Københavns Universitets Matematiske Institut.

Matematik 1, 1964-65.

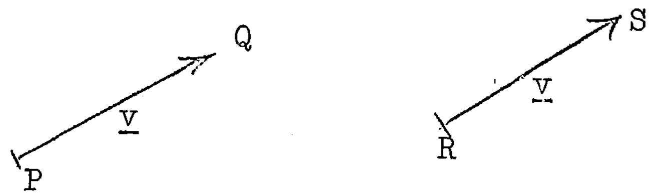
ELEMENTÆR VEKTORREGNING.

Forelæsninger af W. Fenchel og T. Gutmann Madsen

med lån fra Børge Jessen: Lærebog i geometri, I.

§ 1. Geometriske vektorer.

Ved en geometrisk vektor forstås et liniestykke i det sædvanlige rum, forsynet med en bestemt gennemløbsretning (på en figur angivet ved en pil). Betegnes begyndelsespunktet med P og endepunktet med Q, vil vi for vektoren benytte betegnelsen $\overrightarrow{PQ}$. To sådanne liniestykker $\overrightarrow{PQ}$ og $\overrightarrow{RS}$ skal dog opfattes som samme vektor, såfremt de blot har samme størrelse og retning, dvs. såfremt de ved parallelforskydning kan bringes til dækning.



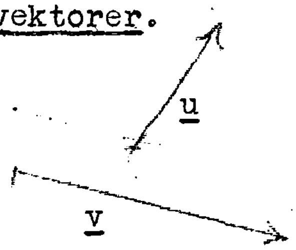
En vektor vil vi også betegne med et enkelt, understreget bogstav; således er på figuren brugt betegnelsen $\underline{v}$. Længden af en vektor $\underline{v}$ betegnes $|\underline{v}|$.

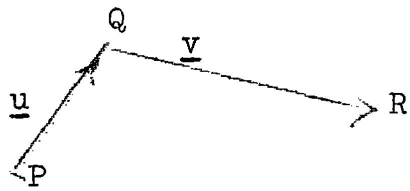
Ethvert par af punkter P og Q i det sædvanlige rum bestemmer således en (geometrisk) vektor $\underline{v} = \overrightarrow{PQ}$, – forudsat P og Q er forskellige. Også når P og Q falder sammen, vil vi imidlertid sige, at de bestemmer en vektor, nemlig nulvektoren, som vi vil betegne $\underline{0}$. Denne tilskrives længden 0, men ingen retning. De øvrige vektorer kaldes egentlige vektorer.

For ethvert punkt P og enhver vektor $\underline{v}$ findes netop ét punkt Q, således at $\overrightarrow{PQ} = \underline{v}$. Vi siger, at Q fremkommer ved afsætning af vektoren $\bar{v}$ ud fra punktet P.

For geometriske vektorer indfører vi nu to (såkaldt lineære) regneoperationer.

Addition af vektorer.





For at definere summen $\underline{u} + \underline{v}$ af to vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ vælger vi et vilkårligt punkt P og afsætter først $\underline{PQ} = \underline{u}$, dernæst $\underline{QR} = \underline{v}$. Vektoren $\underline{PR}$ er da åbenbart uafhængig af det valgte begyndelsespunkt P og betegnes $\underline{u} + \underline{v}$.

Multiplikation af vektorer med tal.

Ved produktet $a\underline{v}$ eller $\underline{v}a$ af en vektor $\underline{v}$ og et reelt tal a forstås nulvektoren, såfremt $a=0$ eller $\underline{v}=\underline{0}$, ellers (altså når både $a\neq 0$ og $\underline{v}\neq\underline{0}$) den egentlige vektor, hvis længde er $|a||\underline{v}|$, og som har samme eller modsat retning som $\underline{v}$, eftersom $a>0$ eller $a<0$.

Vi noterer følgende <u>regneregler</u>, hvis gyldighed det overlades læseren at gøre sig klart.

$$\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u} ,$$
$$\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} ,$$
$$\underline{v} + \underline{0} = \underline{v} ,$$
$$\underline{v} + (-1)\underline{v} = \underline{0} ,$$
$$a\underline{v} = \underline{v}a ,$$
$$a(b\underline{v}) = (ab)\underline{v} ,$$
$$a(\underline{u} + \underline{v}) = a\underline{u} + a\underline{v} ,$$
$$(a + b)\underline{v} = a\underline{v} + b\underline{v} ,$$
$$1\underline{v} = \underline{v} .$$

For en vilkårlig vektor $\underline{v}$ siger man, at $(-1)\underline{v}$ er $\underline{v}$'s <u>modsatte vektor</u>, og benytter også betegnelsen $-\underline{v}$. $-\underline{v}$ er eneste løsning til ligningen

$$\underline{v} + \underline{x} = \underline{0} .$$

Til to vilkårlige vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ findes netop én vektor $\underline{x}$, således at

$$\underline{v} + \underline{x} = \underline{u},$$

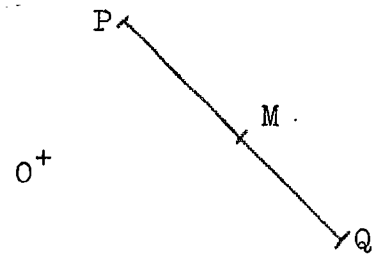
nemlig $\underline{u} + (-v)$; denne vektor kaldes *differensen* mellem $\underline{u}$ og $\underline{v}$ og betegnes kort $\underline{u} - \underline{v}$.

Stedvektorer.

Vi tænker os valgt et fast punkt O i rummet. For ethvert punkt P kaldes nu vektoren $\underline{v} = \underline{OP}$ for P's *stedvektor* (svarende til begyndelsespunktet O). Herved har nu ikke blot ethvert punkt en bestemt stedvektor, men enhver vektor er stedvektor for netop ét punkt, - der er tilvejebragt en enentydig korrespondance mellem rummets punkter og dets vektorer.

Et par simple eksempler på, hvordan man ved regning med stedvektorer kan udlede geometriske sætninger:

1.



Midtpunktet M af et liniestykke PQ, hvis endepunkter har stedvektorerne $\underline{v}$ og $\underline{w}$, har stedvektoren

$$\underline{OM} = \underline{OP} + \tfrac{1}{2}\underline{PQ} = \underline{v} + \tfrac{1}{2}(\underline{w}-\underline{v}) = \tfrac{1}{2}(\underline{v} + \underline{w}).$$

Ligger O ikke på linien PQ, udsiger dette resultat, at diagonalerne i det af $\underline{OP}$ og $\underline{OQ}$ udspændte parallelogram halverer hinanden; thi $\underline{v}+\underline{w}$ er jo netop stedvektoren for den til O diametralt modsatte vinkelspids.

