# Matematik 2, 1962

**Werner Fenchel**

**Differentialligninger**

**Kap. I. Eksistens- og entydighedssætninger**
§1. Ascoli's Sætning
Øvelser til Kap. I. §1
§2. Lineære integalligninger med symmetriske kerner
Øvelser til Kap. I. §2
§3. En eksistenssætning for sædvanlige differentialligningssystemer
Øvelser til Kap. I. §3
§4. En entydighedssætning for sædvanlige differentiallligningssystemer
Øvelser til Kap. I. §4

**Kap. II. Lineaære differentialligningssystemer**
§1. Homogene lineære differentalligningssystemer
Øvelser til Kap. II. §1
§2. Inhomogene lineære differentialligningssystemer
Øvelser til Kap. II. §2

I,1,1.1. 6. positiv læs: positivt

- 7. $d_Y(\varphi(x'),\varphi(x'') \leqq \varepsilon$ læs: $d_Y(\varphi(x'),\varphi(x'')) \leqq \varepsilon$

I,1,2.- 14. der endelig læs: der en overdækning af $\Omega$ bestående af endelig

I,1,3.- 2. Man kan ikke i almindelige topologiske rum slutte fra, at enhver følge har et fortætningspunkt, til, at enhver følge har en konvergent delfølge. Men har topologien i hvert punkt en numerabel basis for omegnene om punktet, går det godt, og dette er netop opfyldt i metriske rum.

I,1,4.- 11. $p \in j$ læs: $p > j$

I,1,5.- 4. læs: $\leqq d_Y(\varphi_{pp}(x^{(j)}),\varphi_{qq}(x^{(j)})) + 2\varepsilon/3$.

- 16. $p,q \geqq m$ læs: $p \geqq m$

I,2,2.- 16. Schwarz's læs: Schwarz'

- 17. (K s",t) læs: (K(s",t)

I,2,6.- 2. se I,2,2.1.16.

I,2,6.- 7. sup K(s,t) læs: sup|K(s,t)|

I,3,2.- 1 f.n. Dt læs: Det

I,3,7.- 14. f læs: $\underline{f}$

- 3 f.n. ) læs: ))

I,4,2.- 6 f.n. x" læs: $\underline{x}$"

I,4,3.- 3. f læs: $\underline{f}$

I,4,øv. 2,3. Libschitz læs: Lipschitz

øv. 3.1. 3. aåledes læs: således

II,1,1.1. 6 f.n. åben læs: åbent

II,1,3.- 11 f.n. $\eta$ læs: $\underline{\eta}$

II,1,4.- 10. Der hentydes til sætningen: Enhver løsning, som tilhører en kompakt delmængde $\Omega_1 \subset \Omega$, kan forlænges til begge sider; d.v.s. der findes en løsning i et til begge sider udvidet interval, som i det oprindelige interval stemmer overens med den pågældende løsning.

Bevis: En løsning er defineret på et interval I.

1) Hvis I indeholder sit $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{højre}}{\text{venstre}}$ endepunkt $\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{a}$, trivielt.

2) Hvis I ikke indeholder sit $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{højre}}{\text{venstre}}$ endepunkt $\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{a}$. Med betegnelsern

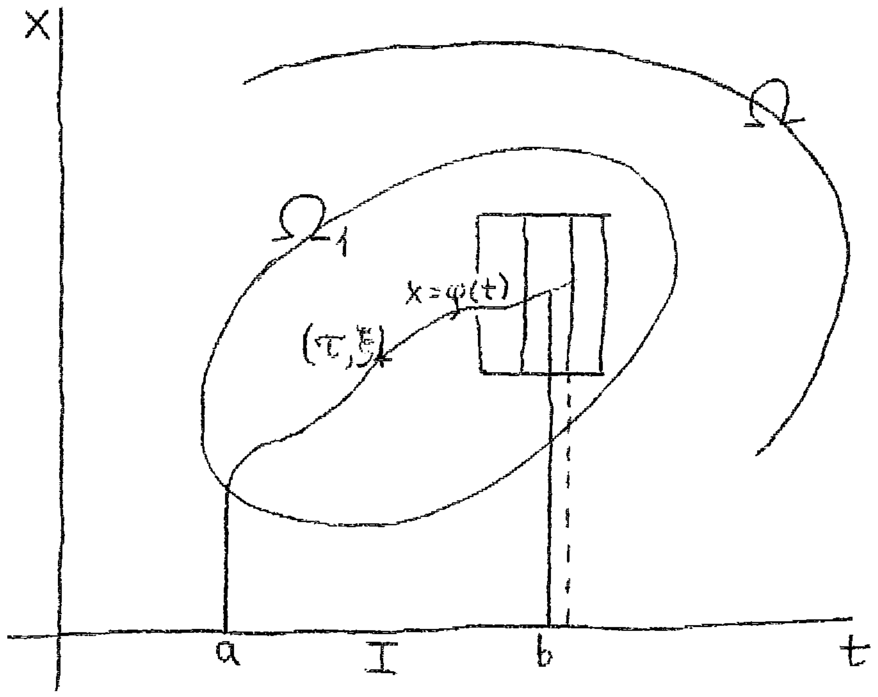
(1) $\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^{t} f(u,\varphi(u))du$ for alle $t \in I$; $M = \sup_{(t,x)\in\Omega_1} |f(t,x)|$

er for $t_1$, $t_2 \in I$, $t_1 < t_2$

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqq \int_{t_1}^{t_2} |f(u,\varphi(u))|du \leqq M\cdot|t_1 - t_2|;$$

hvor den sidste ulighed følger af, at $(u,\varphi(u)) \in \Omega_1$, når $t_1 < u < t_2$. Men heraf får vi, at der eksisterer $\lim_{t\to \genfrac{}{}{0pt}{}{b}{a}} \varphi(t) = \genfrac{}{}{0pt}{}{B}{A}$; vi definerer nu

$\varphi(b) = B$ og $\varphi(a) = A$, da gælder (1) også for $t = \genfrac{}{}{0pt}{}{b}{a}$. Men så er vi tilbage i situation 1). Hermed er beviset for sætningen afsluttet.




II,1,9.l. 1 f.n. J. M. Hoene-Wroński (1778-1853)

II,2,1.- 8 f.n. højre læs: højre side

II,2,<u>4</u>.- 18 f.n. j=1 læs: i=1

- 9 f.n. <u>arbitræ</u>-- læs: <u>arbitræ</u>-

II,2,øv. 1-3. l. 1. kap. III, læs: kap. II,

# Kap.I. Eksistens- og entydighedssætninger.

## § 1. Ascoli's sætning.

Lad X og Y være metriske rum med distancerne $d_X$ og $d_Y$, og lad der være givet en delmængde $\Omega$ af X. En afbildning $\varphi:\Omega \to Y$ siges at være ligelig kontinuert, hvis der for hvert positivt tal $\varepsilon$ findes et positiv tal $\delta$, således at

$$d_Y(\varphi(x'),\varphi(x'') \leqq \varepsilon$$

for alle $x',x'' \in \Omega$, for hvilke $d_X(x',x'') \leqq \delta$; i tegn

$$\forall_{\mathring{R}_+}\varepsilon\ \exists_{\mathring{R}_+}\delta\ \forall_\Omega x',x''\ [d_X(x',x'') \leqq \delta \Rightarrow d_Y(\varphi(x'),\varphi(x'')) \leqq \varepsilon].$$

En mængde $\Phi$ af afbildninger $\varphi:\Omega \to Y$ siges at være ensartet ligelig kontinuert, hvis der for hvert positivt tal $\varepsilon$ findes et positivt tal $\delta$, således at den samme implikation gælder for samtlige funktioner tilhørende $\Phi$, altså hvis

$$\forall_{\mathring{R}_+}\varepsilon\ \exists_{\mathring{R}_+}\delta\ \forall_\Omega x',x''\ \forall_\Phi\varphi\ [d_X(x',x'') \leqq \delta \Rightarrow d_Y(\varphi(x'),\varphi(x'')) \leqq \varepsilon].$$

En afbildning $\varphi:\Omega \to Y$ siges at være begrænset, hvis der findes en kugle i Y, således at $\varphi(x)$ tilhører denne for alle $x \in \Omega$; i tegn

$$\exists_Y c\ \exists_{\mathring{R}_+} r\ \forall_\Omega x\ [d_Y(c,\varphi(x)) \leqq r].$$

En mængde $\Phi$ af afbildninger $\varphi:\Omega \to Y$ siges at være ensartet begrænset, hvis der findes en kugle i Y, således at $\varphi(x)$ tilhører denne for alle $x \in \Omega$ og alle $\varphi \in \Phi$, altså hvis

$$\exists_Y c\ \exists_{\mathring{R}_+} r\ \forall_\Omega x\ \forall_\Phi\varphi\ [d_Y(c,\varphi(x)) \leqq r].$$

Ascoli's sætning handler om ensartet ligelig kontinuerte og ensartet begrænsede mængder af afbildninger $\varphi:\Omega \to Y$, hvor det forudsættes, at afslutningen $\overline{\Omega}$ af $\Omega$ er kompakt og at de afsluttede kugler i Y er kompakte.

En delmængde M i et topologisk rum siges som bekendt at være kompakt, hvis enhver åben overdækning af M (d.v.s. en overdækning bestående af åbne mængder) har den egenskab, at der findes endelig mange blandt dens mængder, som udgør en overdækning af M. Er M en kompakt delmængde af et metrisk rum, gælder altså specielt, at der for hvert positivt tal $\rho$ findes endelig mange kugler med radius $\rho$, hvis centrer tilhører M og som tilsammen overdækker M; thi samtlige åbne kugler med radius $\rho$ og centrum i M danner en åben overdækning af M. Har en delmængde $\Omega$ af et metrisk rum en kompakt afslutning $\bar{\Omega}$, findes der altså for hvert tal $\rho > 0$ endelig mange kugler med radius $\rho$ og centrum i $\bar{\Omega}$, som danner en overdækning af $\Omega$.

Lad $\Omega$ være en delmængde i et metrisk rum X, således at afslutningen $\bar{\Omega}$ er kompakt. Lad der endvidere være valgt en følge $\rho_p$, $p \in \dot{N}$, af positive tal, som konvergerer mod 0, altså f.eks. $\rho_p = 1/p$. For hvert $\rho_p$ findes der endelig mange åbne kugler med radius $\rho_p$ og centrum tilhørende $\bar{\Omega}$, som overdækker $\Omega$. Derved fås en numerabel mængde af kugler. Hver af dem har punkter fælles med $\Omega$. Ordnes disse kugler i en følge $K_i$, $i \in \dot{N}$, idet man f.eks. først tager de endelig mange med radius $\rho_1$ i en eller anden rækkefølge, dernæst de endelig mange med radius $\rho_2$ o.s.v., og vælges i hver af kuglerne et punkt tilhørende $\Omega$, fås en følge $x^{(i)} \in \Omega$, $i \in \dot{N}$. Om denne følge skal vises, at den er overalt tæt i $\Omega$, d.v.s. at hvert punkt i $\Omega$ er fortætningspunkt for følgen. Lad a være et vilkårligt punkt af $\Omega$ og $K(a,\varepsilon)$ kuglen med centrum a og en vilkårligt opgiven radius $\varepsilon > 0$. Da talfølgen $\rho_p$ konvergerer mod 0, findes der et nummer q, således at $\rho_q < \frac{1}{2}\varepsilon$. Blandt kuglerne $K_i$ med radius $\rho_q$ findes der mindst een, $K_j$, som indeholder a. For denne gælder $K_j \subseteq K(a,\varepsilon)$, og man har altså $x^{(j)} \in K(a,\varepsilon)$. Hver kugle med centrum a indeholder altså et punkt af følgen $x^{(i)}$, $i \in \dot{N}$. Dermed er påstanden bevist.

Endvidere nævnes, at hvis C er en kompakt delmængde i et ~~topologisk, altså specielt et~~ metrisk rum Y, vil hver følge af punkter $y^{(i)} \in C$, $i \in \dot{N}$, have en delfølge, som konvergerer mod et punkt af C. Påstanden er ensbetydende med, at mindst eet punkt af C er fortætningspunkt for følgen. Antag, at dette ikke var tilfældet. Hvert punkt $y \in C$ ville da have en åben omegn $U(y)$, således at $y^{(i)} \in U(y)$ kun for endelig mange numre i. Omegnene $U(y)$, $y \in C$, ville udgøre en overdækning af C. Da C er kompakt, ville endelig mange af dem overdække C, og dette ville medføre, at der kun fandtes endelig mange numre i, for hvilke $y^{(i)} \in C$, i strid med, at hele følgen tilhører C.

Efter disse forberedelser bevises Ascoli's sætning:

Lad X være et metrisk rum og $\Omega$ en delmængde af X, hvis afslutning $\overline{\Omega}$ er kompakt. Lad endvidere Y være et metrisk rum, hvis afsluttede kugler er kompakte. Lad endelig $\Phi$ være en ensartet ligelig kontinuert og ensartet begrænset mængde af afbildninger $\varphi:\Omega \to Y$. Da indeholder enhver følge $\varphi_p \in \Phi$, $p \in \dot{N}$, en delfølge, som konvergerer ligeligt mod en ligelig kontinuert afbildning af $\Omega$ ind i Y.

Bevis: Som omtalt ovenfor findes der en følge $x^{(i)} \in \Omega$, $i \in \dot{N}$, som er overalt tæt i $\Omega$. Da $\Phi$ er ensartet begrænset, findes der en afsluttet kugle $K \subseteq Y$, således at $\varphi(x) \in K$ for alle $x \in \Omega$ og alle $\varphi \in \Phi$ . Ifølge forudsætningen om Y er K kompakt.

Først vises, at den givne følge af afbildninger $\varphi_p$, $p \in \dot{N}$, har en delfølge $\varphi_{p_\nu}$, $\nu \in \dot{N}$, således at $\varphi_{p_\nu}(x^{(j)})$, $\nu \in \dot{N}$, for hvert fast j er en konvergent punktfølge i Y. Til dette formål betragtes punktfølgen $\varphi_p(x^{(1)})$, $p \in \dot{N}$. Idet $\varphi_p(x^{(1)}) \in K$, og K er kompakt, har denne punktfølge en konvergent delfølge. Der findes altså en delfølge $\varphi_{p1}$, $p \in \dot{N}$, af $\varphi_p$, $p \in \dot{N}$, således at

$\varphi_{p1}(x^{(1)})$, $p \in \dot{N}$, er konvergent. Dernæst betragtes punktfølgen $\varphi_{p1}(x^{(2)})$, $p \in \dot{N}$. Da dens punkter tilhører den kpmpakte mængde K, har den en konvergent delfølge. Der findes altså en delfølge $\varphi_{p2}$, $p \in \dot{N}$, af $\varphi_{p1}$, $p \in \dot{N}$, således at ikke blot $\varphi_{p2}(x^{(1)})$, men også $\varphi_{p2}(x^{(2)})$, $p \in \dot{N}$, er konvergent. På tilsvarende måde ses, at $\varphi_{p2}$, $p \in \dot{N}$ har en delfølge $\varphi_{p3}$, $p \in \dot{N}$, således at punktfølgerne $\varphi_{p3}(x^{(1)})$, $\varphi_{p3}(x^{(2)})$, $\varphi_{p3}(x^{(3)})$, $p \in \dot{N}$, konvergerer. Fortsættes på denne måde, fås efter j skridt en delfølge $\varphi_{pj}$, $p \in \dot{N}$, af alle de foregående, således at punktfølgen $\varphi_{pj}(x^{(i)})$, $p \in \dot{N}$, konvergerer for $i = 1,\ldots,j$. Om "diagonalfølgen" $\varphi_{pp}$, $p \in \dot{N}$, gælder da, at dens elementer $\varphi_{pp}$ for $p \geq j$ tilhører følgen $\varphi_{pj}$, $p \in \dot{N}$, og følgelig konvergerer punktfølgen $\varphi_{pp}(x^{(j)})$, $p \in \dot{N}$, for hvert $j \in \dot{N}$. For grænsepunktet indføres betegnelsen $\psi(x^{(j)})$, altså

$$\lim_{p \to \infty} \varphi_{pp}(x^{(j)}) = \psi(x^{(j)}).$$

Dernæst vises, at der for hvert punkt $x \in \Omega$ gælder, at punktfølgen $\varphi_{pp}(x)$, $p \in \dot{N}$, er konvergent, og at denne konvergens er ligelig. Idet følgens punkter tilhører den kompakte mængde K og den følgelig har et fortætningspunkt, er det tilstrækkeligt at vise, at den er enfundamentalfølge. Lad der være givet et tal $\varepsilon > 0$. Da funktionsmængden $\Phi$ er ensartet ligelig kontinuert, findes der et tal $\delta > 0$, således at

$$d_Y(\varphi(x'),\varphi(x'')) \leqq \varepsilon/3 \text{ for } \varphi \in \Phi,\ x',x'' \in \Omega,\ d_X(x',x'') \leqq \delta.$$

Lad $K_1,\ldots,K_r$ være endelig mange åbne kugler med radius $\frac{1}{2}\delta$, som overdækker $\Omega$. I hver af disse kugler vælges eet af punkterne $x^{(i)}$; hvilket er muligt, da punktfølgen $x^{(i)}$, $i \in \dot{N}$, er overalt tæt i $\Omega$. Lad J betegne mængden af de r numre for disse punkter. For hvert punkt $x \in \Omega$ findes der da et nummer $j \in J$, således at

$$d_X(x,x^{(j)}) \leqq \delta.$$

For $p,q \in \dot{N}$ har man følgelig

$$\begin{aligned} d_Y(\varphi_{pp}(x),\varphi_{qq}(x)) &\leqq d_Y(\varphi_{pp}(x),\varphi_{pp}(x^{(j)})) \\ &+ d_Y(\varphi_{pp}(x^{(j)}),\varphi_{qq}(x^{(j)})) \\ &+ d_Y(\varphi_{qq}(x^{(j)}),\varphi_{qq}(x)) \\ &\leqq d_Y(\varphi_{pp}(x^{(j)}),\varphi_{qq}(x^{(j)})) + 2\varepsilon/3. \end{aligned}$$

Idet punktfølgen $\varphi_{pp}(x^{(j)})$, $p \in \mathring{N}$, er konvergent og altså en fundamentalfølge, findes der et nummer $m(j)$, således at

$$d_Y(\varphi_{pp}(x^{(j)}),\varphi_{qq}(x^{(j)})) \leqq \varepsilon/3 \quad \text{for } p,q \geqq m(j).$$

Betegnes med $m$ det største af de $r$ tal $m(j)$, $j \in J$, gælder denne ulighed for $p,q \geqq m$ og alle $j \in J$. Følgelig er

$$d_Y(\varphi_{pp}(x),\varphi_{qq}(x)) \leqq \varepsilon \quad \text{for } p,q \geqq m,$$

hvor $m$ er uafhængig af $x$. Dermed er vist, at $\varphi_{pp}(x)$, $p \in \mathring{N}$, for hvert $x \in \Omega$ er en fundamentalfølge. Som allerede nævnt, medfører dette under de gjorte forudsætninger, at den er konvergent. Grænsepunktet betegnes med $\psi(x)$. Grænseovergangen $q \to \infty$ i den sidste ulighed giver

$$d_Y(\varphi_{pp}(x),\psi(x)) \leqq \varepsilon \quad \text{for } p,q \geqq m \text{ og alle } x \in \Omega,$$

hvilket viser, at konvergensen er ligelig.

