskellige linier a, b, c i bundtet, fås en bijektiv afbildning af bundtet på den med ∞ udvidede mængde af reelle tal, ved til hver linie x i bundtet at lade svare df(a b c x).

En bijektiv afbildning af en projektiv linie l på en projektiv linie l', ved hvilken der til hvilkesomhelst fire punkter på l svarer fire punkter på l' med samme dobbeltforhold, kaldes en <u>projektivitet</u> af l på l'. Enhver centralprojektion (perspektivitet) af en linie på en linie er en projektivitet. Det er klart, at en projektivitetets inverse afbildning og den af to projektiviteter sammensatte afbildning også er projektiviteter. Projektiviteterne af en linie på sig selv danner en gruppe, liniens <u>projektive gruppe.</u>

Er $\varphi : l \rightarrow l'$ en projektivitet, A, B, C forskellige punkter på l og $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$, $C' = \varphi(C)$ deres billedpunkter, vil billedpunktet X' af et vilkårligt punkt X på l være bestemt ved, at

$$df(A'B'C'X') = df(A\ B\ C\ X),$$

altså ved at X' har samme koordinat i systemet (A',B';C') som X i systemet (A, B; C). Heraf sluttes entydighedspåstanden i følgende sætning:

<u>Er</u> A, B, C <u>tre forskellige punkter på en projektiv linie</u> l <u>og</u> A', B', C' <u>tre forskellige punkter på en projektiv linie</u> l', <u>findes der netop én projektivitet af</u> l <u>på</u> l', <u>ved hvilken</u> A, B, C <u>afbildes i henholdsvis</u> A', B', C'.

Eksistensen af en sådan projektivitet indses således: Vi antager først, at $l \neq l'$, og at $A = A'$. Dette punkt er da skæringspunktet mellem l og l', og vi har $B \neq B'$, $C \neq C'$. Centralprojektionen af l på l' fra skæringspunktet mellem linierne B B' og C C', som ligger hverken på l eller l', opfylder da kravene. Tilsvarende sluttes, når $B = B'$ eller $C = C'$. - Vi antager dernæst, at $l \neq l'$ og $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$. I mindst ét af parrene (A, A'), (B, B'), (C, C'), f.eks. (A, A'), er da begge punkter forskellige fra liniernes skæringspunkt. På linien A A' vælges et fra A og A' forskelligt punkt, og fra dette projiceres linien l på en fra l' forskellig linie l'' gennem A'. Herved afbildes A på $A'' = A'$, B på B'' og C på C''. Ifølge det allerede viste findes der en centralprojektion, ved hvilken A', B'', C'' afbildes på henholdsvis A', B', C'. Ved sammensætning af de to centralprojektioner fås en projektivitet af den forlangte art. - Er $l = l'$, projiceres l på en anden linie l'', og det allerede viste anvendes på l'' og l'. Ved sammensætning fås da det ønskede resultat også i dette tilfælde. - Af beviset fremgår:

Enhver projektivitet af en linie på en linie kan sammensættes af højst tre centralprojektioner. Er linierne forskellige, og svarer deres skæringspunkt til sig selv, er projektiviteten en centralprojektion.

På dualistisk tilsvarende måde defineres en projektivitet af et liniebundt L på et liniebundt L' som en bijektiv afbildning, ved hvilken dobbeltforhold bevares. For sådanne projektiviteter gælder de til ovenstående duale sætninger. I stedet for centralprojektionen træder her perspektiviteten bestemt ved, at hver linie fra bundtet L skærer sin tilsvarende fra bundtet L' på en given linie, der ikke går gennem noget af de to bundters toppunkter

Endelig nævnes, at man på nærliggende måde definerer projektiviteter af et liniebundt på en linie og af en linie på et liniebundt. Den simpleste afbildning af denne art fås ved at "skære" et liniebundt L med en linie l, der ikke går gennem toppunktet, og til hver linie i bundtet at lade svare dens skæringspunkt med l. Dualistisk tilsvarende fås en projektivitet af en linie l på et liniebundt ved at "forbinde" linien med et punkt L uden for l.

Med benyttelse af sådanne projektiviteter ses umiddelbart: Lad L være et liniebundt i en plan π, og lad L' være et liniebundt i en fra π forskellig plan π', således at planernes skæringslinie ikke går gennem noget af de to toppunkter. Da er den afbildning af L på L', ved hvilken til hver linie i L svarer den linie i L', der skærer den, være en projektivitet. Med andre ord: Centralprojektionen af L på L' fra et punkt på toppunkternes forbindelseslinie, der ligger uden for begge planer, er en projektivitet.

Lad L og L' være to forskellige punkter på et egentligt keglesnit κ. En afbildning φ af liniebundtet L ind i liniebundtet L' defineres på følgende måde: Til en linie x i bundtet L, som er forskellig fra tangenten til κ i L og fra linien L L', lades svare den linie $\varphi(x)$ i bundtet L', som skærer κ i samme fra L forskellige punkt som x. Til tangenten til κ i punktet L lades svare linien L'L, og til linien L L' i bundtet L lades svare tangenten til κ i punktet L'. Denne afbildning φ er en projektivitet af bundtet L på bundtet L'.

Dette er indlysende, hvis K er en cirkel, idet φ da ifølge periferivinkelsætningen er en kongruent afbildning af bundtet L på bundtet L'. Det almindelige tilfælde føres tilbage til dette ved en passende centralprojektion på en anden plan.

Der gælder også følgende omvendte sætning: Er L, L', A, B, C fem forskellige punkter på et keglesnit. Der findes da, som vist ovenfor, netop én projektivitet φ af liniebundtet L på liniebundtet L', ved hvilken der til linierne L A, L B, L C svarer henholdsvis L' A, L' B, L' C. For hver linie x i bundtet L ligger da skæringspunktet mellem x og $\varphi(x)$ på keglesnittet.

Også dette fås for en cirkel ved hjælp af periferivinkelsætningen og det almene tilfælde derefter ved centralprojektion.

Gennem fem punkter i planen, således at ikke tre af dem ligger på ret linie, går et egentligt keglesnit. Dette ses let ved en algebraisk betragtning. Et keglesnit kan derfor defineres ved hjælp af to forskellige liniebundter og en projektivitet af det ene på det andet, ved hvilken toppunkternes forbindelseslinie ikke svarer til sig selv, nemlig som mængden af skæringspunkter mellem tilsvarende linier i de to bundter. (J. Steiner, 1832)

Vi kan nu bevise Pascals sætning:

Hvis en sekskant er indskrevet i et keglesnit, vil de tre skæringspunkter mellem modstående sider ligge på en ret linie.

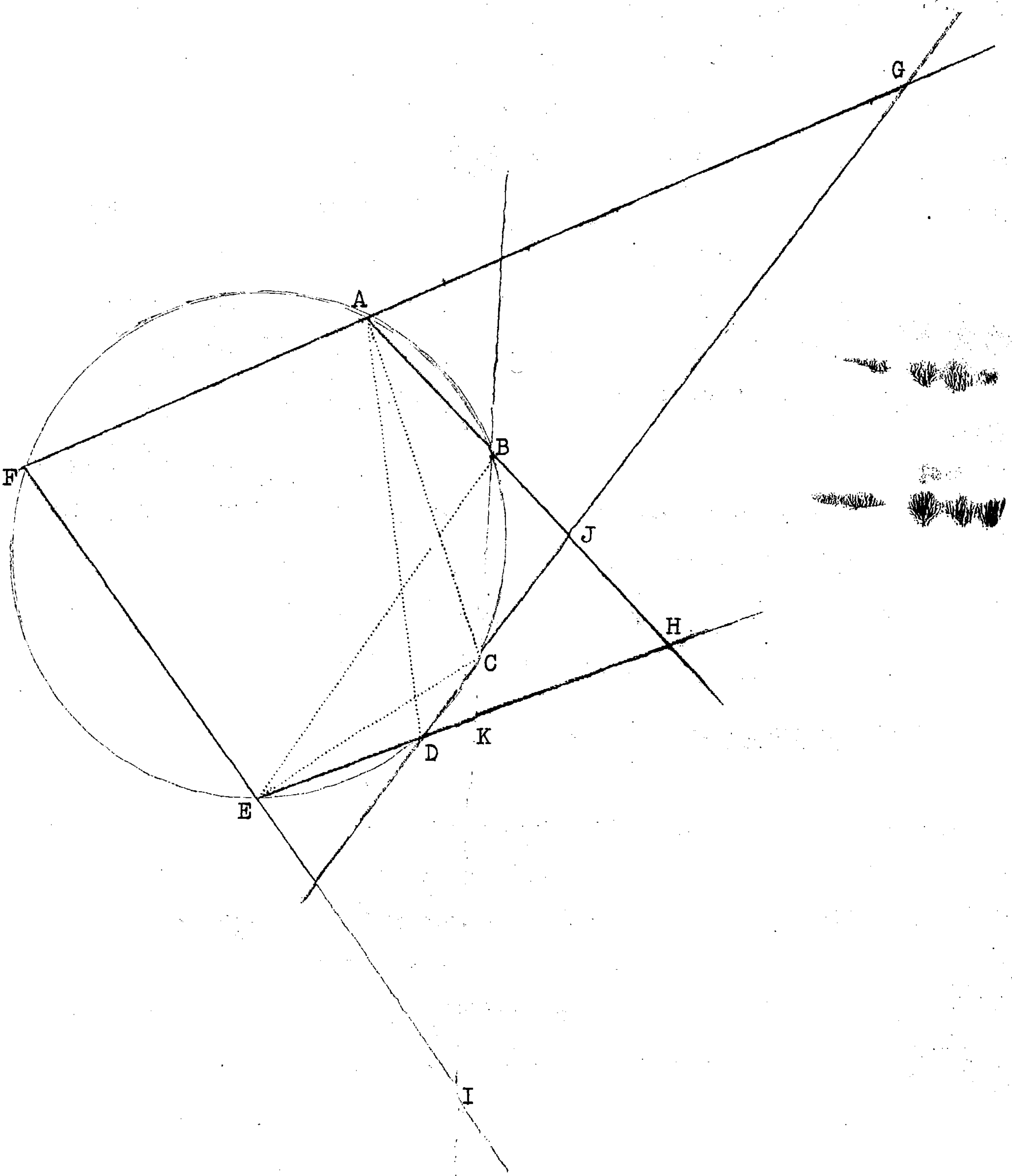
Lad A B C D E F være en sekskant der er indskrevet i et keglesnit. Parrene af modstående sider er (F A, C D), (A B, D E), (B C, E F). De tre skæringspunkter betegnes med henholdsvis G, H, I. Vi betragter den ovenfor indførte projektivitet af liniebundtet A på liniebundtet E, ved hvilken der til linierne A B, A C, A D, A F svarer henholdsvis E B, E C, E D, E F. Ved at skære det første liniebundt med linien C D og det andet med linien B C fås en projektivitet af linien C D på linien B C, ved hvilken

$$J \to B, \quad C \to C, \quad D \to K, \quad G \to I,$$

hvor J er skæringspunktet mellem A B og C D, og K er skæringspunktet mellem B C og D E. Ved denne projektivitet svarer liniernes skæringspunkt C til sig selv. Ifølge en tidligere sætning er den en centralprojektion, nemlig fra H. Da I svarer til G, må G og I ligge på samme linie gennem H. Dermed er sætningen bevist.

Der gælder også en omvendt sætning:

Hvis skæringspunkterne mellem modstående sider i en sekskant ligger på en ret linie, og fem af vinkelspidserne ligger på et keglesnit, vil også det sjette ligge på dette.


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K

Øvelser til kap. III. § 1.

1. Bevis ved hjælp af Desargues' sætning, at de tre ydre lighedspunkter for 3 cirkler i planen ligger på ret linie, og at hver linie, der forbinder to indre lighedspunkter, også går gennem et ydre.

2. På et stykke papir er tegnet to linier, hvis skæringspunkt falder uden for papiret. Konstruer med linealen linien, som forbinder et givet punkt på papiret med de givne liniers skæringspunkt. Dual Desargues

3. I den sædvanlige plan er givet to forskellige parallelle linier og et punkt. Konstruer med linealen den med de givne parallelle linie gennem de givne punkt. specialtilf. af 2.
   Lad der være givet etparallelogram, dvs. to ikke parallelle par af parallelle linier, samt en anden linie. Konstruer med linealen en med denne parallel (men ikke sammenfaldende) linie. (Med en "parallellineal", dvs. en lineal med to parallelle kanter, kan man altså konstruere linien, der er parallel med en given linie og går gennem et givet punkt.)

4. Lad A_1, A_2, A_3, P være fire punkter i den projektive plan, således at ikke tre ligger på ret linie. For hver af de tre lige permutationer $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ i & j & k\end{pmatrix}$ af $\{1,2,3\}$ betegnes med B_k skæringspunktet mellem linierne A_iA_j og A_kP, og med C_k skæringspunktet mellem linierne A_iA_j og B_iB_j. Vis, at punkterne C_1, C_2, C_3 ligger på en ret linie p, og at punktparrene A_i, A_j og [illegible] B_k, C_k er harmoniske. Linien p kaldes den harmoniske polar til punktet P med hensyn til trekant $A_1A_2A_3$.
   Formuler den duale sætning. Ifølge denne svarer der til hver linie, som ikke går gennem nogen af trekantens vinkelspidser,

se på df.

et punkt, liniens harmoniske pol med hensyn til trekanten.

antag P er medianernes skæringspunkt.

Vis, at hvert punkt P, som ikke ligger på nogen af trekantssiderne, er den harmoniske pol til sin harmoniske polar.

P → p

5. Lad L,L',A,B,C,D være indbyrdes forskellige punkter på et keglesnit. Vis, at der for linierne

$$a = LA, \quad b = LB, \quad c = LC, \quad d = LD,$$

$$a' = L'A, \; b' = L'B, \; c' = L'C, \; d' = L'D$$

gælder

$$df(abcd) = df(a'b'c'd').$$

6. I det projektive rum er givet fire planer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ som har en linie p fælles. Planerne skæres af en til p vindskæv linie l i punkterne A,B,C,D. Vis, at df(ABCD) er uafhængig af valget af l.

Ved $df(\alpha\beta\gamma\delta) = df(ABCD)$ kan herefter defineres et dobbeltforhold for de fire planer. Dette gør det muligt at formulere det duale udsagn. Undersøg, om det er rigtigt.

7. Formuler og bevis en til sætningen i opgave 4 analog sætning vedrørende fem punkter A_1, A_2, A_3, A_4, P i rummet.

8. Bevis på grundlag af incidenssætningerne for det projektive rum (side 5 - 6) Desargues' sætning (side 7) under forudsætningen, at trekanterne $A_1A_2A_3$ og $B_1B_2B_3$ ligger i forskellige planer.
Bevis også den omvendte sætning.
Udled Desargues' sætning for planen af den beviste rumlige sætning.
Formuler de rumlig duale til de omtalte sætninger.

9. På en projektiv linie l er valgt to forskellige punkter A og B. En afbildning φ af l på sig selv defineres ved til et fra A og B forskelligt punkt X at lade svare det punkt $X' = \varphi(X)$, for hvilket

$$df(ABXX') = -1.$$

Desuden sættes $\varphi(A) = A$ og $\varphi(B) = B$.
I en plan indeholdende l vælges to indbyrdes og fra l forskellige linier p og q gennem A samt en fra l forskellig linie r gennem B. Skæringspunkterne mellem p og r og mellem q og r betegnes henholdsvis P og Q. Det til et fra A og B forskelligt punkt X svarende punkt X' kan da konstrueres ved hjælp af en fuldstændig firkant, hvis vinkelspidser er A,B,Q samt et punkt på p.
Benyt dette til at vise, at φ er en projektivitet. spejling om
Beskriv afbildningen φ, når B er det uegentlige punkt på l, A
og benyt dette tilfælde til at føre et andet bevis for, at φ er en projektivitet.

10. Gennemfør et bevis for sætningen (side 15): Lad L,L',A,B,C være fem forskellige punkter på et egentligt keglesnit, og lad φ betegne den projektivitet af liniebundtet L på liniebundtet L', ved hvilken der til linierne LA, LB, LC svarer henholdsvis L'A, L'B, L'C. For hver linie x i bundtet L ligger da skæringspunktet mellem x og $\varphi(x)$ på keglesnittet.
Slut heraf, at der findes højst ét keglesnit, som går gennem fem punkter, hvoraf ikke tre ligger på ret linie.

11. I den euklidiske plan er givet to ikke parallelle linier a_1 og a_2 samt tre punkter A_3, A_4, A_5, som ikke ligger på en ret linie, og således, at ikke nogen af deres forbindelseslinier er parallel med a_1 eller a_2. Der findes da én hyperbel, som går gennem de givne punkter, og hvis asymptoter er parallelle med a_1 og a_2. Konstruer hyperblens andet skæringspunkt med en vilkårligt given linie gennem A_5.

12. Bevis Pappos' sætning: Hvis en sekskants vinkelspidser skiftevis ligger på to forskellige linier, vil modstående siders skæringspunkter ligge på en ret linie. (Pascals sætning for et udartet keglesnit.)

13. Bevis sætningen: Hvis en sekskants sider skiftevis går gennem to forskellige punkter, vil modstående vinkelspidsers forbindelseslinier gå gennem et punkt.

14. Lad l og l' være to forskellige tangenter til et egentligt keglesnit. Deres skæringspunkt betegnes med S og deres røringspunkter med henholdsvis A og B'. En afbildning $\varphi: l \rightarrow l'$ defineres på følgende måde: Til et fra A og S forskelligt punkt X på l lades svare skæringspunktet X' mellem l' og den fra l forskellige tangent gennem X. Til A og S lades svare henholdsvis S og B'. Vis, at φ er en projektivitet.

15. Bevis Brianchons sætning: Hvis en sekskant er omskrevet om et egentligt keglesnit, vil modstående vinkelspidsers forbindelseslinier gå gennem et punkt.

16. Der er givet fem forskellige tangenter a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 til et egentligt keglesnit. Konstruer keglesnittets anden tangent gennem et vilkårligt givet punkt på a_5.

§ 2. Projektive rum.

Definitionen af det almene begreb "projektivt rum", der danner udgangspunktet for det følgende, baseres på begrebet "vektorrum over et legeme". Derfor omtales indledningsvis nogle sætninger om vektorrum, der har fundamentale anvendelser i denne forbindelse.

Lad $(V_{n+1},+,L)$ være et vektorrum af dimensionen $n + 1 \geq 1$ over det vilkårlige kommutative legeme L. For hvilkesomhelst to underrum U' og U" af V gælder da <u>dimensionsformlen</u>

$$\dim(U'+U'') + \dim(U'\cap U'') = \dim U' + \dim U''.$$

Her er

$$U' + U'' = \{\underline{u}'+\underline{u}'' \mid \underline{u}' \in U' \ \wedge \ \underline{u}'' \in U''\}$$

det mindste underrum, som indeholder $U' \cup U''$. Beviset for formlen kan føres således: Der indføres betegnelserne

$$p + 1 = \dim U', \ q + 1 = \dim U'', \ r + 1 = \dim(U'\cap U'').$$

Der vælges en basis $\underline{e}_o,\dots,\underline{e}_r$ for $U' \cap U''$. (Hvis $r = -1$, bortfalder dette skridt.) Denne suppleres med vektorer $\underline{e}'_{r+1},\dots,\underline{e}'_p$ til en basis for U' og med vektorer $\underline{e}''_{r+1},\dots,\underline{e}''_q$ til en basis for U". De $p + q - r + 1$ vektorer

$$\underline{e}_o,\dots,\underline{e}_r,\underline{e}'_{r+1},\dots,\underline{e}'_p,\underline{e}''_{r+1},\dots,\underline{e}''_q$$

frembringer U' + U". Det skal vises, at de er lineært uafhængige. Heraf kan da sluttes, at

$$\dim(U'+U'') = (p+1)+(q+1)-(r+1),$$

hvilket er påstanden. Lad

$$\lambda_o\underline{e}_o + \dots + \lambda_r\underline{e}_r + \lambda'_{r+1}\underline{e}'_{r+1} + \dots + \lambda'_p\underline{e}_p + \lambda''_{r+1}\underline{e}''_{r+1} + \dots + \lambda''_q\underline{e}''_q = \underline{0}$$

være en lineær relation mellem vektorerne. Den udsiger, at vektoren

$$-\lambda''_{r+1}\underline{e}''_{r+1} - \dots - \lambda''_q\underline{e}''_q \in U''$$

også tilhører U', altså $U' \cap U''$. Den er følgelig en linearkombination af vektorerne $\underline{e}_o,\dots,\underline{e}_r$. Men da vektorerne $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_r,\underline{e}''_{r+1},\dots,\underline{e}''_q$ er lineært uafhængige, må alle koefficienter, specielt altså $\lambda''_{r+1},\dots,\lambda''_q$ være 0. Derefter kan af den foregående relation sluttes, at også $\lambda_o =\dots= \lambda_r = \lambda'_{r+1} =\dots= \lambda'_q = 0$, idet vektorerne $\underline{e}_o,\dots,\underline{e}_r,\underline{e}'_{r+1},\dots,\underline{e}'_p$ er lineært uafhængige. Dermed er påstanden bevist.

Ved siden af vektorrummet V_{n+1} betragtes det duale V^*_{n+1}, hvis vektorer er de på V_{n+1} definerede linearformer. Disse betegnes med $\underline{u}^*,\underline{v}^*,\dots$, og den værdi, som linearformen $\underline{u}^*$ antager for $\underline{x} \in V_{n+1}$ skrives $\langle\underline{u}^*,\underline{x}\rangle$. Ifølge linearformens definition gælder da

$$(1) \qquad \langle\underline{u}^*,\lambda\underline{x}+\mu\underline{y}\rangle = \lambda\langle\underline{u}^*,\underline{x}\rangle + \mu\langle\underline{u}^*,\underline{y}\rangle$$

for alle $\underline{x},\underline{y} \in V_{n+1}$, alle $\lambda,\mu \in L$ og hvert $\underline{u}^* \in V^*_{n+1}$. Ifølge definitionen af summen af to linearformer og af produktet af en linearform med et element fra L har man også

$$(2) \qquad \langle\lambda\underline{u}^*+\mu\underline{v}^*,\underline{x}\rangle = \lambda\langle\underline{u}^*,\underline{x}\rangle + \mu\langle\underline{v}^*,\underline{x}\rangle$$

for alle $\underline{u}^*,\underline{v}^* \in V^*_{n+1}$, alle $\lambda,\mu \in L$ og hvert $\underline{x} \in V_{n+1}$. Sammenfattende kan siges, at $\langle\underline{u}^*,\underline{x}\rangle$ er en bilinearform defineret på $V^*_{n+1} \times V_{n+1}$.

Til en basis $(\underline{e}_o,\dots,\underline{e}_n)$ for V_{n+1} svarer en dual basis $(\underline{e}^*_o,\dots,\underline{e}^*_n)$ for V^*_{n+1} bestemt ved, at $\underline{e}^*_i$ er den linearform, der for $\underline{e}_i$ har værdien 1 og for de øvrige basisvektorer $\underline{e}_j$, $j \neq i$, værdien 0:

$$\langle\underline{e}^*_i,\underline{e}_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad i,j = 0,1,\dots,n.$$

Med betegnelserne $(x_o,\dots,x_n)$ og $(u_o,\dots,u_n)$ for koordinatsættene for henholdsvis $\underline{x} \in V_{n+1}$ og $\underline{u}^* \in V^*_{n+1}$ finder man

$$\langle\underline{u}^*,\underline{x}\rangle = u_o x_o +\dots+ u_n x_n.$$

For hver fast vektor $\underline{x} \in V_{n+1}$ er $\langle \underline{u}^*, \underline{x} \rangle$ ifølge (2) en linearform defineret på V^*_{n+1}. Ved til $\underline{x}$ at lade svare denne fås en afbildning f af V_{n+1} ind i V^{**}_{n+1}, det til V^*_{n+1} duale rum. Af (1) sluttes, at f er lineær. Endvidere er f injektiv. Kernen ved f består nemlig af de vektorer $\underline{x} \in V_{n+1}$, for hvilke $\langle \underline{u}^*, \underline{x} \rangle = 0$ for alle $\underline{u}^* \in V^*_{n+1}$, og da der for hvert $\underline{x} \neq \underline{0}$ findes mindst ét $\underline{u}^*$, således at $\langle \underline{u}^*, \underline{x} \rangle \neq 0$, kan den kun bestå af $\underline{0}$. Afbildningen f er også surjektiv, idet vektorrummene V_{n+1} og V^{**}_{n+1} har samme endelige dimension n+1. Der består altså en naturlig isomorfi mellem V_{n+1} og V^{**}_{n+1}. Man tillader sig derfor at identificere disse to vektorrum: $V^{**}_{n+1} = V_{n+1}$.

Lad U_{p+1} være et (p+1)-dimensionalt underrum af V_{n+1}. Mængden U^* af alle linearformer $\underline{u}^*$, for hvilke $\langle \underline{u}^*, \underline{x} \rangle = 0$ for alle $\underline{x} \in U_{p+1}$, er da et underrum i U_{p+1}; thi hører $\underline{u}^*$ og $\underline{v}^*$ til U^*, vil ifølge (2) også hver linearkombination af dem høre til U^*. Dette underrums dimension er n-p. For at vise dette vælges en basis $\underline{e}_o, \dots, \underline{e}_p$ for U_{p+1}, og denne suppleres med vektorer $\underline{e}_{p+1}, \dots, \underline{e}_n$ til en basis for V_{n+1}. Er $\underline{e}^*_o, \dots, \underline{e}^*_n$ den duale basis, gælder for en vilkårlig vektor

$$\underline{u}^* = u_o \underline{e}^*_o + \dots + u_n \underline{e}^*_n$$

i V^*_{n+1}, at

$$\langle \underline{u}^*, e_i \rangle = u_i, \qquad i = 0, 1, \dots, n.$$

Heraf sluttes, at $\underline{u}^*$ tilhører U^*, hvis og kun hvis $u_i = 0$ for $i = 0, 1, \dots, p$. Underrummet U^* frembringes altså af de n-p lineært uafhængige vektorer $\underline{e}^*_{p+1}, \dots, \underline{e}^*_n$. Dermed er påstanden bevist. Vi skriver U^*_{n-p} i stedet for U^*.

Omvendt, til hvert (p+1)-dimensionalt underrum U^*_{p+1} af V^*_{n+1} svarer et (n-p)-dimensionalt underrum U_{n-p} af V_{n+1} bestående af de vektorer $\underline{x} \in V_{n+1}$, for hvilke $\langle \underline{u}^*, \underline{x} \rangle = 0$ for alle $\underline{u}^* \in U^*_{p+1}$.

Dette resultat fås ved at anvende det foregående på V_{n+1}^* i stedet for V_{n+1} og at benytte, at $V_{n+1}^{**} = V_{n+1}$.

Der består følgelig en enentydig korrespondance d mellem mængden af underrum i V_{n+1} og mængden af underrum i V_{n+1}^* med følgende egenskaber: Dimensionerne af underrum $U \subseteq V_{n+1}$ og $U^* \subseteq V_{n+1}^*$, der svarer til hinanden, har summen n+1 og

$$\underline{x} \in U \iff \forall \underline{u}^* \in U^* : \langle \underline{u}^*, \underline{x} \rangle = 0,$$
$$\underline{u}^* \in U^* \iff \forall \underline{x} \in U : \langle \underline{u}^*, \underline{x} \rangle = 0.$$

Af

$$U' \longleftrightarrow U'^*, \qquad U'' \longleftrightarrow U''^*$$

ved korrespondancen d følger

$$U' \cap U'' \longleftrightarrow U'^* + U''^*, \quad U' + U'' \longleftrightarrow U'^* \cap U''^*.$$

Det er tilstrækkeligt at bevise én af disse to påstande, da man kan lade V_{n+1} og V_{n+1}^* bytte rolle. For at bevise den første bemærkes, at $\underline{x} \in U' \cap U''$ er ensbetydende med, at der for alle $\underline{u}'^* \in U'^*$ og alle $\underline{u}''^* \in U''^*$ gælder

$$\langle \underline{u}'^*, \underline{x} \rangle = 0, \quad \langle \underline{u}'^*, \underline{x} \rangle = 0.$$

Dette medfører

$$\langle \underline{u}'^* + \underline{u}''^*, \underline{x} \rangle = 0,$$

altså $\langle \underline{u}^*, \underline{x} \rangle = 0$ for alle $\underline{u}^* \in U'^* + U''^*$, og naturligvis omvendt.

Lad der være givet et vektorrum $(V_{n+1}, +, L)$ af den endelige dimension n + 1 over et vilkårligt kommutativt legeme L. Ved det til dette knyttede <u>projektive rum</u>, som tilskrives dimensionen n, forstås mængden af de 1-dimensionale underrum af V_{n+1}. Idet alle vektorrum af samme endelige dimension og over det samme legeme L er indbyrdes isomorfe, kan man tale om <u>det n-dimensionale projektive rum over legemet</u> L. Det betegnes $\Pi^n(L)$ eller, hvis der ikke kan opstå misforståelser, kort Π^n. For n = -1 findes der ikke nogen 1-dimensionale underrum i vektorrummet. Men af formelle grunde er det hensigtsmæssigt at medtage $\Pi^{-1} = \emptyset$ som et projektivt rum af dimensionen -1.

De 1-dimensionale underrum af vektorrummet V_{n+1} kaldes det projektive rums punkter. Er U_{p+1} et $(p + 1)$-dimensionalt underrum af V_{n+1}, vil mængden af dets 1-dimensionale underrum være et p-dimensionalt projektivt rum Π^p, der er en delmængde af Π^n og kaldes en p-dimensional lineær mangfoldighed i Π^n. De 0-dimensionale lineære mangfoldigheder er punkterne, de 1-dimensionale kaldes (projektive) linier, de 2-dimensionale (projektive) planer og de $(n - 1)$-dimensionale (projektive) hyperplaner i Π^n.

Fællesmængden for lineære mangfoldigheder i Π^n er også en lineær mangfoldighed, idet det tilsvarende gælder for et vektorrums underrum. Fællesmængden for lineære mangfoldigheder kaldes også deres snit. Til givne lineære mangfoldigheder findes en lineær mangfoldighed af minimal dimension, som indeholder dem. Denne er entydig bestemt som snit af alle lineære mangfoldigheder, der indeholder de givne, og kaldes disses forbindelse. Også dette følger umiddelbart af, at det tilsvarende gælder for et vektorrums underrum. Forbindelsen af endelig mange lineære mangfoldigheder, som jo svarer til summen af de pågældende underrum af V_{n+1}, kaldes også deres sum og betegnes som en sådan.

Som umiddelbar konsekvens af dimensionsformlen for underrum af et vektorrum fås følgende dimensionsformel for snittet $\Pi_1 \cap \Pi_2$ og forbindelsen $\Pi_1 + \Pi_2$ af to lineære mangfoldigheder Π_1 og Π_2 i et projektivt rum Π^n:

$$\dim(\Pi_1 + \Pi_2) + \dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = \dim \Pi_1 + \dim \Pi_2 .$$

Denne formel sammenfatter de for den projektive geometri grundlæggende incidensrelationer mellem lineære mangfoldigheder.

For $n = 3$ f.eks. har man følgende tilfælde (hvor dog de trivielle, to sammenfaldende punkter, linier eller planer, punkt på en linie eller i en plan, linie i en plan, er udeladt):

Π_1	Π_2	$\Pi_1 \cap \Pi_2$	$\Pi_1 + \Pi_2$
punkt	punkt	$\emptyset$	linie
punkt	linie	$\emptyset$	plan
punkt	plan	$\emptyset$	rummet
linie	linie	$\emptyset$	rummet
linie	linie	punkt	plan
linie	plan	punkt	rummet
plan	plan	linie	rummet

Er altså f.eks. Π_1 og Π_2 linier, der har et punkt fælles, vil deres forbindelse være 2-dimensional, altså en plan, og omvendt. Er Π_1 en linie og Π_2 en plan, som ikke indeholder den, er $\dim(\Pi_1 + \Pi_2) > 2$, altså lig 3, og følgelig $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = 0$, hvilket betyder, at Π_1 og Π_2 har ét punkt fælles. Tilsvarende fortolkes de andre linier i skemaet.

Blandt dimensionsformlens konsekvenser for et vilkårligt projektivt rum fremhæves følgende to:

Lad der i Π^n være givet en hyperplan Π^{n-1} og et punkt Π^o uden for denne. Hver linie Π^1 gennem Π^o har da ét punkt fælles med Π^{n-1}; thi $\dim(\Pi^1 + \Pi^{n-1})$ er større end n-1, da Π^1 ikke ligger i Π^{n-1}, altså lig n, og dimensionsformlen giver da $\dim(\Pi^1 \cap \Pi^{n-1}) = 0$. Forskellige linier gennem Π^1 skærer Π^{n-1} i forskellige punkter. Da endvidere hvert punkt i Π^{n-1} ligger på en linie gennem Π^o, har man en bijektiv afbildning af mængden af linier gennem Π^o, <u>linieknippet</u> med toppunkt Π^o, på mængden af punkter i hyperplanen Π^{n-1}, således at hver af linierne går gennem sit billedpunkt. Afbildningen kaldes en <u>perspektivitet</u>. Er Π_1^{n-1} en anden hyperplan, som heller ikke går gennem Π^o, fås en bijektiv afbildning af Π^{n-1} på Π_1^{n-1} ved til hvert punkt i Π^{n-1} at lade svare det punkt i Π_1^{n-1}, som ligger på samme linie gennem Π^o. Denne afbildning kaldes en projektion fra Π^o eller også en perspektivitet.