2. I en trekant ABC, hvis vinkelspidser har stedvektorerne $\underline{a}$, $\underline{b}$ og $\underline{c}$ betragtes det punkt T på medianen CM, som bestemmes ved, at $MT = \frac{1}{3}MC$. Som stedvektor for T finder vi da

$$\underline{OT} = \underline{OM} + \tfrac{1}{3}\underline{MC} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} + \tfrac{1}{3}(\underline{c} - \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}) = \tfrac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}).$$

Da dette udtryk er symmetrisk i $\underline{a}$, $\underline{b}$ og $\underline{c}$, indeholder dette den bekendte sætning, at medianerne i en trekant går gennem samme punkt T, og at dette punkt deler hver af dem (indvendigt) i forholdet 2.

Vektorer på en linie, vektorer i en plan.

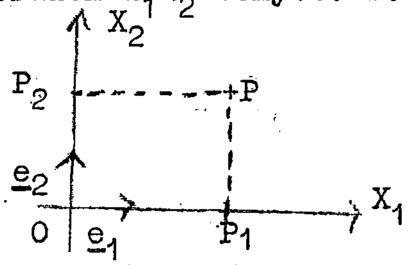
Da en vektor kan afsættes ud fra ethvert punkt i rummet, mener vi, når vi siger, at en vektor $\underline{v}$ ligger på en linie eller i en plan, at vektoren kan anbringes på linien eller i planen, altså at den enten er nulvektoren eller en egentlig vektor parallel med linien eller planen.

Vi bemærker, at summen af to vektorer i en plan π atter er en vektor i π, og at produktet af et tal og en vektor i π ligeledes er en vektor i π; de opstillede regneregler bevarer deres gyldighed, når man indskrænker sig til at betragte vektorerne i π. En tilsvarende bemærkning gælder for vektorerne på en linie.

§ 2. Sædvanligt retvinklet koordinatsystem.

Et <u>(sædvanligt) retvinklet koordinatsystem</u> i en plan er givet ved to på hinanden vinkelrette orienterede linier X_1 og X_2, <u>koordinatakserne</u>, gennem et punkt O, <u>begyndelsespunktet</u>. (En længdeenhed tænkes valgt en gang for alle.) Enhedsvektorerne $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$ på akserne kaldes koordinatsystemets <u>grundvektorer</u>. (En enhedsvektor er en vektor af længden 1.)

Idet koordinatsystemet er bestemt ved opgivelse af $0,\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$, vil vi foruden X_1X_2 benytte betegnelsen $(0,\underline{e}_1,\underline{e}_2)$.



Koordinaterne (x_1,x_2) til et punkt P i planen er som bekendt de med fortegn regnede længder af liniestykkerne OP_1 og OP_2, hvor P_1 og P_2 er P's (retvinklede) projektioner på akserne X_1 og X_2.

Man bemærker, at vi for P's stedvektor $\underline{v} = \underline{OP}$ har

$$\underline{v} = \underline{OP} = \underline{OP}_1+\underline{OP}_2 = x_1\underline{e}_1+x_2\underline{e}_2 \ ,$$

samt at (x_1,x_2) er det eneste talpar, således at $\underline{v} = x_1\underline{e}_1+x_2\underline{e}_2$. Idet enhver vektor i planen er stedvektor for et punkt, har vi således:

Til enhver vektor $\underline{v}$ i planen findes et og kun et talpar (x_1,x_2), således at

$$\underline{v} = x_1\underline{e}_1+x_2\underline{e}_2.$$

Definition: x_1 og x_2 kaldes <u>koordinaterne til vektoren $\underline{v}$</u> i det betragtede koordinatsystem.

Bemærk: <u>et punkt og dets stedvektor har samme koordinater</u>.

Et <u>(sædvanligt) retvinklet koordinatsystem</u> i rummet er givet ved tre orienterede linier X_1, X_2 og X_3, koordinatakserne, som alle går gennem et punkt O, begyndelsespunktet, og som to og to er vinkelrette. Enhedsvektorerne $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ og $\underline{e}_3$ på akserne kaldes koordinatsystemets grundvektorer. Idet koordinatsystemet er bestemt ved opgivelse af $O, \underline{e}_1, \underline{e}_2$ og $\underline{e}_3$, vil vi foruden $X_1X_2X_3$ benytte betegnelsen $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

Koordinaterne (x_1, x_2, x_3) til et punkt P i rummet er de med fortegn regnede længder af liniestykkerne OP_1, OP_2 og OP_3, hvor P_1, P_2 og P_3 er P's (retvinklede) projektioner på akserne X_1, X_2 og X_3.

Til enhver vektor $\underline{v}$ i rummet findes et og kun et talsæt (x_1, x_2, x_3), således at

$$\underline{v} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3.$$

Definition: x_1, x_2 og x_3 kaldes koordinaterne til vektoren $\underline{v}$ i det betragtede koordinatsystem.

Bemærk: et punkt og dets stedvektor har samme koordinater.

De lineære regneoperationer udtrykt i koordinater.

Vi tænker os valgt et koordinatsystem $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ i rummet.

Lad vektorerne $\underline{u}$ og $\underline{v}$ have koordinaterne (x_1, x_2, x_3) og (y_1, y_2, y_3), dvs.

$$\underline{u} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3,$$
$$\underline{v} = y_1\underline{e}_1 + y_2\underline{e}_2 + y_3\underline{e}_3.$$

Ved benyttelse af regnereglerne for vektorer finder vi

$$\underline{u} + \underline{v} = (x_1+y_1)\underline{e}_1 + (x_2+y_2)\underline{e}_2 + (x_3+y_3)\underline{e}_3,$$
$$a\underline{u} = ax_1\underline{e}_1 + ax_2\underline{e}_2 + ax_3\underline{e}_3,$$

(a er et vilkårligt reelt tal), dvs. $\underline{u}+\underline{v}$ har koordinaterne $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$, $a\underline{u}$ har koordinaterne (ax_1, ax_2, ax_3). Vi har altså:

Lineære regninger med vektorer afspejler sig i ganske de

<u>tilsvarende regninger med deres koordinater</u>.

Mærk: $\underline{0}$ har koordinaterne (0,0,0), $-\underline{u} = (-1)\underline{u}$ har koordinaterne $(-x_1,-x_2,-x_3)$, 7u-2v har koordinaterne $(7x_1-2y_1, 7x_2-2y_2, 7x_3-2x_3)$, osv.