At den herved definerede afbildning $\psi : \Omega \to K \subseteq Y$ er ligelig kontinuert, følger af, at man med ovenstående betegnelser har

$$d_Y(\varphi_{pp}(x'),\varphi_{pp}(x'')) \leqq \varepsilon/3$$

for alle $p \in \mathring{N}$ og alle $x',x'' \in \Omega$, for hvilke $d_X(x',x'') \leqq \delta$. Grænseovergangen $p \to \infty$ giver nemlig

$$d_Y(\psi(x'),\psi(x'')) \leqq \varepsilon/3$$

for de samme $x',x''$. Dermed er beviset for sætningen afsluttet.

I sætningens anvendelser i de følgende paragraffer vil rummene $X$ og $Y$ være endelig-dimensionale normerede talrum, $X$ et reelt og $Y$ et reelt eller komplekst. I hvert endelig-dimensionalt (reelt eller komplekst) normeret talrum er de begrænsede afsluttede mængder (og kun disse) kompakte (Borel's overdækningssætning). Forudsætningerne om $\Omega$ og $Y$ vil da være opfyldte, når $\Omega$ er en begrænset delmængde af $X$.

Øvelser til kap.I,§ 1.

1. Om en mængde $\Phi$ af differentiable afbildninger $\varphi$ af intervallet $[0,1]$ ind i talrummet $l_2(n,R)$ antages det, at der eksisterer en konstant M, således at $\|D\varphi(t)\|_2 \leqq M$ for alle $\varphi \in \Phi$ og alle $t \in [0,1]$. Vis, at $\Phi$ er ensartet ligelig kontinuert.

2. En i et interval J defineret reel funktion $\varphi$ siges at være konveks, hvis
$$\varphi((1-\vartheta)t_0 + \vartheta t_1) \leqq (1-\vartheta)\varphi(t_0) + \vartheta\varphi(t_1)$$
for $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ og alle $t_0, t_1 \in J$. Vis, at der for en sådan funktion gælder
$$\frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} \leqq \frac{\varphi(t_3) - \varphi(t_2)}{t_3 - t_2},$$
når $t_1, t_2, t_3 \in J$ og $t_1 < t_2 < t_3$.
Lad J være et (begrænset eller ubegrænset) åbent interval, og lad $\Psi$ være en mængde af i J definerede konvekse funktioner, som er ensartet begrænset på hvert afsluttet og begrænset delinterval af J. Vis, at $\Psi$ er ensartet ligelig kontinuert på hvert afsluttet og begrænset delinterval af J. (Vis først, at differenskvotienterne for funktionerne i $\Psi$ er ensartet begrænsede på et interval $[a,b] \subset J$ ved at benytte at funktionerne er ensartet begrænsede på et interval $[a-k,b+k] \subset J$, $k > 0$.)
Vis, at hver følge af funktioner fra $\Psi$ har en delfølge, som konvergerer i hvert punkt af J, og at grænsefunktionen er konveks.

## § 2. Lineære integralligninger med symmetrisk kerne.

De følgende undersøgelser vedrører vektorrummet $C_2[a,b]$ bestående af de i et givet begrænset interval $[a,b]$, $a < b$, kontinuerte reelle funktioner med det indre produkt

$$\varphi\cdot\psi = \int_a^b \varphi(t)\psi(t)dt.$$

Foruden den dertil hørende 2-norm

$$\|\varphi\|_2 = (\varphi\cdot\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

vil det være nødvendigt at inddrage normen

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|.$$

Der gælder uligheden

$$\|\varphi\|_2 = \left(\int_a^b \varphi(t)^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \|\varphi\|_\infty(b - a)^{\frac{1}{2}}.$$

En mængde $\Phi$ af funktioner i $C_2[a,b]$ kan være ensartet begrænset med hensyn til den ene eller den anden af de to normer. Hvis $\|\varphi\|_2$ er begrænset for $\varphi \in \Phi$, siges funktionsmængden $\Phi$ at være (ensartet) norm-begrænset. Hvis $\|\varphi\|_\infty$ er begrænset for $\varphi \in \Phi$, siges funktionsmængden $\Phi$ at være (ensartet) ligelig begrænset. (Ordet "ensartet" kan uden fare for misforståelser udelades her, idet hver enkelt funktion i $C_2[a,b]$ jo er begrænset.) Af ovenstående ulighed ses, at hvis en funktionsmængde er ligelig begrænset er den også norm-begrænset. Det omvendte gælder derimod ikke, da der findes funktioner med en given 2-norm, som antager vilkårlig store værdier. Tilsvarende er det nødvendigt at skelne mellem 2 slags konvergens af funktionsfølger. Hvis det for en følge $\varphi_i \in C_2[a,b]$, $i \in \dot{N}$, og en funktion $\varphi \in C_2[a,b]$ gælder, at $\|\varphi - \varphi_i\|_2$ konvergerer mod 0, siges følgen at konvergere i norm mod $\varphi$. Hvis $\|\varphi - \varphi_i\|_\infty$ konvergerer mod 0, siges følgen at konvergere ligeligt mod $\varphi$. Ovenstående ulighed viser, at ligelig konvergens medfører konvergens i norm. Det omvendte er ikke rigtigt.

Da der i denne paragraf kun vil være tale om et fast interval $[a,b]$ og alle integrationer udstrækkes over dette, betegnes det betragtede rum kort med $C_2$, og integrationsgrænserne udelades.

Lad der være givet en reel og kontinuert funktion $K(s,t)$ defineret i $[a,b] \times [a,b]$. For hver funktion $\varphi \in C_2$ er da

$$\psi(s) = \int K(s,t)\varphi(t)dt$$

en kontinuert funktion i $[a,b]$. Da $[a,b] \times [a,b]$ er en begrænset og afsluttet delmængde af $R^2$, er nemlig K ligelig kontinuert. For hvert tal $\varepsilon > 0$ findes der altså et tal $\delta > 0$, således at

$$|K(s'',t'')-K(s',t')| \leqq \varepsilon$$

for $s',t',s'',t'' \in [a,b]$, $|s'' - s'| + |t'' - t'| \leqq \delta$. Med benyttelse af Cauchy-Schwarz's ulighed fås da for $|s'' - s'| \leqq \delta$, at

$$|\psi(s'') - \psi(s')| = \left|\int (K(s'',t) - K(s',t))\varphi(t)dt\right|$$

$$\leqq \left(\int (K(s'',t) - K(s',t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_2 \leqq \varepsilon(b - a)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_2 .$$

Heraf ses, at $\psi$ er kontinuert, som påstået. Ved $\varphi \to k(\varphi) = \psi$ defineres følgelig en afbildning $k: C_2 \to C_2$, som øjensynlig er en lineær operator. Den er fuldstændig bestemt ved funktionen K og kaldes en <u>lineær</u> <u>integraloperator</u> med <u>kernen</u> K.

Af den fundne ulighed følger imidlertid meget mere. Lad $\Phi$ være en norm-begrænset mængde af funktioner i $C_2$, og lad $\gamma$ være en konstant, således at $\|\varphi\|_2 \leqq \gamma$ for $\varphi \in \Phi$. Om mængden $k(\Phi)$ af de funktioner $\psi$, som ved k svarer til funktionerne $\varphi \in \Phi$, gælder, at der for hvert tal $\varepsilon > 0$ findes et tal $\delta > 0$, således at

$$|\psi(s'') - \psi(s')| \leqq \varepsilon(b-a)^{\frac{1}{2}}\gamma$$

for alle $\psi \in k(\Phi)$ og alle $s',s'' \in [a,b]$, for hvilke $|s'' - s'| \leqq \delta$.

Dette vil sige, at funktionsmængden $k(\Phi)$ er ensartet ligelig kontinuert. Den er også (ensartet) ligelig begrænset; thi med betegnelsen

$$M = \sup_{s,t \in [a,b]} |K(s,t)|$$

haves for hvert $\psi \in k(\Phi)$ og hvert $s \in [a,b]$

$$|\psi(s)| = \left|\int K(s,t)\varphi(t)dt\right|$$

$$\leqq \left(\int K(s,t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_2 \leqq M(b-a)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_2,$$

altså

$$\|\psi\|_\infty \leqq M(b-a)^{\frac{1}{2}}\gamma.$$

Funktionsmængden $k(\Phi)$ opfylder altså forudsætningerne i Ascolis' sætning, nemlig for $X = Y = \dot{R}$ med den numeriske værdi som norm og $\Omega = [a,b]$. Ifølge denne sætning har altså hver følge $\psi_i = k(\varphi_i) \in k(\Phi)$, $i \in \dot{N}$, en delfølge, som konvergerer ligelig, altså også i norm, mod en kontinuert funktion $\psi$. Dette viser, at hver norm-begrænset følge $\varphi_i \in C_2$, $i \in \dot{N}$, har en delfølge $\varphi_{i_\nu}$, $\nu \in \dot{N}$, således at de tilsvarende funktioner $\psi_{i_\nu} = k(\varphi_{i_\nu})$ konvergerer i norm mod en funktion i $C_2$. Dermed er bevist:

<u>Hver lineær integraloperator i</u> $C_2[a,b]$ <u>med kontinuert kerne er totalkontinuert</u>.

Ved en <u>lineær integralligning af anden art</u> eller en <u>Fredholmsk integralligning</u> forstås en ligning af formen

$$\lambda\varphi(s) - \int K(s,t)\varphi(t)dt = \alpha(s),$$

hvor $\lambda$ er et givet reelt tal, $\alpha$ en given funktion tilhørende $C_2$ og <u>kernen</u> $K$ en given kontinuert funktion i $[a,b] \times [a,b]$. Der søges de funktioner $\varphi \in C_2$, der tilfredsstiller ligningen for alle $s \in [a,b]$. (Ved en lineær integralligning af første art forstås en tilsvarende ligning uden leddet $\lambda\varphi$; en sådan foreligger f.eks., når det drejer sig om at bestemme en funktion med en given Fouriertransformeret. Disse ligningers almene teori frembyder store vanskeligheder.) Med betegnelserne e for den identiske afbildning af $C_2$ og k for integraloperatoren kan den betragtede integralligning kort skrives

$$(\lambda e - k)(\varphi) = \alpha .$$

De almene sætninger om lineære afbildninger af et vektorrum ind i sig selv giver følgende oplysninger om ligningens løsningsmængde: Den homogene ligning $(\lambda e - k)(\varphi) = 0$ har et underrum i $C_2$ som løsningsmængde. Det består kun af nulfunktionen, hvis $\lambda$ ikke er egenværdi for k, og er ellers det til egenværdien $\lambda$ hørende egenrum. Hvis den inhomogene ligning overhovedet har en løsning, fås samtlige løsninger ved til en af dem at addere samtlige løsninger til den homogene ligning. Løsningsmængden er altså et sideunderrum. Hvis $\lambda$ ikke er egenværdi for k, har ligningen altså højst een løsning. Eksistensspørgsmålet behandles i det følgende kun for en symmetrisk operator k.

Det forudsættes nu, at kernen K er symmetrisk, d.v.s. at $K(s,t) = K(t,s)$ for $s,t \in [a,b]$. Operatoren k er da symmetrisk, idet der for vilkårlige funktioner $\varphi, \psi \in C_2$ gælder

$$\begin{aligned} k(\varphi)\cdot\psi &= \int\left(\int K(s,t)\varphi(t)dt\right)\psi(s)ds \\ &= \iint K(s,t)\varphi(t)\psi(s)dt\,ds \\ &= \int\varphi(t)\left(\int K(t,s)\psi(s)ds\right)dt = \varphi\cdot k(\psi) . \end{aligned}$$

Spektralsætningen for totalkontinuerte symmetriske operatorer (AG III,16) kan følgelig anvendes på k. Idet der ses bort fra tilfældet, at K er identisk 0, findes der ifølge denne sætning en endelig eller numerabel mængde af fra 0 forskellige egenværdier for k, som hver har endelig multiplicitet. De betegnes med $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, idet hver tages med så mange gange, som dens multiplicitet angiver. Der findes endvidere et endeligt eller numerabelt ortonormalsystem af funktioner $u_1,u_2,\ldots$ i $C_2$, således at $u_i$ er egenfunktion hørende til egenværdien $\lambda_i$. Lad U være det af funktionerne $u_i$ udspændte underrum i $C_2$. Hvis og kun hvis det til U ortogonale underrum $U^\perp$ indeholder fra nulfunktionen forskellige funktioner, altså hvis og kun hvis ortonormalsystemet ikke er maximalt, er også 0 egenværdi, og $U^\perp$ er det tilhørende egenrum. Dette kan være uendelig-dimensionalt.

Hvis der findes uendelig mange egenværdier $\lambda_i$, konvergerer disse mod 0. For integraloperatorer gælder endda, at egenværdiernes kvadratsum er konvergent. For hver egenfunktion $u_i$ hørende til egenværdien $\lambda_i$ er nemlig

$$\int K(s,t)u_i(t)dt = \lambda_i u_i(s),$$

hvilket viser, at $\lambda_i u_i(s)$ for hvert fast s er Fourierkoefficienten for K(s,t) som funktion af t med hensyn til ortonormalsystemet $u_1,u_2,\ldots$ . Ifølge Bessel's ulighed har man altså for hvert $s \in [a,b]$ og hvert $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\,2} u_i(s)^2 \leqq \int K(s,t)^2 dt,$$

og integration med hensyn til s giver

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\,2} \leqq \iint K(s,t)^2 ds\, dt,$$

hvoraf påstanden følger.

De tidligere resultater viser endvidere, at hvis der findes uendelig mange $\lambda_i$, vil rækken

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\varphi\cdot u_i)u_i$$

for hvert $\varphi \in C_2$ konvergere i norm mod $k(\varphi)$. Det skal vises, at den konvergerer ligelig. For $p,q \in \mathring{N}$, $p < q$, fås ved hjælp af Cauchy-Schwarz's ulighed

$$\left| \sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i(\varphi\cdot u_i)u_i(s)\right|^2 \leqq \sum_{i=p+1}^{q}(\varphi\cdot u_i)^2 \sum_{i=p+1}^{q}\lambda_i{}^2 u_i(s)^2.$$

Den anden sum på højre side kan vurderes ved hjælp af den første af ovenstående uligheder:

$$\sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i{}^2 u_i(s)^2 \leqq \sum_{i=1}^{q}\lambda_i{}^2 u_i(s)^2 \leqq \int K(s,t)^2 dt \leqq M^2(b-a),$$

hvor $M = \sup |K(s,t)|$. Til et givet positivt tal $\varepsilon$ findes der et nummer m, således at

$$\sum_{i=p+1}^{q} (\varphi\cdot u_i)^2 \leqq \frac{\varepsilon^2}{M^2(b-a)} \qquad \text{for } q > p \geqq m;$$

thi $\varphi\cdot u_i$, $i \in \mathring{N}$, er Fourierkoefficienterne for $\varphi$ med hensyn til ortonormalsystemet $u_i$, $i \in \mathring{N}$, og har altså en konvergent kvadratsum. Dette viser, at

$$\left| \sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i(\varphi\cdot u_i)u_i(s)\right| \leqq \varepsilon \qquad \text{for } q > p \geqq m$$

og alle $s \in [a,b]$. Dermed er den ligelige konvergens og dermed (på ny) konvergensen i norm af rækken bevist. Summen i norm vides at være $k(\varphi)$. Følgelig gælder med ligelig konvergens i $s \in [a,b]$

$$\int K(s,t)\varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i u_i(s)\int\varphi(t)u_i(t)dt$$

for hver funktion $\varphi \in C_2$. Hvis der kun findes endelig mange egenværdier $\lambda_i$, gælder ligningen, når den uendelige række erstattes med den tilsvarende endelige sum.