Lad der i Π^n være givet en linie Π^1 og en (n-2)-dimensional lineær mangfoldighed Π^{n-2}, som ikke har noget punkt fælles med Π^1. Hver hyperplan Π^{n-1} gennem Π^{n-2} skærer da Π^o i ét punkt, forskellige hyperplaner skærer i forskellige punkter, og hvert punkt på linien Π^1 ligger i en hyperplan gennem Π^{n-2}. Alt dette følger let af dimensionsformlen. Man har altså en bijektiv afbildning af mængden af hyperplaner gennem Π^{n-2}, hyperplanbundtet med aksen Π^{n-2}, på mængden af punkter på linien Π^1, således at hver af hyperplanerne går gennem sit billedpunkt. Også en sådan afbildning kaldes en perspektivitet. Er Π_1^1 en anden linie, som ikke har noget punkt fælles med Π^{n-2}, fås en bijektiv afbildning af Π^1 på Π_1^1 ved til hvert punkt på Π^1 at lade svare det punkt på Π_1^1, som ligger i samme hyperplan gennem Π^{n-2}. Denne afbildning kaldes en projektion fra Π^{n-2} eller også en perspektivitet.

Til hver vektor $\underline{x} \neq \underline{0}$ i V_{n+1} svarer der et punkt X i Π^n, nemlig det af $\underline{x}$ frembragte 1-dimensionale underrum af V_{n+1}. Til $\lambda\underline{x}$, hvor $\lambda \in L$, $\lambda \neq 0$, svarer det samme punkt X. Omvendt svarer der til et punkt $X \in \Pi^n$ en mængde af indbyrdes proportionale, fra $\underline{0}$ forskellige vektorer. Hver af disse kaldes en repræsentant for X. Til nulvektoren $\underline{0}$ i V_{n+1} svarer ikke noget punkt i Π^n.

Har en mængde M af fra $\underline{0}$ forskellige vektorer i V_{n+1} rangen r + 1, altså det af M frembragte underrum dimensionen r + 1, vil forbindelsen af de til vektorerne i M svarende punkter være en lineær mangfoldighed af dimensionen r. Rangen af M ændres ikke, når vektorerne multipliceres med fra 0 forskellige skalarer. Den afhænger altså kun af de endimensionale underrum, som frembringes af de enkelte vektorer i M. Specielt gælder dette for endelige vektorsæt $(\underline{x}_0,\dots,\underline{x}_p)$. Lineær afhængighed eller uafhængighed bevares, når vektorerne erstattes med $\alpha_0\underline{x}_0,\dots,\alpha_p\underline{x}_p$, hvor $\alpha_0,\dots,\alpha_p$ er fra 0 forskellige elementer fra L. Det er derfor tilladeligt om punkter $X_0,\dots,X_p$ i det projektive rum Π^n at sige, at de er lineært afhængige (uafhængige), når et sæt $(\underline{x}_0,\dots,\underline{x}_p)$ af repræsentanter for dem er lineært afhængigt (uafhængigt). Forbindelsen af p+1 lineært uafhængige punkter er en p-dimensional lineær mangfoldighed, som også siges at være udspændt af de p+1 punkter. At to (tre) punkter er lineært uafhængige, vil sige at de er forskellige (ikke ligger på ret linie).

Som en første anvendelse bevises <u>Desargues' trekantssætning</u>. For kortheds skyld angives, at tre punkter X, Y, Z ligger på ret linie, ved at skrive XYZ.

<u>Om 6 punkter</u> A_i, B_i, $i = 1,2,3$, <u>i et projektivt rum</u> Π^n <u>forudsættes, at</u> A_1,A_2,A_3 <u>eller</u> B_1,B_2,B_3 <u>er indbyrdes forskellige, og at</u> $A_i \neq B_i$, $i = 1,2,3$. <u>Hvis der da findes et punkt</u> S, <u>således at</u> A_iB_iS, $i = 1,2,3$, <u>så findes der punkter</u> C_{jk}, $jk = 23,31,12$, <u>således at</u> $A_jA_kC_{jk}$, $B_jB_kC_{jk}$ for $jk = 23,31,12$ <u>og</u> $C_{23}C_{31}C_{12}$.

Bevis: Lad $\underline{a}_i$, $\underline{b}_i$, $\underline{s}$ være repræsentanter for henholdsvis A_i, B_i, S. Da $A_i \neq B_i$, er $\underline{a}_i$ og $\underline{b}_i$ for hvert $i = 1,2,3$ lineært uafhængige, medens $\underline{a}_i$, $\underline{b}_i$ og $\underline{s}$ på grund af A_iB_iS er lineært afhængige. Vektoren $\underline{s}$ er altså for hvert $i = 1,2,3$ en linearkombination af $\underline{a}_i$ og $\underline{b}_i$:

$$\underline{s} = \lambda_1\underline{a}_1 + \mu_1\underline{b}_1 = \lambda_2\underline{a}_2 + \mu_2\underline{b}_2 = \lambda_3\underline{a}_3 + \mu_3\underline{b}_3 .$$

Heraf fås

$$\lambda_2\underline{a}_2 - \lambda_3\underline{a}_3 = \mu_3\underline{b}_3 - \mu_2\underline{b}_2 = \underline{c}_{23}$$
$$\lambda_3\underline{a}_3 - \lambda_1\underline{a}_1 = \mu_1\underline{b}_1 - \mu_3\underline{b}_3 = \underline{c}_{31}$$
$$\lambda_1\underline{a}_1 - \lambda_2\underline{a}_2 = \mu_2\underline{b}_2 - \mu_1\underline{b}_1 = \underline{c}_{12}$$

hvor $\underline{c}_{23},\underline{c}_{31},\underline{c}_{12}$ er betegnelser for de pågældende vektorer på de venstre sider. Ifølge forudsætning er $\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3$ eller $\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3$ lineært uafhængige to og to, og dette medfører, at vektorerne $\underline{c}_{23},\underline{c}_{31},\underline{c}_{12}$ er forskellige fra $\underline{0}$, altså repræsentanter for punkter C_{23},C_{31},C_{13} i Π^n. Da øjensynlig

$$\underline{c}_{23} + \underline{c}_{31} + \underline{c}_{12} = \underline{0},$$

ligger disse punkter på ret linie. Endvidere ses af ovenstående ligninger, at såvel $A_jA_kC_{jk}$ som $B_jB_kC_{jk}$ for jk = 23,31,12. Dermed er sætningen bevist.

Det tilføjes, at forudsætningerne om, at visse af de givne punkter ikke falder sammen, kan udelades. Ovenstående bevis svigter, når de ikke er opfyldt, men sætningen er trivielt rigtig. I beviset må der imidlertid skelnes mellem en del tilfælde.

Det var ikke forudsat, at de givne punkter ligger i en plan, men kun, at de ligger på tre linier gennem samme punkt. Det er let at se, at dette medfører, at hele figuren ligger i en højst 3-dimensional lineær mangfoldighed.

Ved siden af vektorrummet V_{n+1}, der bestemmer det projektive rum Π^n, tages nu også det duale V^*_{n+1} i betragtning. Ifølge selve definitionen er sætninger om Π^n identiske med sætninger om endimensionale underrum af V_{n+1}. Disse sætninger gælder naturligvis også om endimensionale underrum af det med V_{n+1} isomorfe vektorrum V^*_{n+1}. Det afgørende er nu, at de endimensionale underrum af V^*_{n+1} tillader en simpel fortolkning i det ved V_{n+1} bestemte projektive rum Π^n, nemlig som dettes hyperplaner.

Lad $\underline{u}^*$ være en fra nulvektoren forskellig vektor i V_{n+1}^*, altså en fra nulformen forskellig linearform defineret på V_{n+1}. Dennes kerne

$$\{\underline{x} \in V_{n+1} \mid \langle \underline{u}^*, \underline{x} \rangle = 0\}$$

er et n-dimensionalt underrum af V_{n+1}; og til dette svarer en (n-1)-dimensional lineær mangfoldighed, altså en hyperplan i Π^n. Da to fra nulformen forskellige linearformer har samme kerne, hvis og kun hvis de er proportionale, og da hvert n-dimensionalt underrum af V_{n+1} er kerne for en linearform, er der herved etableret en enentydig korrespondance mellem de endimensionale underrum i V_{n+1}^* og hyperplanerne i Π^n.

Til et (p+1)-dimensionalt underrum U_{p+1}^* af V_{n+1}^* svarer som omtalt (side III,2,3) et (n-p)-dimensionalt underrum U_{n-p} af V_{n+1} bestående af de vektorer $\underline{x} \in V_{n+1}$, for hvilke $\langle \underline{u}^*, \underline{x} \rangle = 0$ for alle $\underline{u}^* \in U_{p+1}^*$. Den til U_{n-p} svarende lineære mangfoldighed Π^{n-p-1} i Π^n er altså fællesmængden af de til de endimensionale underrum af U_{p+1}^* svarende hyperplaner.

Endvidere ses, at der til en sum af underrum af V_{n+1}^* svarer snittet af de tilsvarende lineære mangfoldigheder i Π^n, og til en fællesmængde af underrum af V_{n+1}^* svarer forbindelsen af de tilsvarende lineære mangfoldigheder i Π^n (jfr. side III,2,4).

Denne korrespondance tillader at opstille følgende <u>dualitetsprincip</u> for projektive rum:

<u>Af hver gyldig sætning om lineære mangfoldigeder i et n-dimensionalt projektivt rum fås igen en gyldig sætning ved at ombytte "p-dimensional lineær mangfoldighed" med "(n-p-1)-dimensional lineær mangfoldighed" og "snit" med "forbindelse".</u>

To sætninger, der fremgår af hinanden ved disse ombytninger (og passende verbale ændringer) er nemlig den samme sætning vedrørende et (n+1)-dimensionalt vektorrum (henholdsvis V_{n+1} og V_{n+1}^*) over det betragtede legeme L.

Som eksempel betragtes Desargues' trekantssætning. Er hele figuren beliggende i en plan Π^2 og anvendes dualitetsprincippet for denne, fås følgende sætning, hvor der er skrevet xyz for at angive, at tre linier x, y, z har et punkt fælles:

Om 6 linier a_i, b_i, $i = 1,2,3$ i en projektiv plan Π^2 forudsættes, at a_1, a_2, a_3 eller b_1, b_2, b_3 er indbyrdes forskellige, og at $a_i \neq b_i$, $i = 1,2,3$. Hvis der da findes en linie s, således at $a_i b_i s$, $i = 1,2,3$, så findes der linier c_{jk}, $jk = 23,31,12$, således at $a_j a_k a_{jk}$, $b_j b_k c_{jk}$ for $jk = 23,31,12$ og $c_{23} c_{31} c_{12}$.

Bortset fra nogle udartede tilfælde er denne, som allerede omtalt, den omvendte til Desargues' sætning.

Tænkes figuren beliggende i et tredimensionalt projektivt rum Π^3, og anvendes dualitetsprincippet for dette, fås følgende sætning, hvor der er skrevet $\xi\eta\zeta$ for at angive, at tre planer ξ, η, ζ har en linie fælles:

Om 6 planer α_i, β_i, $i = 1,2,3$ i et projektivt rum Π^3 forudsættes, at $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eller $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ er indbyrdes forskellige, og at $\alpha_i \neq \beta_i$, $i = 1,2,3$. Hvis der da findes en plan σ, således at $\alpha_i \beta_i \sigma$, $i = 1,2,3$, så findes der planer γ_{jk}, $jk = 23,31,12$, således at $\alpha_j \alpha_k \gamma_{jk}$, $\beta_j \beta_k \gamma_{jk}$ for $jk = 23,31,12$ og $\gamma_{23} \gamma_{31} \gamma_{12}$.

Lad A, B, C være tre indbyrdes forskellige punkter på en projektiv linie i et projektivt rum Π^n over et legeme L, og lad vektorerne $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V_{n+1}$ være repræsentanter for dem. Idet disse vektorer er parvis lineært uafhængige, men alle tre lineært afhængige, har $\underline{c}$ en fremstilling af formen

$$\underline{c} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}, \qquad \lambda, \mu \in L,\ \lambda \neq 0,\ \mu \neq 0.$$

Idet $\underline{a}' = \lambda \underline{a}$ og $\underline{b}' = \mu \underline{b}$ også er repræsentanter for henholdsvis A og B, viser dette, at man for vilkårligt givne indbyrdes forskellige punkter A, B, C på en projektiv linie kan vælge repræsentanter $\underline{a}'$, $\underline{b}'$, $\underline{c}$, for hvilke

$$\underline{c} = \underline{a}' + \underline{b}'.$$

Repræsentanter med denne egenskab er entydig bestemte på nær en fælles skalær faktor. Er nemlig $\lambda'\underline{a}'$, $\mu'\underline{b}'$ og $\nu\underline{c}$, hvor $\lambda' \neq 0$, $\mu' \neq 0$, $\nu \neq 0$, andre repræsentanter for de samme punkter, således at

$$\nu\underline{c} = \lambda'\underline{a}' + \mu'\underline{b}',$$

fås ved at indsætte $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$, at

$$(\lambda'-\nu)\underline{a}' + (\mu'-\nu)\underline{b}' = \underline{0},$$

altså $\lambda' = \mu' = \nu$, idet $\underline{a}'$ og $\underline{b}'$ er lineært uafhængige.

Lad der nu være givet et sæt (A,B,C,D) af punkter på en projektiv linie, A, B, C indbyrdes forskellige, og lad der være valgt repræsentanter $\underline{a}$ og $\underline{b}$ for A og B, således at $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ er en repræsentant for C. Hver repræsentant $\underline{d}$ for D har netop én fremstilling

$$\underline{d} = \rho\underline{a} + \sigma\underline{b}, \qquad \rho,\sigma \in L.$$

Skalarerne ρ og σ er da, på nær en fælles faktor, entydig bestemt ved punktsættet (A,B,C,D). Dette følger af, at enhver anden repræsentant for D er proportional med $\underline{d}$, og at $\underline{a}$, $\underline{b}$ er bestemt på nær en fælles faktor ved kravet om, at $\underline{a} + \underline{b}$ skal være en repræsentant for $\underline{c}$. For $D \neq A$, altså $\sigma \neq 0$, er altså ρ/σ et element af L, som kun afhænger af det givne punktsæt. Det er derfor tilladeligt at opstille følgende definition:

For et sæt (A,B,C,D) af punkter på en projektiv linie, hvor A, B, C er indbyrdes forskellige, defineres <u>dobbeltforholdet</u> ved

$$\mathrm{df}(ABCD) = \frac{\rho}{\sigma},$$

hvor ρ og σ er elementer fra L, for hvilke $\rho\underline{a} + \sigma\underline{b}$ er en repræsentant for D, når $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a} + \underline{b}$ er repræsentanter for henholdsvis A, B og C.

Denne definition kan opretholdes i tilfældet D = A, altså $\sigma = 0$, hvis legemet L udvides med et element ∞. For regning med dette fastsættes

$$\forall_L \lambda : \lambda + \infty = \infty + \lambda = \infty,$$
$$\forall_L \lambda \neq 0 : \lambda\infty = \infty\lambda = \infty, \text{ specielt } (-1)\infty = -\infty = \infty,$$
$$\forall_L \lambda : \lambda/\infty = 0,$$
$$\forall_L \lambda \neq 0 : \lambda/0 = \infty,$$

medens $\infty + \infty$, 0∞, ∞/∞, $0/0$ ikke defineres. Det udvidede legeme $L \cup \{\infty\}$ betegnes kort med $\bar{L}$.

Sættes nu

$$df(ABCA) = \infty,$$

svarer der til hvert punktsæt (A,B,C,D) på den projektive linie Π^1 et dobbeltforhold df(ABCD) $\in \bar{L}$. Omvendt, givet tre indbyrdes forskellige punkter A, B, C på Π^1 og et element $x \in \bar{L}$, findes der netop ét punkt X på Π^1, for hvilket df(ABCX) = x. Er nemlig $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a} + \underline{b}$ repræsentanter for A, B, C, vil $x\underline{a} + \underline{b}$ i tilfældet $x \neq \infty$ og $1\underline{a} + 0\underline{b}$ i tilfældet $x = \infty$ være repræsentanter for et sådant punkt X. At der kun kan findes ét, følger af, at alle linearkombinationer $\rho\underline{a} + \sigma\underline{b}$, hvor $\rho/\sigma = x$, er indbyrdes proportionale og dermed repræsentanter for samme punkt. Sammenfattende kan altså siges:

<u>Er der givet tre indbyrdes forskellige punkter</u> A, B, C <u>på en projektiv linie</u> Π^1, <u>fås en bijektiv afbildning af</u> Π^1 <u>på</u> $\bar{L}$ <u>ved til punktet</u> $X \in \Pi^1$ <u>at lade svare dobbeltforholdet</u> df(ABCX).

Punktsættet (A,B,C) kan altså opfattes som et koordinatsystem på linien med x = df(ABCX) som koordinat for punktet X:

$$df(ABCA) = \infty, \quad df(ABCB) = 0, \quad df(ABCC) = 1,$$

er koordinaten for A, B og C henholdsvis ∞, 0 og 1.

<u>For et sæt</u> (A,B,C,D) <u>af indbyrdes forskellige punkter på en</u>

projektiv linie gælder

(1) $$\mathrm{df}(BACD) = 1/\mathrm{df}(ABCD),$$

(2) $$\mathrm{df}(ACBD) = 1 - \mathrm{df}(ABCD),$$

(3) $$\mathrm{df}(CDAB) = \mathrm{df}(ABCD).$$

Bevis: Lad $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$, $\underline{d} = \rho\underline{a} + \sigma\underline{b}$ være repræsentanter for A, B, C, D, altså $\mathrm{df}(ABCD) = \rho/\sigma$. Den første påstand følger da af, at ombytning af $\underline{a}$ og $\underline{b}$ kommer ud på, at ρ og σ bytter rolle. Den anden påstands rigtighed indses således: $\underline{a}' = -\underline{a}$ og $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ er repræsentanter for A og C, således at $\underline{a}' + \underline{c} = \underline{b}$ er en repræsentant for B, og da

$$\underline{d} = -\rho\underline{a}' + \sigma(\underline{a}' + \underline{c}) = (\sigma-\rho)\underline{a}' + \sigma\underline{c},$$

er $\mathrm{df}(ACBD) = (\sigma-\rho)/\sigma = 1 - \rho/\sigma$. Den tredje påstand er en konsekvens af (1) og (2), idet

$$\mathrm{df}(CDAB) = 1 - \mathrm{df}(CADB) = \frac{1}{1 - \mathrm{df}(CABD)}$$
$$= 1 - \mathrm{df}(ACBD) = \mathrm{df}(ABCD).$$

Dobbeltforholdet df(ABCD) blev defineret ovenfor også, når D falder sammen med et af de andre punkter. Man benytter (3) til at definere dobbeltforholdet i de øvrige tilfælde, hvor tre af de fire punkter er indbyrdes forskellige og det fjerde falder sammen med et af disse. Der findes tre, nemlig B = C, A = C, A = B, der fremgår af de allerede behandlede, A = D, B = D, C = D ved ombytning af parrene (A,B) og (C,D). For at være i overensstemmelse med (3) sættes

$$\mathrm{df}(ABCD) = \infty \quad \text{for } B = C \text{ eller } A = D,$$
$$\mathrm{df}(ABCD) = 0 \quad \text{for } A = C \text{ eller } B = D,$$
$$\mathrm{df}(ABCD) = 1 \quad \text{for } A = B \text{ eller } C = D.$$

Det er let at se, at (1) og (2) bevarer gyldigheden i de her betragtede tilfælde. Eksempelvis har man for B = C

$$\infty = \mathrm{df}(ABCD) = 1 - \mathrm{df}(ACBD) = 1 - \infty = \infty.$$

(Det fører heller ikke til modstrid med (1) og (2), når man opretholder definitionerne i tilfældene $B = C \neq A = D$, o.s.v. Det er derimod ikke muligt at tillægge dobbeltforholdet en fornuftig mening, når tre af de fire punkter falder sammen.)

<u>For et sæt</u> (A,B,C,D,E) <u>af fem punkter på en projektiv linie gælder</u>

(4) $$df(ABCD)df(ABDE)df(ABEC) = 1,$$

<u>dersom</u> $A \neq B$ <u>og punkterne</u> C, D, E <u>er forskellige fra</u> A <u>og</u> B.

Bevis: Man kan vælge repræsentanter $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, $\underline{e}$ for A, B, C, D, E, således at

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}, \quad \underline{d} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{b}, \quad \underline{e} = \rho\underline{a} + \sigma\underline{b}$$

med passende $\lambda,\mu,\rho,\sigma \in L$. Man får da ved hjælp af (1) og (3)

$$df(ABCD) = \lambda/\mu, \quad df(ABEC) = \sigma/\rho.$$

Da $D \neq A$ og $D \neq B$, er $\lambda \neq 0$ og $\mu \neq 0$, så at $\lambda\underline{a}$ og $\mu\underline{b}$ er repræsentanter for A og B. Af

$$\underline{d} = (\lambda\underline{a}) + (\mu\underline{b}), \quad \underline{e} = \frac{\rho}{\lambda}(\lambda\underline{a}) + \frac{\sigma}{\mu}(\mu\underline{b})$$

sluttes, at

$$df(ABDE) = \frac{\rho\mu}{\lambda\sigma}.$$

Dermed er påstanden bevist.

Et punktsæt (A,B,C,D), for hvilket dobbeltforholdet er defineret, siges at være <u>harmonisk</u> (eller punktparrene (A,B) og (C,D) at være harmonisk forbundne), hvis

$$df(ABCD) = -1.$$

(Har legemet L karakteristik 2, altså $-1 = 1$, er denne definitions krav ensbetydende med $A = B$ eller $C = D$. I alle andre tilfælde består et harmonisk sæt af indbyrdes forskellige punkter.)

For at lade dualiteten fremtræde tydeligt, betegnes i det følgende hyperplaner lige som punkter med store latinske bogstaver, men forsynet med en stjerne.

For sæt (A^*, B^*, C^*, D^*) af hyperplaner, som tilhører et hyperplanbundt, som altså har en $(n-2)$-dimensional lineær mangfoldighed fælles, defineres dobbeltforholdet på dualistisk tilsvarende måde. Er A^*, B^*, C^* indbyrdes forskellige, findes der repræsentanter $\underline{a}^*$, $\underline{b}^*$, $\underline{c}^*$ for dem, for hvilke $\underline{c}^* = \underline{a}^* + \underline{b}^*$, og en repræsentant $\underline{d}^*$ for D^* har én fremstilling $\underline{d}^* = \rho\underline{a}^* + \sigma\underline{b}^*$, $\rho,\sigma \in L$. Man definerer da

$$\mathrm{df}(A^*B^*C^*D^*) = \frac{\rho}{\sigma}.$$

Det er klart, at alle øvrige definitioner og sætningerne om dobbeltforholdet af fire punkter på en linie, specielt relationerne (1) - (4), kan overføres til dobbeltforholdet for fire hyperplaner i et hyperplanbundt.

Lad Π^1 være en linie og Π^{n-2} en $(n-2)$-dimensional lineær mangfoldighed i et n-dimensionalt projektivt rum Π^n, således at $\Pi^1 \cap \Pi^{n-2} = \emptyset$. Lad endvidere (A,B,C,D) være et punktsæt på Π^1 og (A^*,B^*,C^*,D^*) et hyperplansæt i hyperplanbundtet med aksen Π^{n-2}, således at A ligger på A^*, B på B^*, C på C^* og D på D^*. Er da mindst tre af punkterne og dermed mindst tre af hyperplanerne indbyrdes forskellige, gælder

$$\mathrm{df}(A\,B\,C\,D) = \mathrm{df}(A^*B^*C^*D^*).$$

Bevis: Antag, at A, B, C, og dermed A^*, B^*, C^*, er indbyrdes forskellige. Der findes da repræsentanter $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ for A, B, C, D og repræsentanter $\underline{a}^*$, $\underline{b}^*$, $\underline{c}^*$, $\underline{d}^*$ for A^*, B^*, C^*, D^*, således at

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}, \qquad \underline{d} = \rho\underline{a} + \sigma\underline{b}, \qquad \rho,\sigma \in L,$$
$$\underline{c}^* = \underline{a}^* + \underline{b}^* \qquad \underline{d}^* = \rho^*\underline{a} + \sigma^*\underline{b}^*, \ \rho^*,\sigma^* \in L.$$

Idet A, B, C, D ligger på henholdsvis A^*, B^*, C^*, D^*, gælder

$$\langle \underline{a}^*,\underline{a}\rangle = \langle \underline{b}^*,\underline{b}\rangle = \langle \underline{c}^*,\underline{c}\rangle = \langle \underline{d}^*,\underline{d}\rangle = 0.$$

Nu er

$$\begin{aligned}
\langle \underline{c}^*,\underline{c}\rangle &= \langle \underline{a}^*+\underline{b}^*,\underline{a}+\underline{b}\rangle \\
&= \langle \underline{a}^*,\underline{a}\rangle + \langle \underline{a}^*,\underline{b}\rangle + \langle \underline{b}^*,\underline{a}\rangle + \langle \underline{b}^*,\underline{b}\rangle \\
\langle \underline{d}^*,\underline{d}\rangle &= \langle \rho^*\underline{a}^*+\sigma^*\underline{b}^*,\rho\underline{a}+\sigma\underline{b}\rangle \\
&= \rho^*\rho\langle \underline{a}^*,\underline{a}\rangle + \rho^*\sigma\langle \underline{a}^*,\underline{b}\rangle + \sigma^*\rho\langle \underline{b}^*,\underline{a}\rangle + \sigma^*\sigma\langle \underline{b}^*,\underline{b}\rangle
\end{aligned}$$

og følgelig

$$\langle \underline{a}^*,\underline{b}\rangle + \langle \underline{b}^*,\underline{a}\rangle = 0$$

$$\rho^*\sigma\langle \underline{a}^*,\underline{b}\rangle + \sigma^*\rho\langle \underline{b}^*,\underline{a}\rangle = 0.$$

Disse to ligninger kan kun være tilfredsstillet samtidig, hvis

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \rho^*\sigma & \sigma^*\rho \end{vmatrix} = \sigma^*\rho - \rho^*\sigma = 0,$$

altså $\rho^*/\sigma^* = \rho/\sigma$, hvilket er påstanden, eller hvis

$$\langle \underline{a}^*,\underline{b}\rangle = \langle \underline{b}^*,\underline{a}\rangle = 0.$$

Det sidste er imidlertid udelukket. Af $\langle \underline{a}^*,\underline{a}\rangle = \langle \underline{a}^*,\underline{b}\rangle = 0$ kunne man nemlig slutte, at A og B, altså Π^1 måtte ligge i A^*, og deraf ved hjælp af dimensionsformlen, at Π^1 og Π^{n-2} måtte have et punkt fælles i strid med forudsætningen.

Som konsekvens af den beviste sætning fremhæves, at <u>dobbeltforhold bevares ved perspektiver</u>.

På en projektiv linie $\Pi^1(L)$ indføres såkaldte <u>homogene projektive koordinater</u> på følgende måde. Man vælger tre indbyrdes forskellige punkter E_0, E_1 og E på Π^1. Er da $\underline{e}_0$, $\underline{e}_1$ og $\underline{e}$ sådanne repræsentanter for disse punkter, at $\underline{e} = \underline{e}_0 + \underline{e}_1$, siges et par $(x_0,x_1) \in L^2$ at være et <u>projektivt koordinatsæt</u> for et punkt X på Π^1 med hensyn til det <u>projektive koordinatsystem</u> $(E_0,E_1;E)$, hvis $\underline{x} = x_0\underline{e}_0 + x_1\underline{e}_1$ er en repræsentant for X. Da $\underline{x} \neq \underline{0}$, er

$(x_0,x_1) \neq (0,0)$. Det er klart, at alle par $(\rho x_0,\rho x_1)$, hvor $\rho \in L$, $\rho \neq 0$, også er koordinatsæt for X, idet $\rho\underline{x}$ er en repræsentant for X, når $\underline{x}$ er det. Der findes ikke andre koordinatsæt for X; thi ifølge dobbeltforholdets definition er

$$df(E_0E_1EX) = x_0/x_1,$$

hvilket viser, at koordinaternes forhold kun afhænger af koordinatsystemet $(E_0,E_1;E)$ og punktet X, men ikke af valget af repræsentanter.

Til hvert fra (0,0) forskelligt par $(x_0,x_1) \in L^2$ svarer et punkt på Π^1, og til hvert punkt på Π^1 svarer en klasse af indbyrdes proportionale par (x_0,x_1). (Derfor "homogene" koordinater.) Man giver altså afkald på enentydigheden ved korrespondancen mellem punkter og koordinatsæt. Denne ulempe opvejes imidlertid af det indførte koordinatbegrebs smidighed og symmetri.

Punkterne E_0 og E_1, der kaldes koordinatsystemets <u>fundamentalpunkter</u>, har som specielle koordinatsæt henholdsvis (1,0) og (0,1), alment de par, hvor henholdsvis anden og første koordinat er 0. Punktet E, der kaldes koordinatsystemets <u>enhedspunkt</u>, har (1,1), alment alle par bestående af to ens, fra 0 forskellige elementer fra L som koordinatsæt. Det punkt $X \in \Pi^1$, for hvilket E_0,E_1 og E,X er harmonisk forbundne, har (1,-1) som et koordinatsæt.

Tænkes en reel projektiv linie opstået af en euklidisk linie ved tilføjelse af et uegentligt punkt, kan et projektivt koordinatsystem $(E_0,E_1;E)$, hvor E_1 er det uegentlige punkt, fortolkes som et affint koordinatsystem på den euklidiske linie med E_0 som begyndelsespunkt, $\overrightarrow{E_0E}$ som basisvektor og x_1/x_0 som affin koordinat for punktet X med det projektive koordinatsæt (x_0,x_1).

I et projektivt rum $\Pi^n(L)$ af dimensionen $n > 1$ indføres <u>homogene projektive koordinater</u> på følgende måde. Man vælger $n+2$ punkter $E_0,\ldots,E_n$ og E, således at hvilkesomhelst $n+1$ af dem er lineært uafhængige, dvs. ikke ligger i en hyperplan. Er da $\underline{e}_0,\ldots,\underline{e}_n$ og $\underline{e}$ repræsentanter for disse punkter, således at

$$\underline{e} = \underline{e}_0 +\ldots+ \underline{e}_n,$$

siges et sæt $(x_0,\ldots,x_n) \in L^{n+1}$ at være et <u>projektivt koordinatsæt</u> for et punkt $X \in \Pi^n$ med hensyn til det projektive koordinatsystem $(E_0,\ldots,E_n;E)$, hvis

$$\underline{x} = x_1\underline{e}_1 +\ldots+ x_n\underline{e}_n$$

er en repræsentant for X. Det er klart, at $(\rho x_0,\ldots,\rho x_n)$ for hvert $\rho \neq 0$ fra L også er et koordinatsæt for X, når $(x_0,\ldots,x_n)$ er et. Det skal bevises, at der ikke findes andre.

Dertil bemærkes, at vektoren

$$\underline{e}_0 + \underline{e}_1 = \underline{e} - \underline{e}_2 - \ldots - \underline{e}_n$$

repræsenterer et punkt E_{01}, som dels ligger på linien E_0E_1, idet den er en linearkombination af repræsentanter for E_0 og E_1, dels i den ved punkterne $E_2,\ldots,E_n,E$ udspændte hyperplan, idet den er en linearkombination af repræsentanter for disse punkter. Punktet E_{01} er altså projektionen af E på linien E_0E_1 fra den af $E_2,\ldots,E_n$ udspændte $(n-2)$-dimensionale lineære mangfoldighed. På samme måde ses, at vektoren

$$x_0\underline{e}_0 + x_1\underline{e}_1 = \underline{x} - x_2\underline{e}_2 - \ldots - x_n\underline{e}_n$$

repræsenterer det punkt X_{01} på linien E_0E_1, der fås ved at projicere X fra den af $E_2,\ldots,E_n$ udspændte $(n-2)$-dimensionale lineære mangfoldighed. Det fremgår heraf, at (x_0,x_1) er et koordinatsæt for punktet X_{01} med hensyn til koordinatsystemet $(E_0,E_1;E_{01})$ på linien E_0E_1. Der gælder altså

$$\mathrm{df}(E_0E_1E_{01}X_{01}) = x_0/x_1,$$

og dette viser, at forholdet x_0/x_1 kun afhænger af de givne punkter $E_0,\dots,E_n,E$ samt X, men ikke af valget af deres repræsentanter. Ved at projicere E og X på linien E_iE_j, hvor $i,j = 0,\dots,n$, $i \neq j$, indses tilsvarende, at hvert forhold x_i/x_j er bestemt ved de givne punkter. Idet projektionerne af E og X på E_iE_j betegnes E_{ij} og X_{ij}, kan (x_i,x_j) fortolkes som koordinatsæt for X_{ij} med hensyn til koordinatsystemet $(E_i,E_j;E_{ij})$ på linien E_iE_j, og der gælder

$$\mathrm{df}(E_iE_jE_{ij}X_{ij}) = x_i/x_j.$$

Dette ræsonnement forudsætter imidlertid, at X ikke tilhører den $(n-2)$-dimensionale lineære mangfoldighed, fra hvilken der projiceres, og kræver derfor et supplement. At X tilhører den $(n-2)$-dimensionale lineære mangfoldighed, der udspændes af de $n-1$ fra E_i og E_j forskellige blandt punkterne $E_0,\dots,E_n$, er ensbetydende med $x_i = x_j = 0$. Dette er øjensynlig uafhængigt af valget af repræsentanter for $E_0,\dots,E_n$ og X. Sammenfattende kan altså siges: Efter valg af et koordinatsystem $(E_0,\dots,E_n;E)$ hører til hvert sæt $(x_0,\dots,x_n) \neq (0,\dots,0)$ et punkt X, og omvendt til hvert punkt en mængde af indbyrdes proportionale sådanne sæt.

Punkterne $E_0,\dots,E_n$ kaldes koordinatsystemets <u>fundamentalpunkter</u>. Deres koordinatsæt er karakteriseret ved, at alle koordinater på én nær er 0. Punktet E kaldes koordinatsystemets <u>enhedspunkt</u>. Dets koordinatsæt består af ens, fra 0 forskellige elementer fra L.