Har <u>punkterne</u> P og Q koordinaterne (x_1,x_2,x_3) og (y_1,y_2,y_3), da har <u>vektoren</u> $\underline{PQ}$ koordinaterne

$$(y_1-x_1, y_2-x_2, y_3-x_3);$$

thi $\underline{PQ} = \underline{OQ}-\underline{OP}$, hvor $\underline{OQ}$ og $\underline{OP}$ jo har koordinaterne (y_1,y_2,y_3) og (x_1,x_2,x_3).

Eksempler:

1. Midtpunktet M af et liniestykke PQ, hvis endepunkter har koordinaterne (x_1,x_2,x_3) og (y_1,y_2,y_3), har koordinaterne

$$\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}, \frac{x_3+y_3}{2}\right);$$

thi ifølge § 1, eks. 1 er

$$\underline{OM} = \frac{\underline{OP} + \underline{OQ}}{2}.$$

2. Skæringspunktet T mellem medianerne i en trekant ABC, hvis vinkelspidser har koordinaterne (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) og (c_1,c_2,c_3), har koordinaterne

$$\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right);$$

thi ifølge § 1, eks. 2 er

$$\underline{OT} = \frac{\underline{OA} + \underline{OB} + \underline{OC}}{3}.$$

§ 3. Skalarprodukt af to vektorer.

Ved det **skalære** (eller **indre**) produkt $\underline{x}\cdot\underline{y}$ af to vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ forstås tallet 0, hvis en af vektorerne er nulvektoren, ellers (altså når begge vektorer er egentlige) produktet af deres længder og cosinus af deres vinkel, altså

$$\underline{x}\cdot\underline{y} = |\underline{x}|\,|\underline{y}|\cos(\underline{x},\underline{y}).$$

Det bemærkes, at vi for to egentlige vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$ med $(\underline{x},\underline{y})$ betegner den vinkel i intervallet $[0,\pi]$, som dannes af de to vektorer, når de afsættes fra samme punkt.

Mærk: skalarproduktet af to vektorer er et **tal** (en skalar). - Man ser, at skalarproduktet af to egentlige vektorer er positivt, nul eller negativt, eftersom vinklen mellem vektorerne er spids, ret eller stump.

Når $\underline{x}$ er en egentlig vektor, kan dens skalære produkt $\underline{x}\cdot\underline{y}$ med en vilkårlig vektor $\underline{y}$ også defineres som produktet af $|\underline{x}|$ med længden af $\underline{y}$'s projektion på $\underline{x}$'s linie, regnet med fortegn i overensstemmelse med den ved $\underline{x}$ fastlagte retning. Thi er $\underline{y}=\underline{0}$, er længden af projektionen 0, og er $\underline{y}\neq\underline{0}$, er længden af projektionen netop $|\underline{y}|\cos(\underline{x},\underline{y})$.

Den med fortegn regnede længde af projektionen af en vektor $\underline{y}$ på en orienteret linie l kan således udtrykkes

$$\underline{e}\cdot\underline{y}\ ,$$

hvor $\underline{e}$ er enhedsvektoren på l. Projektionen selv er

$$(\underline{e}\cdot\underline{y})\underline{e}\ .$$

I et skalarprodukt tillader man sig ikke, som ved sædvanlig multiplikation, at udelade prikken. Dog skrives i stedet for $\underline{x}\cdot\underline{x}$ også $\underline{x}^2$; ifølge definitionen er

$$\underline{x}\cdot\underline{x} = \underline{x}^2 = |\underline{x}|^2.$$

For det skalære produkt gælder

1. $\underline{x}\cdot\underline{y} = \underline{y}\cdot\underline{x}$,

2. $(\underline{x}'+\underline{x}'')\cdot\underline{y} = \underline{x}'\cdot\underline{y} + \underline{x}''\cdot\underline{y}$,

3. $(a\underline{x})\cdot\underline{y} = a(\underline{x}\cdot\underline{y})$,

4. $\underline{x}\neq\underline{0} \Rightarrow \underline{x}\cdot\underline{x} > 0$.

1. og 4. er klare. 3. fremgår af definitionen, når man gennemprøver de forskellige muligheder: 1) $\underline{x}$ eller $\underline{y}$ er nulvektoren, 2) $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er egentlige og henholdsvis $a>0$, $a=0$, $a<0$.

2. er indlysende for $\underline{y}=\underline{0}$. For $\underline{y}\neq\underline{0}$ kan man benytte, at længden af projektionen af $\underline{x}'+\underline{x}''$ på $\underline{y}$'s linie regnet med fortegn netop er summen af længderne af projektionerne af $\underline{x}'$ og $\underline{x}''$ regnet med fortegn.

Eksempel. Som følge af 1. gælder naturligvis sammen med 2. også

$$\underline{x}\cdot(\underline{y}'+\underline{y}'') = \underline{x}\cdot\underline{y}' + \underline{x}\cdot\underline{y}''.$$

Heraf følger umiddelbart, at man kan "gange parenteser ud" nøjagtig som for tal. Eksempelvis findes til bestemmelse af længden af en differens af to vektorer:

$$\begin{aligned} |\underline{a} - \underline{b}|^2 &= (\underline{a} - \underline{b})\cdot(\underline{a} - \underline{b}) \\ &= \underline{a}\cdot\underline{a} - \underline{a}\cdot\underline{b} - \underline{b}\cdot\underline{a} + \underline{b}\cdot\underline{b} \\ &= \underline{a}^2 + \underline{b}^2 - 2(\underline{a}\cdot\underline{b}) = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - 2(\underline{a}\cdot\underline{b}). \end{aligned}$$

Ligger $\underline{a}$ og $\underline{b}$ ikke på samme linie, går denne relation ved indsætning af udtrykket for $\underline{a}\cdot\underline{b}$ over i cosinusrelationen i den plane trigonometri. Er specielt $\underline{a}$ og $\underline{b}$ vinkelrette på hinanden, altså $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$, fås

$$|\underline{a} - \underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2,$$

altså Pythagoras' sætning.

Skalarproduktet udtrykt i koordinater.

Lad der i rummet være givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$.