Er $\lambda$ et tal forskelligt fra 0 og fra de fra 0 forskellige egenværdier $\lambda_i$, har operatoren $\lambda e-k$, som vist tidligere, en i hele rummet $C_2$ defineret invers $(\lambda e-k)^{-1}$. Med andre ord, ligningen $\lambda\varphi - k(\varphi) = \alpha$ har for hver funktion $\alpha \in C_2$ en (og kun een) løsning $\varphi$. Denne har en fremstilling af formen

$$\varphi = \lambda^{-1}\alpha + \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\lambda-\lambda_i)^{-1}(\alpha\cdot u_i)u_i,$$

hvor rækken konvergerer i norm, hvis der findes uendelig mange $\lambda_i$, og skal erstattes med den tilsvarende endelige sum, hvis der kun findes endelig mange $\lambda_i$. I det første tilfælde vil denne række være ligelig konvergent. Beviset forløber ganske som ovenstående for den ligelige konvergens af rækken for $k(\varphi)$. Bortset fra, at $\varphi$ er erstattet med $\alpha$, består forskellen mellem de to rækker bare i faktoren $(\lambda - \lambda_i)^{-1}$ i den sidstes led. Ifølge forudsætningerne om $\lambda$, og da $\lambda_i \to 0$ for $i \to \infty$, konvergerer følgen $|\lambda-\lambda_i|^{-1}$ mod $|\lambda|^{-1}$ og er altså begrænset. Lad $c$ være dens øvre grænse. Man har da

$$\sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i^2(\lambda-\lambda_i)^{-2}u_i^2 \leqq c^2 \sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i^2 u_i^2 ,$$

og vurderingerne kan gennemføres som før. Integralligningens løsning fremstilles altså ved den ligelig konvergente række

$$\varphi(s) = \lambda^{-1}\alpha(s) + \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\lambda - \lambda_i)^{-1}u_i(s)\int\alpha(t)u_i(t)dt.$$

Er $\lambda$ lig med en af egenværdierne $\lambda_j$, har integralligningen kun løsninger, når $\alpha$ er ortogonal til de til $\lambda_j$ hørende egenfunktioner; thi er $u$ en sådan egenfunktion, fås af $\lambda\varphi - k(\varphi) = \alpha$ ved indre multiplikation med $u$, at $\lambda\varphi\cdot u - k(\varphi)\cdot u = \alpha\cdot u$, og den venstre side er 0, da $k(\varphi)\cdot u = \varphi\cdot k(u) = \lambda_j\varphi\cdot u$ på grund af operatorens symmetri. Denne nødvendige betingelse for løsbarhed er som vist tidligere (III,§16) også tilstrækkelig. En løsning $\psi$ fås ved simpelthen i ovenstående række for $\varphi$ at udelade de meningsløse led svarende til de endelig mange numre i, for hvilke $\lambda_i = \lambda$. Den resterende række vil også være ligelig konvergent, idet $\lambda$ for denne opfylder den forudsætning, under hvilken den ligelige konvergens af rækken for $\varphi$ blev vist. Enhver anden løsning fås ved til $\psi$ at addere en egenfunktion hørende til egenværdien $\lambda$.

Sammenfattende kan altså siges:

Hver lineær integraloperator k i $C_2[a,b]$, hvis kerne er kontinuert, symmetrisk og ikke identisk 0, har en ikke tom og højst numerabel mængde af fra 0 forskellige egenværdier, der hver har endelig multiplicitet. Desuden kan 0 være egenværdi med endelig eller uendelige multiplicitet.

De fra 0 forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, hver taget med så mange gange som multipliciteten angiver, har en konvergent kvadratsum, når der er uendelig mange af dem. Den til en funktion $\varphi \in C_2[a,b]$ svarende funktion $k(\varphi)$ kan udvikles i en endelig eller ligelig konvergent række efter funktionerne $u_1, u_2, \ldots$ i et ortonormalsystem af egenfunktioner hørende til henholdsvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ . Operatoren k afbilder altså $C_2[a,b]$ ind i den ligelige afslutning $\overline{U}_\infty$ af det af funktionerne $u_i$ frembragte underrum $U \subsetneq C_2[a,b]$.

Integralligningen $\lambda\varphi - k(\varphi) = \alpha$ har, når $\lambda$ er forskellig fra 0 og fra alle $\lambda_i$, en og kun een løsning. Når $\lambda$ er lig med en af egenværdierne $\lambda_i$, har ligningen uendelig mange eller ingen løsninger, efter som $\alpha$ er eller ikke er ortogonal til alle til $\lambda$ hørende egenfunktioner. Løsningerne kan fremstilles ved hjælp af endeligeeller ligelig konvergente rækkeudviklinger efter egenfunktionerne $u_i$. Nødvendige betingelser for, at lignin-

<u>gen har en løsning for $\lambda = 0$, er at $\alpha \in \overline{U}_\infty$, og at $\alpha$ er ortogonal til de til 0 hørende egenfunktioner, hvis sådanne findes. Disse betingelser er i almindelighed ikke tilstrækkelige</u>.

Bestemmelsen af egenværdier og egenfunktioner for en integraloperator k kan reduceres til et algebraisk problem, når k er af endelig rang r, d.v.s. når k afbilder $C_2$ på et r-dimensionalt underrum. En operator er af rang r, hvis og kun hvis dens kerne kan skrives

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{r} a_i \kappa_i(s)\kappa_i(t) ,$$

hvor $\kappa_1,\dots,\kappa_r$ er lineært uafhængige funktioner i $C_2$ og $a_1,\dots,$ $a_r$ konstanter. At en operator af denne form har rangen r, følger af, at

$$k(\varphi) = \sum_{i=1}^{r} a_i(\kappa_i \cdot \varphi)\kappa_i$$

for hvert $\varphi \in C_2$ er en linearkombination af $\kappa_1,\dots,\kappa_r$. Det omvendte ses således: Hvis k har rangen r, findes der et ortonormalsystem bestående af r egenfunktioner $u_1,\dots,u_r$ hørende til fra 0 forskellige egenværdier $\lambda_1,\dots,\lambda_r$. Alle til $u_1,\dots,u_r$ ortogonale funktioner i $C_2$ er egenfunktioner til egenværdien 0. Formlen for $k(\varphi)$ (side I, 2, 6) kan da skrives

$$\int\Bigl(K(s,t) - \sum_{i=1}^{r}\lambda_i u_i(s)u_i(t)\Bigr)\varphi(t)dt = 0.$$

Funktionen i parentesen er altså for hvert fast s ortogonal til alle $\varphi \in C_2$, altså identisk 0, hvilket viser, at K har en fremstilling af den forlangte form.

De til fra 0 forskellige egenværdier hørende egenfunktioner u for en kerne af ovenstående form må være linearkombinationer af $\kappa_1,\dots,\kappa_r$. Sættes

$$u = x_1\kappa_1 + \dots + x_r\kappa_r ,$$

drejer det sig om at bestemme et tal $\lambda$ samt tallene $x_1,\dots,x_r$ således, at

$$\int\sum_{i=1}^{r} a_i\kappa_i(s)\kappa_i(t)\sum_{j=1}^{r} x_j\kappa_j(t)\ dt = \lambda\sum_{i=1}^{r} x_j\kappa_j(s) \ .$$

Da funktionerne $\kappa_i(s)$ er lineært uafhængige, er dette ensbetydende med

$$\sum_{j=1}^{r}\left(\int a_i\kappa_i(t)\kappa_j(t)\ dt\right)x_j = \lambda x_i \ , \qquad i = 1,\dots,r.$$

Der foreligger altså egenværdiproblemet for matricen med integralerne i parentesen som elementer.

Man kan vise, at hver kontinuert kerne k kan approksimeres med kerner af endelig rang, og at de sidstes egenværdier og egenvektorer tilnærmer egenværdier og egenfunktioner for k.

Ovenstående resultater kan generaliseres i forskellige retninger. For det første kan man erstatte $C_2[a,b]$ med $C_2(\Omega)$, hvor $\Omega$ er et afsluttet og begrænset område i et endelig-dimensionalt talrum. Teorien kan da gennemføres uden væsentlige ændringer. For det andet giver mangfoldige anvendelser anledning til at tage ubegrænsede intervaller, f.eks. $[a,\infty[$ og $]-\infty,\infty[$, eller ikke-kontinuerte kerner i betragtning. Man går da over til $L_2$-rum. Integraloperatorer i disse er totalkontinuerte for en meget omfattende klasse af kerner, og for symmetriske sådanne kerner gælder sætninger, der ganske svarer til de ovenfor beviste.

Vedrørende ikke-symmetriske integraloperatorer k i $C_2[a,b]$ med kontinuert kerne $K(s,t)$ nævnes følgende: Enhver sådan integraloperator har en adjungeret k', som også er en integraloperator nemlig med kernen $K'(s,t) = K(t,s)$. De to operatorer k og k' har de samme egenværdier med de samme multipliciteter. (Men egenfunktionerne er i almindelighed forskellige.) Der gælder følgende, først af I. Fredholm beviste sætning: Integralligningen $\lambda\varphi - k(\varphi) = \alpha$ har, når $\lambda$ er forskellig fra 0 og fra alle eventuelle egenværdier for k, for hver funktion $\alpha \in C_2[a,b]$ en og kun een løsning $\varphi$. Er $\lambda$ en egenværdi for k, har ligningen løsninger, hvis og kun hvis $\alpha$ er ortogonal til alle til $\lambda$ hørende egenfunktioner for den adjungerede operator k'. Beviset for eksistensen af løsninger kan ikke føres med de i det symmetriske tilfælde benyttede hjælpemidler, og specielt vil løsningerne ikke kunne udtrykkes ved egenfunktioner, da sådanne ikke behøver at eksistere. Fredholms bevis beror på et af ham udviklet modstykke til determinantteorien. Et andet bevis benytter approksimation af kernen ved kerner af endelig rang. Om en rækkeudvikling efter "itererede kerner" (<u>C. Neumann's række</u>),som giver løsningen for tilstrækkelig store $|\lambda|$, handler øv. 3. Også for ikke symmetriske kerner kan teorien udvikles i $L_2$-rum.

## Øvelser til kap.I,§ 2.

1. I rummet $C_2[0,1]$ betragtes integraloperatorerne k med kernerne $K(s,t) = st$, $K(s,t) = s+t$. Find i hvert af tilfældene egenværdierne og egenfunktionerne for k og diskuter integralligningen $\lambda\varphi - k(\varphi) = \alpha$.
   Løs den samme opgave for integraloperatoren k i $C_2[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ med kernen $K(s,t) = \cos(t-s)$.

2. Vis, at den i $[0,1] \times [0,1]$ definerede funktion

$$G(s,t) = \begin{cases} t-ts & \text{for } 0 \leqq t \leqq s \leqq 1 \\ s-st & \text{for } 0 \leqq s < t \leqq 1 \end{cases}$$

   er symmetrisk og kontinuert. Vis endvidere, at den er differentiabel for $s \neq t$, og at, der for den venstre og den højre differentialkvotient med hensyn til t i (s,s) gælder

$$\frac{\partial G}{\partial t}(s,s-) - \frac{\partial G}{\partial t}(s,s+) = 1.$$

   Integraloperatoren i $C_2[0,1]$ med kernen G betegnes med g.
   Lad der være givet en funktion $f \in C[0,1]$. Vis, at differentialligningen $D^2\varphi = f$ har en og kun een løsning $\varphi$, som tilhører $C^2[0,1]$, og for hvilken $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, og at denne løsning er $\varphi = g(f)$.
   Find samtlige egenværdier og egenfunktioner for g, og angiv for et givet reelt tal $\lambda \neq 0$ og en given funktion $\alpha \in C^2[0,1]$, for hvilken $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$, ved rækkeudviklinger løsningerne til integralligningen $\lambda\varphi - g(\varphi) = \alpha$.

3. Lad k være en integraloperator i $C_2[a,b]$ med en (ikke nødvendigvis symmetrisk) kontinuert kerne $K(s,t)$. Vis, at hvis den uendelige række

$$\lambda^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{-i} k^i(\alpha)$$

for en funktion $\alpha \in C[a,b]$ og et reelt tal $\lambda$ konvergerer ligeligt i $[a,b]$, vil dens sum være en løsning $\varphi$ til integralligningen $\lambda\varphi - k(\varphi) = \alpha$.

Vis, at dette er tilfældet, når $|\lambda|$ er større end et tal, der kun afhænger af $M = \sup|K|$ og $b - a$.

## § 3. En eksistenssætning for sædvanlige differentialligningssystemer.

Med $V_n$ betegnes et af de n-dimensionale talrum $l_\infty(n,\mathring{R})$ eller $l_\infty(n,\mathring{C})$ med normen

$$\|\underline{x}\| = \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i|\}, \qquad \underline{x} = (x_1,\dots,x_n) \in V_n.$$

I rummet $\mathring{R} \times V_n$ indføres den tilsvarende norm

$$\|(t,\underline{x})\| = \max\{|t|,\|\underline{x}\|\}, \qquad t \in \mathring{R},\ \underline{x} \in V_n.$$

Lad der være givet en åben delmængde $\Omega$ af $\mathring{R} \times V_n$ samt en kontinuert afbildning $\underline{f}:\Omega \to V_n$, altså en kontinuert funktion

$$\underline{f}(t,\underline{x}) = (f_1(t,x_1,\dots,x_n),\ \dots\ ,f_n(t,x_1,\dots,x_n))$$

defineret for $(t,\underline{x}) \in \Omega$ og med værdier i $\mathring{R}^n$ eller $\mathring{C}^n$.
Det drejer sig om at bestemme differentiable funktioner $\underline{\varphi}:J \to V_n$, hvor $J \in \mathring{R}$ betegner et interval, således at $(t,\underline{\varphi}(t)) \in \Omega$ og

$$D\underline{\varphi}(t) = \underline{f}(t,\underline{\varphi}(t)) \qquad \text{for alle } t \in J,$$

i koordinater

$$D\varphi_i(t) = f_i(t,\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)), \qquad i = 1,\dots,n.$$

Denne opgave skrives kort

$$D\underline{x} = \underline{f}(t,\underline{x})$$

eller

$$Dx_i = f_i(t,x_1,\dots,x_n), \qquad i = 1,\dots,n,$$

og man taler om en <u>sædvanlig vektordifferentialligning</u> eller et <u>sædvanligt differentialligningssystem af første orden</u>, hvor ordet "sædvanlig" refererer til, at der kun er een "uafhængigig variabel" t. Enhver funktion $\underline{\varphi}$ med de nævnte egenskaber kaldes en <u>løsning</u> eller et <u>integral</u> til vektordifferentialligningen.

Differentialligningssystemer af "højere orden", f.eks. de i mekaniken optrædende systemer af anden orden

$$D^2\underline{x} = \underline{f}(t,\underline{x},D\underline{x}),$$

hvor $\underline{f}(t,\underline{x},\underline{y})$ nu er en funktion defineret i en åben delmængde af $\dot{R} \times V_n \times V_n$ og med værdier i $V_n$, kan føres tilbage til systemer af første orden. Den opskrevne vektordifferentialligning er øjensynlig ækvivalent med systemet

$$D\underline{x} = \underline{y}$$
$$D\underline{y} = \underline{f}(t,\underline{x},\underline{y})$$

i den forstand, at hvis $\underline{\varphi}$ er en løsning til ligningen af anden orden, vil $(\underline{\varphi},D\underline{\varphi})$ være en løsning til systemet, og omvendt, hvis $(\underline{\varphi},\underline{\psi})$ er en løsning til dette, vil $\underline{\varphi}$ tilfredsstille ligningen af anden orden. Tilsvarende gælder for systemer af højere orden. Her skal blot fremhæves tilfældet, hvor systemet består af een (skalær) ligning af n-te orden

$$D^n x = f(t,x,Dx,\ldots,D^{n-1}x),$$

hvor f er en funktion fra en åben delmængde af $\dot{R} \times V_n$ til $V_1$. En sådan ligning kan erstattes med systemet

$$\begin{aligned} Dx_1 &= x_2 \\ Dx_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ Dx_{n-1} &= x_n \\ Dx_n &= f(t,x_1,\ldots,x_n), \end{aligned}$$

idet $(\varphi(t),D\varphi(t),\ldots,D^{n-1}\varphi(t))$ vil være en løsning til systemet, når $\varphi(t)$ er en løsning til ligningen af n-te orden, og $\varphi_1(t)$ en løsning til denne, når $(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$ er en løsning til systemet.