Et sæt $(A_0,\dots,A_r)$ af $r+1$ $(\leq n+1)$ lineært uafhængige punkter i et projektivt rum Π^n kaldes et <u>r-dimensionalt simplex</u> (jfr. "liniestykke", "trekant", "tetraeder" i det euklidiske rum). Hvert delsæt bestående af $s+1$ af punkterne, hvor $0 \leq s \leq r$, kaldes et <u>s-dimensionalt randsimplex</u>, og den af et sådant udspændte lineære mangfoldighed en <u>s-dimensional side</u> af simplexet. De 0-dimensionale sider kaldes også hjørner, de 1-dimensionale kanter. Deles sættet $(A_o,\dots,A_r)$ i to komplementære delsæt, fås to modstående randsimplexer. De udspænder modstående sider. Idet punkterne $A_o,\dots,A_r$ er lineært uafhængige, er to sådanne sider disjunkte lineære mangfoldigheder, hvis dimensioner har summen $r - 1$.

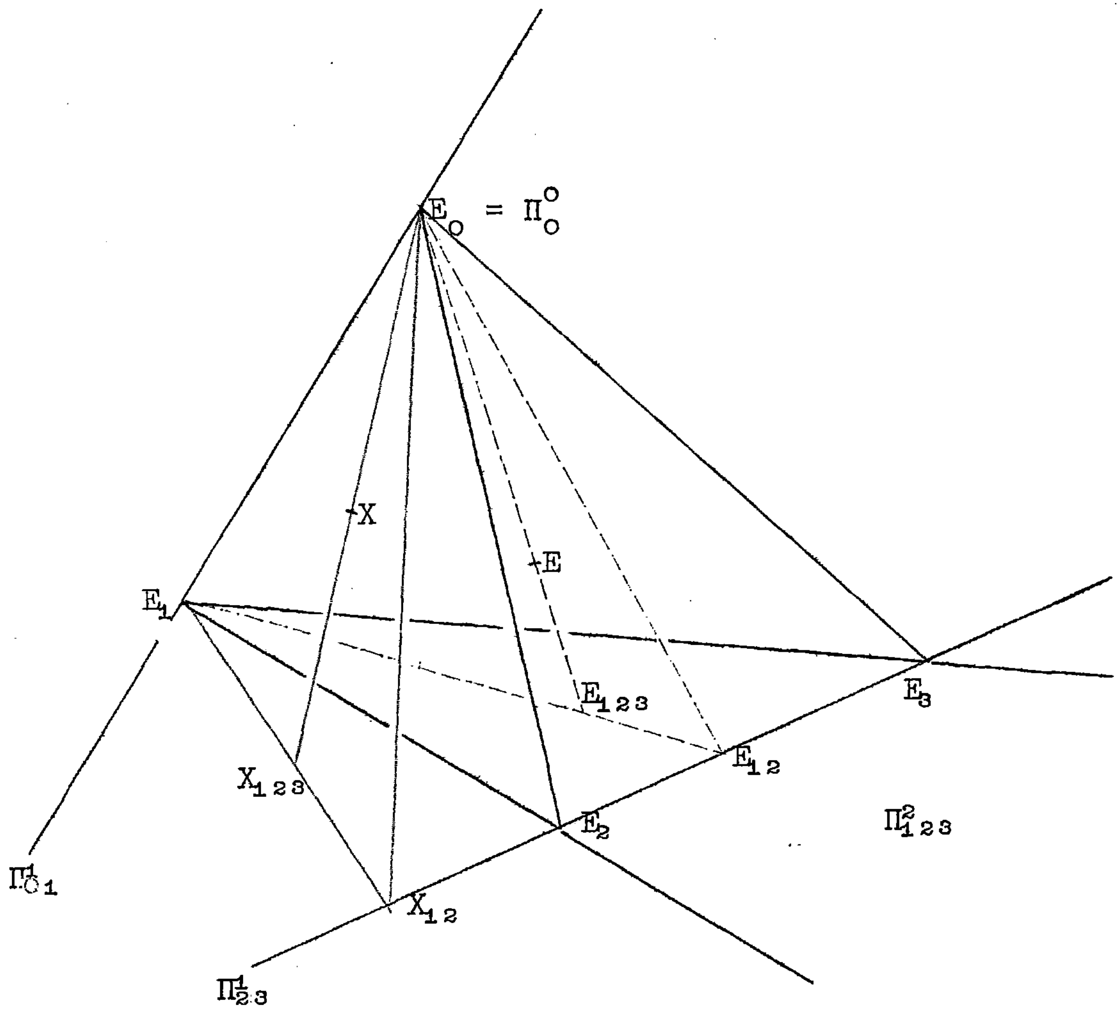
Med disse definitioner kan man sige, at et projektivt koordinatsystem i Π^n består af et n-dimensionalt simplex $(E_o,\dots,E_n)$, fundamentalsimplexet, og et punkt E, som ikke ligger på nogen af simplexets sider. Et punkt X med koordinatsættet $(x_o,\dots,x_n)$ ligger på den ved et s-dimensionalt randsimplex $(E_{i_o},\dots,E_{i_s})$ udspændte s-dimensionale side, hvis og kun hvis $x_i = 0$ for de fra $i_o,\dots,i_s$ forskellige $i = 0,\dots,n$.

Lad der være valgt et s-dimensionalt randsimplex, $0 \leq s < n-1$, f.eks. $(E_o,\dots,E_s)$, og lad $\Pi^s_{o,\dots,s}$ betegne den af dette udspændte s-dimensionale side. Den af det modstående randsimplex $(E_{s+1},\dots,E_n)$ udspændte side betegnes $\Pi^{n-s-1}_{s+1,\dots,n}$. Denne udspænder sammen med punktet E en $(n - s)$-dimensional lineær mangfoldighed, som skærer $\Pi^s_{o,\dots,s}$ i netop ét punkt $E_{o,\dots,s}$, projektionen af E fra $\Pi^{n-s-1}_{s+1,\dots,n}$ på $\Pi^s_{o,\dots,s}$ (dimensionsformlen, side III, 2, 5). Lad nu X være et punkt, som ikke tilhører $\Pi^{n-s-1}_{s+1,\dots,n}$, og $X_{o,\dots,s}$ dets projektion fra denne lineære mangfoldighed på $\Pi^s_{o,\dots,s}$. Man har da, at hvis $(x_o,\dots,x_n)$ er et koordinatsæt for X med hensyn til koordinatsystemet $(E_o,\dots,E_n;E)$ i Π^n, vil $(x_o,\dots,x_s)$ være et koordinatsæt for $X_{o,\dots,s}$ med hensyn til koordinatsystemet $(E_o,\dots,E_s;E_{o,\dots,s})$ i $\Pi^s_{o,\dots,s}$. Beviset føres som i det ovenfor betragtede tilfælde $s = n - 2$ med benyttelse af ligningerne

$$\underline{e}_o + \dots + \underline{e}_s = \underline{e} - \underline{e}_{s+1} - \dots - \underline{e}_n,$$

$$x_o\underline{e}_o + \dots + x_s\underline{e}_s = \underline{x} - x_{s+1}\underline{e}_{s+1} - \dots - x_n\underline{e}_n$$

mellem punkternes repræsentanter.



Dualt til de indførte punktkoordinater defineres <u>hyperplan-koordinater</u> i Π^n (for n = 2 liniekoordinater, for n = 3 plankoordinater). Lad $E_o^*,\ldots,E_n^*,E^*$ være n + 2 hyperplaner, således at hvilkesomhelst n + 1 af dem er lineært uafhængige, dvs. går ikke gennem samme punkt. Er $\underline{e}_o^*,\ldots,\underline{e}_n^*,\underline{e}^*$ vektorer i det duale vektorrum V_{n+1}^*, som repræsenterer disse hyperplaner, og for hvilke

$$\underline{e}^* = \underline{e}_o^* + \ldots + \underline{e}_n^*,$$

siges et sæt $(u_o,\ldots,u_n) \in L^{n+1}$ at være et <u>hyperplankoordinatsæt</u> for en hyperplan U^* med hensyn til hyperplankoordinatsystemet $(E_o^*,\ldots,E_n^*;E^*)$, hvis

$$\underline{u}^* = u_o\underline{e}_o^* + \ldots + u_n\underline{e}_n^*$$

er en repræsentant for U^*. Som for punktkoordinater gælder, at hvert sæt $(u_o,\dots,u_n) \neq (0,\dots,0)$ er koordinatsæt for en hyperplan, og at samtlige koordinatsæt for en hyperplan fås af et af dem ved multiplikation med et fra 0 forskelligt element af L.

Hyperplanerne $E_o^*,\dots,E_n^*$ kaldes koordinatsystemets <u>fundamentalhyperplaner</u> og E^* dets <u>enhedshyperplan</u>. Er $(u_o,\dots,u_n)$ et koordinatsæt for hyperplanen U^*, og er $(u_i,u_j) \neq (0,0)$ for et fast indexpar (i,j), $i \neq j$, har man

$$\mathrm{df}\,(E_i^* E_j^* E_{ij}^* U_{ij}^*) = u_i/u_j,$$

hvor E_{ij}^* og U_{ij}^* er hyperplaner, som bestemmes dualt til de ovenfor indførte punkter E_{ij} og X_{ij}. At $(u_i,u_j) \neq (0,0)$ er ensbetydende med, at U^* ikke er lineært afhængig af de fra E_i^* og E_j^* forskellige blandt fundamentalhyperplanerne.

Fundamentalhyperplanerne er de $(n - 1)$-dimensionale sider af et simpleks. Hvilkesomhelst n blandt disse n + 1 hyperplaner har nemlig netop ét punkt fælles, da de er lineært uafhængige, og de således bestemte n + 1 punkter kan vises at være lineært uafhængige. Hver fundamentalhyperplan indeholder n af punkterne og er derfor en side af det ved de n + 1 punkter bestemte simpleks.

Til hvert punktkoordinatsystem $(E_o,\dots,E_n;E)$ knyttes et bestemt hyperplankoordinatsystem $(E_o^*,\dots,E_n^*;E^*)$ på følgende måde. Man vælger repræsentanter $\underline{e}_o,\dots,\underline{e}_n,\underline{e}$ for $E_o,\dots,E_n,E$, således at

$$\underline{e} = \underline{e}_o + \dots + \underline{e}_n.$$

Til basen $(\underline{e}_o,\dots,\underline{e}_n)$ for V_{n+1} hører en dual basis $(\underline{e}_o^*,\dots,\underline{e}_n^*)$ for V_{n+1}^*, som er entydig bestemt ved

$$\langle \underline{e}_i^*, \underline{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i,j = 0,\dots,n$$

(jfr. side III, 2, 2). Da koordinatsystemet $(E_o,\dots,E_n;E)$ bestemmer vektorerne $\underline{e}_o,\dots,\underline{e}_n,\underline{e}$ på nær en fælles skalær faktor, gælder det samme om $\underline{e}_o^*,\dots,\underline{e}_n^*$ og

$$\underline{e}^* = \underline{e}_o^* + \dots + \underline{e}_n^*.$$

De af $\underline{e}_o^*,\dots,\underline{e}_n^*$, $\underline{e}^*$ repræsenterede hyperplaner $E_o^*,\dots,E_n^*$, E^* udgør det til punktkoordinatsystemet knyttede hyperplankoordinatsystem. Da $\langle\underline{e}_i^*,\underline{e}_j\rangle = 0$ for $i \neq j$, går hyperplanen E_i^* gennem de n punkter E_j, $j \neq i$, og er følgelig den modstående side til hjørnet E_i af punktkoordinatsystemets fundamentalsimplex.

Ved et sådant valg af de to koordinatsystemer gælder, at et punkt X med koordinatsættet $(x_o,\dots,x_n)$ ligger i hyperplanen U^* med koordinatsættet $(u_o,\dots,u_n)$, hvis og kun hvis

$$u_o x_o + \dots + u_n x_n = 0$$

(jfr. side III, 2, 2 og 10). For fast $(u_o,\dots,u_n)$ er dette en <u>ligning for hyperplanen</u> U^*, idet de sæt $(x_o,\dots,x_n) \neq (0,\dots,0)$, der tilfredsstiller den, er netop koordinatsættene for punkterne X i U^*. For fast $(x_o,\dots,x_n)$ er det en <u>ligning for punktet</u> X, i den forstand, at de sæt $(u_o,\dots,u_n) \neq (0,\dots,0)$, der tilfredsstiller den, er netop koordinatsættene for hyperplanerne U^*, der går gennem X.

Fundamentalhyperplanen E_i^* har som ligning $x_i = 0$. Er $(E_{i_o},\dots,E_{i_s})$ et af fundamentalsimplexets randsimplexer, består den af dette udspændte s-dimensionale side, som omtalt tidligere, netop af de punkter, for hvis koordinater der gælder $x_i = 0$ for $i \neq i_o,\dots,i_s$. Denne side er altså snittet af de n-s fundamentalhyperplaner E_i^* for $i \neq i_o,\dots,i_s$.

Enhedshyperplanen E^* har som ligning

$$x_o + \dots + x_n = 0.$$

Den skærer fundamentaltetraedrets kant E_iE_j, $i \neq j$, i et punkt

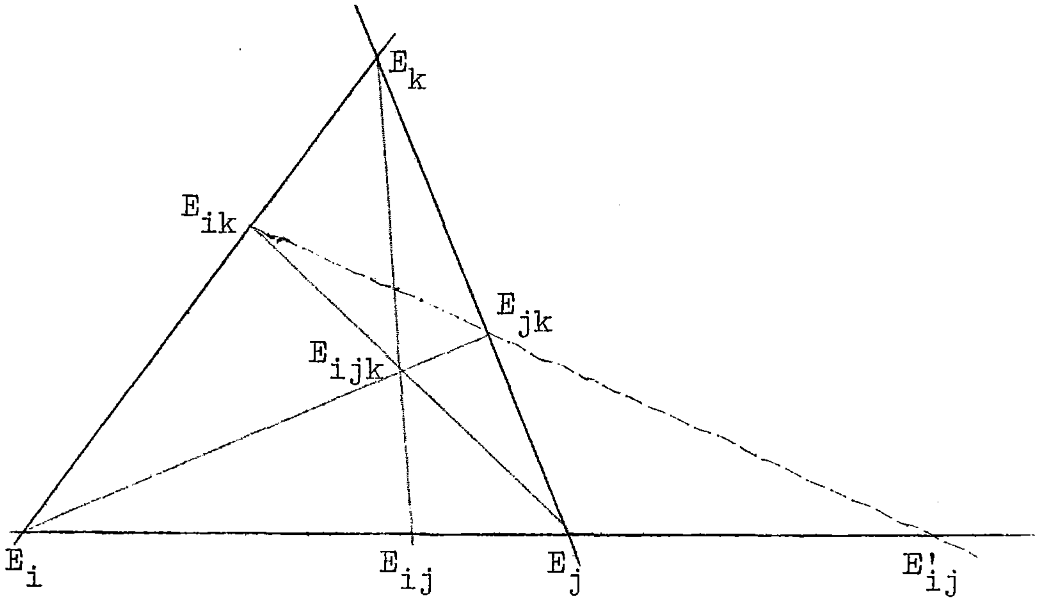
E'_{ij}. Idet der for punkterne på linien E_iE_j gælder $x_k = 0$ for $k \neq i,j$, har man $x_i + x_j = 0$, altså $x_i/x_j = -1$ for skæringspunktet med E^*. Nu er (x_i,x_j) et koordinatsæt for E'_{ij} med hensyn til koordinatsystemet $(E_i,E_j;E_{ij})$ på linien E_iE_j, hvor E_{ij} er projektionen af E på linien fra dennes modstående (n-2)-dimensionale side. Heraf sluttes, at

$$df(E_iE_jE_{ij}E'_{ij}) = -1,$$

altså at E'_{ij} er det fjerde harmoniske punkt til E_i,E_j,E_{ij}.

Det til et givet punktkoordinatsystem $(E_o,\dots,E_n;\ E)$ knyttede hyperplankoordinatsystem $(E_o^*,\dots,E_n^*;E^*)$ bestemmes altså på følgende måde: Fundamentalhyperplanen E_i er den modstående side til hjørnet E_i i simplexet $(E_o,\dots,E_n)$. Projiceres enhedspunktet E fra simplexets (n-2)-dimensionale sider på disses modstående kanter, og bestemmes på hver kant det fjerde harmoniske punkt til de to hjørner, den indeholder, og enhedspunktets projektion på den, fås $\frac{1}{2}n(n+1)$ punkter, som ligger i samme hyperplan, og denne er enhedshyperplanen E^*.

Skæringspunktet E'_{ij} mellem enhedshyperplanen E^* og fundamentalsimplexets kant E_iE_j kan også bestemmes på anden måde. Lad k være en fra i og j forskellig index (blandt 0,...,n). De tre hjørner E_i,E_j,E_k udspænder en 2-dimensional side, altså en plan. Punkterne E_{ik},E_{jk} og E'_{ij}, der hvert tilhører en af siderne i trekant $E_iE_jE_k$, ligger da på samme linie. De har nemlig lineært afhængige koordinatsæt. Da alle deres koordinater med fra i, j og k forskelligt nummer er 0, er det tilstrækkeligt at se på delsættene (x_i,x_j,x_k). (Dette følger også af, at disse sæt er koordinatsæt for punkterne i planen med hensyn til koordinatsystemet $(E_i,E_j,E_k;E_{ijk})$, hvor E_{ijk} for $n > 2$ er projektionen af E på planen fra dennes modstående (n-3)-dimensionale side og for n = 2 selve en-



hedspunktet E.) Idet (1,0,1), (0,1,1) og (1,-1,0) er sådanne sæt for henholdsvis E_{ik}, E_{jk} og E'_{ij} og

$$(1,0,1) - (0,1,1) - (1,-1,0) = (0,0,0),$$

er påstanden bevist.

Forbindelsen mellem punkt- og hyperplankoordinatsystem er selvdual. Man kan derfor også begynde med et vilkårligt hyperplankoordinatsystem og dertil på dualistisk tilsvarende måde bestemme et punktkoordinatsystem. Fra det ovenfor konstruerede system $(E_o^*,\ldots,E_n^*;E^*)$ kommer man da tilbage til systemet $(E_o,\ldots,E_n;E)$, idet den duale til den duale $(\underline{e}_o^*,\ldots,\underline{e}_n^*)$ til en basis $(\underline{e}_o,\ldots,\underline{e}_n)$ for vektorrummet V_{n+1} er $(\underline{e}_o,\ldots,\underline{e}_n)$ (jfr. side III, 2, 3). Det kan også sluttes af, at E_i, E_j og E_{ij}, E'_{ij} er harmonisk forbundne punktpar.

Idet man som fundamentalsimplex kan vælge et vilkårligt n-dimensionalt simplex og som enhedspunkt et vilkårligt punkt, som ikke ligger på nogen af simplexets sider, giver de fundne resultater følgende sætning:

Lad $(A_o,\ldots,A_n)$ være et n-dimensionalt simplex i Π^n og P et punkt, som ikke ligger på nogen af dets sider. Med P_{ij}, hvor $i \neq j$, betegnes projektionen af P på kanten P_iP_j fra dennes modstående (n-2)-dimensionale side. For alle fra i og j forskellige $k = 0,\ldots,n$ vil da linierne $P_{ik}P_{jk}$ skære kanten P_iP_j i samme punkt P'_{ij}, nemlig det, for hvilket

$$df(P_iP_jP_{ij}P'_{ij}) = -1.$$

Punkterne P'_{ij} for $i,j = 0,\ldots,n$, $i \neq j$, ligger i en og kun én hyperplan P^*, som kaldes den harmoniske polar til punktet P med hensyn til simplexet $(A_0,\ldots,A_n)$.

Den duale sætning fører fra en hyperplan til et punkt, hyperplanens harmoniske pol. Den harmoniske pol til den harmoniske polar P^* til et punkt P er P. (Jfr. hertil III, 1, øv. 4.)

Endvidere følger af de fundne resultater for $n = 2$, at sætningen om den fuldstændige firkant (side III, 1, 9-10) gælder i en vilkårlig projektiv plan. For at indse dette behøver man blot at bemærke, at man med ovenstående betegnelser kan vælge fire vilkårlige punkter, hvoraf ikke tre ligger på samme linie, som punkterne E_0, E_1, E_{02}, E_{12} (jfr. ovenstående figur med $i = 0$, $j = 1$, $k = 2$).

Som umiddelbar anvendelse af projektive koordinater bevises endvidere følgende sætning vedrørende trekanter i en projektiv plan:

Lad (E_0,E_1,E_2) være en trekant (et 2-dimensionalt simplex) i en projektiv plan og E et punkt, som ikke ligger på nogen af trekantens sider. Med E_{01}, E_{12}, E_{20} betegnes projektionerne af E på siderne E_0E_1, E_1E_2, E_2E_0 fra disses modstående vinkelspidser, og med X_{01}, X_{12}, X_{20} betegnes tre fra vinkelspidserne forskellige punkter, som ligger på henholdsvis E_0E_1, E_1E_2, E_2E_0. Da vil linierne E_2X_{o1}, E_oX_{12}, E_1X_{2o} gå gennem samme punkt X, hvis og kun hvis

$$df(E_oE_1E_{o1}X_{o1})df(E_1E_2E_{12}X_{12})df(E_2E_oE_{2o}X_{2o}) = 1.$$

Bevis: Som koordinatsystem vælges $(E_o,E_1,E_2;E)$. At betingelsen er nødvendig, er indlysende. Går nemlig de tre linier gennem samme punkt X, og er (x_o,x_1,x_2) et koordinatsæt for X, har man

$$df(E_oE_1E_{o1}X_{o1}) = x_o/x_1,$$
$$df(E_1E_2E_{12}X_{11}) = x_1/x_2,$$
$$df(E_2E_oE_{2o}X_{2o}) = x_2/x_o,$$

idet X_{o1}, X_{12}, X_{2o} da er projektioner af X på siderne fra de modstående vinkelspidser. At betingelsen er tilstrækkelig, ses således: Betegnes de tre dobbeltforhold i den angivne orden med d_{o1}, d_{12}, d_{2o}, er det givet, at

$$d_{o1}\ d_{12}\ d_{2o} = 1.$$

Lad X betegne det punkt, for hvilket

$$(x_o,x_1,x_2) = (d_{o1}d_{12},d_{12},1)$$

er et koordinatsæt. Er da $\hat{X}_{o1}$, $\hat{X}_{12}$, $\hat{X}_{2o}$ dette punkts projektioner på henholdsvis E_oE_1, E_1E_2, E_2E_o fra henholdsvis E_2, E_o, E_1, har man

$$df(E_oE_1E_{o1}\hat{X}_{o1}) = x_o/x_1 = d_{o1}d_{12}/d_{12} = d_{o1} = df(E_oE_1E_{o1}X_{o1}),$$
$$df(E_1E_2E_{12}\hat{X}_{12}) = x_1/x_2 = d_{12}/1 = d_{12} = df(E_1E_2E_{12}X_{12}),$$
$$df(E_2E_oE_{2o}\hat{X}_{2o}) = x_2/x_o = 1/(d_{o1}d_{12}) = d_{2o} = df(E_2E_oE_{2o}X_{2o}),$$

Men heraf følger, at

$$\hat{X}_{o1} = X_{o1}, \quad \hat{X}_{12} = X_{12}, \quad \hat{X}_{2o} = X_{2o},$$

og dermed påstanden.

I sætningens tre dobbeltforhold af punktsæt (E_i,E_j,E_{ij},X_{ij}) på siden E_iE_j kan punkterne erstattes med de linier, som forbinder dem med sidens modstående vinkelspids. Den duale til sætningen i den således fremkommende form er følgende:

Lad (E_o, E_1, E_2) være en trekant i en projektiv plan og E^* en linie, som ikke går gennem nogen vinkelspids. Med E'_{o1}, E'_{12}, E'_{2o} betegnes skæringspunkterne mellem E^* og siderne E_oE_1, E_1E_2, E_2E_o, og med X'_{o1}, X'_{12}, X'_{2o} betegnes tre fra vinkelspidserne forskellige punkter, som ligger på henholdsvis E_oE_1, E_1E_2, E_2E_o. Da vil punkterne X'_{o1}, X'_{12}, X'_{21} ligge på samme linie, hvis og kun hvis

$$df(E_oE_1E'_{o1}X'_{o1})df(E_1E_2E'_{12}X'_{12})df(E_2E_oE'_{2o}X'_{2o}) = 1.$$

Disse to sætninger anvendes på den reelle projektive plan fremkommet ved tilføjelse af de uegentlige elementer til den euklidiske plan. Det antages, at den betragtede trekants vinkelspidser E_o, E_1, E_2 alle er egentlige. Siderne orienteres svarende til et bestemt omløb om trekanten, f.eks. fra E_o mod E_1, fra E_1 mod E_2 og fra E_2 mod E_o. Dobbeltforholdene kan da fortolkes som forhold af delingsforhold (se side III,1,1).

Vælges i den første sætning som punkt E medianernes skæringspunkt i trekanten, vil der for forholdet, hvori E_{ij} deler siden E_iE_j, gælde

$$\frac{E_iE_{ij}}{E_jE_{ij}} = -1,$$

og man får <u>Cevas sætning</u> (1678):

Lad (E_o, E_1, E_2) være en trekant i den euklidiske plan og X_{o1}, X_{12}, X_{2o} fra vinkelspidserne forskellige punkter på siderne E_oE_1, E_1E_2, E_2E_o. Da vil linierne E_2X_{o1}, E_oX_{12}, E_1X_{2o} gå gennem samme punkt eller være indbyrdes parallelle, hvis og kun hvis

$$\frac{E_oX_{o1}}{E_1X_{o1}} \cdot \frac{E_1X_{12}}{E_2X_{12}} \cdot \frac{E_2X_{2o}}{E_oX_{2o}} = -1.$$

Af den anden sætning med planens uegentlige linie som E^* fås <u>Menelaos' sætning</u> (ca. 100):

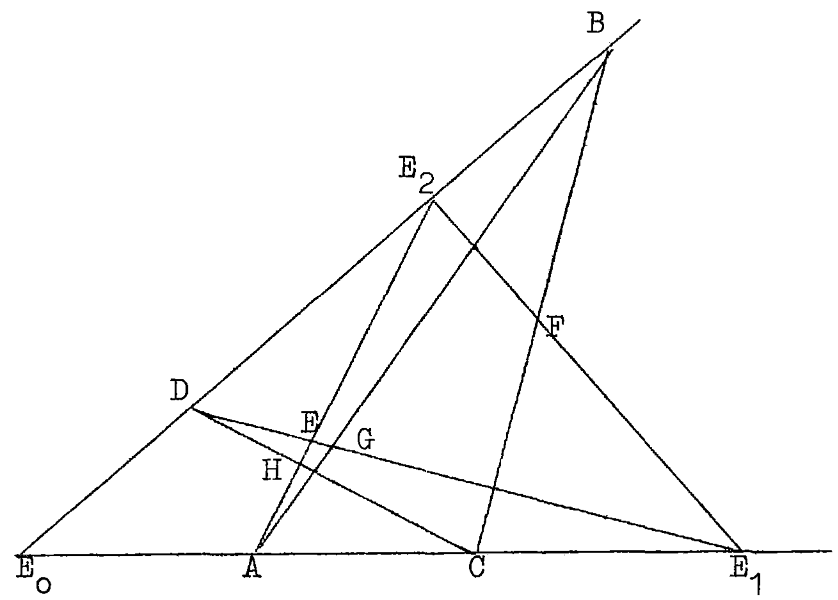
Lad (E_o, E_1, E_2) være en trekant i den euklidiske plan og X'_{o1}, X'_{12}, X'_{2o} fra vinkelspidserne forskellige punkter på siderne E_oE_1, E_1E_2, E_2E_o. Da vil X'_{o1}, X'_{12}, X'_{2o} ligge på samme linie, hvis og kun hvis

$$\frac{E_oX'_{o1}}{E_1X'_{o1}} \cdot \frac{E_1X_{12}}{E_2X_{12}} \cdot \frac{E_2X_{2o}}{E_oX_{2o}} = 1.$$

Endelig bevises ved koordinatregning <u>Pappos' sætning om sekskanter</u> i en projektiv plan:

<u>Hvis en sekskants vinkelspidser er indbyrdes forskellige og ligger skiftevis på to forskellige linier, vil modstående siders skæringspunkter ligge på samme linie</u>.

Bevis: Med henblik på valget af koordinatsystem betegnes de to liniers skæringspunkt med E_o. Da mindst 5 af vinkelspidserne er forskellige fra E_o, kan sekskanten betegnes $ABCDE_1E_2$,



således at A, D, E_1, E_2 er forskellige fra E_0. Punkterne A og C ligger da på linien E_0E_1 og punkterne B og D på linien E_0E_2. Som fundamentaltrekant vælges (E_0,E_1,E_2) og som enhedspunkt skæringspunktet E mellem linierne E_1D og E_2A. Man har da følgende koordinatsæt for sekskantens vinkelspidser:

A	B	C	D	E_1	E_2
(1,1,0)	(1,0,b)	(1,c,0)	(1,0,1)	(0,1,0)	(0,0,1),

hvor $b,c \in L$. Dette fremgår for A, D, E_1, E_2 umiddelbart af valget af koordinatsystemet. Da hverken B eller C kan ligge på linien E_1E_2 med ligningen $x_0 = 0$, er $x_0 \neq 0$ i disse punkters koordinatsæt, og man kan derfor sætte $x_0 = 1$. Koordinatsættene for skæringspunktet F mellem E_1E_2 og BC har $x_0 = 0$ og er linearkombinationer af (1,0,b) og (1,c,0). Idet

$$(1,c,0) - (1,0,b) = (0,c,-b),$$

er (0,c,-b) et koordinatsæt for F. Linien E_1D har ligningen $x_0 - x_3 = 0$. Koordinatsættene for skæringspunktet G mellem E_1D og AB er altså de linearkombinationer af (1,1,0) og (1,0,b), i hvilke $x_0 = x_3$. Idet

$$(b-1)(1,1,0) + (1,0,b) = (b,b-1,b),$$

er (b,b-1,b) et koordinatsæt for G. På samme måde ses, at (c,c,c-1) er et koordinatsæt for skæringspunktet H mellem E_2A og CD. Påstanden, at F, G og H ligger på samme linie, følger nu af

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ c & b-1 & c \\ -b & b & c-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Vedrørende sammenhængen mellem projektive og affine koordinatsystemer (jfr. side III,2,18 for tilfældet $n = 1$) bemærkes: I den reelle projektive plan, opstået ved tilføjelse af de uegentlige elementer til den euklidiske plan, vil et projektivt punktkoordinatsystem $(E_0,E_1,E_2;E)$, hvor E_1E_2 er den uegentlige linie, kunne fortolkes som et affint koordinatsystem med begyndelsespunkt E_0 og basisvektorerne $\overrightarrow{E_0E_{01}}$ og $\overrightarrow{E_0E_{02}}$, hvor E_{01} og E_{02} her er parallelprojektionerne af E parallel med henholdsvis E_0E_2 og E_0E_1. Er (x_0,x_1,x_2) et projektivt koordinatsæt for et egentligt punkt, vil $(x_1/x_0,x_2/x_0)$ være dettes affine koordinatsæt, og for punktet med det affine koordinatsæt (ξ_1,ξ_2) er $(1,\xi_1,\xi_2)$ et projektivt koordinatsæt.

Tilsvarende gælder for det reelle tredimensionale projektive rum, når dette betragtes som opstået af det euklidiske rum ved tilføjelse af de uegentlige elementer.

Øvelser til kap.III,§2.

1. Lad L være et endeligt legeme og k dets elementtal. Det n-dimensionale projektive rum over L har da endelig mange punkter. Bestem deres antal N_n (direkte eller ved induktion).
   Bestem antallet af rette linier i det tredimensionale projektive rum over restklasselegemet modulo 2.

2. I et n-dimensionalt projektivt rum Π^n er givet to disjunkte lineære mangfoldigheder Π_1^p og Π_2^q med dimensioner p og q, for hvilke $p + q = n - 1$. Vis, at der gennem hvert punkt i rummet, som ikke ligger på nogen af de to mangfoldigheder, går netop én linie, som skærer dem begge.
   Beskriv de tilfælde, der kan forekomme, når $n = 3$, samt disses duale.
   Formuler den duale til den almene sætning.

3. I et n-dimensionalt projektivt rum Π^n er givet lineære mangfoldigheder Π_0^p, Π_1^q, Π_2^q , hvor der for dimensionerne p og q gælder $p + q = n - 1$, og for hvilke
   $$\Pi_0^p \cap \Pi_1^q = \Pi_0^p \cap \Pi_2^q = \emptyset.$$
   Vis, at $\Pi_0^p + \Pi_1^o$ for hvert punkt $\Pi_1^o \in \Pi_1^q$ har netop ét punkt Π_2^o fælles med Π_2^q , og at der ved $\Pi_1^o \to \Pi_2^o$ defineres en bijektiv afbildning af Π_1^q på Π_2^q. (Projektion eller perspektivitet ud fra Π_0^p.)
   Beskriv de tilfælde, der kan forekomme, når $n = 3$, samt disses duale.
   Formuler den duale til den almene sætning.

4. Find udtrykt ved $\delta = \mathrm{df}(ABCD)$, hvor A,B,C,D er et sæt af indbyrdes forskellige punkter på en projektiv linie, dobbeltforholdene for alle sæt, der fremgår af dette ved permutationer.

5. Ved en (simpel) femkant i en projektiv plan forstås en figur bestående af 5 cyklisk ordnede punkter A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, vinkelspidserne, og 5 linier a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, siderne, således at a_i går gennem de 2 vinkelspidser A_{i-2}, A_{i+2}, som ikke er naboer til A_i. (Herved regnes mærketallene modulo 5.) Det forudsættes, at vinkelspidserne og siderne er indbyrdes forskellige. De skæringspunkter mellem siderne, som ikke er vinkelspidser, kaldes diagonalpunkter og betegnes på nærliggende måde D_{ij}. De forbindelseslinier mellem vinkelspidserne, som ikke er sider, kaldes diagonaler og betegnes d_{ij}. På hver side ligger to vinkelspidser og to diagonalpunkter, og gennem hver vinkelspids går to sider og to diagonaler. Til hvert par A_i, a_i knyttes dobbeltforholdet

$$\delta_i = \mathrm{df}(A_{i-2}A_{i+2}D_{i-2,i}D_{i,i+2}) = \mathrm{df}(d_{i-2,i}d_{i,i+2}a_{i-2}a_{i+2}),$$

hvor $i = 1,\ldots,5$ og der regnes modulo 5.