For to vilkårlige vektorer $\underline{x}(x_1,x_2,x_3)$ og $\underline{y}(y_1,y_2,y_3)$, dvs.

$$\underline{x} = x_1\underline{e}_1+x_2\underline{e}_2+x_3\underline{e}_3 \quad \text{og} \quad \underline{y} = y_1\underline{e}_1+y_2\underline{e}_2+y_3\underline{e}_3,$$

finder vi ved brug af regnereglerne

$$\begin{aligned}\underline{x}\cdot\underline{y} = \; & x_1y_1\underline{e}_1\cdot\underline{e}_1 + x_1y_2\underline{e}_1\cdot\underline{e}_2 + x_1y_3\underline{e}_1\cdot\underline{e}_3 \\ & + x_2y_1\underline{e}_2\cdot\underline{e}_1 + x_2y_2\underline{e}_2\cdot\underline{e}_2 + x_2y_3\underline{e}_2\cdot\underline{e}_3 \\ & + x_3y_1\underline{e}_3\cdot\underline{e}_1 + x_3y_2\underline{e}_3\cdot\underline{e}_2 + x_3y_3\underline{e}_3\cdot e_3 .\end{aligned}$$

Da nu $\underline{e}_1,\underline{e}_2$ og $\underline{e}_3$ er enhedsvektorer, to og to vinkelrette, dvs.

$$\underline{e}_i\cdot\underline{e}_j = \begin{cases}1 & \text{for } i=j ,\\ 0 & \text{for } i\neq j ,\end{cases}$$

har vi således følgende simple koordinatudtryk for det skalære produkt:

$$\underline{\underline{x}\cdot\underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.}$$

Specielt har vi formlen

$$|\underline{x}|^2 = \underline{x}\cdot\underline{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

for længden af en vektor $\underline{x}(x_1,x_2,x_3)$. Endvidere bemærker vi

$$\underline{x}\cdot\underline{e}_1 = x_1, \quad \underline{x}\cdot\underline{e}_2 = x_2, \quad \underline{x}\cdot\underline{e}_3 = x_3 ,$$

dvs. vektorens koordinater er dens skalære produkter med grundvektorerne.

Eksempel. Retningsvinklerne for en orienteret ret linie l er vinklerne med koordinatakserne

$$\alpha_1 = (X_1,l), \quad \alpha_2 = (X_2,l), \quad \alpha_3 = (X_3,l).$$

$\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$ kaldes liniens <u>retningscosinusser</u>. De er åbenbart koordinater til enhedsvektoren $\underline{e}$ på l. Vi har således

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1.$$

Vinklen mellem to orienterede rette linier l og m med retningsvinkler $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ og β_1,β_2,β_3 bestemmes ved

$$\cos(l,m) = \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3 ;$$

højre side i ligningen udtrykker nemlig skalarproduktet af enhedsvektorerne på de to linier.

For to vektorer $\underline{x}(x_1,x_2)$ og $\underline{y}(y_1,y_2)$ i en plan, i hvilken der er givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(0,\underline{e}_1,\underline{e}_2)$, findes, på ganske samme måde som i rummet,

$$\underline{x}\cdot\underline{y} = x_1x_2 + y_1y_2 .$$

Eksempel. For et vilkårligt tal φ betegner vi med $\underline{e}_\varphi$ den enhedsvektor i planen, der fremgår af $\underline{e}_1$ ved drejningen φ i retning mod $\underline{e}_2$; e_φ har koordinaterne $(\cos\varphi,\sin\varphi)$. Vi finder herved

$$\begin{aligned}\cos(\varphi-\psi) &= \cos(e_\varphi,e_\psi) = \underline{e}_\varphi\cdot\underline{e}_\psi \\ &= \cos\varphi\,\cos\psi + \sin\varphi\,\sin\psi,\end{aligned}$$

dvs. formlen for cosinus til en differens.

§ 4. Fremstillinger af linie og plan.

Parameterfremstilling for ret linie.

Vi tænker os i rummet valgt et begyndelsespunkt O for stedvektorer.

Lad en ret linie l være givet ved et punkt A og en egentlig vektor $\underline{v}$ på linien. Idet vi med P betegner et vilkårligt punkt i rummet, gælder

$$P \text{ på } l \iff \exists t[\underline{AP} = t\underline{v}],$$

hvor t refererer til (reelle) tal, dvs.

$$P \text{ på } l \iff \exists t[\underline{OP} = \underline{OA} + t\underline{v}].$$

Man siger, at

$$\underline{OP} = \underline{OA} + t\underline{v}, \qquad -\infty < t < \infty,$$

er en parameterfremstilling for linien l. - Vi bemærker, at hvert punkt P på l svarer til netop én parameterværdi t.

Er O begyndelsespunkt i et koordinatsystem $(O,\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$, kan vi oversætte fra vektorer til koordinater:

$$(*) \qquad \begin{aligned} x_1 &= a_1 + tv_1, \\ x_2 &= a_2 + tv_2, \\ x_3 &= a_3 + tv_3, \end{aligned} \qquad -\infty < t < \infty.$$

Her er (x_1,x_2,x_3), (a_1,a_2,a_3) og (v_1,v_2,v_3) koordinater til P, A og $\underline{v}$.

Omvendt: For vilkårligt givne tal (a_1,a_2,a_3) og $(v_1,v_2,v_3) \neq (0,0,0)$ vil (*), i et forelagt koordinatsystem, fremstille en ret linie (nemlig den ved $A(a_1,a_2,a_3)$ og $\underline{v}(v_1,v_2,v_3)$ bestemte).

Ofte vil en linie l være givet ved to punkter $A(a_1,a_2,a_3)$ og $B(b_1,b_2,b_3)$. l kan da også opfattes som bestemt ved A og vektoren $\underline{v} = \underline{AB}$ med koordinater $(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$, hvorfor en parameterfremstilling (*) umiddelbart kan opskrives. Tegn skitse og find de punkter på l, der ved denne parameterfremstilling svarer til parameterværdierne 1, 2, 1/2, 0, -1.

Eksempel. I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem er en linie l givet ved en parameterfremstilling (*). Med C' betegnes den retvinklede projektion på l af et punkt $C(c_1,c_2,c_3)$. Vi vil bestemme koordinaterne (c_1',c_2',c_3') til C'.

Vor viden om C' kan udtrykkes:

1. For et vist tal t' er

$$\underline{OC'} = \underline{OA} + t'\underline{v} ,$$

2. $$\underline{C'C}\cdot\underline{v} = 0.$$

Opgaven er løst, blot vi har bestemt t'; (c_1',c_2',c_3') vil da fremgå ved indsætning af t' i (*).

Idet $(\underline{OC}-\underline{OC'})\cdot\underline{v} = 0$ har vi imidlertid

$$\underline{OC}\cdot\underline{v} = \underline{OC'}\cdot\underline{v} = \underline{OA}\cdot\underline{v} + t'\underline{v}\cdot\underline{v} ,$$

dermed

$$|\underline{v}|^2 t' = (\underline{OC} - \underline{OA})\cdot\underline{v} = \underline{AC}\cdot\underline{v} ,$$

dvs.

$$t' = \frac{(c_1-a_1)v_1+(c_2-a_2)v_2+(c_3-a_3)v_3}{v_1^2+v_2^2+v_3^2} .$$

Ligning for plan.