I rummet $\dot{R} \times V_n$ kan vektordifferentialligningen $D\underline{x} = \underline{f}(t,\underline{x})$ fortolkes på følgende måde: Ud fra hvert punkt $(t,\underline{x}) \in \Omega$ afsættes vektoren $(1,\underline{f}(t,\underline{x}))$. Derved fås et <u>vektorfelt</u> i $\Omega$. Det drejer sig da om at bestemme de kurver i $\Omega$, der har en parameterfremstilling af formen $(t,\underline{\varphi}(t))$, og som i alle deres punkter tangerer de i disse anbragte feltvektorer. Ved siden af denne geometriske fortolkning er følgende kinematiske af betydning: Den variable t opfattes som tiden og en funktion $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$ som en partikels bevægelse i $V_n$. At en sådan bevægelse $\underline{\varphi}(t)$ er en løsning, er ensbetydende med, at partiklen, når den befinder sig på stedet $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$ til tidspunktet t, har den foreskrevne hastighed $\underline{f}(t,\underline{x})$. Partiklens banekurve er projektionen af kurven $(t,\underline{\varphi}(t))$ i $\check{R} \times V_n$ på $V_n$. Særlig simpel og adækvat bliver denne fortolkning, når det drejer sig om et såkaldt autonomt system $D\underline{x} = \underline{f}(\underline{x})$, hvor funktionen $\underline{f}$ ikke afhænger af t, og den åbne mængde $\Omega \subseteq \check{R} \times V_n$ er af formen $\check{R} \times \Omega'$, hvor $\Omega'$er en åben mængde i $V_n$. Til hvert punkt $\underline{x} \in \Omega'$ er da knyttet en foreskreven hastighedsvektor $\underline{f}(\underline{x})$. Et system $D^2\underline{x} = \underline{f}(t,\underline{x},D\underline{x})$ af anden orden tillader også en simpel kinematisk fortolkning i $V_n$. At bevægelsen $\underline{\varphi}(t)$ af en partikel er en løsning, er ensbetydende med, at partiklen, når den passerer stedet $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$ til tidspunktet t med hastighedsvektoren $\underline{y} = D\underline{\varphi}(t)$, har akcelerationsvektoren $\underline{f}(\underline{x},\underline{y})$.

Den geometriske fortolkning gør det plausibelt, at der går en løsning til $D\underline{x} = \underline{f}(t,\underline{x})$ gennem hvert punkt af $\Omega$. Med andre ord, til et givet punkt $(\tau,\underline{\xi}) \in \Omega$ findes der et interval J, som indeholder $\tau$, og en løsning $\underline{\varphi}(t)$ defineret i J, for hvilken $\underline{\varphi}(\tau) = \underline{\xi}$. At dette er rigtigt, er eksistenssætningens indhold. Beviset for den baseres på en omskrivning af differentialligningen til en (almindeligvis ikke lineær) integralligning. Antag, at den differentiable funktion $\underline{\varphi}(t)$, $t \in J$, er en løsning til vektordifferentialligningen, for hvilken $\underline{\varphi}(\tau) = \underline{\xi}$. Ved integration fås da af

$$D\underline{\varphi}(t) = \underline{f}(t,\underline{\varphi}(t)),$$

at

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{\xi} + \int_\tau^t \underline{f}(s,\underline{\varphi}(s))ds, \qquad t \in J.$$

Omvendt, er $\underline{\varphi}(t)$, $t \in J$, en kontinuert funktion, som tilfredsstiller denne integralligning, har man $\underline{\varphi}(\tau) = \underline{\xi}$ og $\underline{\varphi}(t)$ vil være differentiabel, da ligningens højre side er det, og tilfredsstille differentialligningen. Udførligt lyder Cauchy-Peano's eksistenssætning således:

Lad der være givet en åben mængde $\Omega \subseteq \dot{R} \times V_n$, en kontinuert afbildning $\underline{f} : \Omega \to V_n$ og et punkt $(\tau,\underline{\xi}) \in \Omega$. Er da $\alpha$ og $\beta$ positive tal, således at

$$\Gamma = \{(t,\underline{x}) \in \dot{R} \times V_n \mid |t-\tau| \leqq \alpha \ \wedge \ \|\underline{x}-\underline{\xi}\| \leqq \beta\} \subset \Omega,$$

og sættes

$$M = \sup_{(t,\underline{x})\in\Gamma} \|\underline{f}(t,\underline{x})\|$$

og

$$\alpha' = \min\{\alpha,\beta/M\},$$

findes der en differentiabel funktion $\underline{\varphi} : [\tau-\alpha',\tau+\alpha'] \to V_n$, for hvilken $\underline{\varphi}(\tau) = \underline{\xi}$ , $(t,\underline{\varphi}(t)) \in \Gamma$ og

$$D\underline{\varphi}(t) = \underline{f}(t, \underline{\varphi}(t)) \qquad \text{for } \tau-\alpha' \leqq t \leqq \tau+\alpha'.$$

Bevis: For hvert positivt tal $h < \alpha'$ konstrueres en "tilnærmelsesløsning" $\underline{\varphi}_h(t)$, $\tau-h \leqq t \leqq \tau+\alpha'$, på følgende måde: Lad k betegne det mindste tal, for hvilket $kh \geqq \alpha'$. Funktionen defineres sukcessivt i intervallerne

$J_0 = [\tau-h,\tau],\ldots,\ J_q = [\tau+(q-1)h,\tau+qh],\ldots,\ J_k = [\tau+(k-1)h,\tau+\alpha']$, hvor $q = 0,1,\ldots,k-1$. For $t \in J_0$ sættes $\underline{\varphi}_h(t) = \underline{\xi}$, og under antagelsen af, at $\underline{\varphi}_h$ allerede er defineret i $J_0 \cup J_1 \cup \ldots \cup J_q$ for et $q < k$, så at $(t,\underline{\varphi}_h(t)) \in \Gamma$, defineres $\underline{\varphi}_h(t)$ for $t \in J_{q+1}$ ved

$$(*) \qquad \underline{\varphi}_h(t) = \underline{\xi} + \int_\tau^t \underline{f}(s,\underline{\varphi}_h(s-h))ds,$$

og man har da for disse t

$$\|\underline{\varphi}_h(t) - \underline{\xi}\| = \|\int_\tau^t \underline{f}(s,\underline{\varphi}_h(s-h))ds\|$$

$$\leqq \int_\tau^t \|\underline{f}(s,\underline{\varphi}_h(s-h))\|ds$$

$$\leqq M|t-\tau| \leqq M\alpha' \leqq \beta,$$

$(t,\underline{\varphi}_h(t)) \in \Gamma$. Konstruktionen kan da fortsættes til det næste interval. På denne måde fås for hvert $h \in ]0,\alpha'[$ en funktion $\underline{\varphi}_h : [\tau-h,\tau+\alpha'] \to V_n$, hvis restriktion til $[\tau,\tau+\alpha']$ tilfredsstiller ligningen (*). Mængden af funktionerne $\underline{\varphi}_h : [\tau,\alpha'] \to V_n$, $h \in ]0,\alpha'[$, er ensartet begrænset. Den er også ensartet ligelig kontinuert; thi for $t',t'' \in [\tau,\tau+\alpha']$ har man

$$\|\underline{\varphi}_h(t'') - \underline{\varphi}_h(t')\| = \|\int_{t'}^{t''} \underline{f}(s,\underline{\varphi}_h(s-h))ds\|$$

$$\leqq \int_{t'}^{t''} \|\underline{f}(s,\underline{\varphi}_h(s-h))\|ds$$

$$\leqq M|t'' - t'|.$$

Vælges en følge at tal h, som konvergerer mod 0, vil denne ifølge Ascoli's sætning indeholde en delfølge $h_i$, $i \in \mathring{N}$, således at $\underline{\varphi}_{h_i}(t)$, $i \in \mathring{N}$, konvergerer ligelig for $t \in [\tau,\tau+\alpha']$ mod en kontinuert funktion $\underline{\varphi}(t)$, således at $(t,\underline{\varphi}(t)) \in \Gamma$, da $\Gamma$ er afsluttet. Men da vil også følgen af funktioner $\underline{\varphi}_{h_i}(t-h_i)$, $i \in \mathring{N}$, konvergere ligelig mod $\underline{\varphi}$; thi til $\varepsilon > 0$ findes et $m \in \mathring{N}$, således at

$$\|\underline{\varphi}_{h_i}(t) - \underline{\varphi}_{h_i}(t-h_i)\| \leqq \varepsilon \quad \text{for } i > m,\ t \in [\tau,\tau+\alpha'],$$

da $h_i$ konvergerer mod 0 og funktionerne $\underline{\varphi}_h$ er ligelig kontinuerte i intervallet. Da endvidere $\underline{f}(t,\underline{x})$ er ligelig kontinuert i $\Gamma$, fås af

$$\underline{\varphi}_{h_i}(t) = \underline{\xi} + \int_\tau^t \underline{f}(s,\underline{\varphi}_{h_i}(s-h_i))ds$$

for $i \to \infty$, at

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{\xi} + \int_{\tau}^{t} \underline{f}(s,\underline{\varphi}(s))ds.$$

Dermed er vist, at $\underline{\varphi}$ er en løsning af den forlangte art i intervallet $[\tau,\tau+\alpha']$. På samme måde vises eksistensen af en løsning i intervallet $[\tau-\alpha',\tau]$. Tilsammen udgør de to funktioner en løsning i $[\tau-\alpha',\tau+\alpha']$. Dermed er eksistenssætningen bevist.

Lad $\underline{f}(t,\underline{x},\underline{y})$ være en kontinuert afbildning af en åben delmængde $\Omega$ af $\dot{R} \times V_n \times V_n$ ind i $V_n$. Eksistenssætningen giver da for vektordifferentialligningen $D^2\underline{x} = \underline{f}(t,\underline{x},D\underline{x})$ af anden orden følgende udsagn: Lad der være givet et punkt $(\tau,\underline{\xi},\underline{\eta}) \in \Omega$, og lad $\alpha$ og $\beta$ være positive tal, således at mængden $\Gamma$ af de punkter $(t,\underline{x},\underline{y})$, for hvilke $|t-\tau| \leqq \alpha$, $\|\underline{x}-\underline{\xi}\| \leqq \beta$, $\|\underline{y}-\underline{\eta}\| \leqq \beta$, er indeholdt i $\Omega$. Sæt $\alpha' = \min\{\alpha,\beta/M\}$, hvor M er supremum af $\|\underline{f}\|$ i $\Gamma$. Der findes da en to gange differentiabel funktion $\underline{\varphi} : [\tau-\alpha',\tau+\alpha'] \to V_n$, således at $(t,\underline{\varphi}(t),D\underline{\varphi}(t)) \in \Gamma$, $\underline{\varphi}(\tau) = \underline{\xi}$, $D\underline{\varphi}(\tau) = \underline{\eta}$ og $D^2\underline{\varphi}(t) = \underline{f}(t,\underline{\varphi}(t),D\underline{\varphi}(t))$.

For en (skalær) differentialligning af n-te orden antager eksistenssætningen følgende form: Lad $f(t,x_0,\dots,x_{n-1})$ være en kontinuert reel eller kompleks funktion defineret i en åben delmængde $\Omega$ af $\dot{R} \times V_n$, og lad der være givet et punkt $(t,\xi_0,\dots,\xi_{n-1}) \in \Omega$. Idet $\alpha > 0$ og $\beta > 0$ er valgt således, at mængden $\Gamma$ af punkter $(t,x_0,\dots,x_{n-1})$, for hvilke $|t-\tau_0| \leqq \alpha$, $|x_0-\xi_0| \leqq \beta,\dots, |x_{n-1}-\xi_{n-1}| \leqq \beta$, tilhører $\Omega$, sættes $\alpha' = \min\{\alpha,\beta/M\}$, hvor

$$M = \sup\{|f(t,x_0,\dots,x_{n-1})| \mid (t,x_0,\dots,x_{n-1}) \in \Gamma\}.$$

Der findes da en n gange differentiabel funktion $\varphi : [\tau-\alpha',\tau+\alpha'] \to V_1$, således at

$$(t,\varphi(t),D\varphi(t),\dots,D^{n-1}\varphi(t)) \in \Gamma$$

$$\varphi(\tau) = \xi_0,\ D\varphi(\tau) = \xi_1,\ \dots\ ,D^{n-1}\varphi(\tau) = \xi_{n-1}$$

og

$$D^n\varphi(t) = f(t,\varphi(t),D\varphi(t),\dots,D^{n-1}\varphi(t)).$$

Differentialligninger foreligger tit i en anden, mere almindelig formulering. Lad $\Xi$ betegne en åben mængde i det $(1+2n)$-dimensionale rum $\dot{R} \times V_n \times V_n$, og lad der være givet en kontinuert afbildning $\underline{F}:\Xi \to V_n$. Man betragter vektordifferentialligningen

$$\underline{F}(t,\underline{x},D\underline{x}) = \underline{0}.$$

Opgaven består i at bestemme et interval $J \subseteq \dot{R}$ og en differentiabel afbildning $\underline{\varphi}:J \to V_n$, således at $\underline{F}(t,\underline{\varphi}(t),D\underline{\varphi}(t)) = \underline{0}$ for alle $t \in J$. Eksistenssætningen vil kun kunne anvendes, hvis ligningen $F(t,\underline{x},\underline{y}) = \underline{0}$, i hvert fald "lokalt", kan løses med hensyn til $\underline{y}$ i følgende forstand: Der findes en åben mængde $\Omega \subseteq \dot{R} \times V_n$ og en kontinuert afbildning $\underline{f}:\Omega \to V_n$, således at

$$(t,\underline{x},\underline{f}(t,\underline{x})) \in \Xi \quad \text{og} \quad \underline{F}(t,\underline{x},\underline{f}(t,\underline{x})) = \underline{0}$$

for alle punkter $(t,\underline{x}) \in \Omega$. En løsning til $D\underline{x} = f(t,\underline{x})$ vil da også være en løsning til $\underline{F}(t,\underline{x},D\underline{x}) = \underline{0}$. Sætningen om implicite funktioner giver i det reelle tilfælde en tilstrækkelig betingelse for, at vektorligningen $\underline{F}(t,\underline{x},\underline{y}) = \underline{0}$, altså ligningssystemet

$$F_i(t,x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = 0, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

kan løses med hensyn til $\underline{y} = (y_1,\ldots,y_n)$: Antag, at $\underline{F}$ er differentiabel med kontinuerte partielle afledede. Antag endvidere, at der findes et punkt

$$(\tau,\underline{\xi},\underline{\eta}) = (\tau,\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta_1,\ldots,\eta_n) \in \Xi,$$

således at $\underline{F}(\tau,\underline{\xi},\underline{\eta}) = \underline{0}$, altså

$$F_j(\tau,\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta_1,\ldots,\eta_n) = 0, \qquad j = 1,\ldots,n,$$

og

$$\det(D_{y_i} F_j(\tau,\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta_1,\ldots,\eta_n))_{i,j=1,\ldots,n} \neq 0.$$

Da findes der en omegn $\Omega$ af $(\tau\ \underline{\xi}) \in \dot{R} \times V_n$ og en differentiabel afbildning $\underline{f}:\Omega \to V_n$, altså funktioner $f_i(t,x_1,\ldots,x_n)$, $i =$

1,...,n, med kontinuerte partielle afledede, således at
$\underline{f}(\tau,\underline{\xi}) = \underline{\eta}$, $(t,\underline{x},\underline{f}(t,\underline{x})) \in \Xi$ og

$$\underline{F}(t,\underline{x},\underline{f}(t,\underline{x})) = \underline{0} \quad \text{for } (t,\underline{x}) \in \Omega.$$

Eksistenssætningen giver altså under disse forudsætninger, at der findes et interval omkring $\tau$ og en i dette defineret løsning $\underline{\varphi}$, for hvilken $\underline{\varphi}(\tau) = \underline{\xi}$.

Tilsvarende gælder for differentialligningssystemer af højere orden. Her skal blot omtales en skalær differentialligning af n-te orden af formen

$$F(t,x,Dx,\ldots,D^n x) = 0,$$

hvor F er en kontinuert reel eller kompleks funktion defineret i en åben mængde i $\dot{R} \times V_{n+1}$. Eksistenssætningen kan anvendes, hvis der findes en åben mængde $\Omega \subseteq \dot{R} \times V_n$ og en kontinuert funktion $f:\Omega \to V_1$, således at

$$(t,x_0,\ldots,x_{n-1},f(t,x_0,\ldots,x_{n-1})) \in \Xi$$

og

$$F(t,x_0,\ldots,x_{n-1},f(t,x_0,\ldots,x_{n-1})) = 0$$

for $(t,x_0,\ldots,x_{n-1}) \in \Omega$. Hver løsning til $D^n x = f(t,x,Dx,\ldots,D^{n-1}x)$ er da også en løsning til den givne ligning. Under forudsætning af, at F er reel og differentiabel med kontinuerte partielle differentialkvotienter, fås af sætningen om implicite funktioner følgende tilstrækkelige betingelse for, at ligningen $F(t,x_0,\ldots,x_n) = 0$ kan løses med hensyn til $x_n$: Der findes et punkt $(\tau,\xi_0,\ldots,\xi_n) \in \Xi$, for hvilket ligningen er opfyldt, og

$$D_{x_n} F(\tau,\xi_0,\ldots,\xi_n) \neq 0.$$

Spørgsmålet om eksistens af løsninger gennem punkter, hvor de nævnte tilstrækkelige betingelser ikke er opfyldt, kræver særskilte undersøgelser i de enkelte tilfælde.