Vis, at

$$1/\delta_i = (1-1/\delta_{i-1})(1-1/\delta_{i+1})$$

$$\delta_i = (1-\delta_{i-2})(1-\delta_{i+2})$$

(A.F. Möbius, 1827).

6. På den komplekse projektive linie $\Pi^1(\mathbb{C})$ vælges et projektivt koordinatsystem med fundamentalpunkterne E_0, E_1 og enhedspunktet E. Ved til punktet X med koordinatsættet (x_0,x_1) at lade svare det komplekse tal $x = x_1/x_0$, fås en bijektiv afbildning af Π^1 på $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, hvorved der til E_0, E_1 og E svarer henholdsvis $x = 0$, $x = \infty$ og $x = 1$. Den komplekse projektive linie kan altså repræsenteres ved de komplekse tals plan (afsluttet ved tilføjelse af ∞). Til cirklerne i denne plan regnes de rette linier.

Lad der være givet fire indbyrdes forskellige punkter A,B,C,D i Π^1 og lad a,b,c,d være de til disse svarende komplekse tal. Find df(ABCD) udtrykt ved a,b,c,d. Tag også det tilfælde i betragtning, at ét af disse tal er ∞.

Giv en geometrisk fortolkning (i de komplekse tals plan) af $|df(ABCD)|$ og arg df(ABCD). Find geometriske udsagn, der er ensbetydende med, at df(ABCD) 1° er reel, 2° er positiv, 3° er negativ, 4° har absolut værdi 1.

Vis, at to punktpar er harmonisk forbundne, hvis og kun hvis der findes en cirkel gennem det ene pars punkter, som er ortogonal til alle cirkler gennem det andet pars punkter.

Slut deraf: Hvis tre cirkler i den komplekse plan er ortogonale to og to, vil hver af dem skæres af de to andre i harmonisk forbundne punktpar.

Vis, at der til to givne harmoniske punktpar findes netop ét punktpar, som er harmonisk forbundet med hvert af de givne.

7. Idet man opfatter den euklidiske plan som del af den reelle projektive plan, kan man indføre projektive koordinater i den. Man vælger en vilkårlig trekant $E_0E_1E_2$ som fundamentaltrekant og et punkt E uden for siderne som enhedspunkt. Trekantens sidelinier E_1E_2, E_2E_0 og E_0E_1 betegnes henholdsvis e_0, e_1 og e_2. Disses normaler orienteres således, at trekanten kommer til at ligge i sidernes projektive halvplaner. Den med fortegn regnede afstand fra siden e_i til et punkt X betegnes med $\mathrm{dist}(e_i, X)$.
Vis, at

$$\left(\frac{\mathrm{dist}(e_0,X)}{\mathrm{dist}(e_0,E)}, \frac{\mathrm{dist}(e_1,X)}{\mathrm{dist}(e_1,E)}, \frac{\mathrm{dist}(e_2,X)}{\mathrm{dist}(e_2,E)}\right)$$

er et koordinatsæt for punktet X.
Vælges medianernes skæringspunkt som enhedspunkt E, fås "barycentriske koordinater", for hvilke det gælder, at punktet X med et koordinatsæt (x_0, x_1, x_2) er tyngdepunktet for masserne x_0, x_1, x_2 anbragt i punkterne E_0, E_1, E_2. Find barycentriske koordinatsæt for højdernes skæringspunkt H og den omskrevne cirkels centrum C, og vis, at H, C og medianernes skæringspunkt E ligger på ret linie.
Vælges den indskrevne cirkels centrum som enhedspunkt E, fås "trimetriske koordinater". Bevis ved hjælp af sådanne: Hvis tre linier l_0, l_1, l_2, som henholdsvis går gennem vinkelspidsen E_0, E_1, E_2 i en trekant, har et punkt fælles, vil de tre linier, der fås ved spejling af l_1, l_2, l_3 i vinkelhalveringslinien for henholdsvis E_0, E_1, E_2, ligeledes have et punkt fælles.

§3. Koordinattransformationer. Kollineationer og korrelationer.

Lad der være givet to projektive punktkoordinatsystemer

$$(E_0, \ldots, E_n; E) \qquad \text{og} \qquad (\hat{E}_0, \ldots, \hat{E}_n; \hat{E})$$

i et projektivt rum Π^n. Er $(x_0, \ldots, x_n)$ et koordinatsæt for et punkt X med hensyn til det første og $(\hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_n)$ et koordinatsystem, foreligger opgaven at finde sammenhængen mellem disse koordinatsæt. Til dette formål vælges sæt af repræsentanter $\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_n, \underline{e}$ og $\underline{\hat{e}}_0, \ldots, \underline{\hat{e}}_0, \ldots, \underline{\hat{e}}_n, \underline{\hat{e}}$ for de to koordinatsystemer. Idet vektorerne $x_0\underline{e}_0 + \ldots + x_n\underline{e}_n$ og $\hat{x}_1\underline{\hat{e}}_0 + \ldots + \hat{x}_n\underline{\hat{e}}_n$ repræsenterer samme punkt, må der findes et element $\rho \neq 0$ i L (som kan afhænge af $(x_0, \ldots, x_n)$), således at

$$\hat{x}_0\underline{\hat{e}}_0 + \ldots + \hat{x}_n\underline{\hat{e}}_n = (x_1\underline{e}_1 + \ldots + x_n\underline{e}_n)$$

eller på matrixform

$$(\underline{\hat{e}}_0 \ldots \underline{\hat{e}}_n)\underline{\underline{\hat{x}}}| = \rho(\underline{e}_0 \ldots \underline{e}_n)\underline{\underline{x}}| .$$

Endvidere findes der en og kun én $((n+1)\times(n+1))$-matrix $\underline{\underline{S}}$, således a

$$(\underline{e}_0 \ldots \underline{e}_n) = (\underline{\hat{e}}_0 \ldots \underline{\hat{e}}_n)\underline{\underline{S}}.$$

Denne matrix er regulær; dens søjler er koordinatsættene for vektorerne $\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_n$ med hensyn til basen $(\underline{\hat{e}}_0, \ldots, \underline{\hat{e}}_n)$. Ved at indsætte og benytte, at $\underline{\hat{e}}_0, \ldots, \underline{\hat{e}}_n$ er lineært uafhængige, fås

$$\underline{\underline{\hat{x}}}| = \rho\underline{\underline{S}}\underline{\underline{x}}| ,$$

hvilket er den søgte relation. Den j-te søjle i $\underline{\underline{S}}$ er et projektivt koordinatsæt for Ej med hensyn til koordinatsystemet $(\hat{E}_0, \ldots, \hat{E}_n; \hat{E})$.

Matricen $\underline{\underline{S}}$ afhænger af valget af repræsentantsættene $(\underline{e}_0, \ldots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{\hat{e}}_0, \ldots, \underline{\hat{e}}_n)$. Men da hvert af disse sæt er bestemt på nær en (for sættet fælles) skalær faktor, når de to projektive koordinatsystemer er givet, er koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$ også bestemt på nær en sådan faktor.

Omvendt, til hver regulær $((n+1)\times(n+1))$-matrix $\underline{\underline{S}}$ findes der projektive koordinatsystemer $(E_o, \ldots, E_n; E)$ og $(\hat{E}_o, \ldots, \hat{E}_n; \hat{E})$, således at $\underline{\underline{S}}$ er en tilhørende koordinattransformationsmatrix. Lad nemlig $(\hat{E}_o, \ldots, \hat{E}_n; \hat{E})$ være vilkårligt givet. Man vælger repræsentanter $\hat{\underline{e}}_o, \ldots, \hat{\underline{e}}_n$ for $\hat{E}_o, \ldots, \hat{E}_n$, således at $\hat{\underline{e}}_o + \ldots + \hat{\underline{e}}_n$ er en repræsentant for $\hat{E}$, og bestemmer vektorerne $\underline{e}_o, \ldots, \underline{e}_n$ ved

$$(\underline{e}_o \ldots \underline{e}_n) = (\hat{\underline{e}}_o \ldots \hat{\underline{e}}_n)\underline{\underline{S}}.$$

Disse vektorer samt $\underline{e} = \underline{e}_o + \ldots + \underline{e}_n$ repræsenterer da punkter $E_o, \ldots, E_n, E$, der danner et projektivt koordinatsystem, som sammen med det givne opfylder det stillede krav. De med $\underline{\underline{S}}$ proportinale matricer fører fra $(\hat{E}_o, \ldots, \hat{E}_n; \hat{E})$ til samme system $(E_o, \ldots, E_n; E)$.

Lad der være givet to projektive punktkoordinatsystemer $(E_o, \ldots, E_n; E)$ og $(\hat{E}_o, \ldots, \hat{E}_n; \hat{E})$, og lad $\underline{\underline{S}}$ være en tilhørende koordinattransformationsmatrix. Til hvert af systemerne er knyttet et hyperplankoordinatsystem. Lad $\underline{\underline{u}}_-$ og $\hat{\underline{\underline{u}}}_-$ være koordinatrækker, altså

$$\underline{\underline{u}}_- \underline{\underline{x}}_| = 0, \qquad \hat{\underline{\underline{u}}}_- \hat{\underline{\underline{x}}}_| = 0$$

ligninger for en hyperplan U^* med hensyn til de to koordinatsystemer. Idet $\hat{\underline{\underline{x}}}_| = \rho \underline{\underline{S}}\underline{\underline{x}}_|$, fås ved indsættelse i den anden ligning og benyttelse af $\rho \neq 0$

$$\hat{\underline{\underline{u}}}_- \underline{\underline{S}}\underline{\underline{x}}_| = 0$$

for alle $\underline{\underline{x}}_|$, som er koordinatsæt for punkter i U^*, som altså tilfredsstiller den første ligning. Dette betyder, at nulrummet U^* for linearformen $\underline{\underline{u}}_- \underline{\underline{x}}_|$ er indeholdt i nulrummet for linearformen $\hat{\underline{\underline{u}}}_- \underline{\underline{S}}\underline{\underline{x}}_|$, men da denne er forskellig fra nulformen ($\hat{\underline{\underline{u}}}_- \neq \underline{\underline{0}}_-$ og $\underline{\underline{S}}$ regulær), må nulrummene stemme overens, d.v.s. $\hat{\underline{\underline{u}}}_- \underline{\underline{S}}\underline{\underline{x}}_| = 0$ er også en ligning for U^*. Heraf følger, at de to linearformer er proportionale. Der findes altså et $\sigma \neq 0$ i L, således at

$$\hat{\underline{\underline{u}}}_- \underline{\underline{S}} = \sigma \underline{\underline{u}}_-.$$

Heraf fås

$$\hat{\underline{\underline{u}}}_- = \sigma \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{u}}_-$$

eller i transponeret form

$$\hat{\underline{\underline{u}}}_| = \sigma \underline{\underline{S}}'^{-1} \underline{\underline{u}}_| ,$$

Idet man kalder den transponerede inverse til en regulær matrix dennes kontragrediente, plejer man at formulere det fundne resultat kort således: Ved overgangen fra et par af sammenhørende punkt- og hyperplankoordinatsystemer til et andet transformeres hyperplankoordinater kontragredient til punktkoordinater.

Som simpel anvendelse af koordinattransformation udledes et udtryk for dobbeltforholdet df(ABCD) af et punktsæt (A,B,C,D) på en projektiv linie, når der er givet koordinatsæt for punkterne med hensyn til et vilkårligt projektivt koordinatsystem på linien.

Det antages, at A, B og C er indbyrdes forskellige. Med hensyn til koordinatsystemet $(E_0,E_1;E)$, hvor $E_0 = A$, $E_1 = B$ og $E = C$, er $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ og (ρ,σ), hvor $\rho/\sigma = \mathrm{df}(ABCD)$, koordinatsæt for henholdsvis A, B, C, og D. Lad (a_0,a_1), (b_0,b_1), (c_0,c_1) og (d_0,d_1) være koordinatsæt for disse punkter med hensyn til et andet koordinatsystem $(\hat{E}_0,\hat{E}_1;\hat{E})$ på linien. Betegnes en til overgangen fra $(E_0,E_1;E)$ til $(\hat{E}_0\hat{E}_1;\hat{E})$ hørende koordinattransformationsmatrix med $\underline{\underline{S}}$, gælder

$$\tau_1 \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \tau_2 \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\tau_3 \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \tau_4 \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix} ,$$

hvor τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 betegner visse fra 0 forskellige elementer af L. Det drejer sig om at finde ρ/σ udtrykt ved

$a_o\ a_1\ b_o, \ldots, d_1$. Af den sidste ligning fås

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix} = \tau_4 \underline{\underline{S}}^{-1} \begin{pmatrix} d_o \\ d_1 \end{pmatrix},$$

og de tre første benyttes til bestemmelse af $\underline{\underline{S}}$ på nær en skalær faktor. Af de to første ligninger sluttes, at

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \tau_1 a_o & \tau_2 b_o \\ \tau_1 a_1 & \tau_2 b_1 \end{pmatrix}$$

i overensstemmelse med, at søjlerne i $\underline{\underline{S}}$ er koordinatsæt for $E_o = A$ og $E_1 = B$ med hensyn til $(\hat{E}_o, \hat{E}_1; \hat{E})$.
Dette giver

$$\underline{\underline{S}}^{-1} = \tau_5 \begin{pmatrix} \tau_2 b_1 & -\tau_2 b_o \\ -\tau_1 a_1 & \tau_1 a_o \end{pmatrix},$$

hvor $1/\tau_5 = \tau_1\tau_2(a_o b_1 - a_1 b_o) \neq 0$. Af den tredie af ovenstående fire matrixligninger fås

$$\tau_1 a_o + \tau_2 b_o = \tau_3 c_o,$$
$$\tau_1 a_1 + \tau_2 b_1 = \tau_3 c_1,$$

altså for et vist $\tau_6 \neq 0$, nemlig $-\tau_3(a_o b_1 - a_1 b_o)^{-1}$,

$$\tau_1 = \tau_6 \begin{vmatrix} b_o & c_o \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \qquad \tau_2 = -\tau_6 \begin{vmatrix} a_o & c_o \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix},$$

så at

$$\underline{\underline{S}}^{-1} \begin{pmatrix} d_o \\ d_1 \end{pmatrix} = \tau_5\tau_6 \begin{pmatrix} -b_1 \begin{vmatrix} a_o & c_o \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} & b_o \begin{vmatrix} a_o & c_o \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \\ -a_1 \begin{vmatrix} b_o & c_o \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} & a_1 \begin{vmatrix} b_o & c_o \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_o \\ d_1 \end{pmatrix}$$

$$= \tau_5\tau_6 \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Heraf fås for dobbeltforholdet ρ/σ

$$df(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}$$

Benyttes de inhomogene koordinater $a = a_0/a_1$, $b = b_0/b_1$, $c = c_0/c_1$, $d = d_0/d_1$, som er elementer af det udvidede legeme L (jfr side III, 2, 13), kan udtrykket skrives

$$df(ABCD) = \frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b} .$$

Ved en lineær afbildning f af et vektorrum V_{n+1} ind i et vektorrum V'_{m+1} svarer der til det af en vektor $\underline{x} \neq \underline{0}$ frembragte 1-dimensionale underrum af V_{n+1} det af $f(\underline{x})$ frembragte underrum af V'_{m+1}. Dette er 1- eller 0-dimensionalt, efter som $f(\underline{x}) \neq \underline{0}$ eller $f(\underline{x}) = \underline{0}$, altså efter som $\underline{x}$ ikke tilhører eller tilhører kernen K for f. Hvis $K = \{\underline{0}\}$, dvs. hvis f er injektiv (hvilket kræver $m \geq n$), svarer der til hvert 1-dimensionalt underrum af V_{n+1} et 1-dimensionalt underrum af V'_{m+1}. Afbildningen $f: V_{n+1} \to V'_{m+1}$ "inducerer" da altså en injektiv afbildning φ af det ved V_{n+1} bestemte projektive rum Π^n ind i det ved V'_{m+1} bestemte projektive rum Π'^m.

Af egenskaber ved lineære afbildninger sluttes, at hver lineær mangfoldighed i Π^n afbildes på en lineær mangfoldighed af samme dimension i Π'^m, og at der til et snit eller en sum af lineære mangfoldigheder svarer henholdsvis billedmangfoldighedernes snit eller sum. Specielt gælder, at punkter på en ret linie afbildes i punkter på en ret linie. Er A, B, C, D fire punkter på en linie i Π^n, hvoraf mindst tre, f.eks. A, B, C, er indbyrdes forskellige, og er $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ sådanne repræsentanter for dem, at

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}, \qquad \underline{d} = \rho\underline{a} + \sigma\underline{b},$$

fås

$$f(\underline{c}) = f(\underline{a}) + f(\underline{b}), \qquad f(\underline{d}) = \rho f(\underline{a}) + \sigma f(\underline{b}).$$

Idet $f(\underline{a})$, $f(\underline{b})$, $f(\underline{c})$, $f(\underline{d})$ er repræsentanter for $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$, viser dette, at

$$df(\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)) = df(A\ B\ C\ D),$$

dvs. at dobbeltforholdet bevares ved afbildningen φ.

Idet billedrummet $f(V_{n+1})$ betegnes med V'_{n+1} og det ved dette bestemte projektive rum med Π'^n, kan man altså sige, at hver bijektiv lineær afbildning f af et (n+1)-dimensionalt vektorrum V_{n+1} på et (n+1)-dimensionalt vektorrum V'_{n+1} inducerer en afbildning φ af de tilhørende projektive rum med følgende egenskaber:

Afbildningen $\varphi : \Pi^n \to \Pi'^n$ er bijektiv. Til punkter på en linie svarer punkter på en linie, og dobbeltforholdet af fire punkter på en linie er lig med billedpunkternes dobbeltforhold.

Enhver afbildning af et projektivt rum på et projektivt rum (nødvendigvis af samme dimension) med disse egenskaber kaldes en <u>projektiv kollineation</u>.

Det følgende går bl.a. ud på at vise, at hver projektiv kollineation induceres af en bijektiv lineær afbildning af de vektorrum, som bestemmer de projektive rum.

Lad der være givet en projektiv kollineation $\psi:\Pi^n \to \Pi'^n$. Er A, B, C forskellige punkter på en linie l i Π^n, vil deres billedpunkter $A' = \psi(A)$, $B' = \psi(B)$, $C' = \psi(C)$ være forskellige og ligge på en linie l' i Π'^n. Idet der ved $P \to df(ABCP)$ bestemmes en enentydig korrespondance mellem mængden at punkter P på l og det udvidede legeme $\bar{L}_*$ og idet det tilsvarende gælder for l', medfører dobbeltforholdets invarians ved ψ, at l afbildes på hele linien l'. Da ψ er bijektiv, følger videre, at ikke noget punkt uden for l kan have sit billede på l', og heraf, at originalpunkterne til punkter på en linie i Π'^n må ligge på en linie i Π^n.

Dernæst bevises, at hver lineær mangfoldighed $\Pi^r \subseteq \Pi^n$ afbildes ved ψ på en lineær mangfoldighed $\Pi'^r \subseteq \Pi'^n$ af samme dimension r. Hertil bemærkes følgende: Er Π^{r-1} en (r-1)-dimensional lineær mangfoldighed i Π^r og P et punkt uden for denne, men i Π^r, vil Π^r være foreningsmængden af alle linier, der forbinder P med et punkt af Π^{r-1}. For hvert fra P forskelligt punkt $Q \in \Pi^r$ vil nemlig linien $\Pi^1 = PQ$ skære Π^{r-1}, idet dimensionsformlen og $\Pi^{r-1} + \Pi^1 = \Pi^r$ giver

$$\dim(\Pi^{r-1} \cap \Pi^1) = r - 1 + 1 - \dim(\Pi^{r-1} + \Pi^1) = 0.$$

Påstanden, at billedet af Π^r er en r-dimensional lineær mangfoldighed i Π'^n, kan nu bevises ved induktion. For 1-dimensionale mangfoldigheder, dvs. linier er den blevet bevist. Antag, at den er rigtig for (r-1)-dimensionale lineære mangfoldigheder. I Π^r vælges Π^{r-1} og et punkt P som angivet. Ifølge induktionsantagelsen afbildes Π^{r-1} på en (r-1)-dimensional lineær mangfoldighed $\Pi'^{r-1} \subseteq \Pi'^n$. Punktet P uden for Π^{r-1} må da som billede have et punkt P', som ligger uden for Π'^{r-1}, idet ψ er bijektiv. Linierne, der forbinder P med punkterne i Π^{r-1}, afbildes på linierne, der forbinder P' med punkterne i Π'^{r-1}. Idet disse liniers foreningsmængde er en r-dimensional lineær mangfoldighed i Π'^{r-1}, er påstanden bevist.

Af det viste sluttes videre, at lineært uafhængige punkter afbildes ved ψ på lineært uafhængige punkter, med andre ord, at lineært afhængige punkter i Π'^n har lineært afhængige originalpunkter i Π^n. Dette følger simpelthen af, at den af punkter i Π'^n udspændte lineære mangfoldighed har som originalmængde en lineær mangfoldighed af samme dimension.

I Π^n vælges et koordinatsystem $(E_o,\ldots,E_n;E)$. Det afbildes ved ψ på et koordinatsystem $(E'_o,\ldots,E'_n;E')$ i Π'^n. Lad X være et vilkårligt punkt i Π^n og $(x_o,\ldots,x_n)$ et koordinatsæt for det med hensyn til $(E_o,\ldots,E_n;E)$. Det påstås, at billedpunktet $X' = \psi(X)$ har $(x_o,\ldots,x_n)$ som koordinatsæt med hensyn til $(E'_o,\ldots,E'_n;E')$. Beviset herfor kan føres således: En side af fundamentalsimplexet $(E_o,\ldots,E_n)$, som udspændes af visse af dets hjørner, afbildes på den side af fundamentalsimplexet $(E'_o,\ldots,E'_n)$, som udspændes af de af dettes hjørner, der har de samme numre. Antag først, at X ikke ligger på nogen af siderne af fundamentalsimplexet $(E_o,\ldots,E_n)$. Med E_{ij} og X_{ij} betegnes projektionerne af E og X på kanten E_iE_j fra dennesmodstående (n-2)-dimensionale side. Billedpunkterne $\psi(E_{ij})$ og $\psi(X_{ij})$ er da projektionerne E'_{ij} X'_{ij} af E' og X' på kanten $E'_iE'_j$ fra dennes modstående (n-2)-dimensionale side i fundamentalsimplexet $(E'_o,\ldots,E'_n)$. Der gælder altså

$$\mathrm{df}(E_iE_jE_{ij}X_{ij}) = \mathrm{df}(E'_iE'_jE'_{ij}X'_{ij}).$$

Idet $\mathrm{df}(E_iE_jE_{ij}X_{ij}) = x_i/x_j$ og $\mathrm{df}(E'_iE'_jE'_{ij}X'_{ij}) = x'_i/x'_j$, hvor $(x'_o,\ldots,x'_n)$ betegner et koordinatsæt for X' med hensyn til $(E'_o,\ldots,E'_n;E')$, gælder altså $x_i/x_j = x'_i/x'_j$ for alle par (i,j), $i \neq j$. Dette viser påstandens rigtighed, når X ikke ligger på nogen side af simplexet $(E_o,\ldots,E_n)$. Ligger X på en af siderne, anvendes det allerede beviste på restriktionen af ψ til den af siderne indeholdende X, der har lavest dimension.

Dette viser, at en projektiv kollineation $\psi:\Pi^n \to \Pi'^n$ er entydig bestemt, når billedet af et koordinatsystem er givet. Vi har derfor bevist entydighedspåstanden i "projektivgeometriens fundamentalsætning":

Lad Π^n og Π'^n være projektive rum af samme dimension n og over det samme legeme, og lad der være givet n+2 punkter $P_o,\ldots,P_{n+1}$ i Π^n, således at hvilkesomhelst n+1 af dem er lineært uafhængige, samt n+2 punkter $P'_o,\ldots,P'_{n+1}$, således at hvilkesomhelst n+1 af dem er lineært uafhængige. Der findes da højst én projektiv kollineation $\psi:\Pi^n \to \Pi'^n$, således at $\psi(P_\nu) = P'_\nu$ for $\nu = 0,\ldots,n+1$.

Eksistensen følger af, at der findes en lineær afbildning $f:V_{n+1} \to V'_{n+1}$ af de vektorrum, der bestemmer Π^n og Π'^n, som inducerer en projektiv kollineation φ af den forlangte art. Er nemlig $\underline{p}_o,\ldots,\underline{p}_n$ og

$$\underline{p}_{n+1} = \underline{p}_o + \cdots + \underline{p}_n$$

repræsentanter for $P_o,\ldots,P_{n+1}$, og er $\underline{p}'_o,\ldots,\underline{p}'_n$ og

$$\underline{p}'_{n+1} = \underline{p}'_o + \cdots + \underline{p}'_n$$

repræsentanter for $P'_o,\ldots,P'_{n+1}$, findes der en (og kun én) lineær afbildning $f:V_{n+1} \to V'_{n+1}$, således at

$$f(\underline{p}_o) = \underline{p}'_o, \quad \ldots \quad , f(\underline{p}_n) = \underline{p}'_n.$$

Da

$$f(\underline{p}_{n+1}) = f(\underline{p}_o) + \cdots + f(\underline{p}_n) = p'_{n+1},$$

har f de ønskede egenskaber.

I forbindelse med den viste entydighed fremgår heraf, at hver projektiv kollineation $\varphi : \Pi^n \to \Pi'^n$ induceres af en lineær afbildning $f: V_{n+1} \to V'_{n+1}$. Lad der være valgt vilkårlige projektive koordinatsystemer $(E_0,\dots,E_n;E)$ og $(F_0,\dots,F_n;F)$ i henholdsvis Π^n og Π'^n, og lad $\underline{e}_0,\dots,\underline{e}_n$ og $\underline{f}_0,\dots,\underline{f}_n$ være sådanne repræsentanter for henholdsvis $E_0,\dots,E_n$ og $F_0,\dots,F_n$, at

$$\underline{e} = \underline{e}_0 + \dots + \underline{e}_n, \qquad \underline{f} = \underline{f}_0 + \dots + \underline{f}_n$$

er repræsentanter for E og F. Idet $(\underline{e}_0,\dots,\underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_0,\dots,\underline{f}_n)$ vælges som baser for V_{n+1} og V'_{n+1}, hører der til den lineære afbildning f en matrixligning $\underline{y}_| = \underline{\underline{A}}\underline{x}_|$, hvor søjlerne i $((n+1) \times (n+1))$-matricen

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,n+1}$$

er koordinatsættene for vektorerne $f(\underline{e}_0),\dots,f(\underline{e}_n)$ med hensyn til basen $(\underline{f}_0,\dots,\underline{f}_n)$. Fortolkes $\underline{x}_|$ som et koordinatsæt for et punkt X i Π^n, vil $\underline{y}_| = \underline{\underline{A}}\underline{x}_|$ være et koordinatsæt for punktet $Y' = \varphi(X)$ i Π'^n. Man kan derfor opfatte $\underline{y}_| = \underline{\underline{A}}\underline{x}_|$ som en matrixligning for den projektive kollineation φ. Den er imidlertid ikke entydig bestemt ved de to projektive koordinatsystemer og afbildningen φ. For det første bestemmer hvert af de to projektive koordinatsystemer den pågældende basis kun på nær en fra 0 forskellig faktor fra L. Dette medfører, at matricen $\underline{\underline{A}}$ kun er bestemt på nær en fra 0 forskellig faktor fra L. For det andet kan hvert af koordinatsættene $\underline{x}_|$ og $\underline{y}_|$ erstattes med et proportionalt. I alt kan altså siges, at enhver ligning af formen $\underline{y}_| = \rho\,\underline{\underline{A}}\underline{x}_|$, hvor ρ er en vilkårlig funktion af $\underline{x}_|$ med værdier i $L \setminus \{0\}$, er en matrixligning for den projektive kollineation φ med hensyn til de to valgte koordinatsystemer.

Er den projektive kollineation φ bestemt ved, at koordinatsæt $\underline{p}_{|0},\dots,\underline{p}_{|n}$, $\underline{p}_|$ for billedpunkterne $P'_0 = \varphi(E_0), \dots , P'_n =$

$\varphi(E_n)$, $P' = \varphi(E)$ med hensyn til koordinatsystemet $(F_o,\dots,F_n;F)$ er givet, kan en tilhørende matrix $\underline{\underline{A}}$ bestemmes på følgende måde: Søjlerne i $\underline{\underline{A}}$ må være koordinatsæt for punkterne $P'_o,\dots,P'_n$, altså af formen $\lambda_o\underline{p}|_o,\dots,\lambda_n\underline{p}|_n$, hvor $\lambda_o,\dots,\lambda_n$ er fra 0 forskellige elementer af L. Disse må bestemmes således, at der til koordinatsættet $(1,\dots,1)$ for E svarer et koordinatsæt for $P' = \varphi(E)$, altså et med $\underline{p}|$ proportionalt sæt $\mu\underline{p}|$, $\mu \in L$, $\mu \neq 0$. Dette går ud på, at der for $\lambda_o,\dots,\lambda_n$ gælder

$$\lambda_o\underline{p}|_o + \dots + \lambda_n\underline{p}|_n = \mu\,\underline{p}|.$$

For et vilkårligt valgt $\mu \neq 0$, kan dette opfattes som et inhomogent lineært ligningssystem med regulær koefficientmatrix til bestemmelse af $\lambda_o,\dots,\lambda_n$. I løsningen er alle λ_i forskellige fra 0, idet hvilkesomhelst n+1 af søjlerne $\underline{p}|_o,\dots,\underline{p}|_n,\underline{p}|$ er lineært uafhængige. Matricen $\underline{\underline{A}}$ med søjlerne $\lambda_o\underline{p}|_o,\dots,\lambda_n\underline{p}|_n$, hvor $(\lambda_o,\dots,\lambda_n)$ er løsningen, hører da til den projektive kollineation φ.

Omvendt, lad der være givet en regulær $((n+1) \times (n+1))$-matrix $\underline{\underline{A}}$. Lader man til et punkt $X \in \Pi^n$, for hvilket $\underline{x}|$ er et koordinatsæt med hensyn til $(E_o,\dots,E_n;E)$, svare punktet $Y \in \Pi'^n$, for hvilket $\underline{y}| = \underline{\underline{A}}\underline{x}|$ er et koordinatsæt med hensyn til $(F_o,\dots,F_n;F)$, fås en afbildning $\varphi: \Pi^n \to \Pi'^n$. Denne er en projektiv kollineation, idet den induceres af den lineære afbildning $f: V_{n+1} \to V'_{n+1}$, hvis matrixligning med hensyn til de ovenfor indførte baser $(\underline{e}_o,\dots,\underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_o,\dots,\underline{f}_n)$ er $\underline{y}| = \underline{\underline{A}}\underline{x}|$.

Vælges specielt billedet $(E'_o,\dots,E'_n;E')$ af koordinatsystemet $(E_o,\dots,E_n;E)$ ved den projektive kollineation φ som koordinatsystem i Π'^n, vil $\underline{\underline{E}}$ være den tilhørende matrix, hvilket er i overensstemmelse med et tidligere resultat (side III, 3, 8).

Indføres i Π^n og Π'^n nye koordinatsystemer $(\hat{E}_o,\dots,\hat{E}_n;\hat{E})$ og

$(\hat{F}_0,\ldots,\hat{F}_n;\hat{F})$ i stedet for $(E_0,\ldots,E_n;E)$ og $(F_0,\ldots,F_n;F)$ og er $\underline{\underline{S}}$ og $\underline{\underline{T}}$ tilhørende koordinattransformationsmatricer, vil $\underline{\underline{TAS}}^{-1}$ være en til φ hørende matrix med hensyn til de nye systemer, når $\underline{\underline{A}}$ er en med hensyn til de oprindelige.

En projektiv kollineation $\varphi : \Pi^n \to \Pi'^n$ bestemmer tillige en afbildning af mængden af hyperplaner i Π^n ind i mængden af hyperplaner i Π'^n; thi, som vist ovenfor, afbildes mængden af punkter i en hyperplan på mængden af punkter i en hyperplan. Denne afbildning φ^* har egenskaber, der en duale til en projektiv kollineations egenskaber: Den er bijektiv, hyperplaner tilhørende et bundt afbildes på hyperplaner tilhørende et bundt, og dobbeltforholdet af fire hyperplaner i et bundt er lig med billedhyperplanernes dobbeltforhold. Dette vil fremgå af, at φ^* med hensyn til hyperplankoordinatsystemer i Π^n og Π'^n har en matrixligning af samme art som φ har med hensyn til punktkoordinatsystemer.