Vi tænker os i rummet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem med begyndelsespunkt O.

Lad en plan π være givet ved et punkt $A(a_1,a_2,a_3)$ i π og en egentlig vektor $\underline{n}(n_1,n_2,n_3)$ vinkelret på π. Idet vi med $P(x_1,x_2,x_3)$ betegner et vilkårligt punkt i rummet, gælder

$$P \text{ i } \pi \iff \underline{n}\cdot\underline{AP} = 0 ,$$

dvs.

$$P \text{ i } \pi \iff \underline{n}\cdot\underline{OP} = \underline{n}\cdot\underline{OA} ,$$

altså

$$P(x_1,x_2,x_3) \text{ i } \pi \iff n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = k ,$$

hvor $k = n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3$. Man siger, at

$$(**) \qquad n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = k$$

er <u>en ligning for planen π .</u>

Omvendt: For vilkårligt givne tal $(n_1,n_2,n_3)\neq(0,0,0)$ og k vil (**) være ligning for en plan. Vælger man nemlig et punkt $A(a_1,a_2,a_3)$, således at

$$n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3 = k,$$

vil (**) jo være en ligning for planen gennem A vinkelret på $\underline{n}(n_1,n_2,n_3)$.

<u>Et punkts afstand fra en plan</u>.

Lad i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem en plan π være givet ved en ligning

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - k = 0. .$$

$\underline{n}(n_1,n_2,n_3)$ er altså en vektor vinkelret på π .

Tænker vi os valgt et punkt $A(a_1,a_2,a_3)$ i π , har vi for et vilkårligt punkt $P(x_1,x_2,x_3)$ i rummet

$$n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3-k = n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3-n_1a_1-n_2a_2-n_3a_3$$
$$= n_1(x_1-a_1)+n_2(x_2-a_2)+n_3(x_3-a_3) = \underline{n}\cdot\underline{AP} .$$

Nu er $\underline{n}\cdot\underline{AP}$ produktet af $|\underline{n}|$ og den med fortegn regnede længde af $\underline{AP}$'s projektion på fladenormalen orienteret ved $\underline{n}$, dvs. produktet af $|\underline{n}|$ og afstanden fra π til P (regnet med fortegn). Vi har således:

Afstanden fra π til et vilkårligt punkt $P(x_1,x_2,x_3)$ i rummet, regnet med fortegn i overensstemmelse med retningen af $\underline{n}$, bestemmes ved

$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - k}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} .$$

Særlig bekvem er afstandsbestemmelsen naturligvis i tilfælde af, at $|\underline{n}|^2 = n_1^2+n_2^2+n_3^2 = 1$; planens ligning

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - k = 0$$

siges da at være normeret.

§ 5. Vektorprodukt af to vektorer.

Højrestilling og venstrestilling:

Tre egentlige vektorer $\underline{u}$, $\underline{v}$ og $\underline{w}$, der ikke ligger i samme plan, vil, taget i nævnte rækkefølge, være enten i højrestilling eller i venstrestilling (ikke begge dele). For geometrien er det af betydning, at der findes to slags sæt af tre vektorer, men ligegyldigt hvilken slags der kaldes højre-, hvilken venstre-stillet. Ved anvendelser på det sædvanlige dagligdags rum vi lever i, bruges tommel-, pege og langfinger på højre hånd som model på tre højrestillede vektorer; $\underline{u}$, $\underline{v}$ og $\underline{w}$ siges at være i højrestilling, hvis den korteste drejning fra $\underline{u}$ til $\underline{v}$, set fra den ved $\underline{w}$ bestemte side af planen udspændt af $\underline{u}$ og $\underline{v}$, er modsat urvisernes retning, - herved er de tre vektorer tænkt afsat fra samme punkt.

Ved kredsforskydning af tre vektorer, der ikke ligger i samme plan, bevares stillingen; ombyttes to af dem, ændres stillingen. Er $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ f.eks. i højrestilling, gælder det samme om $\underline{v},\underline{w},\underline{u}$ og $\underline{w},\underline{u},\underline{v}$, medens $\underline{u},\underline{w},\underline{v}$, $\underline{v},\underline{u},\underline{w}$ og $\underline{w},\underline{v},\underline{u}$ er i venstrestilling.

Et koordinatsystem $(0,\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ i rummet kaldes et højre-system eller et venstresystem, eftersom $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$ er i højre- eller venstrestilling.

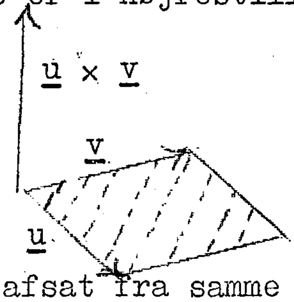
Vektorprodukt.

Ved <u>vektorproduktet</u> $\underline{u} \times \underline{v}$ af to vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ forstås, såfremt vektorerne er egentlige og ikke parallelle, den vektor, hvis længde er

$$|\underline{u}|\,|\underline{v}|\sin(\underline{u},\underline{v}),$$

som er vinkelret på både $\underline{u}$ og $\underline{v}$ og således rettet, at $\underline{u},\underline{v},\underline{u} \times \underline{v}$

i denne rækkefølge er i højrestilling.



Tænkes vektorerne afsat fra samme punkt, kan længden af $\underline{u} \times \underline{v}$ også angives som arealet af det parallelogram, der udspændes af $\underline{u}$ og $\underline{v}$.

Er $\underline{u}$ eller $\underline{v}$ nulvektoren, eller er $\underline{u}$ og $\underline{v}$ egentlige, men parallelle, forstås ved $\underline{u} \times \underline{v}$ nulvektoren.

Formlen

$$|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}|\,|\underline{v}|\sin(\underline{u},\underline{v})$$

gælder således, blot $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er egentlige.

Bemærk: vektorproduktet af to vektorer er en vektor.

Betegnelsen $\underline{u}^2$ er allerede benyttet for det skalære produkt $\underline{u}\cdot\underline{u}$ og kommer derfor ikke i betragtning for vektorproduktet $\underline{u} \times \underline{u}$; en særbetegnelse herfor er imidlertid også overflødig, thi ifølge definitionen er jo altid

$$\underline{u} \times \underline{u} = \underline{0} \, .$$

Den kommutative lov gælder ikke for vektoriel multiplikation, men erstattes af reglen

$$\underline{u} \times \underline{v} = -\,\underline{v} \times \underline{u} \, .$$

For tre vilkårlige vektorer $\underline{u}$, $\underline{v}$ og $\underline{w}$ har både $(\underline{u} \times \underline{v}) \times \underline{w}$ og $\underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w})$ mening, men de to udtryk betegner i almindelighed forskellige vektorer. F.eks. er

$$(\underline{e}_1 \times \underline{e}_1) \times \underline{e}_2 = \underline{0} \, , \text{ men } \quad \underline{e}_1 \times (\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) = -\underline{e}_2 \, ,$$

hvor $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ er de to første grundvektorer i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem. Den associative lov gælder således ikke for vektoriel multiplikation.