Forholdene belyses ved nogle simple eksempler.

1) $xDx + t = 0$, $\Xi = \dot{R} \times \dot{R} \times \dot{R}$. For $D_y(xy + t) = x \neq 0$, altså for $(t,x) \in \Omega$, hvor $\Omega = \{(t,x) \in \dot{R}^2 \mid x \neq 0\}$, fås $Dx = -t/x$. Gennem hvert punkt $(t,\xi)$ med $\xi \neq 0$ går altså en løsning. Derimod findes der ikke nogen løsning $\varphi(t)$ defineret i et interval omkring $\tau$, for hvilken $\varphi(\tau) = 0$. Dette ses let ved direkte at bestemme samtlige løsninger til den givne ligning. For hver løsning $\varphi(t)$, $t \in J$, har man

$$\varphi(t)D\varphi(t) = \tfrac{1}{2}D\varphi(t)^2 = -t,$$

altså $\varphi(t)^2 = k-t^2$, hvor k er en (nødvendigvis positiv) konstant. De eneste differentiable funktioner, som tilfredsstiller denne ligning er $\varphi(t) = \sqrt{(k-t^2)}$ og $\varphi(t) = -\sqrt{(k-t^2)}$ i intervallet $-\sqrt{k} < t < \sqrt{k}$, og ingen af dem antager værdien 0 i dette interval. En prøve viser, at de virkelig er løsninger. Disse udgøres altså af de i halvplanerne $x > 0$ og $x < 0$ beliggende halvcirkler med centrum i $(0,0)$.

2) $tDx - x = 0$, $\Xi = \dot{R} \times \dot{R} \times \dot{R}$. For $D_y(ty - x) = t \neq 0$ fås $Dx = x/t$. Gennem hvert punkt $(\tau,\xi)$ med $\tau \neq 0$ går altså en løsning. For hver løsning $\varphi(t)$, $t \in J$, har man

$$D(\varphi(t)/t) = t^{-2}(tD\varphi(t)-\varphi(t)) = 0,$$

altså $\varphi(t) = kt$, hvor k er en konstant. En prøve viser, at de alle er løsninger. Disse udgøres altså af alle fra aksen $t = 0$ forskellige rette linier gennem $(0,0)$. Gennem et punkt $(0,\xi)$, $\xi \neq 0$, går ingen af løsningerne, gennem $(0,0)$ går de alle.

3) $x^2+(Dx)^2 - 1 = 0$, $\Xi = \dot{R} \times \dot{R} \times \dot{R}$. For $D_y(x^2 + y^2 - 1) = 2y \neq 0$ har ligningen $x^2 + y^2 - 1 = 0$ de differentiable løsninger $y = \sqrt{(1-x^2)}$ og $y = -\sqrt{(1-x^2)}$ i intervallet $-1 < x < 1$. Som område $\Omega$ kan her altså vælges $\dot{R} \times ]-1.1[$. Eksistenssætningen kan anvendes på hver af differentialligningerne $Dx = \sqrt{(1-x^2)}$ og $Dx = -\sqrt{(1-x^2)}$. Gennem hvert punkt $(\tau,\xi) \in \Omega$ går følgelig

mindst to løsninger. Ved at integrere de to sidstnævnte ligninger finder man, at

$$\varphi(t) = \sin(t - \tau + \mathrm{Arcsin}\,\xi)$$
$$\varphi(t) = \sin(t - \tau + \pi - \mathrm{Arcsin}\,\xi) \qquad t \in \grave{R},$$

er løsninger gennem $(\tau,\xi)$, og at der ikke eksisterer andre (bortset fra disses restriktioner til intervaller $J \subset \grave{R}$). Den givne differentialligning $x^3+(Dx)^2-1 = 0$ tilfredsstilles imidlertid også af konstanterne $\varphi(t) = 1$ og $\varphi(t) = -1$. Man ser, at der gennem hvert punkt $(\tau,1)$ og hvert $(\tau,-1)$ går uendelig mange løsninger sammensat af stykker af linierne $x = 1$ og $x = -1$ og af kurver $x = \sin(t+k)$ med passende konstanter $k$.

## Øvelser til kap. I, § 3.

1. Vis, at differentialligningen $Dx = 3\sqrt[3]{x^2}$ for een ubekendt funktion $x = \varphi(t)$ har uendelig mange, to gange differentiable løsninger $\varphi : \mathring{R} \to \mathring{R}$, for hvilke $\varphi(0) = 0$.

2. Funktionen $f(t,x) = x^2$ er kontinuert i $\Omega = \mathring{R}^2$. Med de i eksistensbeviset indførte betegnelser, specialiseret til differentialligningen $Dx = x^2$ for een ubekendt reel funktion $x = \varphi(t)$, vælges $\tau = 0$, $\xi = 1$. Rektanglet

$$\Gamma = \{(t,x) \in \mathring{R}^2 \mid |t| \leqq \alpha \wedge |x-\xi| \leqq \beta\}$$

er her brugbart for vilkårligt store $\alpha$ og $\beta$. Find det tilhørende $\alpha'$, og bemærk, at det altid er mindre end 1. Gør rede for, at det må forholde sig sådan, ved at betragte løsningernes forløb.

3. Ved ligningen $x_1 x_2 = c$, hvor $c$ er en reel konstant, bestemmes en kurve $k_c$ i planen $\mathring{R}^2$ (nemlig en ligesidet hyperbel for $c \neq 0$ og et par af rette linier for $c = 0$). Gennem hvert punkt i planen går een af disse kurver. En differentiabel kurve i $\mathring{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ kaldes en ortogonal trajektorie til "kurveskaren" $k_c$, $c \in \mathring{R}$, hvis tangenten i hvert af dens punkter er vinkelret på tangenten i samme punkt til den gennem punktet gående kurve $k_c$. Opstil et autonomt system $Dx_1 = f_1(x_1,x_2)$, $Dx_2 = f_2(x_1,x_2)$, hvis løsninger $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$ er parameterfremstillinger for de ortogonale trajektorier til den givne kurveskare. Find den ortogonale trajektorie, som går gennem et givet punkt $(\xi_1,\xi_2) \neq (0,0)$.

4. Der er givet et reelt tal $r$. Gennem hvert punkt $(x_1,x_2)$ i halvplanen $\mathring{R}_+ \times \mathring{R}$ går en og kun een kurve af skaren med ligningen $x_2 = c{x_1}^r$, $c \in \mathring{R}$. Bestem denne kurveskares ortogonale trajektorier.

5. Bestem en differentiabel kurve $x = \varphi(t)$, $t \in \mathring{R}_+$, $\varphi(t) \to a$ for $t \to 0$, i planen med den egenskab, at afstanden fra et punkt på kurven til skæringspunktet mellem tangenten i dette punkt og aksen $x = 0$ er konstant lig med et givet positivt tal $a$ (traktrix).
Vis, at kurven er ortogonal trajektorie til en skare af kvartcirkler.
Vis endvidere, at traktricen er ortogonal trajektorie til skaren af tangenter til den "halve" kædelinie $x = a\cosh(t/a)$, $t \in \mathring{R}_+$. Vis endelig, at afstanden fra en tangents røringspunkt til dens skæringspunkt med traktricen er lig med længden af kædeliniens bue fra punktet $(0,a)$ til røringspunktet. (Traktricen er en evolvent eller afvikler for kædelinien.)

6. Lad $J$ være et åbent interval og $\varphi(t)$ en reel funktion defineret i $J$, som er to gange differentiabel med kontinuert anden afledet. Ved krumningen af den plane kurve med ligningen $x = \varphi(t)$ i det til $t$ svarende punkt forstås størrelsen $\kappa = D^2\varphi(t)\ (1+(D\varphi(t))^2)^{-3/2}$. (Den regnes altså med fortegn.) Når $D^2\varphi(t) \neq 0$, kaldes dens reciprokke værdi $\rho = 1/\kappa$ for kurvens krumningsradius i det pågældende punkt. Med $n(t)$ betegnes afstanden fra det til $t$ svarende punkt på en sådan kurve til skæringspunktet mellem dennes normal i punktet og aksen $x = 0$. Der søges de kurver af den betragtede art, for hvilke $\varphi(t) > 0$ og $\rho(t) = kn(t)$, hvor $k$ er et givet reelt tal. Vis, at for en monoton kurve med disse egenskaber kan $\overset{-1}{\varphi}(x)$ bestemmes ved kvadratur (d.v.s. den kan udtrykkes ved stamfunktioner af kendte funktioner). Bestem de pågældende kurver for $k = 1$, $k = -1$, $k = 2$ og *$k = -2$, således at $\varphi(0) = a$, $D\varphi(0) = 0$, hvor $a > 0$ er givet.

7. Om differentialligningen $Dx = f(t,x)$, hvor $f$ er kontinuert i en åben delmængde af $\mathring{R}^2$, forudsættes, at hvis $\varphi(t)$ er en i et interval defineret løsning, er for hver konstant $c \in \mathring{R}$ også $1^\circ$ $\varphi(t) + c$, $2^\circ$ $\varphi(t+c)$, $3^\circ$ $c\varphi(t)$ en løsning. Bestem i hvert af de tre tilfælde de funktioner $f$, for hvilke differentialligningen har den pågældende egenskab.
Løs den samme opgave, når det forudsættes, at hvis $\varphi(t)$ er en løsning, er for hver reel konstant $c \neq 0$ også $4^\circ$ $\varphi(t/c)$ $5^\circ$ $c\varphi(t/c)$ en løsning.
Vis, at løsningerne i alle fem tilfælde kan findes ved kvadratur (eventuelt efter indførelse af en ny ubekendt funktion).

8. Om funktionen $\underline{f}:J \times \mathring{R}^n \to \mathring{R}^n$, hvor $J$ er et interval, antages, at den er kontinuert, og at der findes en konstant $K$, således at $\|\underline{f}(t,\underline{x})\| \leqq K(\|\underline{x}\|+1)$ for $(t,\underline{x}) \in J \times \mathring{R}^n$. Vis, at der gennem hvert punkt $(\tau,\underline{\xi}) \in J \times \mathring{R}^n$ går en i hele intervallet $J$ defineret løsning til differentialligningen $D\underline{x} = \underline{f}(t,\underline{x})$. (Benyt, at løsninger i intervaller med et fælles endepunkt og med samme værdi i dette kan sammensættes til en løsning.)

## § 4. En entydighedssætning for sædvanlige differentialligningssystemer.

Som det fremgår af simple eksempler, kan det ske, at en differentialligning $D\underline{x} = \underline{f}(t,\underline{x})$ med kontinuert højre side har uendelig mange (i samme interval definerede løsninger gennem samme punkt $(\tau,\underline{\xi})$ (jfr. f.eks. I,3,øv. 1). Forudsætter man imidlertid noget mere om $\underline{f}$, kan man bevise en "entydighedssætning", som udsiger, at der i et givet interval højst kan findes een løsning, der for et tal $\tau$ i intervallet antager en given "begyndelsesværdi" $\underline{\xi}$.

Lad $\omega$ betegne en åben delmængde af $V_n$. En funktion $\underline{F}:\omega \to V_m$ siges at opfylde en Lipschitzbetingelse i en delmængde $\gamma$ af $\omega$, hvis der eksisterer et positivt tal $L(\gamma)$, en til $\gamma$ hørende Lipschitzkonstant, således at

$$\|\underline{F}(\underline{x}'') - \underline{F}(\underline{x}')\| \leqq L(\gamma)\|\underline{x}'' - \underline{x}'\| \qquad \text{for } \underline{x}',\underline{x}'' \in \gamma.$$

Funktionen $\underline{F}$ siges at opfylde en lokal Lipschitzbetingelse i $\omega$, hvis den opfylder en Lipschitzbetingelse i hver i $\omega$ indeholdt "kugle"

$$\gamma = \{\underline{x} \mid \|\underline{x} - \underline{\xi}\| \leqq \rho\},$$

hvor $\underline{\xi} \in \omega$ og $\rho > 0$. (Det kan vises, at dette vil være tilfældet, når blot hvert punkt i $\omega$ har en omegn, i hvilken $\underline{F}$ opfylder en Lipschitzbetingelse; se øv. 1.) Det er klart, at hvis en funktion $\underline{F}:\omega \to V_m$ opfylder en lokal Lipschitzbetingelse i $\omega$, er den kontinuert i $\omega$. Det omvendte kan ikke sluttes.

Skrevet i koordinater bliver Lipschitzbetingelsen i $\gamma$

$$\max_{i=1,\dots,m} \{|F_i(x_1'',\dots,x_n'') - F_i(x_1',\dots,x_n')|\} \leqq L(\gamma) \max_{j=1,\dots,n} \{|x_j'' - x_j'|\}$$

Anvendes dette specielt på punkter $\underline{x}''$ og $\underline{x}'$, hvis koordinater stemmer overens på nær den j-te, fås for hvert $i=1,\dots,m$ og hvert $j=1,\dots,n$

$$|F_i(x_1,\dots,x_{j-1},x_j'',x_{j+1},\dots,x_n) - F_i(x_1,\dots,x_{j-1},x_j',x_{j+1},\dots,x_n)| \leqq L(\gamma)|x_j''-x_j'|.$$

Lipschitzbetingelsen i $\gamma$ medfører altså, at hver af koordinatfunktionerne $F_i$ som funktion af hver enkelt variabel $x_j$ har begrænsede differenskvotienter med et overtal, som ikke afhænger af de øvrige variable (når blot de pågældende punkter tilhører $\gamma$). Med benyttelse af uligheden

$$|F_i(x_1'',\dots,x_n'') - F_i(x_1',\dots,x_n')| \leqq \sum_{j=1}^{n} |F_i(x_1',\dots,x_{j-1}',x_j'',\dots,x_n'') - F_i(x_1',\dots,x_j',x_{j+1}'',\dots,x_n'')|$$

slutter man let, at også det omvendte gælder.

<u>Har funktionen $\underline{F}:\omega \to V_m$ kontinuerte partielle afledede</u> $D_{x_j}\underline{F}$, $j = 1,\dots,n$, i $\omega$, <u>opfylder den en lokal Lipschitzbetingelse i</u> $\omega$. Er nemlig $\gamma = \{\underline{x} \mid \|\underline{x}-\underline{\xi}\| \leqq \rho\}$ en "kugle" i $\omega$ og $\underline{x}'$ og $\underline{x}''$ to vilkårlige punkter i $\gamma$, har man

$$\underline{F}(\underline{x}'')-\underline{F}(\underline{x}') = \int_0^1 \frac{d}{ds}\underline{F}((1-s)\underline{x}' + s\underline{x}'')ds$$
$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} D_{x_j}\underline{F}((1-s)\underline{x}' + s\underline{x}'')(x_j''-x_j')ds;$$

da $\gamma$ er begrænset og afsluttet, findes der en konstant $K(\gamma)$, således at

$$\|D_{x_j}\underline{F}(\underline{x})\| \leqq K(\gamma) \qquad \text{for } \underline{x} \in \gamma,\ j = 1,\dots,n,$$

og følgelig er

$$\|\underline{F}(x'') - \underline{F}(\underline{x}')\| \leqq nK(\gamma)\|\underline{x}'' - \underline{x}'\|.$$

Om en i en åben mængde $\Omega \subseteqq \dot{R} \times V_n$ defineret funktion $\underline{f}(t,\underline{x})$ med værdier i $V_n$ vil vi sige, at den opfylder en lokal Lipschitzbetingelse i $\Omega$ med hensyn til $\underline{x}$ ligeligt i t, hvis der for hver delmængde

$$\Gamma = \{(t,\underline{x}) \mid |t-\tau| \leqq \alpha \ \wedge\ \|\underline{x}-\underline{\xi}\| \leqq \beta\},$$

hvor $(\tau,\underline{\xi}) \in \Omega$ og $\alpha$ og $\beta$ er positive tal, for hvilke $\Gamma \subset \Omega$, eksisterer et positivt tal $L(\alpha,\beta)$, således at

$$\|\underline{f}(t,\underline{x}'') - f(t,\underline{x}')\| \leqq L(\alpha,\beta)\|x'' - x'\| \quad \text{for } (t,\underline{x}'),(t,\underline{x}'') \in \Gamma.$$

Det er vigtigt at bemærke, at der ikke kræves nogen Lipschitz-betingelse med hensyn til t, men kun at Lipschitzkonstanten for $\Gamma$ kan vælges uafhængig af t. En sådan Lipschitzbetingelse vil være opfyldt, når $\underline{f}(t,\underline{x})$ har partielle afledede med hensyn til $x_1,\dots,x_n$, som er kontinuerte i $\Omega$. Funktionen behøver ikke at være differentiabel med hensyn til t.