Lad der i hvert af de projektive rum Π^n og Π'^n være givet et punktkoordinatsystem og det med dette sammenhørende hyperplankoordinatsystem. Med $\underline{\underline{u}}_|$ betegnes et koordinatsæt for en vilkårlig hyperplan i Π^n og med $\underline{\underline{v}}_|$ et koordinatsæt for billedhyperplanen ved φ^*. Er $\underline{\underline{y}}_| = \rho\, \underline{\underline{Ax}}_|$ en matrixligning for φ med hensyn til de valgte koordinatsystemer, har man

$$\underline{\underline{v}}_-\underline{\underline{y}}_| = \rho\, \underline{\underline{v}}_-\underline{\underline{Ax}}_| = 0$$

for alle $\underline{\underline{x}}_|$, som tilfredsstiller $\underline{\underline{u}}_-\underline{\underline{x}}_| = 0$. Idet $\rho \neq 0$, kan dette også formuleres således: Kernen for linearformen $\underline{\underline{u}}_-\underline{\underline{x}}_|$ i L^{n+1} (med $\underline{\underline{x}}_|$ som variabel) er indeholdt i kernen for linearformen $\underline{\underline{v}}_-\underline{\underline{Ax}}_|$. Men denne sidste er ikke nulformen, idet $\underline{\underline{v}}_- \neq \underline{\underline{0}}_-$ og $\underline{\underline{A}}$ er regulær. Følgelig er begge kerner n-dimensionale underrum af L^{n+1}

og derfor identiske. Dette medfører, at de to linearformer er proportionale. For hvert sæt $\underline{\underline{u}}$ findes altså et fra 0 forskelligt $\sigma \in L$, således at

$$\sigma \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{v}},$$

altså

$$\underline{\underline{v}} = \sigma \underline{\underline{A}}'^{-1} \underline{\underline{u}}.$$

Dermed er vist, at hyperplanafbildningen φ^* har matrixligninger af samme form som den projektive kollineation φ. I stedet for matricen $\underline{\underline{A}}$ træder den kontragrediente $\underline{\underline{A}}'^{-1}$.

Ifølge dualitetsprincippet kunne man også gå ud fra en hyperplanafbildning med de ovenfor nævnte, til en projektiv kollineations duale egenskaber og dertil bestemme en punktafbildning.

Det er undertiden hensigtsmæssigt ved en projektiv kollineation at forstå et par af sammenhørende afbildninger af den beskrevne art.

Lad Π^n og Π'^n være to forskellige hyperplaner i et (n+1)-dimensionalt projektivt rum Π^{n+1} og Π^o et punkt uden for begge. Projektionen fra Π^o af Π^n på Π'^n er ifølge tidligere resultater (side III, 2, 6-7 og 17) en projektiv kollineation, og dens restriktion til den (n-1)-dimensionale lineære mangfoldighed $\Pi^n \cap \Pi'^n$ er den identiske afbildning. Med henblik på en senere anvendelse bevises følgende omvendte sætning:

<u>Lad Π^n og Π'^n være forskellige hyperplaner i et (n+1)-dimensionalt projektivt rum og $\varphi: \Pi^n \to \Pi'^n$ en projektiv kollineation. Hvis restriktionen af φ til $\Pi^n \cap \Pi'^n$ er den identiske afbildning, da er φ en projektion fra et punkt.</u>

Bevis: I Π^n vælges n + 2 punkter $P_o,\ldots,P_{n+1}$ således at hvilkesomhelst $n + 1$ af dem er lineært uafhængige, og således at $P_o, \dots, P_{n-1}$ ligger i den $(n-1)$-dimensionale lineære mangfoldighed $\Pi^n \cap \Pi'^n$. Hvert af disse n punkter afbildes ved φ på sig selv, medens $P'_n = \varphi(P_n) \neq P_n$ og $P'_{n+1} = \varphi(P_{n+1}) \neq P_{n+1}$. Linien $P_n P_{n+1}$ skærer $\Pi^n \cap \Pi'^n$ i et punkt Q, og dens billede $P'_n P'_{n+1}$ går også gennem Q, idet $\varphi(Q) = Q$. De to linier ligger altså i en plan, og dette medfører, at linierne $P_n P'_n$ og $P_{n+1} P'_{n+1}$ skærer hinanden i et punkt Π^o. Ved projektionen fra dette punkt afbildes hvert punkt af $\Pi^n \cap \Pi'^n$, altså specielt hvert af punkterne $P_o, \dots, P_{n-1}$, på sig selv, P_n på P'_n og P_{n+1} på P'_{n+1}. Punkterne $P_o, \dots, P_{n+1}$ har altså de samme billeder ved projektionen som ved φ. Ifølge fundamentalsætningen må de to afbildninger stemme overens.

Det fremgår umiddelbart af definitionen, at en af to projektive kollineationer sammensat afbildning ligeledes er en projektiv kollineation. Endvidere sluttes af tidligere udledte egenskaber (side IV, 3, 7-8) eller af matrixfremstillingen (side III, 3, 10), at en projektiv kollineations inverse afbildning er en projektiv kollineation.

Man kan vise, at hver projektiv kollineation $\varphi: \Pi^n \to \Pi'^n$, hvor Π^n og Π'^n er lineære mangfoldigheder i samme projektive rum, kan sammensættes af projektioner. I det specielle tilfælde, hvor Π^n og Π'^n er linier i samme plan, kan beviset føres på følgende måde:

Lad l og l' være linier i en projektiv plan Π^2 og $\varphi: l \to l'$ en <u>projektivitet</u> (en glose, der bruges i stedet for "projektiv kollineation", når talen er om afbildninger af en linie på en linie). Først antages, at $l \neq l'$. Skæringspunktet mellem l og l' betegnes S. Hvis $\varphi(S) = S$, er φ en projektion ifølge ovenstående sætning.

Hvis $\varphi(S) \neq S$, vælges et fra S forskelligt punkt A på l, for hvilket $A' = \varphi(A) \neq S$. Gennem A' lægges en fra l' forskellig linie m, og på linien AA' vælges et fra A og A' forskelligt punkt C. Med ψ betegnes projektionen af l på m fra C. Idet $\psi(A) = A'$, vil $\varphi \circ \psi^{-1}: m \to l'$ være en projektivitet, ved hvilken skæringspunktet A' mellem m og l' afbildes på sig selv. Den er altså ifølge ovenstående sætning en projektion fra et vist punkt. Heraf følger, at φ kan fås som sammensætning af to projektioner. Er $l = l'$, men φ ikke den identiske afbildning, sammensættes φ med en projektion χ af l' på en fra $l = l'$ forskellig linie l". Afbildningen $\chi \circ \varphi: l \to l''$ kan ifølge det viste sammensættes af højst to projektioner, altså φ af højst tre. Dermed er vist, at hver projektivitet kan sammensættes at højst tre projektioner.

I det følgende betragtes projektive kollineationer af et n-dimensionalt projektivt rum $\Pi^n(L)$ på sig selv. Det fremgår af det sagte, at de danner en transformationsgruppe. Den kaldes den <u>projektive gruppe</u> af $\Pi^n(L)$ og betegnes PGL(n,L). Efter F. Klein (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, det såkaldte <u>Erlanger Programm</u>, 1872) kan den projektive geometri karakteriseres som studiet af de egenskaber ved figurer i et projektivt rum, som bevares ved den projektive gruppes transformationer.

Lad $(V_{n+1},+,L)$ være vektorrummet, der bestemmer $\Pi^n(L)$. Ved til hver lineær transformation $f: V_{n+1} \to V_{n+1}$ at lade svare den inducerede projektive kollineation $\varphi: \Pi^n \to \Pi^n$ fås en afbildning Φ af gruppen GL(n+1,L) af lineære transformationer af V_{n+1} på den projektive gruppe PGL(n,L). Det er klart, at Φ er en homomorfi. Dennes kerne består af alle lineære transformationer, der inducerer den identiske afbildning af Π^n, dvs. de lineære transformationer, ved hvilke hvert endimensionalt underrum af V_{n+1} afbildes på sig selv. Ved en sådan lineær transformation f er enhver vektor $\underline{u} \neq \underline{0}$ af V_{n+1} egenvektor, ogdette medfører, at f er en homoteti (multiplikation med et fast tal $\mu \in L$, som må være forskelligt fra 0, idet f er bijektiv). Fandtes der nemlig to fra $\underline{0}$ forskellige vektorer $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$, for hvilke

$$f(\underline{u}_1) = \mu_1\underline{u}_1, \quad f(\underline{u}_2) = \mu_2\underline{u}_2, \qquad \mu_1 \neq \mu_2,$$

ville $\underline{u}_1 + \underline{u}_2$ ikke være egenvektor, fordi

$$f(\underline{u}_1+\underline{u}_2) = \mu_1\underline{u}_1 + \mu_2\underline{u}_2$$

på grund af den lineære uafhængighed af $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$ ikke kunne være proportional med $\underline{u}_1 + \underline{u}_2$. Kernen for homomorfien Φ er altså den med $(L\setminus\{0\},\cdot)$ isomorfe gruppe $H(n+1,L)$ af alle homotetier af V_{n+1} med fra 0 forskellige faktorer $\mu \in L$. Den projektive gruppe $PGL(n,L)$ er følgelig isomorf med faktorgruppen $GL(n+1,L)/H(n+1,L)$.

Dette resultat fås også på simpel måde ved at betragte matricerne, der hører til afbildningerne efter valg af en basis for V_{n+1} og dermed af et projektivt koordinatsystem i Π^n. Til hver lineær transformation af V_{n+1} hører en og kun èn regulær $((n+1) \times (n+1))$-matrix $\underline{\underline{A}}$. Gruppen $GL(n,L)$ er isomorf med (oprindelig endda defineret som) gruppen af disse matricer med matrixmultiplikation som komposition. Hver matrix $\underline{\underline{A}}$ bestemmer en projektiv kollineation, og matricerne $\mu\underline{\underline{A}}$, $\mu \in L\setminus\{0\}$, og kun disse, bestemmer den samme projektive kollineation. Den identiske afbildning af Π^n bestemmes altså af matricerne $\mu\underline{\underline{E}}$, $\mu \in L\setminus\{0\}$. Disse udgør en med $H(n+1,L)$ isomorf normal undergruppe af den generelle lineære gruppe. Dette viser pånу, at $PGL(n,L)$ er isomorf med $GL(n+1,L)/H(n+1,L)$. Idet de nævnte matrixgrupper kun afhænger af dimensionstallet n og legemet L, ses tillige, at $PLG(n,L)$ er isomorf med en gruppe, som kun afhænger af n og L. Dette er motiveringen for, at Π^n ikke optages i betegnelsen for den projektive gruppe, idet det jo medfører, at projektive rum af samme dimension og over samme legeme har isomorfe projektive grupper.

For en nærmere undersøgelse af projektive kollineationer af et projektivt rum Π^n på sig selv er deres fikspunkter og fikshyperplaner af betydning. I det følgende forudsættes, at legemet L er de komplekse eller de reelle tals legeme.

Lad den projektive kollineation $\varphi:\Pi^n \to \Pi^n$ være induceret af den lineære afbildning $f:V^{n+1} \to V^{n+1}$. At et punkt $X \in \Pi^n$ er fikspunkt ved φ, er ensbetydende med, at det til X svarende 1-dimensionale underrum af V^{n+1} afbildes på sig selv ved f, dvs. at det er et egenrum for f. Hver egenvektor for f er altså repræsentant for et fikspunkt ved φ, og omvendt, repræsentanterne for et fikspunkt ved φ er egenvektorer for f. Vælges en basis $(\underline{e}_0,\dots,\underline{e}_n)$ for V^{n+1}, og dermed et projektivt koordinatsystem $(E_0,\dots,E_n;E)$ i Π^n, hører der til f en matrixligning $\underline{\underline{y}}| = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{x}}|$, der tillige er en matrixligning for φ. Fikspunkternes koordinatsæt er følgelig de fra nulløsningen forskellige løsninger $\underline{\underline{x}}|$ til en matrixligning

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{x}}| = \lambda\underline{\underline{x}}|,$$

hvor λ er en vilkårlig egenværdi for f, altså en karakteristisk rod af $\underline{\underline{A}}$.

Til hvert egenrum for f svarer en lineær mangfoldighed bestående af fikspunkter. Om denne gælder, at den ikke er egentlig delmængde af nogen lineær mangfoldighed bestående af lutter fikspunkter. Kaldes en sådan lineær mangfoldighed bestående af fikspunkter for maksimal, gælder omvendt, at det til en maximal lineær mangfoldighed af fikspunkter ved φ svarende underrum af V^{n+1} er et egenrum for f. Lad $\lambda_o,\dots,\lambda_p$ være de indbyrdes forskellige egenværdier for f og $m_o,\dots,m_p$ deres egenværdimultipliciteter. Til hver egenværdi λ_i, $i = 0,\dots,p$, svarer en maximal lineær mangfoldighed Φ_i af fikspunkter ved φ. Dens dimension er $m_i - 1$, og da $p \leqq n$ og

$$m_o + \dots + m_p \leqq n + 1,$$

er disse mangfoldigheders antal højst n+1, og for summen af deres dimensioner gælder

$$(m_o - 1) + \dots + (m_p - 1) \leqq n - p.$$

Da egenvektorer hørende til forskellige egenværdier er lineært uafhængige, er fikspunkter tilhørende forskellige mangfoldigheder Φ_i lineært uafhængige. Specielt gælder, at mangfoldighederne Φ_i er disjunkte to og to, idet de tilsvarende egenrum kun har nulvektoren fælles.

Som specielt tilfælde fremhæves det, hvor summen af egenværdiernes multipliciteter er n+1, hvor altså matricen $\underline{A}$ er regulær-ækvivalent med en diagonalmatrix. Der findes da n+1 lineært uafhængige egenvektorer, og til disse svarer n+1 lineært uafhængige fikspunkter ved φ. Vælges de n+1 egenvektorer $\underline{e}_o,\dots,\underline{e}_n$ som basisvektorer, og dermed de tilsvarende fikspunkter som fundamentalpunkter $E_o,\dots,E_n$, vil de til φ hørende (indbyrdes proportionale) matricer være diagonalmatricerne, hvis diagonalelementer er proportionale med de til $\underline{e}_o,\dots,\underline{e}_n$ hørende (her ikke nødvendigvis forskellige) egenværdier $\lambda_o,\dots,\lambda_n$. Billedpunktet $\varphi(E)$ af enhedspunktet E har $(\lambda_o,\dots,\lambda_n)$ som et koordinatsæt. I overensstemmelse med fundamentalsætningen kan heraf sluttes, at der findes netop én projektiv kollineation φ, der har n+1 givne lineært uafhængige punkter $E_o,\dots,E_n$ som fikspunkter, og ved hvilken et givet punkt E, som ikke ligger på nogen af sidefladerne af simplekset $(E_o,\dots,E_n)$, afbildes på et givet punkt F, som heller ikke ligger på nogen af simpleksets sideflader. Er $(f_o,\dots,f_n)$ et koordinatsæt for F med hensyn til koordinatsystemet $(E_o,\dots,E_n;E)$, vil diagonalmatricen med diagonalelementerne $f_o,\dots,f_n$ være en til φ hørende matrix.

I tilfældet n = 1 drejer det sig om en projektivitet φ af en linie Π^1 på sig selv. Det forudsættes, at φ er forskellig fra den identiske afbildning. Da findes der højst to fikspunkter, og der foreligger følgende muligheder:

1) $L = \overset{\circ}{C}$.

1,1. To forskellige karakteristiske rødder. Begge har rod- og egenværdimultiplicitet 1. Der findes to forskellige fikspunkter.

1,2. Én karakteristisk rod, der så har rodmultiplicitet 2, medens egenværdimultipliciteten er 1. Egenværdimultiplitet 2 ville nemlig medføre, at de til φ hørende matricer er proportionale med enhedsmatricen og φ følgelig den identiske afbildning. Der findes ét fikspunkt.

2) $L = \overset{\circ}{R}$.

2,1. To forskellige karakteristiske rødder. Begge har rod- og egenværdimultiplicitet 1. Der findes to fikspunkter. Projektiviteten siges at være <u>hyperbolsk</u>.

2,2. Én karakteristisk rod med rodmulticitet 2 og egenværdimultiplicitet 1. Der findes ét fikspunkt. Projektiviteten siges at være <u>parabolsk</u>.

2,3. Ingen karakteristiske rødder. Projektiviteten er fikspunktfri og siges at være <u>elliptisk</u>.

I de tilfælde, hvor der findes to forskellige fixpunkter, har forholdet $\kappa = \lambda_0/\lambda_1$ mellem de tilsvarende karakteristiske rødder en simpel geometrisk betydning. (Bemærk, at dette ikke kan gælde for selve de karakteristiske rødder; thi ved multiplikation af en til afbildningen φ hørende matrix med et element af legemet L fås atter en til afbildningen hørende matrix, og rødderne multipliceres også med dette element.) Vælges de to fixpunkter som fundamentalpunkterne E_0 og E_1 og et vilkårligt fra disse forskelligt punkt som enhedspunkt E for et koordinatsystem på linien Π^1, er

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

en matrixligning for projektiviteten. For dobbeltforholdet $df(E_0E_1X\varphi(X))$, hvor X betegner et vilkårligt punkt på linien, fås med benyttelse af koordinatudtrykket (side III, 3, 5)

$$df(E_0E_1X\varphi(X)) = \kappa,$$

idet E_0, E_1, X og $\varphi(X)$ har henholdsvis koordinatsættene (0,1), (1,0), (x_0,x_1) og $(\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1)$. Heraf ses, at en projektivitet $\varphi:\Pi^1 \to \Pi^1$ med to fixpunkter er bestemt ved disse, taget i en valgt orden, og et element $\kappa \in L$. Billedet $\varphi(X)$ af et vilkårligt fra fixpunkterne forskelligt punkt X er nemlig fastlagt ved ovenstående dobbeltforholds værdi. Omvendt er enhver afbildning af linien på sig selv, der er defineret på denne måde med et fra 0 og 1 forskelligt κ en projektivitet, nemlig den, der ifølge fundamentalsætningen er bestemt ved, at E_0, E_1 og A, hvor A er et vilkårlig valgt tredie punkt på linien, afbildes på henholdsvis E_0, E_1 og B, hvor B er bestemt ved $df(E_0E_1AB) = \kappa$.

Alt, hvad der er sagt om projektiviteter på en linie, gælder ifølge dualitetsprincippet også for projektiviteter, dvs.

bijektive afbildninger, der bevarer dobbeltforholdet, af et hyperplanbundt i et vilkårligt projektivt rum på sig selv.

Fixhyperplanerne ved en projektiv kollineation $\varphi : \Pi^n \to \Pi^n$ med matrixligningen $\underline{\underline{y}}_{|} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_{|}$ bestemmes ganske som fixpunkterne. En matrixligning for den til φ hørende hyperplanafbildning er $\underline{\underline{v}}_{|} = \underline{\underline{A}}'^{-1}\underline{\underline{u}}_{|}$, hvor $\underline{\underline{u}}_{|}$ og $\underline{\underline{v}}_{|}$ betegner hyperplankoordinatsæt. En hyperplan med koordinatsættet $\underline{\underline{u}}_{|}$ afbildes på sig selv, hvis og kun hvis

$$\underline{\underline{A}}'^{-1}\underline{\underline{u}}_{|} = \mu\underline{\underline{u}}_{|},$$

hvor μ er en karakteristisk rod af $\underline{\underline{A}}'^{-1}$. Idet ligningen kan omskrives til

$$\underline{\underline{A}}'\underline{\underline{u}}_{|} = \mu^{-1}\underline{\underline{u}}_{|},$$

og $\underline{\underline{A}}'$ har samme karakteristiske polynomium som $\underline{\underline{A}}$, er dette ensbetydende med, at μ^{-1} er karakteristisk rod af $\underline{\underline{A}}$. De lineære hyperplanmangfoldigheder, der består af fixhyperplaner, optræder altså i samme antal og med de samme dimensioner som de lineære mangfoldigheder, der består af fixpunkter.

Er λ og μ^{-1} forskellige karakteristiske rødder af $\underline{\underline{A}}$, vil hvert fixpunkt hørende til λ ligge i hver fixhyperplan hørende til μ. Dette ses således: Ovenstående matrixligning for en fixhyperplan $\underline{\underline{u}}_{|}$ hørende til μ kan skrives

$$\underline{\underline{u}}_{-}\underline{\underline{A}} = \mu^{-1}\underline{\underline{u}}_{-}.$$

Multipliceres med koordinatsøjlen $\underline{\underline{x}}_{|}$ for et fixpunkt hørende til λ, fås

$$\underline{\underline{u}}_{-}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_{|} = \mu^{-1}\underline{\underline{u}}_{-}\underline{\underline{x}},$$

altså

$$\lambda\underline{\underline{u}}_{-}\underline{\underline{x}}_{|} = \mu^{-1}\underline{\underline{u}}_{-}\underline{\underline{x}},$$

idet $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{x}}_{|} = \lambda\underline{\underline{x}}_{|}$. For $\lambda \neq \mu^{-1}$ fås heraf $\underline{\underline{u}}\,\underline{\underline{x}}_{|} = 0$, hvilket er påstanden.

Enhver lineær mangfoldighed, som er forbindelsen af lineært uafhængige fixpunkter eller snittet af lineært uafhængige fixhyperplaner, afbildes på sig selv. For eksempel, hvis den projektive kollineation har $n+1$ lineært uafhængige fixpunkter, vil hver side i det af fixpunkterne bestemte simplex afbildes på sig selv.

Vi betragter nu specielt fra identiteten forskellige kollineationer $\varphi:\Pi^n \to \Pi^n$, som har en fixhyperplan F^*, der består af lutter fixpunkter. Der findes da ifølge ovenstående en $(n-1)$-dimensional lineær hyperplanmangfoldighed, som består af fixhyperplaner. En sådan mangfoldighed udgøres af hyperplanerne gennem et vist punkt F, og dette må da være fixpunkt. En kollineation φ af denne art kaldes ofte en <u>homologi</u> med <u>homologihyperplanen</u> F^* og <u>homologicentret</u> F. Navnet <u>centralkollineation</u> er også i brug. For hvert fra F forskelligt punkt X ligger billedet $\varphi(X)$ på linien FX; thi den er snittet af alle hyperplaner gennem F, som indeholder den, og afbildes derfor på sig selv.

Der skelnes mellem to tilfælde:

1) F ligger ikke i F^*. Homologien kaldes <u>egentlig</u>. Ifølge fundamentalsætningen ville φ være den identiske afbildning, hvis der fandtes et fixpunkt foruden F og punkterne i F^*.

Restriktionen af φ til en linie gennem F er en projektivitet af denne med to fixpunkter, nemlig F og liniens skæringspunkt P med F^*. Ifølge det ovenfor viste findes der et $\kappa \in L$, således at der for hvert fra F og P forskelligt punkt X på linien og dettes billede $\varphi(X)$ gælder

$$\mathrm{df}(FPX\varphi(X)) = \kappa.$$

Elementet κ afhænger ikke af valget af linien, idet der for et vilkårligt punkt $X' \neq F$ på en anden linie gennem F, der skærer F^* i P', gælder

$$df(FP'X'\varphi(X')) = df(FPX\varphi(X)).$$

Linien XX' og dens billede, linien $\varphi(X)\varphi(X')$, må nemlig skære F^* i samme punkt, idet alle punkter i F^* er fixpunkter; og punktsættet $(F,P',X',\varphi(X'))$ fremgår altså af sættet $(F,P,X,\varphi(X))$ ved centralprojektion fra dette skæringspunkt. Elementet $\kappa \in L$, som er forskelligt fra 0 og 1, kaldes homologiens <u>invariant</u>.

<u>Er der givet tre indbyrdes forskellige punkter</u> F,X <u>og</u> Y <u>på en linie samt en hyperplan</u> F^*, <u>der ikke indeholder noget af disse punkter, findes der netop én homologi</u> φ <u>med homologihyperplanen</u> F^* <u>og homologicentret</u> F, <u>ved hvilken</u> $Y = \varphi(X)$.

Bevis: I F^* vælges n punkter $F_1,\ldots,F_n$, således at ikke n+1 af punkterne $X,F,F_1,\ldots,F_n$ er lineært afhængige, altså således at skæringspunktet P mellem linien FX og F^* ikke tilhører nogen side af det ved $F_1,\ldots,F_n$ bestemte simplex. Ifølge fundamentalsætningen findes der netop én projektiv kollineation φ, ved hvilken $X,F,F_1,\ldots,F_n$ afbildes i henholdsvis $Y,F,F_1,\ldots,F_n$. Da $F_1,\ldots,F_n$ er fixpunkter afbildes disse punkters forbindelse, altså F^* på sig selv. Da F,X,Y ligger på en linie og F er fixpunkt, afbildes denne linie på sig selv. Følgelig er dens skæringspunkt P med F^* et fixpunkt. Restriktionen af φ til F^* må altså ifølge fundamentalsætningen være den identiske afbildning. Dette viser, at φ er en homologi.

Af sætningen følger umiddelbart:

<u>Er der givet en hyperplan</u> F^*, <u>et punkt</u> F <u>uden for denne og et fra</u> 0 <u>og</u> 1 <u>forskelligt element</u> $\kappa \in L$, <u>findes der netop én homologi med homologihyperplanen</u> F^*, <u>homologicentret</u> F <u>og invarianten</u> κ.

For $\kappa = 1$ fås den identiske afbildning.

En $(n+1) \times (n+1)$-matrix hører til en egentlig homologi, hvis og kun hvis den har en simpel og en n-dobbelt karakteristisk rod med egenværdimultipliciteten n. Med hensyn til et koordinatsystem med $E_0 = F$ som det ene og lineært uafhængige punkter $E_1, \dots, E_n$ i F^* som de øvrige fundamentalpunkter hører diagonalmatricen med diagonalelementerne $\kappa, 1, \dots, 1$ til homologien med homologihyperplanen F^*, homologicentret F og invarianten κ. Det ses, at κ er forholdet mellem den simple og den n-dobbelte karakteristiske rod.

De egentlige homologier med en given homologihyperplan og et givet homologicentrum danner sammen med den identiske afbildning en undergruppe af den projektive gruppe, der er isomorf med den multiplikative gruppe $(L \setminus \{0\}, \cdot)$. Dette følger af, at invarianterne multipliceres ved sammensætning af to sådanne homologier.

Hvis legemet L ikke har karakteristik 2, altså hvis $-1 \neq 1$, er homologierne med invarianten -1 involutoriske. De kaldes _harmoniske homologier_ eller _projektive spejlinger_. En egentlig homologi φ er harmonisk, hvis (og naturligvis kun hvis) der findes to forskellige punkter X og Y, som ombyttes ved den, for hvilke altså $Y = \varphi(X)$ og $X = \varphi(Y)$.

2) F ligger i F^*. Homologien φ kaldes da _uegentlig_ eller en _elation_. Ikke noget punkt uden for F^* kan være fixpunkt. Var nemlig P et sådant fixpunkt, ville ethvert andet punkt X også være fixpunkt, idet såvel linien XF som linien XP måtte afbildes på sig selv, den sidste fordi dens skæringspunkt med F^* også er fixpunkt. Da φ ikke er den identiske afbildning, er dette altså udelukket.

Er der givet en hyperplan F^* og to forskellige punkter X og Y uden for denne, findes der netop én elation φ med homologihyperplanen F^*, ved hvilken $Y = \varphi(X)$.

Bevis: Lad φ være en sådan elation. Da linien, der forbinder X med homologicentret F, afbildes på sig selv, må F være skæringspunktet mellem linien XY og F^*. Billedpunktet $\varphi(X')$ af et fra X forskelligt punkt uden for F^* er da entydig bestemt. Ligger nemlig X' ikke på linien XY, og er P skæringspunktet mellem linien XX' og F^*, må $\varphi(X')$ ligge såvel på linien X'F som på linien YP, da linien XP må afbildes på denne. Ligger X' på XY, bestemmes først billedet af et punkt uden for denne linie. Dermed er entydigheden vist. For at bevise eksistensen vælges punkter $F_2,\ldots,F_n$ i F^*, således at $F,F_2,\ldots,F_n$ er lineært uafhængige, samt et punkt P, som ikke ligger på nogen side af det ved disse punkter bestemte simplex. Endvidere vælges et fra X og P forskelligt punkt X' på linien XP, og skæringspunktet mellem linierne X'F og YP (som jo ligger i den ved X,P og F bestemte plan) betegnes Y'. Ifølge fundamentalsætningen findes der en projektiv kollineation φ, ved hvilken $X,X',F,F_2,\ldots,F_n$ afbildes i henholdsvis $Y,Y',F,F_2,\ldots,F_n$. Idet linien XX' afbildes på linien YY' og disse linier skærer hinanden i P, er P fixpunkt. Af fundamentalsætningen følger derfor, at restriktionen af φ til F^* er den identiske afbildning, dvs. at φ er en homologi. Idet enhver linie, der forbinder et fra homologicentret forskelligt punkt med dettes billede, går gennem homologicentret, må dette være skæringspunktet F mellem linierne XY og X'Y'. Dermed er sætningen bevist.

En $(n+1)\times(n+1)$-matrix hører til en elation, hvis og kun hvis den har en $(n+1)$-dobbelt rod med egenværdimultipliciteten n. Med hensyn til et koordinatsystem, hvis fundamentalpunkter er et vilkårligt punkt E_0 uden for F^*, $E_1 = F$ og punkter $E_2,\ldots,E_n$ i F^*, således at $E_1,\ldots,E_n$ er lineært uafhængige, vil der til en elation med homologihyperplanen F^* og homologicentret F høre en matrix af formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

og omvendt. Værdien af σ afhænger af valget af enhedspunktet og er følgelig ikke nogen invariant.

Elationerne med given homologihyperplan og givet homologicentrum danner sammen med den identiske afbildning en undergruppe af den projektive gruppe, der er isomorf med den additive gruppe $(L,+)$. Der findes ikke nogen involutoriske elationer.

Det blev vist ovenfor, at de projektive kollineationer $\varphi:\Pi^n \to \Pi'^n$ er netop de afbildninger, som induceres af bijektive lineære afbildninger $f:V_{n+1} \to V'_{n+1}$ af de tilhørende vektorrum. Vi erstatter nu vektorrummet V'_{n+1} med det duale V'^*_{n+1}, dvs. vi betragter bijektive lineære afbildninger $g:V_{n+1} \to V'^*_{n+1}$. Idet der til de endimensionale underrum i V'^*_{n+1} svarer hyperplanerne i Π'^n, inducerer en sådan afbildning g en bijektiv afbildning ψ af mængden af punkter i Π^n på mængden af hyperplaner i Π'^n. Til punkter på en linie svarer hyperplaner i et bundt, og dobbeltforholdet af fire punkter på en linie er lig med billedhyperplanernes dobbeltforhold. Enhver afbildning med disse egenskaber kaldes en projektiv korrelation. Af det tilsvarende resultat for kollineationer følger, at enhver korrelation induceres af en lineær afbildning.

I det følgende betegnes mængderne af hyperplaner i Π^n og

Π'^n med henholdsvis Π_*^n og $\Pi_*'^n$. En korrelation $\psi:\Pi^n \to \Pi_*'^n$ har med hensyn til valgte koordinatsystemer i Π^n og Π'^n en matrixligning af formen

$$\underline{\underline{v}}_| = \rho \underline{\underline{B}}\underline{\underline{x}}_|,$$

hvor $\underline{\underline{B}}$ er en regulær $(n+1) \times (n-1)$-matrix med elementer fra legemet L, $\underline{\underline{x}}_|$ er en koordinatsøjle for et punkt i Π^n, $\underline{\underline{v}}_|$ en koordinatsøjle for billedhyperplanen og ρ en vilkårlig fra 0 forskellig faktor fra L, der kan afhænge af $\underline{\underline{x}}_|$. (Ved en til korrelationen hørende matrix forstås naturligvis, som for kollineationernes vedkommende, en konstant matrix, altså her en matrix, der fremgår af $\underline{\underline{B}}$ ved multiplikation med et fast fra 0 forskelligt element af L.)

Til mængden af punkter i en hyperplan i Π^n svarer ved en korrelation $\psi:\Pi^n \to \Pi_*'^n$ en $(n-1)$-dimensional lineær hyperplanmangfoldighed, altså mængden af hyperplaner gennem et punkt i Π'^n. Ved til hyperplanen i Π^n at lade svare dette punkt, defineres en afbildning $\psi_*:\Pi_*^n \to \Pi'^n$. At denne ved ψ bestemte afbildning har egenskaber, der er duale til egenskaberne ved ψ, følger af, at den med hensyn til valgte koordinatsystemer i Π^n og Π'^n kan fremstilles ved en matrixligning på samme måde som ψ. Lad nemlig

$$\underline{\underline{v}}_| = \underline{\underline{B}}\underline{\underline{x}}_|$$

være en matrixligning for ψ, og lad $\underline{\underline{u}}_-$ være en koordinatrække for en hyperplan i Π^n. For de punkter $\underline{\underline{x}}_|$, som ligger i denne hyperplan, og deres billedhyperplaner $\underline{\underline{v}}_-$ i Π'^n gælder da

$$\underline{\underline{u}}_-\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{u}}_-\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{v}}_| = 0.$$

Heraf ses, at billedhyperplanerne går gennem punktet med koordinatrækken

$$\underline{\underline{v}}_- = \underline{\underline{u}}_-\underline{\underline{B}}^{-1}.$$

Denne eller den transponerede ligning

$$\underline{\underline{v}}_| = \underline{\underline{B}}'^{-1}\underline{\underline{u}}_|$$

bestemmer altså afbildningen ψ_*. Går man omvendt ud fra en bijektiv afbildning af hyperplanmængden Π_*^n på punktmængden Π'^n, således at der til hyperplaner tilhørende et bundt svarer punkter på en linie og at dobbeltforhold bevares, får man på dualistisk tilsvarende måde en afbildning af punktmængden Π^n på hyperplanmængden $\Pi_*'^n$. Fra ψ_* kommer man derved tilbage til ψ.

Det er ofte hensigtsmæssigt ved en projektiv korrelation at forstå et par af afbildninger $\psi:\Pi^n \to \Pi_*'^n$ og $\psi_*:\Pi_*^n \to \Pi'^n$, som opfylder kravene og bestemmer hinanden på den angivne måde.

Lad $\varphi:\Pi^n \to \Pi'^n$ og $\varphi_*:\Pi_*^n \to \Pi_*'^n$ være afbildningerne, der udgør en projektiv kollineation og $\psi:\Pi^n \to \Pi_*'^n$ og $\psi_*:\Pi_*^n \to \Pi'^n$ afbildningerne, der udgør en projektiv korrelation. Man kan da danne de sammensatte afbildninger $\psi\circ\varphi$, $\psi_*\circ\varphi_*$, der udgør en korrelation, og $\varphi_*\circ\psi$, $\varphi\circ\psi_*$, der ligeledes udgør en korrelation. Man kan altså sige, at <u>sammensætningen i den ene eller i den anden orden af en projektiv kollineation med en projektiv korrelation</u> er en projektiv korrelation. Tilsvarende ses, at <u>en sammensætning af to projektive korrelationer er en projektiv kollineation</u>.