Derimod gælder den distributive lov:

$$\underline{u} \times (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \times \underline{v} + \underline{u} \times \underline{w} .$$

Samtidig vil vi vise

$$\underline{u} \times (a\underline{v}) = a(\underline{u} \times \underline{v}) ,$$

hvor a er et vilkårligt tal.

For $\underline{u} = \underline{0}$ er begge ligninger indlysende. Det er derfor nok at føre et bevis for det tilfælde, at $\underline{u}$ er en egentlig vektor. Hertil vil vi, idet vi tænker os $\underline{u}$ fastholdt, give en hensigtsmæssig beskrivelse af vektorproduktet $\underline{u} \times \underline{x}$ for vilkårlige vektorer $\underline{x}$.

For simpelheds skyld tænker vi os alle vektorer afsat fra samme punkt O; lad σ være planen gennem O vinkelret på $\underline{u}$ (tegn skitse). For enhver vektor $\underline{x}$ er nu

$$\underline{u} \times \underline{x} = \underline{u} \times \underline{x}',$$

hvor $\underline{x}' = P_\sigma(\underline{x})$ betegner projektionen af $\underline{x}$ på σ (overvej dette); $\underline{u} \times \underline{x}$ ligger da i σ og fremgår af $\underline{x}'$ ved en drejning af størrelse $\frac{\pi}{2}$ (i retningen modsat urvisernes, set fra $\underline{u}$'s endepunkt), efterfulgt af en multiplikation med $|\underline{u}|$. Betegner vi med $\underline{x}'' = D(\underline{x}')$ den vektor i σ, der fremgår ved drejningen alene, har vi således

$$\underline{u} \times \underline{x} = |\underline{u}|\underline{x}''.$$

Nu er åbenbart

$$(\underline{v}+\underline{w})' = P_\sigma(\underline{v}+\underline{w}) = P_\sigma(\underline{v}) + P_\sigma(\underline{w}) = \underline{v}' + \underline{w}' ,$$

$$(\underline{v}+\underline{w})'' = D(\underline{v}'+\underline{w}') = D(\underline{v}') + D(w') = v''+w'' ,$$

og dermed

$$\underline{u} \times (\underline{v}+\underline{w}) = |\underline{u}|(\underline{v}+\underline{w})'' = |\underline{u}|\underline{v}'' + |\underline{u}|\underline{w}'' = \underline{u} \times \underline{v} + \underline{u} \times \underline{w} .$$

Ligeledes

$$(a\underline{v})' = P_\sigma(a\underline{v}) = aP_\sigma(\underline{v}) = a\underline{v}' ,$$

$$(a\underline{v})'' = D(a\underline{v}') = aD(v') = av'' ,$$

og dermed
$$\underline{u} \times (a\underline{v}) = |\underline{u}|(a\underline{v})'' = a|\underline{u}|\underline{v}'' = a(\underline{u} \times \underline{v}).$$

Eksempel. Naturligvis gælder også den anden form af den distributive lov
$$(\underline{v} + \underline{w}) \times \underline{u} = \underline{v} \times \underline{u} + \underline{w} \times \underline{u}$$
såvel som reglen
$$(a\underline{v}) \times \underline{u} = a(\underline{v} \times \underline{u});$$
thi ombyttes faktorerne i alle vektorprodukterne, skifter disse alle fortegn.

Man har derfor f.eks.
$$(\underline{z}+5\underline{u}) \times (\underline{v}-3\underline{w}) = \underline{z} \times \underline{v} + 5\underline{u} \times \underline{v} - 3\underline{z} \times \underline{w} - 15\underline{u} \times \underline{w} ;$$
når man således "ganger parenteser ud", må man være opmærksom på, at man i vektorprodukterne på højre side stadig skal tage faktoren fra den første parentes først; faktorernes orden er jo her ikke ligegyldig. Eksempelvis finder vi
$$(\underline{a}+\underline{b}) \times (\underline{a}+\underline{b}) = \underline{a} \times \underline{a} + \underline{b} \times \underline{a} + \underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{b}$$
eller
$$\underline{0} = \underline{b} \times \underline{a} + \underline{a} \times \underline{b}$$
i overensstemmelse med, at $\underline{b} \times \underline{a} = -\underline{a} \times \underline{b}$. Endvidere
$$(\underline{a}+\underline{b}) \times (\underline{a}-\underline{b}) = -2\underline{a} \times \underline{b} ,$$
som udtrykker en elementær sætning om parallelogramarealer.

Vektorproduktet udtrykt i koordinater.

Lad der i rummet være givet et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem $(0,\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$.

For to vilkårlige vektorer $\underline{u}(x_1,x_2,x_3)$ og $\underline{v}(y_1,y_2,y_3)$, dvs.
$$\underline{u} = x_1\underline{e}_1+x_2\underline{e}_2+x_3\underline{e}_3 \quad \text{og} \quad \underline{v} = y_1\underline{e}_1+y_2\underline{e}_2+y_3\underline{e}_3 ,$$
finder vi ved brug af regnereglerne
$$\begin{aligned}\underline{u} \times \underline{v} = \; & x_1y_1\underline{e}_1 \times \underline{e}_1 + x_1y_2\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 + x_1y_3\underline{e}_1 \times \underline{e}_3 \\ & + x_2y_1\underline{e}_2 \times \underline{e}_1 + x_2y_2\underline{e}_2 \times \underline{e}_2 + x_2y_3\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 \\ & + x_3y_1\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 + x_3y_2\underline{e}_3 \times \underline{e}_2 + x_3y_3\underline{e}_3 \times \underline{e}_3 .\end{aligned}$$

Idet nu $\underline{e}_1 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3 \times \underline{e}_3 = \underline{0}$

og $\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$, $\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$, $\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2$,

har vi således

$$\underline{u} \times \underline{v} = (x_2y_3 - x_3y_2)\underline{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\underline{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\underline{e}_3$$
$$= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\underline{e}_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\underline{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\underline{e}_3 ,$$

dvs. koordinaterne til $\underline{u} \times \underline{v}$ er

$$\underline{\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)} .$$

Eksempel. For to vektorer $\underline{u}(x_1,x_2,0)$ og $\underline{v}(y_1,y_2,0)$ liggende i X_1X_2-planen har $\underline{u} \times \underline{v}$ koordinaterne

$$(0, 0, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}).$$

Ligger $\underline{u}$ og $\underline{v}$ ikke på samme linie, kan arealet af det parallelogram, $\underline{u}$ og $\underline{v}$ udspænder, når de afsættes fra samme punkt, derfor beregnes som den numeriske værdi af determinanten

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} ,$$

thi dette er jo længden af $\underline{u} \times \underline{v}$.