I det følgende forudsættes, at funktionen $\underline{f}:\Omega \to V_n$ er kontinuert og opfylder en lokal Lipschitzbetingelse i $\Omega$ med hensyn til $\underline{x}$ ligeligt i t. Lad $(\sigma,\underline{\xi})$ være et punkt i $\Omega$, og lad $\alpha > 0$ og $\beta > 0$ være valgt således, at

$$\Gamma = \{(t,\underline{x}) \mid |t-\sigma| \leqq \alpha \ \wedge \ \|\underline{x}-\underline{\xi}\| \leqq \beta\} \subset \Omega.$$

Lad $J \subseteqq [\sigma-\alpha,\sigma+\alpha]$ være et interval med længden $\lambda$, som indeholder $\sigma$, og $(\tau,\underline{\eta})$ et punkt i $\Gamma$, således at $\tau \in J$. Antag, at $\underline{\varphi}(t)$ og $\underline{\psi}(t)$, $t \in J$, er to løsninger til differentialligningen $D\underline{x} = \underline{f}(t,\underline{x})$, for hvilke $(t,\underline{\varphi}(t)) \in \Gamma$ og $(t,\underline{\psi}(t)) \in \Gamma$, og som opfylder

$$\underline{\varphi}(\sigma) = \underline{\xi}, \quad \underline{\psi}(\tau) = \underline{\eta}.$$

Man har da

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{\xi} + \int_\sigma^t \underline{f}(s,\underline{\varphi}(s))ds,$$

$$\underline{\psi}(t) = \underline{\eta} + \int_\tau^t \underline{f}(s,\underline{\psi}(s))ds.$$

Heraf fås for $t \in J$

$$\underline{\psi}(t) - \underline{\varphi}(t)$$

$$= \underline{\eta} - \underline{\xi} - \int_\sigma^\tau \underline{f}(s,\underline{\varphi}(s))ds + \int_\tau^t [\underline{f}(s,\underline{\psi}(s)) - \underline{f}(s,\underline{\varphi}(s))]ds,$$

altså med betegnelsen M for supremum af $\|\underline{f}\|$ i $\Gamma$

$$\|\underline{\psi}(t) - \underline{\varphi}(t)\|$$
$$\leqq \|\underline{\eta} - \underline{\xi}\| + M|\tau - \sigma| + L(\alpha,\beta)\lambda \sup_{s\in J}\|\underline{\psi}(s) - \underline{\varphi}(s)\|.$$

Denne ulighed omskrives til

$$(1 - L(\alpha,\beta)\lambda) \sup_{s\in J}\|\underline{\psi}(s) - \underline{\varphi}(s)\| \leqq \|\underline{\eta} - \underline{\xi}\| + M|\tau - \sigma|.$$

For hvert interval J, som indeholder $\sigma$ og $\tau$ og har en længde $\lambda \leqq 1/2L(\alpha,\beta)$ gælder følgelig

$$(*) \quad \|\underline{\psi}(t) - \underline{\varphi}(t)\| \leqq 2\|\underline{\eta} - \underline{\xi}\| + 2M|\tau - \sigma|, \quad t \in J.$$

Af denne ulighed drages først følgende konklusion: Er $\underline{\eta} = \underline{\xi}$ og $\tau = \sigma$, må der gælde $\underline{\psi}(t) = \underline{\varphi}(t)$ for alle $t \in J$. Dette betyder, at hvis to løsninger $\underline{\varphi}(t)$ og $\underline{\psi}(t)$ er defineret i samme begrænsede eller ubegrænsede interval I og stemmer overens i et af dets punkter $\sigma$, vil der findes en omegn af dette, hvori de stemmer overens. Heraf kan sluttes videre, at de to løsninger må stemme overens i hele intervallet I. Delmængden af de tal $t \in I$, for hvilke $\underline{\varphi}(t) = \underline{\psi}(t)$, er nemlig ifølge det viste åben relativ til I, men også afsluttet relativ til I, da funktionerne er kontinuerte. Da I er sammenhængende og mængden ikke tom, må den udgøre hele intervallet I. Dermed er den følgende <u>entydighedssætning</u> bevist:

<u>Lad $\Omega \subseteqq \grave{R} \times V_n$ være åben, og antag, at $\underline{f}:\Omega \to V_n$ er kontinuert og opfylder en lokal Lipschitzbetingelse i $\Omega$ med hensyn til $\underline{x} \in V_n$ ligeligt i $t \in \grave{R}$. Da vil to løsninger $\underline{\varphi}(t)$ og $\underline{\psi}(t)$ til differentialligningen $D\underline{x} = \underline{f}(t,\underline{x})$, som er definerede i samme interval og som stemmer overens for en værdi af t i dette, være identiske.</u>

# Øvelser til kap. I, § 4.

1. Om funktionen $\underline{f} : \omega \to V_m$, hvor $\omega$ er en åben delmængde af $V_n$, forudsættes, at hvert punkt i $\omega$ har en omegn, i hvilken $\underline{f}$ opfylder en Lipschitzbetingelse. Vis, at $\underline{f}$ opfylder en Lipschitzbetingelse i hver kompakt og konveks delmængde $\gamma$ af $\omega$.

2. Vis, at afbildningen $(x_1,x_2) \to (|x_1-x_2{}^2|, x_1{}^{4/3}\mathrm{tg}\, x_2)$ af $\omega = \mathring{R} \times ]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ ind i $\mathring{R}^2$ opfylder en lokal Libschitzbetingelse i $\omega$.

3. Lad (S,dist) være et fuldstændigt metrisk rum. En afbildning $\Phi : S \to S$ kaldes en kontraktion, hvis der findes en positiv konstant $k < 1$, således at

$$\mathrm{dist}(\Phi(p),\Phi(q)) \leqq k\ \mathrm{dist}(p,q)$$

for hvilkesomhelst to punkter $p,q \in S$. Vis, at enhver kontraktion af S har et og kun eet fikspunkt. (Betragt for et vilkårligt valgt punkt $p \in S$ følgen $\Phi^i(p)$, $i \in \mathring{N}$.)

Lad $\underline{f}(t,\underline{x})$ være en kontinuert afbildning af en åben mængde $\Omega \subseteqq \mathring{R} \times V_n$ ind i $V_n$, som opfylder en Libschitzbetingelse med hensyn til $\underline{x}$ ligeligt i t i den ved $(\tau,\underline{\xi}) \in \Omega$ og $\alpha > 0$, $\beta > 0$ bestemte mængde $\Gamma$ (jfr. teksten). Med $\gamma$ betegnes $\{\underline{x} \mid \|\underline{x}-\underline{\xi}\| \leqq \beta\} \subset V_n$. For et afsluttet interval $J \subseteqq [\tau-\alpha, \tau+\alpha]$ betragtes det fuldstændige metriske rum $(S_J, \mathrm{dist})$ bestående af alle kontinuerte afbildninger $\underline{\varphi} : J \to \gamma$ med

$$\mathrm{dist}(\underline{\varphi},\underline{\psi}) = \sup_{t \in J} \|\underline{\psi}(t) - \underline{\varphi}(t)\|.$$

Vis, at der findes et tal $\alpha'' > 0$, således at den ved

$$\Phi(\underline{\varphi}) = \underline{\xi} + \int_{\tau}^{t} \underline{f}(t,\underline{\varphi}(t))dt, \quad t \in J_o = [\tau-\alpha'', \tau+\alpha''],$$

bestemte afbildning $\Phi : S_{J_o} \to S_{J_o}$ er en kontraktion af

$(S_{J_0}, \text{dist})$.
Benyt dette til at bevise en eksistens- og entydighedssætning for differentialligningen $D\underline{x} = \underline{f}(t,\underline{x})$. (De sukcessive approksimationers metode, É. Picard, E. Lindelöf.)

4. Benyt de sukcessive approksimationers metode (jfr. øv. 3) til at finde den løsning $(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ til differentialligningssystemet

$$Dx_1 = x_2,$$
$$Dx_2 = x_1,$$

for hvilken $(\varphi_1(0),\varphi_2(0)) = (1,0)$. (Sæt

$$(\varphi_{1,0}(t),\ \varphi_{2,0}(t)) = (1,0)$$

og definer induktivt

$$(\varphi_{1,n+1}(t),\varphi_{2,n+1}(t)) = \left(1 + \int_0^t \varphi_{2,n}(s)ds, \int_0^t \varphi_{1,n}(s)ds\right),$$

og beregn $(\varphi_{1,n},\varphi_{2,n})$.)

5. Vis, at alle reelle løsninger til differentialligningen $D^2x = -\sin x + q(t)$, hvor $q:\mathring{R} \to \mathring{R}$ er kontinuert, er definerede i hele $\mathring{R}$, og at der for hvert talsæt $(\tau,\xi_0,\xi_1)$ findes en og kun een løsning $\varphi(t)$, for hvilken $\varphi(\tau) = \xi_0$ og $D\varphi(\tau) = \xi_1$.

# Kap. II. Lineære differentialligningssystemer.

## § 1. Homogene lineære differentialligningssystemer.

Et differentialligningssystem

$$Dx_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, n$$

siges at være lineært, hvis de højre sider er førstegradspolynomier i $x_1, \ldots, x_n$, hvis de altså har formen

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t) x_j + q_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

hvor $p_{ij}(t)$ og $q_i(t)$ er givne funktioner af t. I stedet for den tidligere brugte vektorbetegnelse er det her hensigtsmæssigt at indføre matricer. Sættes

$$\underline{\underline{P}} = (p_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \quad ,$$

og skrives sættene $(x_1, \ldots, x_n)$ og $(q_1, \ldots, q_n)$ som søjler $\underline{\underline{x}}_|$ og $\underline{\underline{q}}_|$, kan differentialligningssystemet skrives som matrixligningen

$$D\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{P}}(t)\ \underline{\underline{x}}_| + \underline{\underline{q}}_|(t).$$

Det forudsættes, at funktionerne $p_{ij}(t)$ og $q_i(t)$ er definerede og kontinuerte i det samme (begrænsede eller ubegrænsede) interval. Har dette interval et venstre endepunkt a, som tilhører det, udvides de nævnte funktioner ved at sætte $p_{ij}(t) = p_{ij}(a)$, $q_i(t) = q_i(a)$ for $t < a$. Tilsvarende defineres de for $t > b$, hvis intervallet har et højre endepunkt b, som tilhører det. Man kan derfor antage, at det interval J, hvori funktionerne er definerede og kontinuerte, er åben. Det lineære differentialligningssystem siges at være homogent, når $\underline{\underline{q}}_|(t) = \underline{\underline{0}}_|$ for alle $t \in J$, ellers inhomogent.

Med de i eksistenssætningen brugte betegnelser (side I,3,4) er her $\Omega = J \times V_n$, hvor $V_n$ er $\mathring{R}^n$ eller $\mathring{C}^n$. For $\tau \in J$ og $\underline{\underline{\xi}}_| \in V_n$ vil den ved de positive tal $\alpha$ og $\beta$ bestemte mængde $\Gamma$ for hvert $\beta > 0$ være indeholdt i $\Omega$, når blot $[\tau-\alpha,\tau+\alpha] \subset J$. Da de givne højre sider øjensynlig er kontinuerte i $\Omega$, kan eksistenssætningen anvendes. Når $(\tau,\underline{\underline{\xi}}_|) \in \Omega$ er givet, kan der altså afgrænses et interval omkring $\tau$, hvori der eksisterer en løsning $\underline{\underline{\varphi}}_|(t)$, for hvilken $\underline{\underline{\varphi}}_|(\tau) = \underline{\underline{\xi}}_|$.

Lad I være et begrænset og afsluttet delinterval af J, og sæt

$$L(I) = n \max\left\{\max_{t\in I}\{|p_{ij}(t)|\} \mid i,j = 1,\dots,n\right\}$$

Da fås for $(t,\underline{\underline{x}}_|'),(t,\underline{\underline{x}}_|'') \in I \times V_n$, at

$$\|\underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{x}}_|'' - \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{x}}_|'\| = \|\underline{\underline{P}}(t)(\underline{\underline{x}}_|'' - \underline{\underline{x}}_|')\|$$

$$= \max\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)(x_j''-x_j')\right| \mid i = 1,\dots,n\right\}$$

$$\leq \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |p_{ij}(t)|\,|x_j''-x_j'| \mid i = 1,\dots,n\right\}$$

$$\leq L(I)\|\underline{\underline{x}}_|'' - \underline{\underline{x}}_|'\|.$$

Dette viser, at differentialligningssystemets højre sider opfylder en Lipschitzbetingelse med hensyn til $\underline{\underline{x}}_|$ ligeligt i t, og dette i mængden $I \times V_n$. Entydighedssætningen (side I,4,4) kan altså anvendes. Der går følgelig kun een løsning gennem et givet punkt $(\tau,\underline{\underline{\xi}}_|) \in \Omega$.

<u>Enhver løsning til et lineært differentialligningssystem $D\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{x}}_| + \underline{\underline{q}}_|(t)$, hvor $\underline{\underline{P}}(t)$ og $\underline{\underline{q}}_|(t)$ er definerede og kontinuerte i et (begrænset eller ubegrænset) åbent interval J, eksisterer i hele intervallet J.</u>

Beviset herfor vil i denne paragraf kun blive ført for homogene systemer. For inhomogene vil det fremgå umiddelbart af en metode til bestemmelsen af løsningerne ud fra løsningerne til det tilsvarende homogene system. Denne metode omtales i den følgende paragraf.

Lad $[\tau,T]$, hvor $T > \tau$, være et afsluttet delinterval af J, og lad L(I) være den som ovenfor bestemte Lipschitzkonstant for et vilkårligt og begrænset interval $I \subset J$, som omslutter $[\tau,T]$. Med r betegnes det mindste positive hele tal, som er større end eller lig med $2L(I)(T-\tau)$. Intervallet $[\tau,T]$ inddeles ved delepunkter

$$\tau = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{r-1} < \tau_r = T$$

i r lige store intervaller. Hvert af disse har da længden

$$(T-\tau)/r \leqq 1/2L.$$

Er nu $\underline{\varphi}_|(t)$, $t \in [\tau,T]$, en løsning til differentialligningssystemet, sættes

$$\underline{\varphi}_|(\tau_\rho) = \underline{\xi}_{|\rho}\,, \qquad \rho = 0,1,\dots,r.$$

Foruden løsningen $\underline{\varphi}_|(t)$ betragtes løsningen $\underline{\psi}_|(t) = \underline{0}_|$ , som jo eksisterer i hele intervallet. På hvert af intervallerne $[\tau_{\rho-1},\tau_\rho]$ kan da uligheden (*) (side I,4,4) anvendes, nemlig med

$$\sigma = \tau = \tau_{\rho-1}, \qquad t = \tau_\rho\,,$$

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}_{|\rho-1} = \underline{\varphi}_|(\tau_{\rho-1}), \qquad \eta = \underline{\psi}_|(\tau_{\rho-1}) = \underline{0}_| .$$

Den udsiger da, at der for $\underline{\xi}_{|\rho} = \underline{\varphi}_|(\tau_\rho)$ gælder

$$\|\underline{\xi}_{|\rho}\| \leqq 2\|\underline{\xi}_{|\rho-1}\|\,, \qquad \rho = 1,\dots,r.$$

Ved induktion sluttes heraf, at

$$\|\underline{\varphi}_|(T)\| = \|\underline{\xi}_{|r}\| \leqq 2^r\|\underline{\xi}_{|0}\| = 2^r\|\underline{\varphi}_|(\tau)\|.$$

Idet $r \leqq 2L(I)(T-\tau)+1$, fås

$$\|\underline{\varphi}_|(T)\| \leqq 2^{2L(I)(T-\tau)+1}\|\underline{\varphi}_|(\tau)\|.$$

På samme måde vises, at der for $T < \tau$, $[T,\tau] \subseteqq I$ gælder

$$\|\underline{\varphi}_|(T)\| \leqq 2^{2L(I)(\tau-T)+1}\|\underline{\varphi}_|(\tau)\|.$$

Disse to uligheder sammenfattes til

$$\|\underline{\varphi}_|(T)\| \leqq 2^{2L(I)|T-\tau|+1}\|\underline{\varphi}_|(\tau)\|, \qquad \tau,T \in I.$$

Antag nu at eksistensintervallet for den betragtede løsning $\underline{\underline{\varphi}}_1$ ikke var hele intervallet J, men havde for eksempel et højre endepunkt $b \in J$. I dette punkt b selv kunne løsningen da ikke eksistere, idet det ellers var muligt at fortsætte den ud over b ifølge eksistenssætningen. Af den beviste ulighed følger, at der findes et tal K, således at $\|\underline{\underline{\varphi}}_1(t)\| < K$ for $\tau \leqq t < b$. Hele løsningen for $t > \tau$ ville følgelig tilhøre den kompakte delmængde

$$\{(t,\underline{\underline{x}}_1) \mid t \in [\tau,b] \wedge \|\underline{\underline{x}}_1\| \leqq K\}$$

af $\Omega$. Dette strider imidlertid mod en tidligere vist sætning (I,§ 4). På samme måde vises, at det interval, hvori løsningen eksisterer, ikke kan have et venstre endepunkt a, som ligger inden for J. Dermed er beviset for sætningen afsluttet.