Den inverse til en projektiv korrelation (ψ,ψ_*) er atter en projektiv korrelation, der udgøres af afbildningerne $(\psi_*^{-1}, \psi^{-1}.)$

Studiet af korrelationer lettes ofte væsentligt, når man i stedet for matrixligninger af den omtalte art benytter en anden algebraisk fremstilling. Lad

$$\underline{\underline{v}}_| = \underline{\underline{Bx}}_| \qquad \underline{\underline{y}}_| = \underline{\underline{B}}'^{-1}\underline{\underline{u}}_|$$

være matrixligninger for de to afbildninger ψ og ψ_*, der udgør en korrelation. Ligningen $\underline{\underline{y}}_-\underline{\underline{v}}_| = 0$ for den hyperplan $\underline{\underline{v}}_|$ i Π'^n, som ved ψ svarer til punktet $\underline{\underline{x}}_|$ i Π^n kan da skrives

$$\underline{\underline{y}}_-\underline{\underline{Bx}}_| = 0,$$

og ligningen $\underline{\underline{v}}_-\underline{\underline{y}}_| = 0$ for det punkt $\underline{\underline{y}}_|$ i Π'^n, som ved ψ_* svarer til hyperplanen $\underline{\underline{u}}_|$ i Π^n, kan skrives

$$\underline{\underline{v}}_-\underline{\underline{B}}'^{-1}\underline{\underline{u}}_| = 0.$$

Den første af disse ligninger bestemmer ψ, idet den for hvert fast $\underline{\underline{x}}_|$ er ligningen, med $\underline{\underline{y}}_-$ som variabel, for den til $\underline{\underline{x}}_|$ svarende hyperplan. Endvidere bestemmer den afbildningen ψ_*^{-1}, idet den for hvert fast $\underline{\underline{x}}_|$ er ligningen, med $\underline{\underline{y}}_-$ som variabel, for den til $\underline{\underline{x}}_|$ svarende hyperplan. Endvidere bestemmer den afbildningen ψ_*^{-1}, idet den for hvert fast $\underline{\underline{y}}_-$ er ligningen, med $\underline{\underline{x}}_|$ som variabel, for den hyperplan i Π^n, der ved ψ_*^{-1} svarer til punktet $\underline{\underline{y}}_-$ i Π'^n. Analogt bestemmer den anden ligning afbildningerne ψ_* og ψ^{-1}.

Idet $\underline{\underline{x}}_|$ og $\underline{\underline{y}}_|$ er koordinatsæt for vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i vektorrummene V_{n+1} og V'_{n+1}, som bestemmer Π^n og Π'^n, er

$$B(\underline{y},\underline{x}) = \underline{\underline{y}}_-\underline{\underline{Bx}}_|$$

en bilinearform defineret på $V'_{n+1} \times V_{n+1}$. Tilsvarende er

$$B^*(\underline{v}^*,\underline{u}^*) = \underline{\underline{v}}_-\underline{\underline{B}}'^{-1}\underline{\underline{u}}_|$$

en bilinearform definereret på $V'^*_{n+1} \times V^*_{n+1}$. Idet matricerne $\underline{\underline{B}}$ og $\underline{\underline{B}}'^{-1}$ er regulære, har disse bilinearformer rangen n + 1. Til hver korrelation hører altså to sådanne bilinearformer, der hver er bestemt på nær en fra 0 forskellig faktor fra L. Omvendt bestemmer en vilkårlig bilinearform $B(\underline{y},\underline{x})$ af rang n + 1 defineret på $V'_{n+1} \times V_{n+1}$ en bijektiv lineær afbildning af V_{n+1} på V'^*_{n+1} og dermed en korrelation. To sådanne bilinearformer bestemmer den samme korrelation, hvis og kun hvis de er proportionale.

Dualistisk tilsvarende gælder, at enhver bilinearform $B^*(\underline{v}^*,\underline{u}^*)$ af rang n + 1 defineret på $V'^*_{n+1} \times V^*_{n+1}$ bestemmer en korrelation, og to sådanne den samme korrelation, hvis og kun hvis de er proportionale. Det fremgår af ovenstående, at en bilinearform $B(\underline{y},\underline{x})$ på $V'_{n+1} \times V_{n+1}$ og en bilinearform $B^*(\underline{v}^*,u^*)$ på $V'^*_{n+1} \times V^*_{n+1}$ bestemmer den samme korrelation, hvis og kun hvis der for deres matricer $\underline{\underline{B}}$ og $\underline{\underline{B}}^*$ henholdsvis med hensyn til vilkårlige baser for V'_{n+1} og V_{n+1} og disses duale baser for V'^*_{n+1} og V^*_{n+1} gælder, at $\underline{\underline{B}}^*$ er proportional med $\underline{\underline{B}}'^{-1}$.

I tilfældet n = 1, hvor hyperplanerne jo er punkter, er de projektive korrelationer identiske med projektiviteterne. Men ovenstående giver en fra den tidligere forskellig algebraisk fremstilling. Lad der være valgt koordinatsystemer på to projektive linier Π^1 og Π'^1 over samme legeme, og lad en korrelation $\psi:\Pi^1 \to \Pi'^1$ være bestemt ved bilinearformen

$$\underline{y}'\underline{\underline{B}}\underline{x} = b_{00}y_0x_0 + b_{01}y_0x_1 + b_{10}y_1x_0 + b_{11}y_1x_1$$

af rang 2, hvor (x_0,x_1) og (y_0,y_1) er koordinatsæt for henholdsvis et punkt på Π^1 og et punkt på Π'^1. Til et givet punkt (x_0,x_1) svarer ved ψ punktet, hvis koordinatsæt (y_0,y_1) tilfredsstiller ligningen

$$(b_{00}x_0 + b_{01}x_1)y_0 + (b_{10}x_0 + b_{11}x_1)y_1 = 0.$$

Idet rg $\underline{\underline{B}}$ = 2, er

$$(b_{00}x_0 + b_{01}x_1,\ b_{10}x_0 + b_{11}x_1) \neq (0,0)$$

for hvert par $(x_0,x_1) \neq (0,0)$, og ligningens løsningsrum har dimension 1. En fra (0,0) forskellig løsning er

$$y_0 = -b_{10}x_0 - b_{11}x_1,$$

$$y_1 = b_{oo}x_o + b_{o1}x_1 .$$

Dette viser, at ψ er identisk med den projektivitet $\varphi:\Pi^1 \to \Pi'^1$, der bestemmes ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{oo} & a_{o1} \\ a_{1o} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{1o} & -b_{11} \\ b_{oo} & b_{o1} \end{pmatrix} .$$

Omvendt kan projektiviteten bestemt ved en vilkårlig matrix $\underline{\underline{A}}$ af rang 2 fortolkes som en korrelation bestemt ved bilinearformen med matricen

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{oo} & b_{o1} \\ b_{1o} & b_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1o} & a_{11} \\ -a_{oo} & -a_{o1} \end{pmatrix} .$$

I tilfældet $\Pi'^1 = \Pi^1$ er projektivitetens fixpunkter de punkter, hvis koordinatsæt (x_o, x_1) tilfredsstiller ligningen

$$b_{oo}x_o^2 + (b_{o1} + b_{1o})x_o x_1 + b_{11}x_1^2 = 0.$$

Drejer det sig om en kompleks projektiv linie, vil der være ét fixpunkt eller to fixpunkter, efter som denne kvadratiske forms determinant

$$D = \begin{vmatrix} b_{oo} & \frac{1}{2}(b_{o1} + b_{1o}) \\ \frac{1}{2}(b_{o1}+b_{1o}) & b_{11} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{oo} & b_{o1} \\ b_{1o} & b_{11} \end{vmatrix} - \frac{1}{4}(b_{o1} - b_{1o})^2$$

er 0 forskellig fra 0. Drejer det sig om en reel projektiv linie, vil projektiviteten være elliptisk, parabolsk eller hyperbolsk, efter som $D > 0$, $D = 0$ eller $D < 0$.

Af særlig betydning er de korrelationer $\psi:\Pi^n \to \Pi^n_*$ i et projektivt rum Π^n, som er involutoriske, dvs. for hvilke $\psi_* \circ \psi$ er den identiske afbildning af Π^n eller, hvad der kommer ud på det samme, $\psi \circ \psi_*$ er den identiske afbildning af Π^n_*. Lad $\underline{\underline{B}}$

være en matrix, som med hensyn til et koordinatsystem i Π^n hører til ψ. Med hensyn til samme koordinatsystem hører da til ψ_* matricen $\underline{\underline{B}}'^{-1}$, altså til $\psi_* \circ \psi$ matricen $\underline{\underline{B}}'^{-1}\underline{\underline{B}}$. At den projektive kollineation $\psi_* \circ \psi$ er den identiske afbildning af Π^n, er ensbetydende med, at der findes et fra 0 forskelligt $\rho \in L$, således at $\underline{\underline{B}}'^{-1}\underline{\underline{B}} = \rho\underline{\underline{E}}$, altså

$$\underline{\underline{B}} = \rho\underline{\underline{B}}'.$$

Ved transponering fås heraf $\underline{\underline{B}}' = \rho\underline{\underline{B}}$, altså $\underline{\underline{B}} = \rho^2\underline{\underline{B}}$. Da $\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{O}}$, følger $\rho = 1$ eller $\rho = -1$. Dermed er vist:

<u>En korrelation $\psi : \Pi^n \to \Pi^n$ er involutorisk, hvis og kun hvis de bilinearformer, der bestemmer den enten er symmetriske eller antisymmetriske</u>.

Er bilinearformerne symmetriske kaldes korrelationen en <u>polaritet</u>, er de antisymmetriske, kaldes den et <u>nulsystem</u>.

Idet en bilinearform $B(\underline{y},\underline{x})$ er antisymmetrisk, hvis og kun hvis den tilhørende kvadratiske form er identisk 0, altså hvis og kun hvis $B(\underline{x},\underline{x}) = 0$ for alle $\underline{x} \in V_{n+1}$, kan et nulsystem karakteriseres som en korrelation, hvor hvert punkt ligger i sin billedhyperplan. Idet alle antisymmetriske $(n+1) \times (n+1)$-matricer med ulige $n+1$ er singulære, kan der kun findes nulsystemer i projektive rum af ulige dimension. For $n = 1$ findes heller ingen, idet den lige nævnte karakteristiske egenskab her går ud på, at hvert punkt falder sammen med sit billedpunkt, altså at afbildningen er den identiske. Derimod findes der nulsystemer i tredimensionale projektive rum, idet der findes regulære antisymmetriske (4×4)-matricer.

Vedrørende benævnelserne <u>projektiv</u> (også <u>lineær</u>)kollineation og <u>projektiv</u> (også <u>lineær</u>) korrelation bemærkes følgende: Er $\Pi^n(L)$ og $\Pi'^n(L')$ projektive rum af samme dimension $n > 1$, ikke nødvendigvis over samme legeme, forstås ved en (semilineær) <u>kollineation</u> $\varphi : \Pi^n \to \Pi'^n$ en bijektiv afbildning, ved hvilken hver ret linie afbildes på en ret linie. Herom gælder:

Til hver kollineation svarer en isomorfi $\alpha : L \to L'$, således at der for hvilkesomhelst punkter A, B, C, D på en linie, hvoraf mindst tre indbyrdes forskellige og deres billedpunkter A', B', C', D' gælder

$$df(A'B'C'D') = \alpha(df(ABCD)).$$

Hovedskridtene i beviset, som ikke skal gennemføres her, er følgende: Det viser sig at være tilstrækkeligt at betragte tilfældet $n = 2$. Er (A,B,C,D) og (P,Q,R,S) punktsæt, der hvert ligger på en linie i $\Pi^2(L)$ og som har lige store dobbeltforhold, vil de svare til hinanden i en projektivitet, altså en afbildning, der kan sammensættes af (højst tre) centralprojektioner. Det samme må da gælde for billedsættene ved kollineationen. Disse vil derfor også have lige store dobbeltforhold. Heraf kan sluttes, at kollineationen bestemmer en bijektiv afbildning $\alpha : L \to L'$. Endvidere kan vises: Er der givet fem punkter A, B, C, D, E på en linie i Π^2, A, B, C indbyrdes forskellige, kan man ved lineære konstruktioner, dvs. ved at trække og skære rette linier, konstruere det punkt S, for hvilket

$$df(ABCS) = df(ABCD) + df(ABCE),$$

og det punkt P, for hvilket

$$df(ABCP) = df(ABCD)\, df(ABCE).$$

Idet sådanne konstruktioner ved kollineationen overføres til Π'^2, følger heraf, at α er en isomorfi.

Hvis $L' = L$, er α en automorfi af L. Da de reelle tals legeme ikke tillader nogen fra den identiske forskellig automorfi, gælder altså:

Hver kollineation $\varphi:\Pi^n \to \Pi'^n$ af reelle projektive rum af dimension $n > 1$ er en projektiv kollineation, dvs. bevarer dobbeltforhold.

De komplekse tals legeme tillader uendelig mange forskellige automorfier. Den simpleste (og eneste kontinuerte) er den, der til hvert tal lader svare det konjugeret komplekse. Kollineationer af komplekse projektive rum, som bestemmer denne automorfi af $\mathbb{C}$, kaldes antikollineationer.

Analogt til (semilineære) kollineationer defineres (semilineære) korrelationer som bijektive afbildninger $\psi:\Pi^n \to \Pi'^n_*$, $n > 1$, ved hvilke hver ret linie afbildes på et hyperplanbundt. Om sådanne afbildninger gælder en til ovenstående analog sætning. I det reelle tilfælde er altså enhver korrelation projektiv, og i det komplekse findes andre, specielt antikorrelationerne, ved hvilke fire punkter på ret linie afbildes i fire planer i bundt med det konjugeret komplekse dobbeltforhold.

Øvelser til kap.III, § 3.

1. I den euklidiske plan er valgt et sædvanligt retvinklet koordinatsystem med begyndelsespunkt E_0. Punktet med koordinatsættet (1,1) betegnes E. Planen udvides til en reel projektiv plan ved tilføjelse af den uegentlige linie. Dennes skæringspunkter med koordinatakserne betegnes E_1 og E_2. Punkt- og liniekoordinatsæt med hensyn til det projektive koordinatsystem $(E_0,E_1,E_2;E)$ betegnes henholdsvis (x_0,x_1,x_2) og (u_0,u_1,u_2). Find koordinattransformationen for punkt- og liniekoordinater svarende til overgangen til koordinatsystemet $(E_0,\hat{E}_1,E_2;E)$ hvor $\hat{E}_1$ er punktet med koordinatsættet $(x_0,x_1,x_2) = (1,2,0)$.

   Angiv det ny koordinatsystems enhedslinie.

   Find liniekoordinaterne med hensyn til dette system for en linie, der skærer linierne E_0E_2 og $\hat{E}_1E_2$ i punkter med givne koordinatsæt (0,a) og (2,b) med hensyn til det oprindelige sædvanlige retvinklede koordinatsystem.

2. Hvorledes transformeres projektive punkt- og hyperplankoordinater, når koordinatsystemets enhedspunkt E erstattes af punktet $\hat{E}$ med koordinatsættet $(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n \neq 0$, medens fundamentalpunkterne bibeholdes?

3. I en reel projektiv plan er valgt et projektivt koordinatsystem. Vis, at punkterne A(-1,3,2), B(4,1,-2), C(1,10,4) og D(6,-5,-6) ligger på samme linie og find df(ABCD).
   Find liniekoordinaterne for linierne $A^* = AE$, $B^* = BE$, $C^* = CE$, hvor E er enhedspunktet, samt for linien P^* gennem E, for hvilken $df(A^*B^*C^*P^*) = -1$.

4. I et tredimensionalt projektiv rum er valgt et projektivt koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2, E_3; E)$. Find en matrixligning for hver af de projektive kollineationer, der er bestemt ved, at

a) $E_0 \to E_1$, $E_1 \to E_2$, $E_2 \to E_3$, $E_3 \to E_0$, $E \to E$,

b) $E_0 \to E_0$, $E_1 \to E_1$, $E_2 \to E_2$, $E_3 \to E$, $E \to E_3$.

5. Med hensyn til et koordinatsystem $(E_0, \ldots, E_n; E)$ i et projektivt rum Π^n hører til en projektiv kollineation $\varphi : \Pi^n \to \Pi^n$ en matrix $\underline{\underline{A}}$. Hvorledes ændres denne, når enhedspunktet E ændres til $\hat{E}(\lambda_0, \ldots \lambda_n)$, hvor $\lambda_0 \ldots \lambda_n \neq 0$? Findes der projektive kollineationer, for hvilke en tilhørende matrix ikke afhænger af valget af enhedspunktet? (Jfr. opg.2.)

6. (Eksamensopgave sommeren 1963).

I en projektiv plan Π^2 er givet tre punkter E_0, E_1, E_2, som ikke ligger på samme linie, og en linie E^*, som ikke går gennem noget af disse punkter, endvidere tre punkter F_0, F_1, F_2, som ikke ligger på ret linie, og en linie F^*, som ikke går gennem noget af disse punkter.

Vis, at der firdes en og kun én projektiv kollineation $\varphi : \Pi^2 \to \Pi^2$, ved hvilken E_0, E_1, E_2 og E^* afbildes på henholdsvis F_0, F_1, F_2 og F^*.

Med hensyn til det projektive koordinatsystem med fundamentalpunkterne E_0, E_1, E_2 og enhedslinien E^* har punkterne $F_0, F_1 F_2$ henholdsvis koordinatsættene (f_{00}, f_{10}, f_{20}), (f_{01}, f_{11}, f_{21}), (f_{02}, f_{12}, f_{22}), og F^* har liniekoordinatsættet (v_0, v_1, v_2). Find en matrixligning for φ.

7. Bestem fixpunkterne og fixhyperplanerne ved hver af de ved opgivelserne i opgave 4 bestemte projektive kollineatoner i det

reelle tredimensionale projektive rum.

8. Lad l være en linie i den reelle projektive plan. Vis, at en projektivitet af l på sig selv kan sammensættes af to projektioner, hvis og kun hvis den har mindst ét fixpunkt.

9. På en projektiv linie Π^1 er givet to punktpar (A,A') og (B,B'), som ikke har noget punkt fælles (men det er ikke udelukket, at A = A' eller B = B'). Vis, at der findes netop én involutorisk projektivitet $\varphi:\Pi^1 \to \Pi^1$, ved hvilken

$$\varphi(A) = A', \quad \varphi(A') = A, \quad \varphi(B) = B', \quad \varphi(B') = B.$$

Vis, at en projektivitet $\varphi:\Pi^1 \to \Pi^1$ er involutorisk, hvis (og selvfølgelig kun hvis) der findes to forskellige punkter A og A' på Π^1, som ombyttes ved φ, d.v.s. for hvilke $\varphi(A) = A'$ og $\varphi(A') = A$.

10. På den komplekse projektive linie Π^1 er givet fire indbyrdes forskellige punkter A,A',B,B'. Vis, at der findes netop ét punktpar (P,Q), som er harmonisk forbundet med både (A,A') og (B,B'). (Benyt f.eks. opg.9.)
Opstil en nødvendig og tilstrækkelig betingelse, som punktparrene (A,A') og (B,B') på den reelle projektive linie må opfylde, for at der på denne findes et punktpar, som er harmonisk forbundet med både (A,A') og (B,B').
$df(AA'BB') > 0$

11. Lad F,A,A',A'' være indbyrdes forskellige punkter på den reelle projektive linie Π^1. Vis, at den ved

$$\varphi(F) = F, \quad \varphi(A) = A', \quad \varphi(A') = A''$$

bestemte projektivitet $\varphi:\Pi^1 \to \Pi^1$ er parabolsk, hvis og kun hvis

$$df(FA'AA'') = -1.$$

12. Om en projektiv kollineation af et tredimensionalt projektivt rum på sig selver givet, at mængden af fixpunkter udgøres af punkterne på en linie l samt to punkter, hvis forbindelseslinie ikke skærer l. Angiv afbildningens fixplaner. Hvad kan man sig om de karakteristiske rødder og deres multipliciteter for en til kollineationen hørende matrix?

13. På en projektiv linie Π^1 er valgt et koordinatsystem. Til en projektivitet $\varphi: \Pi^1 \rightarrow \Pi^1$ hører med hensyn til dette en (2×2)-matrix $\underline{\underline{A}}$. Det forudsættes, at φ har to forskellige fixpunkter E og F.
Vis, at

$$\frac{\operatorname{tr} \underline{\underline{A}}^2}{\det \underline{\underline{A}}} = \kappa + \kappa^{-1},$$

hvor $\kappa = \mathrm{df}(EFX\varphi(X))$, $X \in \Pi^1$.

14. Beskriv de afbildninger af det euklidiske rum på sig selv, der er restriktioner af homologier, hvis homologiplaner eller homologicentrer er uegentlige.

15. I en reel projektiv plan Π^2 er valgt et punktkoordinatsystem $(E_0, E_1, E_2; E)$. En projektiv kollineation $\varphi: \Pi^2 \rightarrow \Pi^2$ er bestemt ved, at den afbilder E i sig selv og hvert fundamentalpunkt i dettes projektion fra E på fundamentaltrekantens modstående side.
Vis, at φ er en homologi, og opstil en matrixligning for φ. Det antages, at Π^2 er fremkommet af en euklidisk plan ved tilføjelse af de uegentlige punkter, at fundamentalpunkterne er egentlige, og at E er medianernes skæringspunkt i fundamentaltrekanten. Beskriv φ i dette tilfælde.

16. Vis, at hvis to transformationer af en mængde er ombyttelige, vil hver af dem afbilde den andens fixelementmængde på sig selv.
Benyt dette til at opstille nødvendige og tilstrækkelige betingelser, som homologicentrerne og homologihyperplanerne for to homologier i et projektivt rum Π^n må opfylde, for at homologierne er ombyttelige. (Skeln mellem egentlige homologier og elationer, og undersøg tilfældet $n = 1$ særskilt.)

17. Vis, at hver ikke involutorisk projektivitet φ af en projektiv linie på sig selv kan sammensættes af to involutoriske projektiviteter. (Vælg et punkt A, som ikke er fixpunkt, og sammensæt φ med den involutoriske projektivitet, der har $\varphi(A)$ som fixpunkt og ombytter A og $\varphi\cdot\varphi(A)$.)

18. Vis, at sammensætningen af to harmoniske homologier med samme homologihyperplan er en elation, og at enhver elation kan fås på denne måde.

19. I et tredimensionalt projektivt rum Π^3 over et legeme L er givet to vindskæve linier u og v. Endvidere er givet et fra 0 og 1 forskelligt element κ fra L. En afbildning $\varphi\colon \Pi^3 \to \Pi^3$ defineres på følgende måde: Punkterne på u og punkterne på v er fixpunkter. Til et punkt X uden for u og v lades svare det punkt X' på linien p gennem P, som skærer både u og v, for hvilket

$$df(UVXX') = \kappa,$$

hvor U og V betegner skæringspunkterne mellem p og henholdsvis u og v.

Vis, at φ er en projektiv kollineation og angiv en matrixligning for den med hensyn til et koordinatsystem med fundamentalpunkterne E_0 og E_1 på u og fundamentalpunkterne E_2 og E_3 på v.

Vis, at enhver projektiv kollineation, hvis fixpunktmængde udgøres af to vindskæve linier u og v, kan bestemmes på den ovenfor angivne måde.

20. Lad O være et punkt i det euklidiske rum og Π^2 en projektiv plan, som enten er rummets uegentlige plan eller en med de uegentlige punkter udvidet egentlig plan, der ikke går gennem O. Til hvert punkt X i Π^2 lades svare linien, hvori normalplanen i O til linien OX skærer Π^2. Vis, at der herved defineres en polaritet i Π^2.

21. Ved en korrelation i et projektivt rum Π^n afbildes hvert hjørne i et n-dimensionalt simplex på dettes modstående side. Vis, at korrelationen er en polaritet.

22. Ved en polaritet i en projektiv plan afbildes vinkelspidserne A,B,C i en trekant henholdsvis på siderne a',b',c' i en ny trekant. Disse siders modstående vinkelspidser betegnes henholdsvis A',B',C'. Vis, at der findes en homologi, ved hvilken A,B,C afbildes på henholdsvis A',B',C'. (Jfr. Desargues' sætning.)

23. Lad φ: $\Pi^3 \to \Pi^3$ være en projektiv kollineation og ψ: $\Pi^3 \to \Pi^3_*$ en projektiv korrelation i et tredimensionalt projektivt rum. Hver af disse afbildninger inducerer en bijektiv afbildning af mængden Λ af rummets linier på sig selv. For kollineatio-

nens vedkommende er dette indlysende. Ved korrelationen svarer til punkterne på en linie planerne gennem en linie. Ved til den førstnævnte linie at lade svare den sidstnævnte får man en afbildning af Λ på sig selv. Kan φ og ψ inducere den samme afbildning af Λ på sig selv?

24. I det euklidiske rum er givet et punkt O og en vektor $\underline{a} \neq \underline{o}$. Endvidere er givet et reelt tal $\alpha \neq 0$. Til hvert punkt P i rummet lades svare den plan gennem P, der er vinkelret på vektoren

$$\alpha \underline{a} + \overrightarrow{OP} \times \underline{a}.$$

Vis, at denne afbildning er restriktionen til de egentlige punkter af et nulsystem i det projektive rum, der fås af det euklidiske ved tilføjelse af de uegentlige punkter. (Benyt et sædvanligt retvinklet koordinatsystem med O som begyndelsespunkt og en af akserne parallel med $\underline{a}$.)
Bestem alle linier gennem et givet punkt, der hver svarer til sig selv ved nulsystemet (jfr. opg. 23). (Disse linier kaldes nulsystemets nullinier. Navnet stammer fra statikken: Er $\underline{a}$ resultanten af et kraftsystem, linien gennem O parallel med $\underline{a}$ dets centralakse og $\underline{a}$ dets moment i O, vil nullinierne være netop de linier, om hvilke kraftsystemet har momentet O.)

25. I en projektiv plan over et legeme L er givet en linie l og indbyrdes forskellige punkter P_0, P_1, P_∞. For hvert element $\lambda \in L$ betegnes med P_λ det punkt på l, for hvilket

$$\mathrm{df}(P_\infty P_{\underset{0}{\cancel{\infty}}} P_1 P_\lambda) = \lambda.$$

For givne punkter P_λ og P_μ kan punkterne $P_{\lambda+\mu}$ og $P_{\lambda\mu}$ konstrueres på følgende måde: Gennem punkterne P_0, P_∞ og P_λ lægges fra l forskellige linier, som betegnes henholdsvis a, b og c. Skæringspunkterne mellem b og c, c og a, a og b betegnes henholdsvis A, B, C. Linien, der forbinder A med skæringspunktet D mellem $P_\infty B$ og $P_\mu C$, skærer l i $P_{\lambda+\mu}$. Skæringspunktet F mellem a og $P_\mu E$, skærer l i $P_{\lambda\mu}$. (Udfør de to konstruktioner i hver sin figur. Betragt det tilfælde, hvor planen er den euklidiske og b dennes uegentlige linie.)

Bevis de to fremsatte påstande.

Bevis Pappos' sætning (side III,2,30) ved at benytte, at $\lambda\mu = \mu\lambda$.

26. Ved en antiprojektivitet på den komplekse projektive linie Π^1 forstås en bijektiv afbildning φ: $\Pi^1 \to \Pi^1$, således at der for hvilkesomhelst indbyrdes forskellige punkter A,B,C,D og deres billedpunkter A',B',C',D' ved φ gælder

$$\mathrm{df}(A'B'C'D') = \overline{\mathrm{df}(ABCD)}.$$

Vis, at φ med hensyn til et projektivt koordinatsystem på Π^1 har en fremstilling af formen

$$\underline{\underline{x}}'_| = \underline{\underline{A}}\,\overline{\underline{\underline{x}}}_| ,$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er en regulær kompleks (2×2)-matrix og $\overline{\underline{\underline{x}}}_|$ betegner søjlen, hvis elementer er de konjugeret komplekse til elementerne i søjlen $\underline{\underline{x}}_|$.

Den komplekse projektive linie Π^1 fortolkes som de komplekse tals plan inklusive ∞. I denne er givet en cirkel med centrum C og radius r. Ved inversionen i denne cirkel forstås afbildningen af Π^1 ind i sig selv, ved hvilken C afbildes i ∞ og punktet $X \neq C$ i det punkt X' på halvlinien fra C gennem X, for hvilket

$$|OX|\ |OX'| = r^2.$$

Vis, at inversionen er en antiprojektivitet.

§4. Polariteter og kvadrikker.

I det følgende betragtes et projektivt rum Π^n over de komplekse eller de reelle tals legeme. Vektorrummet, som bestemmer Π^n, betegnes V_{n+1}, og dettes duale, som bestemmer mængden Π^n_* af hyperplaner i Π^n, betegnes V^*_{n+1}.

Lad $B(\underline{x},\underline{y})$ være en symmetrisk bilinearform i V_{n+1}. Hvis rg $B = n + 1$, bestemmer den en polaritet $\psi: \Pi^n \to \Pi^n_*$. Den tilhørende afbildning $\psi_*: \Pi^n_* \to \Pi^n$ er her ψ^{-1} og kan bestemmes ved en symmetrisk bilinearform $B^*(\underline{u}^*,\underline{v}^*)$ i V^*_{n+1}. Med hensyn til duale baser i V_{n+1} og V^*_{n+1} har bilinearformerne B og B^* matricer, som på grund af symmetrien kan vælges indbyrdes inverse.

Den til et punkt i Π^n svarende hyperplan kaldes punktets *polar*, og det til en hyperplan i Π^n_* svarende punkt kaldes ~~punktets~~ hyperplanens *pol*. To punkter, som har med hensyn til bilinearformen B konjugerede repræsentanter $\underline{x}$ og $\underline{y}$, for hvilke altså $B(\underline{x},\underline{y}) = 0$, kaldes *konjugerede punkter* med hensyn til polariteten. Tilsvarende forstås ved *konjugerede hyperplaner* to hyperplaner, som har repræsentanter $\underline{u}^*$ og $\underline{v}^*$, for hvilke $B^*(\underline{u}^*,\underline{v}^*) = 0$. De til et givet punkt konjugerede er punkterne i det givne punkts polar. De til en given hyperplan konjugerede er hyperplanerne gennem den givne hyperplans pol. *To punkter er konjugerede, hvis og kun hvis hvert af dem ligger i det andets polar*. *To hyperplaner er konjugerede, hvis og kun hvis hver af dem går gennem den andens pol*.

Foruden de hidtil betragtede "*ikke-udartede*" eller "*regulære*" *polariteter* er de såkaldte udartede eller singulære polariteter af betydning. Lad B være en symmetrisk bilinearform i V_{n+1}, for hvilken

$$0 < \text{rg } B < n + 1.$$

Idet rg B betegnes r, har formen et $(n + 1 - r)$-dimensionalt nulrum N_B. Det består af de vektorer $\underline{x}$ i V_{n+1}, for hvilke $B(\underline{x},\underline{y}) = 0$ for alle $\underline{y}$ i V_{n+1} og er altså kernen for den ved B bestemte lineære afbildning af V_{n+1} ind i V^*_{n+1}. Billedrummer ved denne afbildning har følgelig dimensionen r. Til nulrummet N_B svarer i Π^n en $(n - r)$-dimensional lineær mangfoldighed Σ. For en repræsentant $\underline{x}$ for et punkt i $\Pi^n \setminus \Sigma$ er linearformen $B(\underline{x},\underline{y})$ i $\underline{y}$ forskellig fra nulformen, og $B(\underline{x},\underline{y}) = 0$ følgelig ligningen for en hyperplan i Π^n. Ved til punktet at lade svare denne hyperplan, defineres en afbildning

$$\psi: \Pi^n \setminus \Sigma \to \Pi^n_* ,$$

der kaldes den ved bilinearformen B bestemte <u>udartede</u> eller <u>singulære polaritet</u>. Punktmængden Σ, hvori den ikke er defineret, kaldes polaritetens <u>singulære mangfoldighed</u>.

En singulær polaritet ψ er hverken surjektiv eller injektiv. Idet ligningen $B(\underline{x},\underline{y}) = 0$ er opfyldt for hvert givet $\underline{x}$, når $\underline{y}$ tilhører nulrummet for B, går nemlig alle billedhyperplaner gennem Σ. Ved ψ afbildes altså $\Pi^n \setminus \Sigma$ på en $(r - 1)$-dimensional lineær hyperplanmangfoldighed. Endvidere gælder, at punkter i $\Pi^n \setminus \Sigma$ har samme billedhyperplan, hvis og kun hvis de tilhører samme $(n - r + 1)$-dimensionale lineære mangfoldighed gennem Σ. At to forskellige punkter i $\Pi^n \setminus \Sigma$ tilhører samme $(n - r + 1)$-dimensionale lineare mangfoldighed gennem Σ er nemlig ensbetydende med, at deres forbindelseslinie skærer Σ (dimensionsformlen). Er $\underline{x}'$ og $\underline{x}''$ repræsentanter for punkterne, går dette ud på, at der findes fra 0 forskellige tal t' og t'' i legemet L, således at $t'\underline{x}' + t''\underline{x}''$ er repræsentant for et punkt tilhørende Σ, altså således at

$$B(t'\underline{x}' + t''\underline{x}'', \underline{y}) = t'B(\underline{x}',\underline{y}) + t''B(\underline{x}'',\underline{y}) = 0$$

for alle $\underline{y} \in V_{n+1}$. Dette er ensbetydende med, at linearformerne $B(\underline{x}',\underline{y})$ og $B(\underline{x}'',\underline{y})$ er proportionale, altså at der til de to punkter svarer samme hyperplan. Heraf fremgår, at ψ bestemmer en bijektiv afbildning af mængden af $(n - r + 1)$-dimensionale lineære mangfoldigheder gennem Σ på mængden af hyperplaner gennem Σ.