§ 6. Rumprodukt af tre vektorer.

Ved **rumproduktet** $[\underline{a}\underline{b}\underline{c}]$ af tre vektorer $\underline{a}$, $\underline{b}$ og $\underline{c}$ forstås **tallet**

$$(\underline{a} \times \underline{b})\cdot\underline{c}.$$

Vi vil søge den geometriske betydning af dette produkt.

Først betragtes det tilfælde, hvor $\underline{a}$, $\underline{b}$ og $\underline{c}$ ikke ligger i samme plan. Tænker vi os de tre vektorer afsat fra samme punkt, udspænder de et parallelepipedum. Som grundflade heri kan vi tage det af $\underline{a}$ og $\underline{b}$ udspændte parallelogram med arealet $|\underline{a} \times \underline{b}|$; højden er da længden af $\underline{c}$'s projektion på grundfladenormalen, dvs. på $\underline{a} \times \underline{b}$'s linie; volumenet er derfor den numeriske værdi af $(\underline{a} \times \underline{b})\cdot\underline{c}$. Fortegnet for $(\underline{a} \times \underline{b})\cdot\underline{c}$ er positivt eller negativt, eftersom $\underline{c}$ ligger på samme eller på modsat side af den af $\underline{a}$ og $\underline{b}$ udspændte plan som $\underline{a} \times \underline{b}$, dvs. eftersom $\underline{a}$, $\underline{b}$ og $\underline{c}$ i denne rækkefølge er i højrestilling eller i venstrestilling.

Ligger $\underline{a}$, $\underline{b}$ og $\underline{c}$ i samme plan, er $(\underline{a} \times \underline{b})\cdot\underline{c} = 0$. Thi ligger $\underline{a}$ og $\underline{b}$ på samme linie, er allerede $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$, og ellers må $\underline{c}$ ligge i den af $\underline{a}$ og $\underline{b}$ udspændte plan, dvs. $(\underline{a} \times \underline{b})\cdot\underline{c} = 0$.

Resultat: Rumproduktet $[\underline{a}\underline{b}\underline{c}]$ er forskelligt fra 0, netop hvis $\underline{a}$, $\underline{b}$ og $\underline{c}$ ikke ligger i samme plan. Den numeriske værdi er da volumenet af det af de tre vektorer udspændte parallelepipedum, medens fortegnet angiver stillingen af $\underline{a}$, $\underline{b}$ og $\underline{c}$, - positivt fortegn svarer til højrestilling.

Ud fra rumproduktets geometriske betydning ses umiddelbart

$$[\underline{a}\underline{b}\underline{c}] = [\underline{b}\underline{c}\underline{a}] = [\underline{c}\underline{a}\underline{b}]$$
$$= -[\underline{a}\underline{c}\underline{b}] = -[\underline{c}\underline{b}\underline{a}] = -[\underline{b}\underline{a}\underline{c}].$$

Vi bemærker, at parentesen i $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}$ kan undværes, således at man blot skriver $\underline{a}\times\underline{b}\cdot\underline{c}$. Denne betegnelse kan ikke misforstås, idet $\underline{a}\times(\underline{b}\cdot\underline{c})$ er uden mening. - Når man skal skrive $[\underline{abc}]$ ud på formen $\underline{a}\times\underline{b}\cdot\underline{c}$, sker der ingen skade, om man ombytter de to multiplikationstegn $\times$ og $\cdot$, idet

$$\underline{a}\times\underline{b}\cdot\underline{c} = [\underline{abc}] = [\underline{bca}] = \underline{b}\times\underline{c}\cdot\underline{a} = \underline{a}\cdot\underline{b}\times\underline{c}.$$

Determinant af 3. orden.

Udtrykket

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

benyttes som betegnelse for

$$x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_3y_2z_1-x_1y_3z_2-x_2y_1z_3.$$

Til støtte for hukommelsen bemærkes, at de tre "+led" svarer til indbyrdes parallelle skrålinier i følgende skema

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \end{matrix},$$

ligeså de tre "-led".

Rumproduktet udtrykt i koordinater.

Lad der i rummet være givet et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem.

For tre vilkårlige vektorer $\underline{a}(x_1,x_2,x_3)$, $\underline{b}(y_1,y_2,y_3)$ og $\underline{c}(z_1,z_2,z_3)$ finder vi, idet $\underline{a}\times\underline{b}$ har koordinaterne

$$\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$

for rumproduktet $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}$ udtrykket

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} z_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3,$$

altså

$$[\underline{a}\underline{b}\underline{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Eksempler:

Volumenet af et tetraeder OABC, hvor A, B og C har koordinaterne (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) og (z_1, z_2, z_3), medens O er koordinatsystemets begyndelsespunkt, er den numeriske værdi af

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} .$$

Under brug af, at tetraedrets volumen er 1/3 højde gange grundflade, ser man nemlig, at det er 1/6 af volumenet af det parallelepipedum, der udspændes af $\underline{OA}$, $\underline{OB}$ og $\underline{OC}$ (tegn skitse).

<u>Ligning for en plan</u>. Lad en plan π være givet ved et punkt $C(c_1, c_2, c_3)$ og to vektorer $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ og $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$, der ikke ligger på samme linie. Idet vi med $P(x_1, x_2, x_3)$ betegner et vilkårligt punkt i rummet, gælder

$$P \text{ i } \pi \iff (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{CP} = 0 ,$$

dvs.

$$P(x_1, x_2, x_3) \text{ i } \pi \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 - c_1 & x_2 - c_2 & x_3 - c_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Som ligning for planen π har vi således

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 - c_1 & x_2 - c_2 & x_3 - c_3 \end{vmatrix} = 0$$

eller, anderledes skrevet,

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}(x_1 - c_1) + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}(x_2 - c_2) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}(x_3 - c_3) = 0 .$$

§ 7. Koordinattransformation.

Koordinattransformation i rummet.

Lad $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ og $(\hat{O};\hat{\underline{e}}_1,\hat{\underline{e}}_2,\hat{\underline{e}}_3)$ være to koordinatsystemer i rummet; vi kalder dem det gamle og det nye system.