En differentialligning af n-te orden

$$D^n x = f(t,x,Dx,\dots,D^{n-1}x)$$

siges at være lineær, hvis $f(t,x,x_1,\dots,x_{n-1})$ er et førstegradspolynomium i de variable $x,x_1,\dots,x_{n-1}$. En sådan differentialligning har altså formen

$$D^n x = p_{n-1}(t)D^{n-1}x + \dots + p_1(x)Dx + p_0(t)x + q(t),$$

hvor funktionerne $p_0(t),\dots,p_{n-1}(t),q(t)$ er givne. De forudsættes at være definerede og kontinuerte i et åbent interval J. Ligningen er ensbetydende med det lineære differentialligningssystem

$$\begin{aligned} Dx &= x_1 \\ Dx_1 &= x_2 \\ &\;\;\vdots \\ Dx_{n-2} &= x_{n-1} \\ Dx_{n-1} &= p_0 x + p_1 x_1 + \dots + p_{n-1}x_{n-1} + q \end{aligned}$$

med de tilhørende matricer

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{q}}_| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ q \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{x}}_| = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Den lineære differentialligning siges at være homogen, hvis $q(t) = 0$ for alle $t \in J$, ellers inhomogen. Dette er ensbetydende med, at det tilsvarende differentialligningssystem er henholdsvis homogent eller inhomogent. Af den ovenfor beviste sætning følger, at hver løsning til den homogene differentialligning af n-te orden eksisterer i hele intervallet J.

<u>Løsningerne til et lineært homogent differentialligningssystem</u>

$$D\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{x}}_| , \qquad t \in J,$$

<u>bestående af n ligninger med n ubekendte funktioner danner et n-dimensionalt vektorrum</u>.

Bevis: Det er klart, at hvis $\underline{\underline{\varphi}}_|$ og $\underline{\underline{\psi}}_|$ er løsninger, vil også $\underline{\underline{\varphi}}_| + \underline{\underline{\psi}}_|$ være en løsning. Endvidere ses, at hvis $\underline{\underline{\varphi}}_|$ er en løsning og $\alpha$ et tal fra det tallegeme $\dot{R}$ eller $\dot{C}$, som er lagt til grund, vil $\alpha\underline{\underline{\varphi}}_|$ også være en løsning. Dette viser, at løsningerne udgør et underrum i vektorrummet af alle afbildninger af J ind i $V_n$. Er nu $\tau$ et tal i J og $\underline{\underline{\xi}}_{|1},\dots,\underline{\underline{\xi}}_{|n}$ lineært uafhængige vektorer i $V_n$, vil løsningerne $\underline{\underline{\varphi}}_{|1},\dots,\underline{\underline{\varphi}}_{|n}$, for hvilke $\underline{\underline{\varphi}}_{|\nu}(\tau) =$

$\underline{\xi}_{|\nu}$, $\nu = 1,\dots,n$, være lineært uafhængige; thi en for alle $t \in J$ gyldig egentlig lineær relation imellem dem måtte specielt gælde for $t = \tau$, altså bestå mellem $\underline{\xi}_{|1},\dots,\underline{\xi}_{|n}$, i strid med disse vektorers lineære uafhængighed. Løsningsrummets dimension er altså mindst n. At den ikke kan være større end n, ses således: Lad $\underline{\psi}_|$ være en vilkårlig løsning. Idet $\underline{\xi}_{|1},\dots,\underline{\xi}_{|n}$ danner en basis for $V_n$, har søjlen $\underline{\psi}_|(\tau)$ en fremstilling

$$\underline{\psi}_|(\tau) = c_1\underline{\xi}_{|1} + \dots + c_n\underline{\xi}_{|n},$$

hvor $c_1,\dots,c_n$ er reelle (komplekse) tal. De to løsninger $\underline{\psi}_|(t)$ og $c_1\underline{\varphi}_{|1}(t) + \dots + c_n\underline{\varphi}_{|n}(t)$ stemmer altså overens for $t = \tau$. Ifølge entydighedssætningen stemmer de da overens for alle $t \in J$. Dette viser, at løsningerne $\underline{\varphi}_{|1},\dots,\underline{\varphi}_{|n}$ danner en basis for løsningsrummet. Dermed er sætningen bevist.

Anvendelse på systemet, der er ensbetydende med en homogen lineær differentialligning af n-te orden, giver følgende: Til hver løsning $\varphi$ svarer en søjle

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ D\varphi \\ \vdots \\ D^{n-1}\varphi \end{pmatrix},$$

og alle disse søjler udgør et n-dimensionalt vektorrum. Heraf kan sluttes, at løsningerne $\varphi$ selv udgør et n-dimensionalt vektorrum, nemlig et underrum i vektorrummet af alle funktioner fra J til $\mathbf{R}$ eller $\mathbf{C}$. At løsningerne danner et vektorrum, er klart, og er løsningerne $\varphi_1,\dots,\varphi_r$ lineært uafhængige, vil de tilhørende søjler selvfølgelig også være det. Dimensionen af løsningsrummet for differentialligningen af n-te orden kan altså ikke være større end dimensionen n af systemets løsningsrum. Omvendt, af en egentlig lineær relation

$$c_1\varphi_1(t) + \dots + c_r\varphi_r(t) = 0, \qquad t \in J,$$

mellem løsninger til differentialligningen af n-te orden fås ved differentiation lineære relationer med de samme koefficienter mellem løsningernes afledede til og med den (n-1)-te, hvilket viser, at de tilhørende søjler er lineært afhængige. Dermed er vist: <u>Løsningerne til en homogen lineær differentialligning af n-te orden udgør et n-dimensionalt vektorrum</u>.

Søjler $\underline{\underline{\varphi}}_{|1}(t),\ldots,\underline{\underline{\varphi}}_{|r}(t)$ af funktioner, der er definerede i samme interval J, kan være lineært uafhængige, skønt de for hvert enkelt $t \in J$ er lineært afhængige. Det sidste betyder jo blot, at der findes en egentlig lineær relation med koefficienter, der kan afhænge af t, og dette kan være tilfældet, uden at der findes en egentlig lineær relation med konstante koefficienter; eksempel: $\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Er søjlerne løsninger til et homogent lineært ligningssystem $D\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{x}}_|$, forholder det sig imidlertid anderledes. Er nemlig

$$c_1\underline{\underline{\varphi}}_{|1}(\tau) + \ldots + c_r\underline{\underline{\varphi}}_{|r}(\tau) = \underline{\underline{0}}_|$$

en egentlig lineær relation mellem løsningernes værdier for den ene værdi $t = \tau$, vil løsningen

$$c_1\underline{\underline{\varphi}}_{|1}(t) + \ldots + c_r\underline{\underline{\varphi}}_{|r}(t)$$

for $t = \tau$ stemme overens med nulløsningen og altså ifølge entydighedssætningen være identisk med denne. Dette viser: <u>Løsninger til et homogent lineært differentialligningssystem er lineært afhængige, hvis deres værdier for en enkelt værdi af den uafhængige variable er lineært afhængige</u>.

Sammenfattes søjlerne $\underline{\underline{\varphi}}_{|1}(t),\ldots,\underline{\underline{\varphi}}_{|r}(t)$ til en $(n \times r)$-matrix $\underline{\underline{\Phi}}(t)$, udsiger matrixligningen

$$D\underline{\underline{\Phi}}(t) = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{\Phi}}(t),$$

at hver af søjlerne er en løsning til det homogene lineære differentialligningssystem $D\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{x}}_|$. Matricen $\underline{\underline{\Phi}}$ kaldes da for en løsningsmatrix til systemet. Multipliceres matrixligningen fra højre med en konstant ($r \times s$)-matrix $\underline{\underline{C}}$, fås

$$D(\underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\underline{C}},$$

hvilket viser, at ($n \times s$)-matricen $\underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\underline{C}}$, hvis søjler er linearkombinationer med konstante koefficienter af søjlerne i $\underline{\underline{\Phi}}$, også er en løsningsmatrix (i overensstemmelse med, at løsningerne danner et vektorrum). En ($n \times n$)-løsningsmatrix $\underline{\underline{\Phi}}$, hvis søjler er lineært uafhængige, altså danner en basis for løsningsrummet, kaldes en fundamentalmatrix for systemet. Af det ovenfor viste følger, at en sådan er regulær for hver værdi $t \in J$, og omvendt gælder, at en ($n \times n$)-løsningsmatrix, som er regulær for mindst een værdi af $t$, er en fundamentalmatrix. Heraf sluttes videre, at hvis $\underline{\underline{\Phi}}$ er en fundamentalmatrix og $\underline{\underline{C}}$ en konstant regulær ($n \times n$)-matrix, vil $\underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\underline{C}}$ også være en fundamentalmatrix. Ifølge eksistens- og entydighedssætningen findes der en og kun een fundamentalmatrix, som for et givet $\tau \in J$ er lig med en vilkårlig given regulær matrix. Er nu $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ og $\underline{\underline{\Psi}}(t)$ to fundamentalmatricer, vil $\underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{\underline{\Phi}}^{-1}(\tau)\underline{\underline{\Psi}}(\tau)$ for $t = \tau$, altså for alle $t \in J$ stemme overens med $\underline{\underline{\Psi}}(t)$. Dette viser, at hver fundamentalmatrix $\underline{\underline{\Psi}}$ kan fås ved højremultiplikation af $\underline{\underline{\Phi}}$ med en konstant regulær matrix, nemlig $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{\Phi}}^{-1}(\tau)\underline{\underline{\Psi}}(\tau)$.

Lad $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ være en ($n \times n$)-løsningsmatrix, for hvilken $\underline{\underline{\Phi}}(\tau) = \underline{\underline{\Xi}}$, hvor $\underline{\underline{\Xi}}$ er en given konstant ($n \times n$)-matrix. Determinanten af $\underline{\underline{\Phi}}$ kan da beregnes på følgende måde: Man har

$$D(\det \underline{\underline{\Phi}}) = D \det(\underline{\varphi}_{1-},\ldots,\underline{\varphi}_{n-})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \det(\underline{\varphi}_{1-},\ldots,\underline{\varphi}_{i-1-},D\underline{\varphi}_{i-},\underline{\varphi}_{i+1-},\ldots,\underline{\varphi}_{n-}).$$

Nu er rækken $D\underline{\varphi}_{i-}$ i matricen $D\underline{\underline{\Phi}}$ lig med den i-te række i $\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{\Phi}}$, altså lig med $\underline{p}_{i-}\underline{\underline{\Phi}}$, hvor $\underline{p}_{i-}$ betegner den i-te række i matricen $\underline{\underline{P}}$, og man har

$$\underline{\underline{p}}_{i-}\underline{\underline{\Phi}} = \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\varphi_{j1},\ldots,\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\varphi_{jn}\right) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\underline{\underline{\varphi}}_{j-} .$$

Denne række er altså linearkombination af rækkerne i $\underline{\underline{\Phi}}$. Indsat for $D\underline{\underline{\varphi}}_{i-}$ i determinanten i ovenstående sum kan den erstattes med $p_{ii}\underline{\underline{\varphi}}_{i-}$, idet subtraktion af

$p_{i1}\underline{\underline{\varphi}}_{1-} + \ldots + p_{ii-1}\underline{\underline{\varphi}}_{i-1-} + p_{ii+1}\underline{\underline{\varphi}}_{i+1-} + \ldots + p_{in}\underline{\underline{\varphi}}_{n-}$

ikke ændrer determinaten. Man får altså

$$D(\det \underline{\underline{\Phi}}) = \sum_{i=1}^{n} p_{ii} \det \underline{\underline{\Phi}} = \operatorname{tr} \underline{\underline{P}} \det \underline{\underline{\Phi}}.$$

Løsningsmatricens determinant tilfredsstiller følgelig den homogene lineære differentialligning

$$Dy = \operatorname{tr} \underline{\underline{P}}\, y.$$

Den løsning til denne, som for $t = \tau$ antager værdien $\det \underline{\underline{\Xi}}$, er

$$\det \underline{\underline{\Phi}}(t) = \det \underline{\underline{\Xi}} \exp \int_{\tau}^{t} \operatorname{tr} \underline{\underline{P}}(s)\, ds, \qquad \tau, t \in J.$$

Heraf ses, at en $(n \times n)$-løsningsmatrices determinant enten er 0 for alle $t \in J$ eller forskellig fra 0 for alle $t \in J$. (Dette kunne også sluttes af det, der blev vist ovenfor om den lineære afhængighed af løsninger.) En $(n \times n)$-løsningsmatrix er en fundamentalmatrix, hvis og kun hvis dens determinant er forskellig fra 0.

Anvendt på det lineære differentialligningssystem, der svarer til den homogene lineære differentialligning

$$D^n x = p_{n-1}D^{n-1}x + \ldots + p_1 Dx + p_0 x$$

af n-te orden, giver dette følgende: Er $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ løsninger, vil disses <u>Wronski-determinant</u>

$$W(\varphi_1,\dots,\varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ D\varphi_1 & \dots & D\varphi_n \\ \vdots & & \vdots \\ D^{n-1}\varphi_1 & \dots & D^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}$$

være en funktion af $t \in J$, som tilfredsstiller differentialligningen

$$DW(\varphi_1,\dots,\varphi_n) = p_{n-1}\, W(\varphi_1,\dots,\varphi_n),$$

idet nemlig her tr $\underline{\underline{P}} = p_{n-1}$ (se side II,1,5). For den til t svarende værdi af W fås altså

$$W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t) = W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(\tau) \exp \int_{\tau}^{t} p_{n-1}(s)ds.$$

En basis for løsningsrummet, altså et sæt af n lineært uafhængige løsninger $\varphi_1,\dots,\varphi_n$, kaldes et <u>fundamentalsæt</u> for differentialligningen af n-te orden. Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at n løsninger danner et fundamentalsæt, er, at deres Wronski-determinant er forskellig fra 0.

Er $\underline{\underline{\Phi}}$ en $(n \times r)$-løsningsmatrix til det homogene lineære differentialligningssystem $D\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{x}}_|$ og $\underline{\underline{S}}$ en konstant $(n \times n)$-matrix, vil $\underline{\underline{S\Phi}}$ i almindelighed ikke være en løsningsmatrix til det samme system. Ved venstremultiplikation af $D\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{P\Phi}}$ med $\underline{\underline{S}}$ fås $D(\underline{\underline{S\Phi}}) = \underline{\underline{SP\Phi}}$. Under forudsætningen af, at $\underline{\underline{S}}$ er regulær, kan dette omskrives til

$$D(\underline{\underline{S\Phi}}) = \underline{\underline{SPS}}^{-1}(\underline{\underline{S\Phi}}),$$

hvilket viser, at $\underline{\underline{S\Phi}}$ er en løsningsmatrix til systemet $D\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{SPS}}^{-1}\underline{\underline{x}}_|$. Omvendt, hvis $\underline{\underline{\psi}}$ er en løsningsmatrix til dette system, vil $\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{\psi}}$ være en løsningsmatrix til det oprindelige. Dette kan benyttes til en forenkling af integrationen af systemet $D\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{x}}_|$, dersom det er muligt at finde en konstant regulær matrix $\underline{\underline{S}}$, således at $\underline{\underline{SP}}(t)\underline{\underline{S}}^{-1}$ er simplere end $\underline{\underline{P}}(t)$. Når $\underline{\underline{P}}(t)$ er en ikke konstant funktion af t, vil dette almindeligvis ikke være tilfældet. Men når matricen $\underline{\underline{P}}$ er konstant, kan der opnås betydelige forenklinger (jfr. § 3). Fremgangsmåden kan opfattes som en koordinattransformation i rummet $V_n$ med koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$.

## Øvelser til kap. II, § 1.

1. Om den komplekse $(n \times n)$-matrix $\underline{\underline{P}}(t)$ forudsættes, at den er en i et interval J kontinuert funktion, der er begrænset (i den forstand, at alle dens elementer er begrænsede funktioner fra J til $\mathring{C}$). Vis, at der for hver løsning $\underline{\varphi}|$ til det homogene lineære differentialligningssystem $\underline{\underline{D}}\underline{x}| = \underline{\underline{P}}(t)\underline{x}|$ gælder

$$D(\overline{\underline{\varphi}}\_\underline{\varphi}|) = \overline{\underline{\varphi}}|(\underline{\underline{P}}(t)+\underline{\underline{P}}^*(t))\underline{\varphi}|,$$

hvor $\underline{\underline{P}}^* = \overline{\underline{\underline{P}}}'$ er den til $\underline{\underline{P}}$ konjugeret komplekse og transponerede matrix.

Den Hermitesk symmetriske matrix $\underline{\underline{P}}(t)+\underline{\underline{P}}^*(t)$ har lutter reelle egenværdier. Lad $\mu_{max}(t)$ og $\mu_{min}(t)$ betegne henholdsvis dens største og den mindste af dem, og sæt

$$M = \sup_{t\in J} \mu_{max}(t), \quad m = \inf_{t\in J} \mu_{min}(t).$$

Vis, at der for hver løsning $\underline{\varphi}|$ og $\tau, t \in J$, $\tau < t$, gælder

$$\|\underline{\varphi}|(\tau)\|_2^2 e^{m(t-\tau)} \leq \|\underline{\varphi}|(t)\|_2^2 \leq \|\underline{\varphi}|(\tau)\|_2^2 e^{M(t-\tau)},$$

hvor $\|\underline{\varphi}|\|_2^2 = \overline{\underline{\varphi}}\_\underline{\varphi}|$.