Den til et punkt i $\Pi^n \setminus \Sigma$ svarende hyperplan kaldes også her *punktets polar*. Et punkt i Σ har ikke nogen polar. En hyperplan har ikke nogen entydig bestemt pol; hvis den indeholder Σ, har den uendelig mange poler, og hvis den ikke indeholder Σ, slet ingen. To punkter kaldes også her *konjugerede*, hvis de har repræsentanter $\underline{x}$ og $\underline{y}$, som er konjugerede med hensyn til bilineärformen, altså opfylder $B(\underline{x},\underline{y}) = 0$. To punkter, hvoraf mindst ét tilhører Σ, er konjugerede. To punkter uden for Σ er konjugerede, hvis og kun hvis hvert af dem ligger i det andets polar. Et punkts polar er mængden af dets konjugerede punkter.

Idet en singulær polaritet ψ ikke bestemmer nogen afbildning af hyperplanmængden Π_*^n (ej heller af en delmængde af den) ind i punktmængden Π^n, kan man ikke tale om at den er involutorisk. Der gælder dog: *Er Π^{n-1} en hyperplan i Π^n, vil fællesmængden for polarerne til punkterne i $\Pi^{n-1} \setminus \Sigma$ være den $(n - r + 1)$-dimensionale lineære mangfoldighed Π^{n-r+1}, som består af Σ og de punkter, hvis polar er Π^{n-1}.* Dette ses således: Idet alle punkter i Π^{n-r+1} er konjugeret til hvert punkt i Π^{n-1}, er Π^{n-r+1} indeholdt i polarernes fællesmængde. Omvendt, et punkt, som tilhører alle polarerne, er konjugeret til alle punkter i Π^{n-1} og må derfor enten tilhøre Σ eller have Π^{n-1} som polar.

I det følgende gives en oversigt over de singulære polariteter i tilfældene $n = 1$, 2 og 3.

$n = 1$, $r = 1$. Den singulære mangfoldighed Σ består her af et punkt på den projektive linie Π^1. Idet der til punkterne på $\Pi^1 \setminus \Sigma$ svarer hyperplaner, her altså punkter, som indeholder Σ, er den singulære polaritet den konstante afbildning, der til hvert punkt af $\Pi^1 \setminus \Sigma$ lader svare Σ. I betragtning af, at enhver ikke-udartet polaritet på Π^1 er en involutorisk projektivitet, kort en involution, kaldes en udartet projektivitet på den projektive linie en <u>udartet</u> eller <u>singulær</u> <u>involution</u>, skønt den ikke har meget tilfælles med en involutorisk afbildning.

$n = 2$, $r = 1$. Den singulære mangfoldighed Σ er en linie i den projektive plan Π^2. Den singulære polaritet er den konstante afbildning, der til hvert punkt i $\Pi^2 \setminus \Sigma$ lader svare linien Σ.

$n = 2$, $r = 2$. Den singulære mangfoldighed Σ er et punkt i den projektive plan Π^2. Til hvert punkt i $\Pi^2 \setminus \Sigma$ svarer ved den singulære polaritet en linie gennem Σ. Til punkter på en linie gennem Σ svarer samme linie. Afbildningen kan fortolkes som en involutorisk projektivitet, en (regulær) involution, i liniebundtet med toppunkt Σ.

$n = 3$, $r = 1$. Den singulære mangfoldighed Σ er en plan i det projektive rum Π^3. Den singulære polaritet er den konstante afbildning, der til hvert punkt i $\Pi^3 \setminus \Sigma$ lader svare planen Σ.

$n = 3$, $r = 2$. Den singulære mangfoldighed Σ er en linie i det projektive rum Π^3. Til hvert punkt i $\Pi^3 \setminus \Sigma$ svarer ved den singulære polaritet en plan gennem Σ. Til punkter i en plan gennem Σ svarer samme plan. Afbildningen kan fortolkes som (regulær) involution i planbundtet med aksen Σ.

$n = 3$, $r = 3$. Den singulære mangfoldighed Σ er et punkt i rummet Π^3. Til hvert punkt i $\Pi^3 \setminus \Sigma$ svarer en plan gennem Σ. Til punkter på en linie gennem Σ svarer samme plan. Afbildningen kan fortolkes som en regulær polaritet i knippet med toppunkt Σ. (En sådan svarer ved dualitetsprincippet for rummet til en regulær polaritet i en plan.)

I modsætning til de regulære polariteter er de singulære ikke selvduale. Ved en udartet symmetrisk bilinearform B^* i V^*_{n+1} bestemmes en afbildning

$$\psi^*: \Pi^n_* \setminus \Sigma^* \to \Pi^n,$$

hvor den <u>singulære hyperplanmangfoldighed</u> Σ^* er den lineære hyperplanmangfoldighed, der svarer til nulrummet N_{B^*} i V^*_{n+1} for formen B^*. Betegner r, hvor $0 < r < n + 1$, formens rang, har Σ^* dimensionen $n - r$ og består følgelig af hyperplanerne gennem en $(r-1)$-dimensional lineær mangfoldighed Ω. Ved ψ_* afbildes $\Pi^n_* \setminus \Sigma^*$, altså mængden af hyperplaner, som ikke indeholder Ω, på en $(r - 1)$-dimensional lineær mangfoldighed, nemlig Ω, idet hvert billedpunkt må ligge i alle hyperplaner tilhørende Σ^*! Hyperplaner tilhørende $\Pi^n_* \setminus \Sigma^*$ har samme billedpunkt, hvis og kun hvis de skærer Ω i samme $(r - 2)$-dimensionale lineære mangfoldighed (tilhører samme $(n - r + 1)$-dimensionale lineære hyperplanmangfoldighed i Σ^*). Heraf fremgår, at ψ_* bestemmer en bijektiv afbildning ψ_{*0} af mængden Ω^* af [de $(r - 2)$-dimensionale] hyperplaner i Ω på mængden af punkter i Ω.

Denne afbildning $\psi_{*0}: \Omega^* \to \Omega$ er en regulær polaritet. Dette ses således: I et koordinatsystem, hvis grundpunkter $E_0, E_1, \ldots, E_{r-1}$ ligger i Ω, vil de $(n - 1)$-dimensionale sider $E^*_r, E^*_{r+1}, \ldots, E^*_n$ af fundamentalsimplexet tilhøre Σ^*. Bilinearformen B^*, der bestemmer ψ_*, vil da reduceres til

$$B^*(\underline{u}^*, \underline{v}^*) = \sum_{i,j=1}^{r-1} b^*_{ij} u_i v_j,$$

idet

$$b^*_{ij} = B^*(\underline{e}^*_i,\underline{e}^*_j) = 0, \qquad i,j = r,\ldots,n,$$

hvor $\underline{e}^*_i$ og $\underline{e}^*_j$ er repræsentanter for E^*_i og E^*_j. Da rg $B^* = r$, er restriktionen af B^* til det af $\underline{e}^*_0,\underline{e}^*_1,\ldots,\underline{e}^*_{r-1}$ udspændte r-dimensionale vektorrum en regulær bilinearform i dette. Hyperplaner i Π^n tilhørende Σ^* har koordinatsæt af formen $(0,\ldots,0,u_r,\ldots,u_n)$, og for en hyperplan i $\Pi^n \setminus \Sigma^*$ med koordinatsættet $(u_0,\ldots,u_n)$ er $(u_0,\ldots,u_{r-1})$ et koordinatsæt for dens snit med Ω med hensyn til hyperplankoordinatsystemet med fundamentalsimplexet $(E^*_0,\ldots,E^*_{r-1})$. Heraf sluttes, at den nævnte restriktion af B^* bestemmer afbildningen ψ_{*0}, og denne er følgelig en regulær polaritet, som påstået.

Det bemærkes, at den ovenfor omtalte afbildning ψ_0 af mængden af $(n - r + 1)$-dimensionale lineære mangfoldigheder gennem Σ på mængden af hyperplaner gennem Σ ved dualiteten i Π^n svarer til en afbildning ψ_{*0} af den betragtede art. Man kan der fortolke ψ_0 som en polaritet i det $(r - 1)$-dimensionale projektive rum, der udgøres af de $(n - r + 1)$-dimensionale lineære mangfoldigheder gennem Σ. (Jfr. ovenstående beskrivelse af de singulære polariteter i tilfældene $n = 1$, 2 og 3.)

En afbildning ψ_* af den betragtede art kaldes i det følgende en <u>singulær $*$-polaritet</u>. Det til en hyperplan i $\Pi^n_* \setminus \Sigma^*$ svarende punkt kaldes <u>hyperplanens pol</u>. En hyperplan i Σ^* har ikke nogen pol. Et punkt har ikke nogen entydig bestemt polar; hvis det ligger i Ω, har det uendelig mange og ellers slet ingen. To hyperplaner siges at være <u>konjugerede</u>, hvis de har repræsentanter $\underline{u}^*$ og $\underline{v}^*$, for hvilke $B^*(\underline{u}^*,\underline{v}^*) = 0$. To hyperplaner, hvoraf mindst én tilhører Σ^* (indeholder Ω), er konjugerede.

To hyperplaner uden for Σ^* er konjugerede, hvis og kun hvis hver af dem går gennem den andens pol. En hyperplans pol er fællespunktet for de konjugerede hyperplaner.

Der findes følgende typer af singulære $*$-polariteter i tilfældet $n = 3$.

$n = 3$, $r = 1$. Den singulære planmangfoldighed Σ^* har dimensionen 2, er altså et planknippe, hvis toppunkt er Ω. Den singulære $*$-polaritet er den konstante afbildning, der til hver plan, som ikke går gennem Ω lader svare punktet Ω.

$n = 3$, $r = 2$. Den singulære planmangfoldighed Σ^* har dimensionen 1, er altså et planbundt, hvis akse er Ω. Til hver plan, som ikke indeholder Ω, svarer ved den singulære $*$-polaritet et punkt på Ω. Planer, som skærer Ω i samme punkt, har samme billedpunkt. Der bestemmes altså en afbildning, nemlig en regulær involution, af linien Ω på sig selv.

$n = 3$, $r = 3$. Den singulære planmangfoldighed har dimensionen 0, består altså af én plan, som tillige er Ω. Til hver fra denne forskellig plan svarer ved den singulære $*$-polaritet et punkt i Ω. Planer, som skærer Ω i samme linie, har samme billedpunkt. Der bestemmes en afbildning ψ_{*0} af mængden Ω^* linier i Ω ind i mængden af punkter i Ω, og denne afbildning er en regulær polaritet i Ω.

Lad der være givet en polaritet ψ i Π^n. Et n-dimensionalt simplex $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ i Π^n siges at være <u>selvpolært</u> eller et <u>polarsimplex</u> for ψ, hvis dets hjørner er parvis konjugerede. Dette er ensbetydende med, at hvert hjørne, som ikke tilhører den (eventuelle) singulære mangfoldighed Σ, har sin modstående side til polar. Ved singulære $*$-polariteter må den sidste karakterisering erstattes med den dualistisk tilsvarende: Hver $(n - 1)$-dimensional side, som ikke tilhører den singulære hyperplanmangfoldighed Σ^*, har sit modstående hjørne til pol. Ved regulære polariteter kommer de to krav ud på ét.

Eksistensen af polarsimpler for en polaritet bestemt ved en bilinearform B i V_{n+1} er ensbetydende med eksistensen af baser for V_{n+1}, hvis vektorer er parvis konjugerede. Sætningen herom ~~for~~ den former sig i projektivgeometrisk fortolkning således:

For enhver polaritet af rang $r > 0$ i Π^n findes der polarsimplexer, og hvert af disse har for $r < n + 1$ netop $n - r + 1$ af hjørnerne beliggende i polaritetens singulære mangfoldighed Σ.

Bevis: Man vælger et punkt A_o således, at der for en repræsentant $\underline{a}_o$ gælder $B(\underline{a}_o, \underline{a}_o) \neq 0$. Dette er muligt, idet $r > 0$. Hvis polaren A_o^* til A_o er den singulære mangfoldighed Σ, hvilket indtræffer, hvis og kun hvis $r = 1$, skal de øvrige hjørner ligge i $A_o^* = \Sigma$. Vælges vilkårligt n lineært uafhængige punkter $A_1, \ldots, A_n$ i A_o^*, fås et polarsimplex $(A_o, A_1, \ldots, A_n)$. Er A_o^* ikke Σ, altså $r > 1$, findes der i A_o^* et punkt A_1 med en repræsentant $\underline{a}_1$, for hvilken $B(\underline{a}_1, \underline{a}_1) \neq 0$. Polaren A_1^* skærer da A_o^* i en $(n - 2)$-dimensional lineær mangfoldighed $A_o^* \cap A_1^*$. Hvis denne er Σ, hvilket indtræffer, hvis og kun hvis $r = 2$, skal og kan de øvrige hjørner vælges i $A_o^* \cap A_1^* = \Sigma$. Er $A_o^* \cap A_1^*$ forskellig fra Σ, altså $r > 2$, vælges A_2 i $A_o^* \cap A_1^*$ således, at der for en repræsentant $\underline{a}_2$ gælder $B(\underline{a}_2, \underline{a}_2) \neq 0$. Det næste hjørne A_3 skal vælges i $A_o^* \cap A_1^* \cap A_2^*$ og så fremdeles.

Ved singulære $*$-projektiviteter erstattes ovenstående udsagn med det dualistisk tilsvarende.

Lad der være givet en polaritet ψ i Π^n bestemt ved en bilinearform B. Som fundamentalsimplex $(E_o, E_1, \ldots, E_n)$ for et koordinatsystem i Π^n vælges et polarsimplex. Repræsentanter $\underline{e}_o, \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ for hjørnerne danner altså en basis for V_{n+1} bestående af vektorer, der er parvis konjugede med hensyn til B. For elementerne b_{ij} i den til B hørende matrix $\underline{\underline{B}}$ haves

$$b_{ii} = B(\underline{e}_i, \underline{e}_i) \begin{cases} \neq 0 & \text{for } i = 0, \ldots, r-1, \\ = 0 & \text{for } i = r, \ldots, n, \end{cases}$$

$$b_{ij} = B(\underline{e}_i, \underline{e}_j) \quad = 0 \qquad \text{for } i \neq j,$$

dvs. $\underline{\underline{B}}$ er en diagonalmatrix af formen

$$B = \mathrm{diag}(b_{oo}, \ldots, b_{r-1,r-1}, 0, \ldots, 0),$$

hvor de første r elementer er forskellige fra 0.

Er Π^n et komplekst projektivt rum, findes der tal $\beta_i \in L$, $i = 0, \ldots, r-1$, således at $\beta_i^2 b_{ii} = 1$. Ved koordinattransformationen

$$x_i = \beta_i \hat{x}_i \qquad \text{for } i = 0, \ldots, r-1,$$
$$x_i = \hat{x}_i \qquad \text{for } i = r, \ldots, n,$$

opnås, at bilinearformens matrix bliver

$$\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$$

med 1 på de første r pladser. Ved denne koordinattransformation bevares fundamentalsimplexet og punktet med koordinatsættet $(\beta_o, \ldots, \beta_{r-1}, 1, \ldots, 1)$ indføres som nyt enhedspunkt. Vi har altså:

<u>Til hver polaritet af rang</u> r, $1 \leq r \leq n+1$, <u>i det komplekse n-dimensionale projektive rum</u> Π^n <u>findes et punktkoordinatsystem, således at polariteten med hensyn til dette bestemmes ved</u>

$$x_o y_o + x_1 y_1 + \ldots + x_{r-1} y_{r-1} = 0.$$

For singulære $*$-polariteter træder i stedet for dette det dualistisk tilsvarende udsagn.

Er Π^n et reelt projektivt rum, sættes $\beta_i = |b_{ii}|^{-\frac{1}{2}}$. Lad p være antallet af positive og $q = \cancel{n-r}$ $r-p$ antallet af negative blandt tallene b_{ii}, hvorved $p = 0$ eller $q = 0$ ikke er udelukket. Det kan antages, at $p \geqq q$, idet bilinearformen B, om fornødent, kan erstattes med -B, uden at den tilhørende polaritet ændres. Med andre ord, hver polaritet kan bestemmes ved en bilinearform, hvis positivitetsindex er større end eller lig med dens negativitetsindex. Endvidere kan fundamentalpunkterne nummereres således, at $b_{oo},\dots,b_{p-1,p-1}$ er positive. Ved den til ovenstående analoge koordinattransformation opnås, at bilinearformens matrix bliver

$$\mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1,0,\dots,0)$$

med 1 på de første p og -1 på de næste $q = r - p$ pladser.

<u>Til hver polaritet af rang</u> r, $1 \leqq r \leqq n + 1$, <u>i det reelle n-dimensionale projektive rum</u> Π^n <u>findes et punktkoordinatsystem, således at polariteten med hensyn til dette bestemmes ved</u>

$$x_o y_o + \dots + x_{p-1}y_{p-1} - x_p y_p - \dots - x_{r-1}y_{r-1} = 0,$$

<u>hvor</u> $\frac{1}{2}r \leqq p \leqq r$.

Ifølge Sylvesters sætning er tallet p det samme for alle koordinatsystemer med denne egenskab.

For singulære $*$-polariteter skal udsagnet erstattes med det dualistisk tilsvarende.

To polariteter ψ og χ i et projektivt rum siges at være <u>projektiv-ækvivalente</u>, hvis der findes en kollineation $\varphi:\Pi^n \to \Pi^n$, $\varphi_*:\Pi^n_* \to \Pi^n_*$, for hvilken $\varphi_* \circ \psi = \chi \circ \varphi$. Dette betyder, at der ved kollineationen afbildes hvert par bestående af et punkt og dettes polar ved ψ på et par bestående af et punkt og dettes polar ved χ. Med andre ord, for hvert punkt $X \in \Pi^n$, for hvilket

$\psi(X)$ er defineret, skal $\chi(\varphi(X))$ være defineret, og der skal gælde

$$\chi(\varphi(X)) = \varphi_*(\psi_*(X)).$$

Dette indebærer specielt, at ψ og χ har samme rang, idet φ må afbilde den singulære mangfoldighed for ψ på den singulære mangfoldighed for χ.

Er $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ og $\underline{\underline{C}}$ matricer, der med hensyn til et valgt koordinatsystem hører til henholdsvis φ, ψ og χ, vil $\underline{\underline{A}}'^{-1}$ høre til φ_*, og betingelsen for projektiv-ækvivalens af ψ og χ går ud på, at der findes et $\rho \in L$, $\rho \neq 0$, således at $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}} = \rho \underline{\underline{A}}'^{-1}\underline{\underline{B}}$, altså

$$\underline{\underline{C}} = \rho \underline{\underline{A}}'^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}.$$

For bilinearformer B og C, der bestemmer henholdsvis ψ og χ betyder dette, at C er lineær-ækvivalent med en bilinearform, der er proportional med B. Idet matrixligningen viser, at rg $\underline{\underline{C}}$ = rg $\underline{\underline{B}}$, fremgår heraf pány, at projektiv-ækvivalente polariteter har samme rang.

I det komplekse tilfælde gælder også det omvendte, idet to komplekse symmetriske bilinearformer i samme vektorrum og af samme rang er lineær-ækvivalente. Vi har altså:

<u>To polariteter i et komplekst projektivt rum er projektiv-ækvivalente, hvis og kun hvis de har samme rang.</u>

I det reelle tilfælde gælder, at bilinearformen med matricen $\underline{\underline{A}}'^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}$ har samme positivitetsindex og samme negativitetsindex som bilinearformen B med matricen $\underline{\underline{B}}$. Idet ρ kan være negativ, følger heraf for bilinearformen C med matricen $\underline{\underline{C}}$, at

$$|\operatorname{ind}_+ C - \operatorname{ind}_- C| = |\operatorname{ind}_+ B - \operatorname{ind}_- B|.$$

Dette sammen med rg C = rg B er imidlertid også tilstrækkeligt for projektiv-ækvivalens af ψ og χ; thi det medfører, at enten

C eller -C er lineær-ækvivalent med B. Vi har altså:

<u>To polariteter i et reelt projektivt rum er projektiv-ækvivalente, hvis og kun hvis bilinearformer, som bestemmer dem, har samme rang og samme absolutte differens mellem positivitets- og negativitetsindex</u>.

Såvel i det komplekse som i det reelle tilfælde er hver ækvivalensklasse af polariteter repræsenteret ved netop én af de ovenfor angivne normalformer for tilhørende bilinearformer.

Tilsvarende sætninger gælder for polariteter bestemt ved bilinearformer i V^*_{n+1}, specielt altså for singulære $*$-polariteter.

Ved den til en polaritet $\psi : \Pi^n \to \Pi^n_*$ hørende <u>punktkvadrik</u> K_ψ forstås mængden af de ved ψ selvkonjugerede punkter. Er B en bilinearform i V_{n+1}, som bestemmer ψ, er punktkvadrikken mængden af punkter, hvis repræsentanter $\underline{x}$ tilfredsstiller

$$B(\underline{x},\underline{x}) = 0.$$

Den svarer altså til en keglekvadrik i vektorrummet V_{n+1}.

Ved den til en polaritet $\psi_* : \Pi_* \to \Pi^n$ (specielt en singulær $*$-polaritet) hørende <u>hyperplankvadrik</u> $K_{\psi*}$ forstås mængden af de ved ψ_* selvkonjugerede hyperplaner. Er B^* en bilinearform i V^*_{n+1}, som bestemmer ψ, er hyperplankvadrikken mængden af hyperplaner, hvis repræsentanter $\underline{u}^*$ tilfredsstiller

$$B(\underline{u}^*,\underline{u}^*) = 0.$$

En punkt- eller hyperplankvadrik kaldes <u>regulær</u> (<u>ikke-udartet</u>) eller <u>singulær</u> (<u>udartet</u>), efter som polariteten, som den hører til, er regulær eller singulær. Regulære kvadrikker i reelle projektive rum kan være tomme.

Øvelser til kap. III, § 4.

1. I den reelle projektive plan er givet et koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2; E)$. Vis, at den ved

$$\begin{aligned} u_0 &= 2x_0 - x_2 \\ u_1 &= x_1 + x_2 \\ u_2 &= -x_0 + x_1 \end{aligned}$$

givne korrellation ψ er en polaritet, og opskriv en ligning for det tilhørende keglesnit K. På linien $E^*(1,1,1)$ vælges koordinatsystemet F_0 $(1,-1,0)$, F_1 $(0,-1,1)$, F $(1,-2,1)$. Find en matrixfremstilling for den af ψ inducerede polaritet φ på E^*.

Vis, at φ er en hyperbolsk projektivitet, og bestem dens fixpunkter P_1 og P_2.

Vis, at P_1 og P_2 ligger på K.

Find koordinatsæt for tangenterne til K i P_1 og i P_2 og for disse liniers skæringspunkt P_0.

Find endelig en ligning for K i koordinatsystemet $(P_0, P_1, P_2; P)$ med P $(0,2,-1)$.

2. Lad K være et ikke udartet keglesnit i den reelle projektive plan, og lad $B \notin K$ og $C \notin K$ konjugerede punkter med hensyn til K. En linie gennem C skærer i P og Q. Linierne PB og QB skærer yderligere K i R, henholdsvis S. Vis, at C,R og S ligger på linie.

3. På et ikke udartet keglesnit K i den reelle projektive plan ligger 6 punkter A,B,C, A',B',C' således, at linierne AA',BB' og CC' går gennem et punkt O. Vis, at skæringspunkterne mellem linierne AB og A'B', AC og A'C', samt

BC og B'C' ligger på polaren til O.

4. I et ikke udartet keglesnit K i den reelle projektive plan er indskrevet en trekant ABC. Trekanten A'B'C' er bestemt ved, at linien A'B' er tangenten til K i C, B'C' tangenten i A og A'C' tangenten i B. Vis, at linierne AA', BB' og CC' går gennem samme punkt.

5. I den reelle projektive plan er givet et koordinatsystem $(E_0,E_1,E_2;E)$. Find en ligning for keglesnittet, som går gennem punkterne (1,0,1), (0,1,1) og (0,-1,1) og tangerer linierne med ligningerne $x_0-x_2 = 0$ og $x_1-x_2 = 0$.

6. I den reelle projektive plan er givet et koordinatsystem $(E_0,E_1,E_2;E)$. Hvad kan man sige om punkt- og linieligningerne for de keglesnit, som går gennem fundamentaltrekantens hjørner? Det samme spørgsmål for de keglesnit, som tangerer fundamentaltrekantens sider.

7. I den euklidiske plan er givet to ikke parallelle linier a_1 og a_2 samt tre punkter A_3,A_4,A_5, som ikke ligger på samme linie, og således, at ikke nogen af deres forbindelseslinier er parallelle med a_1 eller a_2. Der findes da én hyperbel, som går gennem de givne punkter, og hvis asymptoter er parallelle med a_1 og a_2. Konstruer hyperblens andet skæringspunkt med en vilkårligt given linie gennem A_5.

8. På et ikke-udartet keglesnit K i den reelle projektive plan er givet 5 punkter A_1,A_2,A_3,A_4,A_5. Vis, at idet P betegner skæringspunktet mellem A_1A_2 og A_4A_5 og Q skæringspunktet A_1A_5 og A_2A_3, vil PQ skære A_3A_4 i et punkt på tangenten til

K i punktet A_1.

9. I den euklidiske plan er givet fire punkter A_1, A_2, A_3, A_4 hvoraf ikke tre ligger på ret linie samt en ret linie a_5, som ikke er parallel med nogen af punkternes forbindelseslinie. Der findes da én parabel, som går gennem de givne punkter, og hvis akse er parallel med a_5. Konstruer skæringspunktet mellem parablen og en vilkårlig linie parallel med a_5. Konstruer endvidere parablens tangent i A_1.

10. I den euklidiske plan er givet fem linier a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 hvoraf ikke tre går gennem samme punkt. Der findes da én ellipse, som har alle fem linier som tangenter. Konstruer røringspunktet P for tangenten a_5. Konstruer den anden tangent til ellipsen gennem/et vilkårligt punkt Q på a_5.

I. Kurver i en orienteret plan.

Om parameterfremstillingen $\underline{x} = \underline{x}(t)$, hvor t gennemløber et åbent interval, for en kurve i en orienteret plan forudsættes, at $\underline{x}(t)$ tilhører klassen C^2, og at $\dot{\underline{x}}(t) \neq \underline{0}$ for t i intervallet. Med buelængden s, regnet fra et vilkårligt valgt punkt på kurven, som parameter gælder da $|\underline{x}'(s)| = 1$. Et ledsagende koordinatsystem $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$, hvor $\underline{v}_1 = \underline{x}'$, defineres her for hvert kurvepunkt ved at vælge $\underline{v}_2$ som den normalenhedsvektor til kurven, som ligger i planen og for hvilken den ved vektorparret $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ bestemte orientering stemmer overens med planens. Idet $\underline{x}'\cdot\underline{x}' = 1$ medfører $\underline{x}'\cdot\underline{x}'' = 0$, er $\underline{x}''$ proportional med $\underline{v}_2$. Man kan altså sætte $\underline{x}'' = \underline{v}_1' = \kappa\underline{v}_2$, hvor κ er en kontinuert reel funktion af s, hvis værdi i s_0 kaldes kurvens <u>krumning</u> i det pågældende punkt. At $\kappa(s_0) > 0$ (< 0), betyder, at tangentvektoren $\underline{v}_1$ drejer i planens positive (negative) omløbsretning, når s passerer s_0 voksende. (Til sammenligning mindes om, at en rumkurves krumning defineres ved $\kappa = |\underline{x}''| \geq 0$ og hovednormalvektoren $\underline{v}_2$ kun for de kurvepunkter, for hvilke $\kappa = |\underline{x}''| > 0$, og da ved $\underline{v}_2 = \underline{x}''/\kappa$.)

Frenets formler bliver her

$$\begin{aligned} \underline{v}_1' &= \kappa\underline{v}_2, \\ \underline{v}_2' &= -\kappa\underline{v}_1 \quad . \end{aligned}$$

(Formelt fremgår de altså af Frenets formler for en rumkurve ved at sætte $\tau = 0$. De kan dog ikke udledes på denne måde, idet κ og $\underline{v}_2$ her er defineret anderledes.) Den første er identisk med definitionsligningen for krumningen. Den anden fås (som ved rumkurver) ved at benytte, at $\underline{v}_2\cdot\underline{v}_2 = 1$ og $\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2 = 0$ medfører $\underline{v}_2'\cdot\underline{v}_2 = 0$ og $\underline{v}_1'\cdot\underline{v}_2 + \underline{v}_1\cdot\underline{v}_2' = 0$. Den første af disse ligninger siger, at $\underline{v}_2'$ er ortogonal til $\underline{v}_2$, altså proportional med $\underline{v}_1$, og af den anden fås, at proportionalitetsfaktoren er $-\kappa$.

Med $\underline{c}_0, \underline{c}_1, \underline{c}_2$ betegnes henholdsvis stedvektoren $\underline{x}(0)$, tangentvektoren $\underline{v}_1(0)$ og normalvektoren $\underline{v}_2(0)$ for det til $s = 0$ svarende kurvepunkt. Idet $\underline{v}_1 = \underline{v}_1(s)$ tilhører klassen C^1, findes der en kontinuert funktion Θ, således at $\Theta(s)$ for hvert s i definitionsintervallet for $\underline{x}(s)$ er et (fortegnsbestemt) måltal for vinklen fra $\underline{c}_1$ til $\underline{v}_1$ (argumentvariation). Den kaldes kurvens <u>tangentdrejning</u> ud fra det til $s = 0$ svarende punkt. Der gælder

$$\underline{v}_1 = \underline{c}_1 \cos\Theta + \underline{c}_2 \sin\Theta,$$
$$\underline{v}_2 = -\underline{c}_1 \sin\Theta + \underline{c}_2 \cos\Theta.$$

Af den første ligning kan sluttes, at $\Theta(s)$ tilhører klassen C^1. Man har nemlig

$$\cos\Theta = \underline{v}_1 \cdot \underline{c}_1, \qquad \sin\Theta = \underline{v}_1 \cdot \underline{c}_2,$$

og da hvert s i intervallet har en omegn, hvor $|\underline{v}_1 \cdot \underline{c}_1| < 1$ eller $|\underline{v}_1 \cdot \underline{c}_2| < 1$, gælder i en sådan omegn

$$\Theta = \operatorname{Arccos}(\underline{v}_1 \cdot \underline{c}_1) + \text{konst.} \quad \text{eller} \quad \operatorname{Arcsin}(\underline{v}_1 \cdot \underline{c}_2) + \text{konst.},$$

hvoraf påstanden aflæses. Ved differentiation af udtrykket for $\underline{v}_1$ fås

$$\underline{v}_1' = \Theta' \underline{v}_2,$$

altså

$$\Theta' = \kappa,$$

$$(*) \qquad \Theta(s) = \int_0^s \kappa(\sigma)\, d\sigma.$$

Integration af udtrykket for $\underline{x}' = \underline{v}_1$ giver

$$(**) \qquad \underline{x}(s) = \underline{c}_0 + \underline{c}_1 \int_0^s \cos\Theta(\sigma)\, d\sigma + \underline{c}_2 \int_0^s \sin\Theta(\sigma)\, d\sigma.$$

Dette viser, at kurven er fuldstændig bestemt ved $\underline{c}_0$, $\underline{c}_1, \underline{c}_2$ og funktionen $\kappa(s)$. Der findes altså højst én kurve, hvis krumning er en given kontinuert funktion $\kappa(s)$, som går gennem et givet punkt $\underline{c}_0$, og hvis ledsagende koordinatsystem i dette punkt er et givet ortonormalt vektorpar $(\underline{c}_1, \underline{c}_2)$. Ved krumningen som funktion af buelængden er kurven bestemt på nær egentlige flytninger.

På den anden side eksisterer der til en given vektor $\underline{c}_o$, et givet ortonormalt par $(\underline{c}_1, \underline{c}_2)$ og en given kontinuert funktion $\kappa(s)$ en kurve med de nævnte egenskaber. Defineres nemlig $\Theta(s)$ ved (*), vil (**) være en parameterfremstilling for en kurve, der opfylder kravene, hvilket ses således: Det er klart, at $\underline{x}(0) = \underline{c}_o$, at $\underline{x}$ tilhører klassen C^1, og at

$$\underline{x}'(s) = \underline{c}_1 \cos\Theta(s) + \underline{c}_2 \sin\Theta(s)$$

er en enhedsvektor, altså at s er buelængde og $\underline{x}' = \underline{v}_1$. Endvidere

$$\underline{v}_2(s) = -\underline{c}_1 \sin\Theta(s) + \underline{c}_2 \cos\Theta(s)$$

som "positiv" normalvektor til $\underline{v}_1$. Idet $\Theta(0) = 0$ ifølge (*), fås $\underline{v}_1(0) = \underline{c}_1$, $\underline{v}_2(0) = \underline{c}_2$. Da $\Theta(s)$ tilhører klassen C^1, gælder det samme om $\underline{x}'(s) = \underline{v}_1(s)$, dvs. $\underline{x}(s)$ tilhører klassen C^2. Endelig fås

$$\underline{v}_1' = (-\underline{c}_1 \sin\Theta + \underline{c}_2 \cos\Theta)\Theta' = \Theta' \underline{v}_2,$$

hvoraf ses, at $\Theta' = \kappa$ er kurvens krumning.

For et fast s i definitionsintervallet for $\underline{x}$ og alle reelle tal Δs, for hvilke $s + \Delta s$ også tilhører definitionsintervallet sættes

$$\underline{x}(s + \Delta s) - \underline{x}(s) = \underline{v}_1(s)\Delta s + \tfrac{1}{2}\kappa \underline{v}_2(s)(\Delta s)^2 + \underline{\varepsilon}(s,\Delta s)(\Delta s)^2.$$

Idet $\underline{x}(s)$ tilhører klassen C^2, følger af Taylors formel, at $\underline{\varepsilon}(s,\Delta s) \to \underline{0}$ for $\Delta s \to 0$. For simpelheds skyld skrives $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, κ, $\underline{\varepsilon}(\Delta s)$ i stedet for $\underline{v}_1(s)$, $\underline{v}_2(s)$, $\kappa(s)$, $\underline{\varepsilon}(s,\Delta s)$. Det forudsættes, at $\kappa \neq 0$. For tilstrækkelig små $|\Delta s|$ er da $|\underline{\varepsilon}(\Delta s)| < \frac{1}{2}|\kappa|$, og kurvepunktet $\underline{x}(s + \Delta s)$ vil ligge uden for kurvetangenten i $\underline{x}(s)$. Der findes da én cirkel, som tangerer kurven i $\underline{x}(s)$ og går gennem $\underline{x}(s + \Delta s)$. Denne cirkels centrum ligger på kurvenormalen og har altså en stedvektor, der kan skrives

$$\underline{z}(\Delta s) = \underline{x}(s) + \rho(\Delta s)\underline{v}_2,$$

hvor $|\rho(\Delta s)|$ er cirklens radius. Idet

$$|\underline{z}(\Delta s) - \underline{x}(s + \Delta s)| = |\underline{z}(\Delta s) - \underline{x}(s)|,$$

fås

$$(\underline{x}(s + \Delta s) - \underline{x}(s) - \rho(\Delta s)\underline{v}_2)^2 = (\rho(\Delta s))^2,$$

$$(\underline{v}_1\Delta s + \tfrac{1}{2}\kappa\,\underline{v}_2(\Delta s)^2 + \underline{\varepsilon}(\Delta s)(\Delta s)^2 - \rho(\Delta s)\underline{v}_2)^2 = (\rho(\Delta s))^2.$$

Med benyttelse af

$$(\underline{v}_1\Delta s + \tfrac{1}{2}\kappa\underline{v}_2(\Delta s)^2 + \underline{\varepsilon}(\Delta s)(\Delta s)^2)^2 = (\Delta s)^2 + \underline{\varepsilon}_1(\Delta s)(\Delta s)^2,$$

hvor $\underline{\varepsilon}_1(\Delta s) \to \underline{0}$ for $\Delta s \to 0$, kan dette skrives

$$(\Delta s)^2 - \kappa\rho(\Delta s)(\Delta s)^2 + \underline{\varepsilon}_2(\Delta s)(\Delta s)^2 = 0,$$

hvor $\underline{\varepsilon}_2(\Delta s) \to \underline{0}$ for $\Delta s \to 0$. For $\Delta s \neq 0$ fås efter division med $(\Delta s)^2$ og med κ, at $\rho(\Delta\ ) = 1/\kappa + (1/\kappa)\underline{\varepsilon}_2(\Delta s)$, hvilket $\rho(\Delta s) \to 1/\kappa$ for $\Delta s \to 0$. Den betragtede cirkel konvergerer altså mod cirklen med centrum $\underline{x}^*(s) = \underline{x}(s) + (1/\kappa(s))\underline{v}_2(s)$ og radius $1/|\kappa(s)|$. Denne sidste cirkel kaldes kurvens <u>krumningscirkel</u> og dens centrum kurvens <u>krumningscentrum</u> i det til s svarende punkt.

For hver del af kurven $\underline{x}(s)$, hvor $\kappa(s) \neq 0$, er

$$\underline{x}^*(s) = \underline{x}(s) + (1/\kappa(s))\underline{v}_2(s)$$

en parameterfremstilling for en kurve, der kaldes den til den givne kurve hørende <u>evolut</u>. Hvis $\underline{x}(s)$ tilhører klassen C^4 og $\kappa'(s) \neq 0$, tilhører $\underline{x}^*(s)$ klassen C^2, og der gælder ifølge Frenets anden formel

$$\frac{d}{ds}\underline{x}^* = \underline{v}_2\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right) \neq \underline{0}.$$

(Jfr. hertil opgave 1.9 i lærebogen.)

II. Om udfoldelige flader.

Beviserne for sætningerne 3.1 og 3.2 i lærebogen (side 31) kan føres således:

Sætning 3.1: Nødvendig og tilstrækkelig for, at en retlinet flade

$$\underline{x}(u^1,u^2) = \underline{y}(u^1) + u^2\underline{z}(u^1), \qquad |\underline{z}| = 1,$$

har samme tangentplan i punkterne på den til parameterværdien u^1 svarende frembringer, er, at der for denne værdi u^1 gælder

$$[\underline{y}',\underline{z},\underline{z}'] = 0,$$

dvs. at vektorerne $\underline{y}',\underline{z},\underline{z}'$ er lineært afhængige. (Her er differentiation med hensyn til u^1 angivet ved '.)

Tangentplanen i punktet $\underline{x}(u^1,u^2)$ udspændes af vektorerne $\underline{y}' + u^2\underline{z}'$ og $\underline{z}$. Er $\underline{y}',\underline{z}',\underline{z}$ lineært afhængige, altså paralelle med samme plan, er $y' + u^2\underline{z}'$ og $\underline{z}$ for hver værdi af u^2 også paralelle med denne plan. Dette viser tilstrækkeligheden. Har fladen i punkterne $\underline{x}(u^1,u^2)$ og $\underline{x}(u^1,v^2)$, hvor $v^2 \neq u^2$, den samme tangentplan, må $\underline{y}' + v^2\underline{z}'$ være en linearkombination af $\underline{y}' + u^2\underline{z}'$ og $\underline{z}$:

$$\underline{y}' + v^2\underline{z}' = \lambda(\underline{y}' + u^2\underline{z}') + \mu\underline{z},$$

altså

$$(1-\lambda)y' - \mu\underline{z} + (v^2 - \lambda u^2)\underline{z}' = \underline{0}.$$

Dette er en egentlig lineær relation mellem $\underline{y}',\underline{z},\underline{z}'$; thi for $\lambda \neq 1$ er koefficienten til $\underline{y}'$ og for $\lambda = 1$ koefficienten til $\underline{z}'$ forskellig fra 0. Dermed er nødvendigheden bevist.

Sætning 3.2. En retlinet flade, for hvilken $[\underline{y}',\underline{z},\underline{z}'] = 0$ for alle u^1 i det pågældende interval, er (under visse yderligere forudsætninger) en cylinderflade, en del af en kegleflade eller en del af tangentfladen for en rumkurve.

Hvis $\underline{z}' = \underline{0}$ i intervallet, altså $\underline{z}$ konstant, er fladen en cylinderflade.

Den videre undersøgelse foretages under antagelsen, at $\underline{z}' \neq \underline{0}$ i hele intervallet. Idet $\underline{z}'$ er ortogonal til $\underline{z}$, medfører dette, at $\underline{z}$ og $\underline{z}'$ er lineært uafhængige. Ifølge forudsætning må $\underline{y}'$ da være en linearkombination af $\underline{z}$ og $\underline{z}'$. Der findes altså funktioner $f = f(u^1)$ og $g = g(u^1)$, således at

$$\underline{y}' = f\underline{z} + g\underline{z}'.$$

Disse funktioner er entydig bestemte, og tilhører klassen C^1 (endda C^2); thi ved skalær multiplikation med $\underline{z}$ og $\underline{z}'$ fås henholdsvis $f = \underline{y}'\cdot\underline{z}$ og $g = (\underline{y}'\cdot\underline{z}')/(\underline{z}'\cdot\underline{z}')$.

Man søger at bestemme en funktion $u^2 = v(u^1)$ således, at

$$\underline{x}(u^1) = \underline{y}(u^1) + v(u^1)\underline{z}(u^1)$$

enten er konstant eller en parameterfremstilling for en rumkurve, hvis tangenter er frembringerne for den givne retlinede flade. Dette kommer ud på at forlange, at

$$\underline{x}' = \frac{d}{du^1}\underline{x}(u^1) = \underline{y}' + v'\underline{z} + v\underline{z}' = (f + v')\underline{z} + (g + v)\underline{z}'$$

er proportional med $\underline{z}$. Tilstrækkelig (og nødvendig) herfor er, at $g + v = 0$, altså at der vælges

$$v(u^1) = -g(u^1).$$

Man har da

$$\underline{x}' = (f - g')\underline{z}.$$

Hvis $f - g' = 0$ i hele intervallet, er $\underline{x}(u^1)$ en konstant vektor $\underline{c}$ og den givne flade en del af keglefladen med toppunkt $\underline{c}$ og frembringerretningerne $\underline{z}(u^1)$. Fladens parameterfremstilling kan skrives

$$\underline{x}(u^1,u^2) = \underline{c} + (u^2 + g(u^1))\underline{z}(u^1)$$

eller efter parametertransformationen $w^1 = u^1$, $w^2 = u^2 + g(u^1)$

$$\underline{x}(w^1,w^2) = \underline{c} + w^2\underline{z}(w^1),$$

hvor $w^2 \neq 0$, da de sædvanlige forudsætninger ikke er opfyldt i toppunktet. (Her er $\underline{x}(w^1,w^2)$ en ukorrekt skrivemåde for $\underline{x}(u^1(w^1,w^2),u^2(w^1,w^2))$.

Hvis $f - g' \neq 0$ i hele intervallet, kan fladens parameterfremstilling skrives

$$\underline{x}(u^1,u^2) = \underline{x}(u^1) + \frac{u^2 - g(u^1)}{f(u^1) - g'(u^1)}\underline{x}'(u^1)$$

eller

$$\underline{x}(w^1,w^2) = \underline{x}(w^1) + w^2\underline{x}'(w^1),$$

hvor

$$w^1 = u^1, \qquad w^2 = \frac{u^2 - g(u^1)}{f(u^1) - g'(u^1)},$$

og dette er en parameterfremstilling for tangentfladen for "spidskanten" (gratlinien) $\underline{x}(w^1)$. For $w^2 = 0$ fås denne. I dens punkter er $\partial\underline{x}/\partial w^1 = \partial\underline{x}/\partial w^2$, altså de sædvanlige forudsætninger ikke opfyldt. (I bogen er der i stedet for w^1,w^2 igen skrevet u^1,u^2.)

Til opgave 3.19 bemærkes følgende:

Påstanden går ud på, at hver "enparametret skare" af planer, som opfylder visse forudsætninger (som ikke er præciseret i opgaven), består af tangentplanerne til en udfoldelig flade. Med andre ord, der findes en udfoldelig flade, som "indhylles" af planerne i den forstand, at hver af planerne rører fladen langs en frembringer. Her gives et bevis for det tilfælde, at de givne planer er tangentplanerne til en given flade i punkterne på en given kurve på denne. Dette kommer ud på følgende: Til en given flade og en given kurve på denne findes en udfoldelig flade, der tangerer den givne i kurvens punkter. Ved hjælp af dette resultat kan man give en simpel geometrisk fortolkning af parallelforskydningen af vektorer langs kurven (jfr. opgave 4.18, side 45).

Lad $\underline{x}(u^1,u^2)$ være en parameterfremstilling for en flade, som opfylder de sædvanlige forudsætninger. Endvidere tænkes givet en kurve på fladen ved parameterfremstillingen $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$, hvor t gennemløber et interval J. Stedvektoren $\underline{x}(u^1(t),u^2(t))$ for det til t svarende kurvepunkt betegnes kort $\underline{x}(t)$ og enhedsvektoren på fladenormalen i dette punkt med $\underline{N}(t)$. Tangentplanen i punktet har da en ligning af formen

(1) $$\underline{N}(t)\cdot(\underline{r} - \underline{x}(t)) = 0,$$

hvor $\underline{r}$ betegner stedvektoren til et variabelt punkt i planen. Der søges en af t afhængig enhedsvektor $\underline{z}(t)$, således at den retlinede flade med parameterfremstillingen

(2) $$\underline{y}(t,v) = \underline{x}(t) + v\underline{z}(t)$$

for hver værdi $t \in J$ rører planen (1) langs den til t svarende frembringer. Dette kræver, at

(3) $$\underline{N}\cdot\underline{z} = 0, \qquad \underline{N}\cdot(\underline{x}' + v\underline{z}') = 0,$$

hvor ' betegner differentiation med hensyn til t. Idet $\underline{x}'$ er tangentvektor til fladen og v kan antage mindst én fra 0 forskellig værdi (faktisk alle reelle værdier med højst én undtagelse), reduceres den anden ligning til

(4) $$\underline{N}\cdot\underline{z}' = 0.$$

Ved differentiation af den første ligning med hensyn til t fås

(5) $$\underline{N}\cdot\underline{z}' + \underline{N}'\cdot\underline{z} = 0.$$

Ligningerne (3) medfører altså

$$\underline{N}\cdot\underline{z} = 0, \qquad \underline{N}'\cdot\underline{z} = 0.$$

Omvendt, hvis $\underline{z}$ for $t \in J$ tilfredsstiller disse ligninger, gælder (5), dermed (4) og, idet $\underline{N}\cdot\underline{x}' = 0$, også (3) for hvert v.

Der betragtes nu to (ikke udtømmende) tilfælde:

1) $\underline{N}' = \underline{0}$ for alle $t \in J$, altså $\underline{N}$ konstant langs den givne

kurve på fladen. Af $\underline{N}\cdot\underline{x}' = 0$ fås da ved integration $\underline{N}\cdot\underline{x} =$ konst., hvilket viser, at kurven $\underline{x}(t)$ ligger i en plan, og denne er tangentplan til den givne flade i alle kurvens punkter. Denne fælles tangentplan er da den søgte udfoldelige flade, hvilket stemmer med, at $\underline{z}(t)$ i det foreliggende tilfælde kun er underkastet betingelsen at være ortogonal til den konstante vektor $\underline{N}$.

2) $\underline{N}' \neq \underline{0}$ for alle $t \in J$. Da $\underline{N}'\cdot\underline{N} = 0$, er $\underline{N}$ og N' lineært uafhængige og vektoren $\underline{z}$ entydig bestemt på nær fortegn som enhedsvektor ortogonal til $\underline{N}$ og $\underline{N}'$. Man kan sætte

$$\underline{z} = \underline{N} \times \underline{N}'/|\underline{N} \times \underline{N}'| .$$

Med denne vektor $\underline{z}(t)$ er (2) en parameterfremstilling for en udfoldelig flade af den forlangte art. Det fremgår af det sagte, at den er entydig bestemt.

III. Lagranges multiplikatorregel.

Lad Ω være en åben delmængde af talrummet R^n og $f(\underline{x}) = f(x_1,\ldots,x_n)$ og $g(\underline{x}) = g(x_1,\ldots,x_n)$ reelle funktioner, der er definerede og differentiable i Ω. Det forudsættes, at

$$M = \{\underline{x} \mid g(\underline{x}) = 0\} \neq \emptyset .$$

Multiplikatorreglen giver en nødvendig betingelse for, at "f i et punkt $\underline{a} \in \Omega$ har et lokalt minimum (maximum) under bibetingelsen $g = 0$". Dermed menes, at der findes en omegn U af $\underline{a}$, således at

$$f(\underline{x}) \geq f(\underline{a}) \qquad \text{for } \underline{x} \in U \cap M.$$

Med betegnelserne $D_i f$, $D_i g$ for de partielle afledede af f og g med hensyn til x_i gælder:

<u>En nødvendig betingelse for, at</u> f <u>har et lokalt minimum eller maximum i punktet</u> $\underline{a} \in \Omega$ <u>under bibetingelsen</u> $g = 0$, <u>er, at</u>

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} D_1 f(\underline{a}) & \dots & D_n f(\underline{a}) \\ D_1 g(\underline{a}) & \dots & D_n g(\underline{a}) \end{pmatrix} \leqq 1.$$

Bevis: Antag, at rangen af denne matrix er 2. Da findes en regulær (2×2)-delmatrix, f.eks. den, der består af de to første søjler. Ved $(x_1, x_2) \rightarrow (y_1, y_2)$, hvor

$$y_1 = f(x_1, x_2, a_3, \dots, a_n),$$
$$y_2 = g(x_1, x_2, a_3, \dots, a_n)$$

defineres en afbildning φ af en omegn af (a_1, a_2) i $\grave{R}^2$ ind i $\grave{R}^2$, ved hvilken

$$\varphi(a_1, a_2) = (f(\underline{a}), 0).$$

Da funktionalmatricen ifølge antagelsen er regulær, vil enhver tilstrækkelig lille omegn V af (a_1, a_2) afbildes (enentydigt) på en omegn af $(f(\underline{a}), 0)$. Dette medfører, at billedmængden $\varphi(V)$ indeholder et liniestykke

$$\{(y_1, 0) \mid f(\underline{a}) - \delta < y_1 < f(\underline{a}) + \delta\}$$

for et tilstrækkeligt lille $\delta > 0$. Dette er imidlertid i strid med, at $f(\underline{x})$ har et lokalt minimum eller maximum i $\underline{a}$ under bibetingelsen $g(\underline{x}) = 0$.

Hvis $f(\underline{x})$ har et lokalt minimum eller maximum i $\underline{a}$ under bibetingelsen, er altså de to rækker i ovenstående matrix lineært afhængige. Der findes følgelig et talpar $(\lambda_0, \lambda_1) \neq (0,0)$, således at

$$\lambda_0 D_i f(\underline{a}) + \lambda_1 D_i g(\underline{a}) = 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Dermed har vi Lagranges multiplikatorregel:

Hvis $f(\underline{x})$ har et lokalt minimum eller maximum i $\underline{a}$ under bibetingelsen $g(\underline{x}) = 0$, findes der "multiplikatorer" λ_0, λ_1, der ikke begge er 0, således at differentialet $d(\lambda_0 f + \lambda_1 g)$ af funktionen $\lambda_0 f(\underline{x}) + \lambda_1 g(\underline{x})$ er identisk 0 for $\underline{x} = \underline{a}$.

Er dg ikke identisk 0 for $\underline{x} = \underline{a}$, kan λ_0 ikke være 0, og for

$\lambda = \lambda_0/\lambda_1$ fås $d(f + \lambda g) = 0$ for $\underline{x} = \underline{a}$.

På tilsvarende måde bevises: Har $f(\underline{x})$ et lokalt minimum eller maximum i $\underline{a}$ under m ($< n$) bibetingelser $g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_m(\underline{x}) = 0$, findes der et talsæt $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0,0,\ldots,0)$, således at

$$d(\lambda_0 f + \lambda_1 g + \ldots + \lambda_m g) = 0 \qquad \text{for } \underline{x} = \underline{a}.$$

Er $dg_1, \ldots, dg_m$ lineært uafhængige, kan man vælge $\lambda_0 = 1$.

I bogen (side 46) anvendes ovenstående på

$$f(\xi_1, \xi_2) = L_{ij}\xi^i\xi^j, \qquad g(\xi_1, \xi_2) = 1 - g_{ij}\xi^i\xi^j.$$

Da $L_{ij}\xi^i\xi^j/g_{ij}\xi^i\xi^j$ på grund af homogeniteten antager de samme værdier i mængden af punkter $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$ som $L_{ij}\xi^i\xi^j$ under bibetingelsen $g_{ij}\xi^i\xi^j = 1$, kan man her undvære multiplikatorreglen og i stedet for opstille den nødvendige betingelse for lokalt minimum eller maximum af ovenstående kvotient uden bibetingelser.

Øvelser i differentialgeometri.

1. I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i planen betragtes kurven (kædelinie) givet ved

$$x_1 = t \qquad\qquad - \infty < t < \infty$$
$$x_2 = a \cosh \frac{t}{a}$$

hvor a er en positiv konstant.

Find buelængden s som funktion af t regnet ud fra punktet (0,a) og opskriv kurvens naturlige parameterfremstilling.

Find krumningen som funktion af buelængden og vis, at ethvert kurvepunkt halverer liniestykket mellem krumningscentret og normalens skæringspunkt med x_1-aksen.

Kædelinien afvikles ud fra punktet (0,a), hvorved en kurve, tractricen, fremkommer. Find krumningen som funktion af buelængden for tractricen. Vis, at enhver tangent til denne afskærer et liniestykke af længden a mellem røringspunktet og x_1-aksen.

2. En plan kurve, den logaritmiske spiral, er i plane polære koordinater (r,v) givet ved

$$r = a \cdot e^{bv}, \quad - \infty < v < \infty,$$

hvor a og b er positive konstanter.

Find kurvens parameterfremstilling i retvinklede koordinater med v som parameter, og vis at kurvens tangent danner en konstant vinkel med radiusvektor.

Find buelængden s regnet ud fra (a,0) som funktion af v.

Find krumningen som funktion af s, og bestem krumningscirklen for kurven i (a,0).

Vis, at krumningscentret for et vilkårligt kurvepunkt er skæringspunktet mellem kurvens normal og den vinkelrette på radiusvektor i begyndelsespunktet, og vis herved at kurvens evolut er ligedannet med den selv.

3. En cirkel med radius a ruller i planen på en ret linie l. Et på cirkelperiferien fast punkt vil da beskrive en plan kurve, den almindelige <u>cykloide</u>. Find en parameterfremstilling for cykloiden, idet l vælges som x_1-akse, x_2-aksen, så (0,0) bliver et kurvepunkt, og drejningsvinklen t for den rullende cirkel bruges som parameter.
Vis, at cykloiden bliver en differentiabel kurve på nær i punkterne på x_1-aksen. Find buelængden regnet ud fra (0,0) og krumningen som funktioner af t.
Vis, at liniestykket mellem kurvepunkt og krumningscentret halveres af normalens skæringspunkt med x_1-aksen, og at dette punkt netop er røringspunktet for den rullende cirkel i den stilling, som svarer til det pågældende kurvepunkt.
Vis, at cykloidens evolut bliver en ny cykloide kongruent med den givne.

4. Lad $\vec{OA} = \underline{a}(\sigma)$, $0 \leqq \sigma \leqq \lambda$, være den naturlige parameterfremstilling for en tre gange differentiabel kurve på kuglen med centrum $\underline{O}$ og radius 1. Vis, at den ved

$$\vec{OP} = \underline{r}(t) = \int_0^t \underline{a}(\sigma)d\sigma, \quad 0 \leqq t \leqq \lambda,$$

givne kurve har konstant krumning, og at den ved

$$\vec{OP} = \underline{r}(t) = \int_0^t \underline{a}(\sigma) \times \underline{a}'(\sigma)d\sigma, \quad 0 \leqq t \leqq \lambda,$$

givne kurve har konstant torsion. For den første kurve er $\underline{a}(t)$ tangentvektor, for den anden binormalvektor.

5. Udregn første fundamentalform for en omdrejningsflade (sml. Langwitz opg. 3.1. s. 25).

6. Ved drejning af kædelinien $x_1 = a \cosh \frac{x_3}{a}$ om x_3-aksen fremkommer en flade, <u>katenoiden.</u> Opskriv parameterfremstillingen og find første fundamentalform for katenoiden, idet der som parametre u^1 og u^2 bruges buelængden på kædelinien ud fra $(a,0,0)$ og drejningsvinkelen.

Idet punktet P gennemløber skruelinien

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos u^1 \\ x_2 &= \sin u^1 \qquad\qquad -\infty < u^1 < \infty \\ x_3 &= h\, u^1 \end{aligned}$$

vil den rette linie l_P gennem P og x_3-aksen, og vinkelret på denne, beskriv en flade, <u>vindelfladen.</u> Opskriv parameterfremstillingen for vindelfladen, idet der som den ene parameter bruges u^1, og som den anden parameter u^2 bruges afstanden fra x_3-aksen, regnet positiv i retningen mod P.

Find med disse parametre første fundamentalform af vindelfladen.

Vis, at der findes en bijektiv og isometrisk afbildning af den del af vindelfladen, hvor $0 \leqq x_3 \leqq \pi \cdot a$ på den del af katenoiden, hvor $x_2 \geqq 0$, når $a = h$.

7. I halvplanen $x_3 > 0$ af x_1x_3-planen betragtes tractricen, der fremkommer ved at afvilke kædelinien

$$x_1 = a \cosh \frac{x_3}{a}$$

ud fra $(a,0,0)$.

Ved drejning om x_3-aksen fremkommer en flade, <u>pseudosfæren</u>.

På pseudosfæren bruges som parametre buelængden u^1 på tractricen og drejningsvinkelen u^2.

Vis, f.eks. ved et geometrisk ræsonnement, at første fundamentalform for pseudosfæren bliver

$$ds^2 = (du^1)^2 + a^2 e^{-\frac{2u^1}{a}} (du^2)^2.$$

Vis, at der ved

$$(u^1, u^2) \to (v^1, v^2) = (u^1 + \alpha, e^{\alpha/a}(u^2 + \beta))$$

hvor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, defineres en isometrisk afbildning af en delmængde af pseudosfæren på en delmængde af pseudosfæren. Vis, at hvis P og Q er punkter af pseudosfæren, da findes på denne omegne U_P og U_Q af P og Q og en isometrisk afbildning $f: U_P \to U_Q$, ved hvilken $f(P) = Q$.

8. Bestem samtlige geodætiske kurver på keglen

$$x_1 = \frac{1}{4} u^2 \cos(4u^1) \qquad -\infty < u^1 < \infty$$
$$x_2 = \frac{1}{4} u^2 \sin(4u^1) \qquad 0 < u^2 < \infty$$
$$x_3 = \frac{\sqrt{15}}{4} u^2$$

som forbinder punkterne $(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{15}}{4})$ og $(-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{\sqrt{30}}{4})$.

9. Tangentfladen til skruelinien:

$$x_1 = \cos u^1$$
$$x_2 = \sin u^1 \qquad -\infty < u^1 < \infty$$
$$x_3 = u^1$$

fremstilles ved

$$x_1 = \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \qquad -\infty < u^1 < \infty$$
$$x_2 = \sin u^1 + u^2 \cos u^1 \qquad -\infty < u^2 < \infty$$
$$x_3 = u^1 + u^2$$

Fladen udfoldes i $\xi_1\xi_2$-planen, således at skruelinien går over i en cirkel med centrum i begyndelsespunktet og punktet (1,0,0) i dennes skæringspunkt med ξ_1-aksens positive del.
Udtryk ξ_1 og ξ_2 som funktioner af u^1 og u^2. Fladepunkterne P_1 og P_2 bestemt ved $(u^1, u^2) = (0, 2\sqrt{2})$ og $(u^1, u^2) = (\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ skal forbindes langs fladen med den kortest mulige kurve.
Find dennes naturlige parameterfremstilling.

10. Om en flade med parameterfremstillingen

$$\underline{x} = \underline{x}(u^1, u^2) \qquad \begin{matrix} a^1 < u^1 < b^1 \\ a^2 < u^2 < b^2 \end{matrix}$$

forudsættes, at

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{[\varphi(u^1,u^2)]^2} \quad , \quad g_{12} = 0 \quad ,$$

hvor der er sat $\varphi = |\underline{x}_1|^{-1} = |\underline{x}_2|^{-1}$.

Vis, at hver af parameterkurverne har konstant geodætisk krumning, når og kun når der findes funktioner φ_1 og φ_2 af én variabel, således at

$$\varphi(u^1,u^2) = \varphi_1(u^1) + \varphi_2(u^2).$$

11. En omdrejningsflade er givet ved

$$x_1 = \varphi(u^1)\cos u^2 \qquad a < u^1 < b$$
$$x_2 = \varphi(u^1)\sin u^2 \qquad -\infty < u^2 < \infty$$
$$x_3 = \psi(u^1)$$

hvor $\varphi(u^1) > 0$ og $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$.

Find første fundamentalform og samtlige Christoffelsymboler Γ^r_{ik} af anden art.

Find parameterkurvernes geodætiske krumning.

Vis, at en kurve på fladen, givet ved

$$u^2 = f(u^1)$$

er geodætisk, når og kun når f tilfredsstiller differentialligningen:

$$f'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi} f' + (f')^3\varphi'\varphi = 0.$$

Bestem herved de geodætiske kurver på pseudosfæren (sml. opg. 7).

Ekstra rettelser til matematik 3.

side		læs	i stedet for
II,1,4	l.2	$1 \in L$	$1 \in M$
II,1,5	l.9 f.n.	ifølge (5),(6) og sætning 2	ifølge (5) og sætning 2
II,1,15	l.11	$f^*(\varepsilon^*(x^*))$	$f^*(\varepsilon^*(x))$
II,2,4	l.14	$\Phi\colon G \to G^*$	$\Phi\colon \tilde{H} \to \tilde{H}^*$
II,2,4	l.16	$\gamma^* \in G^*$	$\gamma^* \in \tilde{H}^*$
II,2,7	l.5	er en halvgruppe, og at $\cdot$ er distributiv med hensyn til + inden for $\grave{N}$.	er en halvgruppe.
II,2,8	l.1 f.n.	en total, ikkerefleksiv	en total
II,2,14	l.6	$\alpha \neq \nu$	$\alpha \neq o$
II,2,17	l.13 f.n.	$(\grave{Q},+,\cdot,<)$	$(\grave{Q},+,\cdot,\prec)$
II,2,17	l.12 f.n.	$\nu \prec (p\varepsilon)(q\varepsilon)^{-1}$	$\nu < (p\varepsilon)(q\varepsilon)^{-1}$
II,2,20	l.6 f.n.	$q - 1 \leq n\,b < q$	$q - 1 \leq b < q$
II,3,4	l.8 f.n.	L^*_+	L^*
II,3,4	l.6 f.n.	total, ikke refleksiv	total
II,3,9	l.3 f.n.	$\lvert a - r_m \rvert$	$\lvert a - r_n \rvert$
II,3,15	l.3 f.n.	$a_i g^{-i}$	$a_i g^{-1}$
II,4,2	l.12 f.n.	begrænset, ikke tom	begrænset
II,4,3	l.14	M'	M
II,4,8	l.5	$\underset{=}{\prec}$	$\prec$
II,5,1	l.1 f.n.	$(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2,$	$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_2,$
II,5,5		$\sum_{v=0}^{m}$	$\sum_{v=0}^{n}$
II,5,14	l.5 f.n.	der tilføjes: og $f_{a+b}(x) = (a+b)x$ $= ax + bx = f_a(x) + f_b(x)$ $= (f_a + f_b)(x)$	

III,2,1 l.4 f.n.	$\underline{e}_p'$	$\underline{e}_p$
III,2,2 l.3	$\underline{e}_o$,	$\underline{e}_1$,
III,2,2 l.5	λ_p'	λ_q'
III,2,4 l.2	$V_{n+1}^{**} = V_{n+1}$	$V_{n+1}^{*} = V_{n+1}$
III,2,6 l.7 f.n.	Π^o	Π^1
III,2,7 l.6	Π^1	Π^o
III,2,11 l.9	c_{jk}	a_{jk}
III,2,12 l.8	$\underline{c} = \underline{\grave{a}} + \underline{b}'$	$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$
III,2,14 l.13 f.n.	(2) og (3)	(3)
III,2,14 l.7 f.n.	(2) og (3)	(3)
III,2,19 l.10	$x_o\underline{e}_o$	$x_1\underline{e}_1$
III,2,20 l.3 f.n.	$0 \leqq s < r$	$o \leqq s \leqq r$
III,2,21 l.13	$o \leqq s \leqq n-1$	$o \leqq s < n-1$
III,2,21 l.5 f.n.	$s = 2$	$s = n - 2$
III,2,22	På tegning: E_{23} og X_{23} i stedet for E_{12} og X_{12}	
III,2,24 l.1.f.n.	fundamentalsimpleksets	fundamentaltetraedrets
III,2,24 l.11	E_i^*	E_i
III,2,26 l.1 f.n.	$(P_o,\dots,P_n)$	$(A_o,\dots,A_n)$
III,2,27 l.9	$(P_o,\dots,P_n)$	$(A_o,\dots,A_n)$
III,2,28 l.9	$df(E_1E_2E_{12}X_{12})$	$df(E_1E_2E_{12}X_{11})$
III,2,30 l.8	'er mangler på X-erne	
III,2,31 l.9 f.n. l.7 f.n.	x_2	x_3
III,3,1 l.5	sæt m.h.t. det andet	system
l.8	$\hat{x}_o$	$\hat{x}_1$
l.11	$x_o\underline{e}_o$	$x_1\underline{e}_1$

III,3,3	l.2	$\sigma\underline{\underline{u}} - \underline{\underline{S}}^{-1}$	$\sigma\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{u}}-$
III,3,3	l.1 f.n.	$a_o\|$ i nederste højre hjørne	$a_1\|$
III,3,7	l.11	der tilføjes: Heraf følger da at ψ^{-1} ligeledes er en projektiv kollineation	
III,3,8	l.9	der tilføjes: da ψ^{-1} er en projektiv kollineation	
III,3,8	l.2	Π'^{n}	Π'^{r-1}
III,3,9	l.11	$P'_o,\dots,P'_{n+1}$ i Π'^{n}	$P'_o,\dots,P'_{n+1}$,
	l.12	netop	højest
III,3,10	l.12	n	n + 1
III,3,10	l.9 f.n.	fælles faktor	faktor
III,3,13	l.4	$\underline{\underline{v}} - \underline{\underline{A}}$	$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{v}}-$
III,3,13	l.6	$\underline{\underline{u}}\|$	$\underline{\underline{u}}$
III,3,14	l.13 f.n.	(side III, 3,7-8)	(side IV,3,7-8)
III,3,15	l.2	en fra l' og linien AA'	en fra l'
III,3,16	l.10 f.n.	GL(n + 1, L)	GL(n,L)
III,3,16	l.1 f.n.	PGL(n,L)	PLG(n,L)
III,3,17	l.10	ideks for oven i stedet	
	l.12	for indeks for neden	
	l.16		
	l.1 f.n.		
III,3,20	l.12	(1,o)	(o,1)
	l.13	(o,1)	(1,o)
III,3,21	l.3 f.n.	$\underline{\underline{x}}\|$	$\underline{\underline{x}}$
	l.1 f.n.		
III,3,21	l.11 f.n.	Der tilføjes: Konfigurationerne af fixpunkter og fixhyperplaner bliver altså duale.	