Det forudsættes nu, at $\underline{\underline{P}}(t) = \rho(t)\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{S}}(t)$, hvor $\rho(t)$ er en kontinuert funktion fra J til $\mathring{R}$ og $\underline{\underline{S}}(t)$ er kontinuert i J og Hermitesk skævsymmetrisk ($\overline{\underline{\underline{S}}}' = -\underline{\underline{S}}$). Beregn $\|\underline{\varphi}|(t)\|_2$ som funktion af t, idet $\underline{\varphi}|(\tau) = \underline{\xi}|$ tænkes givet.

Eksempel : $Dx_1 = x_1\cos t - x_2\sin t$

$$Dx_2 = x_1\sin t + x_2\cos t.$$

2. Lad $p(t)$ være en kontinuert funktion fra $\mathring{R}$ til $\mathring{R}$. Man betragter differentialligningen $D^2x = p(t)x$.

a) Forudsæt, at $p(t) \geqq 0$, men ikke identisk 0, for $t \in \mathring{R}$. Vis, at hver fra nulløsningen forskellig løsning $\varphi(t)$ hører til een af følgende tre typer: 1) $\varphi$ er strengt monoton og antager alle reelle værdier; 2) $\varphi$ er strengt monoton, har fast fortegn, og $|\varphi(t)| \to \infty$ for $t \to \infty$ eller for $t \to -\infty$; 3) $\varphi$ har enten eet positivt minimum eller eet negativt maximum, og $|\varphi(t)| \to \infty$ for $t \to \infty$ og $t \to -\infty$.

*b) Forudsæt, at der findes et tal $k > 0$, således at $p(t) \leqq -k^2$. Vis, at hver løsning $\varphi$ har uendelig mange nulpunkter, nemlig mindst eet i hvert interval af længden $2/k$. (Vælg et vilkårligt tal $\tau \in \mathring{R}$, antag, at $\varphi(\tau) = \xi > 0$ og $D\varphi(\tau) = \xi_1 \leqq 0$ for en løsning $\varphi$, integrer differentialligningen fra $\tau$ til $t > \tau$, benyt, at $\varphi$ er konkav i $[\tau, t]$, såfremt $\varphi \geqq 0$ i dette interval, og integrer endnu en gang.)

3. Lad $p(t)$ og $q(t)$ være kontinuerte funktioner fra et interval $J$ til $\mathring{R}$, og lad $\alpha$ være et reelt tal forskelligt fra 0 og 1. Om "Bernoulli's differentialligning"

$$Dx = p(t)x + q(t)x^{\alpha} , \qquad \Omega = J \times \mathring{R}_+$$

gælder da følgende: Der findes en lineær differentialligning af første orden, således at $\varphi^{1-\alpha}$ er en løsning til denne, når $\varphi$ er en løsning til Bernoulli's ligning. Bevis dette. Hvis $\alpha$ er et positivt rationalt tal med ulige nævner, kan vælges $\Omega = J \times \mathring{R}$ for Bernoulli's ligning. Undersøg, hvorledes dennes løsninger da kan bestemmes ud fra den lineære lignings løsninger, og for hvilke $\alpha$ entydighedssætningen kan anvendes.

Eksempler: $Dx = -x-x^{-1}$, $(1-t^2)Dx = tx-tx^2$, $Dx = 3t^{-1}x+3t^{-1}x^{2/3}$.

4. Differentialligningen

$$xD^2x - (Dx)^2 + axDx + bx^2 = 0,$$

hvor a og b er givne reelle tal, opfylder i mængden $\Omega = \mathring{R} \times (\mathring{R}\setminus\{0\}) \times \mathring{R}$ eksistenssætningens og entydighedssætningens forudsætninger. Vis, at hver positiv løsning $\varphi$ kan skrives på formen exp $\psi$, hvor $\psi$ er en løsning til en lineær differentialligning. Find derved samtlige løsninger til den givne differentialligning.

5. Angiv den mest omfattende delmængde af $\mathring{R}^3$, i hvilken differentialligningen

$$txD^2x = 2t(Dx)^2+axDx,$$

hvor a er et givet reelt tal, opfylder eksistenssætningens forudsætninger. Vis, at hver fra 0 forskellig løsning $\varphi$ kan skrives på formen $1/\psi$, hvor $\psi$ er en løsning til en lineær differentialligning. Find derved samtlige løsninger til den givne differentialligning.

Find endvidere den løsning $\varphi$, for hvilken $\varphi(1) = 1$, $D\varphi(1) = 1$, og bestem dens eksistensinterval.

6. Lad der være givet komplekse tal $a_1,\dots,a_n$. Bestem den (komplekse) fundamentalmatrix for differentialligningssystemet

$$Dx_\nu = a_\nu x_\nu, \qquad \nu = 1,\dots,n,$$

som for $t = 0$ er lig enhedsmatrix.

Lad A være en konstant kompleks $(n \times n)$-matrix. Vis, at differentialligningssystemet

$$D\underline{\underline{x}}_{|} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_{|}$$

har en løsning af formen $\underline{\underline{c}}_{|}\exp \lambda t$, hvor $\lambda$ er et komplekst tal og $\underline{\underline{c}}_{|}$ en søjle bestående af komplekse konstanter.

Angiv en fundamentalmatrix for systemet under forudsætning af, at der eksisterer en konstant matrix $\underline{\underline{S}}$, således at $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix.

Eksempel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

*7. Vis, at matricen $\exp(t\underline{\underline{A}})$, $t \in \mathring{R}$, hvor $\underline{\underline{A}}$ er en konstant (kompleks) $(n \times n)$-matrix, er en fundamentalmatrix for differentialligningssystemet $D\underline{\underline{x}}_{|} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_{|}$. (Se AG III,16,øv.9.)

## Rettelser.

Øvelse 1: Linie 7 læs $\bar{\underline{\underline{\varphi}}}_{-}$ i stedet for $\bar{\underline{\underline{\varphi}}}_{|}$ til højre for =.

Linie 8-7 f.n. læs $\|\underline{\underline{\varphi}}_{|}(\tau)\|_2^2$, $\|\underline{\underline{\varphi}}_{|}(t)\|_2^2$, $\|\underline{\underline{\varphi}}_{|}\|_2^2$ i stedet for $\|\underline{\underline{\varphi}}_{|}(\tau)\|_2$, $\|\underline{\underline{\varphi}}_{|}(t)\|_2$, $\|\underline{\underline{\varphi}}_{|}\|_2$.

Øv.2: Linie 8-9 læs "een positiv minimumsværdi eller een negativ maximumsværdi" i stedet for "eet positivt minimum ...".

Linie 12 læs 4/k i stedet for 2/k.

## §2. Inhomogene lineære differentialligningssystemer.

Lad $D\underline{\underline{y}}_| = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{y}}_| + \underline{\underline{q}}_|(t)$, $t \in J$, være et inhomogent differentialligningssystem, hvor $(n \times n)$-matricen $\underline{\underline{P}}$ og $(n \times 1)$-matricen $\underline{\underline{q}}_|$ er givne kontinuerte funktioner i det åbne interval $J$. Det blev påstået ovenfor, at alle systemets løsninger eksisterer i hele intervallet $J$. Dette vil nu blive vist, idet løsningerne angives eksplicit, udtrykt ved en fundamentalmatrix til det tilsvarende homogene system $D\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{x}}_|$.

Man søger en løsning $\underline{\underline{\psi}}_|(t)$ til det inhomogene system af formen $\underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{\underline{c}}_|(t)$, hvor $\underline{\underline{\Phi}}$ er en fundamentalmatrix til det homogene system og $\underline{\underline{c}}_|(t)$ en søjle bestående af funktioner, som er differentiable i $J$. (Hvis $\underline{\underline{c}}_|$ er konstant, fås, som vist i §1, en løsning til det homogene system.) Om en sådan søjle $\underline{\underline{c}}_|(t)$ findes, kan naturligvis ikke vides på forhånd. Men hvis den findes, må der gælde

$$D(\underline{\underline{\Phi}}\underline{\underline{c}}_|) = \begin{cases} \underline{\underline{P}}\underline{\underline{\Phi}}\underline{\underline{c}}_| + \underline{\underline{q}}_| \\ (D\underline{\underline{\Phi}})\underline{\underline{c}}_| + \underline{\underline{\Phi}}D\underline{\underline{c}}_| = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{\Phi}}\underline{\underline{c}}_| + \underline{\underline{\Phi}}D\underline{\underline{c}}_| \end{cases},$$

altså $\underline{\underline{\Phi}}D\underline{\underline{c}}_| = \underline{\underline{q}}_|(t)$,

$$D\underline{\underline{c}}_| = \underline{\underline{\Phi}}^{-1}\underline{\underline{q}}_|.$$

Idet fundamentalmatricen $\underline{\underline{\Phi}}$ antages kendt, og $\underline{\underline{q}}_|$ er givet, står der på højre en søjle, som er en kendt funktion af $t \in J$.

Som de eneste søjler $\underline{\underline{c}}_|(t)$, som kan opfylde de stillede krav, fås

$$\underline{\underline{c}}_|(t) = \underline{\underline{\gamma}}_| + \int_\tau^t \underline{\underline{\Phi}}^{-1}(s)\underline{\underline{q}}_|(s)ds,$$

hvor den konstante søjle $\underline{\underline{\gamma}}_| = \underline{\underline{c}}_|(\tau)$ kan foreskrives vilkårligt. Disse søjler er øjensynlig differentiable i hele intervallet $J$. De eneste søjler $\underline{\underline{\Phi}}\underline{\underline{c}}_|$, som kan være løsninger til det inhomogene system er følgelig

$$(*) \qquad \underline{\underline{\psi}}_|(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{\underline{\gamma}}_| + \underline{\underline{\Phi}}(t)\int_\tau^t \underline{\underline{\Phi}}^{-1}(s)\underline{\underline{q}}_|(s)ds,$$

Nu er det let at verificere, at alle disse søjler virkelig er løsninger. Ved differentiation af højre side fås nemlig

$$D(\underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{\gamma}_|) + (D\underline{\underline{\Phi}})\int_\tau^t \underline{\underline{\Phi}}^{-1}(s)\underline{q}_|(s)ds + \underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{\underline{\Phi}}^{-1}(t)\underline{q}_|(t)$$

$$= \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{\Phi}}(t)\underline{\gamma}_| + \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{\Phi}}(t)\int_\tau^t \underline{\underline{\Phi}}^{-1}(s)\underline{q}_|(s)ds + \underline{q}_|(t)$$

$$= \underline{\underline{P}}(t)\underline{\psi}_|(t) + \underline{q}_|(t).$$

Dermed er fundet uendelig mange løsninger til det inhomogene system. Blandt disse findes der en, der for $t = \tau$ antager en vilkårlig opgiven værdi $\underline{\eta}_|$, nemlig den med $\underline{\gamma}_| = \underline{\underline{\Phi}}^{-1}(\tau)\underline{\eta}_|$. Ifølge entydighedssætningen findes der kun een sådan løsning. Det fundne udtryk (*) fremstiller altså samtlige løsninger til det inhomogene system. Specielt ses heraf, at alle løsninger eksisterer i hele intervallet J, som påstået.

Det andet led i løsningsformlen (*) er den løsning til det inhomogene system, som er lig $\underline{\underline{O}}_|$ for $t = \tau$, og det første er en løsning til det homogene system. Lader man $\underline{\gamma}_|$ gennemløbe $V_n$, vil $\underline{\underline{\Phi}}\underline{\gamma}_|$ gennemløbe samtlige løsninger til det homogene system, da $\underline{\underline{\Phi}}$ er en fundamentalmatrix. Heraf sluttes:

<u>Samtlige løsninger til det inhomogene lineære differentialligningssystem</u> $D\underline{y}_| = \underline{\underline{P}}\underline{y}_| + \underline{q}_|$ <u>fås ved til een af dem at addere samtlige løsninger til det homogene system</u> $D\underline{x}_| = \underline{\underline{P}}\underline{x}_|$. Med andre ord, løsningsmængden for det inhomogene system er et sideunderrum, i vektorrummet af alle afbildninger af J ind i $V_n$, til løsningsrummet for det homogene system. Dette indses også let direkte som ved lineære ligningssystemer: Adderes en løsning til det homogene system til en løsning til det inhomogene system, fås igen en løsning til det sidstnævnte, og differensen

For den løsning

$$\underline{\psi}_{|0} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ D\psi_0 \\ \vdots \\ D^{n-1}\psi_0 \end{pmatrix}$$

til systemet, for hvilken

$$\psi_0(\tau) = D\psi_0(\tau) = \dots = D^{n-1}\psi_0(\tau) = 0,$$

giver dette

$$\underline{\psi}_{|0}(t) = \underline{\Phi}(t)\int_\tau^t \underline{\tilde{\varphi}}_{|n}(s)q(s)ds,$$

altså for det første element $\psi_0$ i søjlen $\underline{\psi}_{|0}$, som jo er den tilsvarende løsning til (**),

$$\psi_0(t) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+i}\varphi_i(t)\int_\tau^t \frac{W(\varphi_1,\dots,\varphi_{i-1},\varphi_{i+1},\dots,\varphi_n)(s)}{W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(s)}\, q(s)ds.$$

Wronski-determinanten i nævneren kan erstattes med det i § 1 fundne udtryk for den. Den løsning $\psi$ til (**), for hvilken

$$\psi(\tau) = \eta,\ D\psi(\tau) = \eta_1,\ \dots\ , D^{n-1}\psi(\tau) = \eta_{n-1},$$

hvor $\eta,\eta_1,\dots,\eta_{n-1}$ er givne tal, fås ved til $\psi_0$ at addere den løsning $\varphi$ til den tilsvarende homogene ligning, som opfylder de samme betingelser for $t = \tau$.

Den beskrevne måde at bestemme løsningerne til et inhomogent lineært differentialligningssystem på ud fra en fundamentalmatrix for det tilsvarende homogene system kaldes de <u>arbitrære konstanters variationsmetode</u>. Den kan også anvendes direkte på en inhomogen lineær differentialligning (**) af n-te orden. Er $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ et fundamentalsæt for den tilsvarende homogene ligning, søger man at bestemme n gange differentiable funktioner $c_1(t),\dots,c_n(t)$ således, at

$$\psi(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \dots + c_n(t)\varphi_n(t)$$

bliver en løsning til (**). Funktionerne $c_1,\dots,c_n$ underkastes n-1 yderligere betingelser.

# Øvelser til kap. III, § 2.

1. Bestem den fundamentalmatrix $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ for differentialligningssystemet $Dx_1 = x_2$, $Dx_2 = x_1$, som for $t = 0$ er lig med enhedsmatrix. Find dernæst den løsning $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} Dx_1 &= x_2 + t^2 \\ Dx_2 &= x_1 + t \end{aligned} \qquad (t, x_1, x_2) \in \grave{R}^3$$

for hvilken $\psi_1(0) = -1$, $\psi_2(0) = 2$.

2. Løs differentialligningen

$$D^2x + 4x = \sin at \qquad (t,x) \in \grave{R} \times \grave{R},$$

hvor $a$ er et givet reelt tal.

3. Anvend de arbitrære konstanters variationsmetode direkte på differentialligningen

$$D^2x = p_1(t)Dx + p_0(t)x + q(t),$$

hvor $p_1, p_0, q$ er givne, i et interval $J$ kontinuerte funktioner.

6. Lad der være givet komplekse tal $a_1,\ldots,a_n$. Bestem den (komplekse) fundamentalmatrix for differentialligningssystemet

$$Dx_\nu = a_\nu x_\nu, \qquad \nu = 1,\ldots,n,$$

som for $t = 0$ er lig enhedsmatrix.

Lad A være en konstant kompleks $(n \times n)$-matrix. Vis, at differentialligningssystemet

$$D\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{x}}_|$$

har en løsning af formen $\underline{\underline{c}}_| \exp \lambda t$, hvor $\lambda$ er et komplekst tal og $\underline{\underline{c}}_|$ en søjle bestående af komplekse konstanter.

Angiv en fundamentalmatrix for systemet under forudsætning af, at der eksisterer en konstant matrix $\underline{\underline{S}}$, således at $\underline{\underline{S}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix.

Eksempel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

*7. Vis, at matricen $\exp(t\underline{\underline{A}})$, $t \in \mathring{R}$, hvor $\underline{\underline{A}}$ er en konstant (kompleks) $(n \times n)$-matrix, er en fundamentalmatrix for differentialligningssystemet $D\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{x}}_|$. (Se AG III,16,øv.9.)

Rettelser.

Øvelse 1: Linie 7 læs $\overline{\underline{\underline{\varphi}}}_-$ i stedet for $\overline{\underline{\underline{\varphi}}}_|$ til højre for =.

Linie 8-7 f.n. læs $\|\underline{\underline{\varphi}}_|(\tau)\|_2^2$, $\|\underline{\underline{\varphi}}_|(t)\|_2^2$, $\|\underline{\underline{\varphi}}_|\|_2^2$ i stedet for $\|\underline{\underline{\varphi}}_|(\tau)\|_2$, $\|\underline{\underline{\varphi}}_|(t)\|_2$, $\|\underline{\underline{\varphi}}_|\|_2$.

Øv.2: Linie 8-9 læs "een positiv minimumsværdi eller een negativ maximumsværdi" i stedet for "eet positivt minimum ...".

Linie 12 læs 4/k i stedet for 2/k.