Vi tænker os det nye koordinatsystem fastlagt i forhold til det gamle derved, at det nye begyndelsespunkt $\hat{O}$ har de gamle koordinater (r_1,r_2,r_3), og de nye grundvektorer $\hat{\underline{e}}_1$, $\hat{\underline{e}}_2$, $\hat{\underline{e}}_3$ har de gamle koordinater (r_{11},r_{21},r_{31}), (r_{12},r_{22},r_{32}) og (r_{13},r_{23},r_{33}). Vi kan da udtrykke de gamle koordinater (x_1,x_2,x_3) til et vilkårligt punkt P ved de nye koordinater $(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)$ til samme punkt: vektorligningen

$$\vec{OP} = \vec{O\hat{O}} + \vec{\hat{O}P} = \vec{O\hat{O}} + \hat{x}_1\hat{\underline{e}}_1 + \hat{x}_2\hat{\underline{e}}_2 + \hat{x}_3\hat{\underline{e}}_3$$

er nemlig ensbetydende med de tilsvarende ligninger mellem de indgående vektorers gamle koordinater (jfr. EV,2,2),

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 + r_{11}\hat{x}_1 + r_{12}\hat{x}_2 + r_{13}\hat{x}_3 \\ x_2 &= r_2 + r_{21}\hat{x}_1 + r_{22}\hat{x}_2 + r_{23}\hat{x}_3 \\ x_3 &= r_3 + r_{31}\hat{x}_1 + r_{32}\hat{x}_2 + r_{33}\hat{x}_3 \,. \end{aligned}$$

Betegner (x_1,x_2,x_3) og $(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)$ i stedet gamle og nye koordinater til samme vektor $\underline{v}$, fremgår af ligningen

$$\underline{v} = \hat{x}_1\underline{e}_1 + \hat{x}_2\underline{e}_2 + \hat{x}_3\underline{e}_3$$

følgende koordinattransformationsformler:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_{11}\hat{x}_1 + r_{12}\hat{x}_2 + r_{13}\hat{x}_3 \\ x_2 &= r_{21}\hat{x}_1 + r_{22}\hat{x}_2 + r_{23}\hat{x}_3 \\ x_3 &= r_{31}\hat{x}_1 + r_{32}\hat{x}_2 + r_{33}\hat{x}_3 \,. \end{aligned}$$

Nye koordinater $(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)$ udtrykkes ved gamle (x_1,x_2,x_3) på ganske tilsvarende måde, idet man jo kan lade de to koordinatsystemer bytte rolle. For punkter er således

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= s_1 + s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + s_{13}x_3\\ \hat{x}_2 &= s_2 + s_{21}x_1 + s_{22}x_2 + s_{23}x_3\\ \hat{x}_3 &= s_3 + s_{31}x_1 + s_{32}x_2 + s_{33}x_3 ,\end{aligned}$$

for vektorer

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + s_{13}x_3\\ \hat{x}_2 &= s_{21}x_1 + s_{22}x_2 + s_{23}x_3\\ \hat{x}_3 &= s_{31}x_1 + s_{32}x_2 + s_{33}x_3 ;\end{aligned}$$

her er (s_1,s_2,s_3) nye koordinater til det gamle begyndelsespunkt O og (s_{11},s_{21},s_{31}), (s_{12},s_{22},s_{32}) og (s_{13},s_{23},s_{33}) nye koordinater til de gamle grundvektorer $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ og $\underline{e}_3$.

Overgang fra koordinater med hensyn til et koordinatsystem til koordinater med hensyn til et andet kaldes <u>koordinattransformation</u>. Koordinattransformationen fra gamle koordinater (x_1,x_2,x_3) til nye $(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)$ for punkter, henholdsvis vektorer udtrykkes ved de sidst opskrevne <u>koordinattransformationsformler</u>; skemaet

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33}\end{pmatrix}$$

af koefficienter til x_1, x_2 og x_3, kaldes <u>koordinattransformationsmatricen</u> (en matrix er et rektangulært talskema).

Idet såvel det gamle som det nye koordinatsystem er sædvanligt retvinklet, vil koordinattransformationsmatricen være <u>ortogonal</u>, dvs.

$$s_{1i}s_{1j} + s_{2i}s_{2j} + s_{3i}s_{3j} = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ 1 & \text{for } i = j \,. \end{cases}$$

Venstre side udtrykker nemlig skalarproduktet $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j$ i nye koordinater. - Også matricen

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

svarende til overgangen fra nye til gamle koordinater er naturligvis ortogonal.

Da r_{ij} er den i^{te} gamle koordinat til $\hat{\underline{e}}_j$, altså (jfr. EV,3,3)

$$r_{ij} = \hat{\underline{e}}_j \cdot \underline{e}_i = \cos(\underline{e}_i, \hat{\underline{e}}_j),$$

medens s_{ji} er den j^{te} nye koordinat til $\underline{e}_i$, altså

$$s_{ji} = \underline{e}_i \cdot \hat{\underline{e}}_j = \cos(\underline{e}_i, \hat{\underline{e}}_j),$$

har man

$$s_{ji} = r_{ij}, \qquad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3.$$

Koordinattransformationsmatricen for overgangen fra gamle til nye sædvanlige retvinklede koordinater fremgår således af matricen for den omvendte koordinattransformation på simpel måde, nemlig ved såkaldt transponering, der kan beskrives som en spejling i "hoveddiagonalen":

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} .$$

Dette vil man naturligvis benytte sig af, når det nye koordinatsystem er givet ud fra det gamle som i indledningen beskrevet, og formlerne for overgang fra gamle til nye koordinater ønskes opskrevet.

For en plan π givet ved ligningen

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = k$$

i det gamle koordinatsystem opskrives umiddelbart en ligning i det nye: lader vi nemlig som ovenfor (x_1, x_2, x_3) og $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ betegne gamle og nye koordinater for samme vilkårlige punkt P, gælder jo

$$\begin{aligned}
P \text{ tilhører } \pi \iff & n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = k \\
\iff & n_1(r_1 + r_{11}\hat{x}_1 + r_{12}\hat{x}_2 + r_{13}\hat{x}_3) \\
& + n_2(r_2 + r_{21}\hat{x}_1 + r_{22}\hat{x}_2 + r_{23}\hat{x}_3) \\
& + n_3(r_3 + r_{31}\hat{x}_1 + r_{32}\hat{x}_2 + r_{33}\hat{x}_3) = k .
\end{aligned}$$

For en ret linie l givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 + tv_1, \\
x_2 &= a_2 + tv_2, \qquad -\infty < t < \infty, \\
x_3 &= a_3 + tv_3,
\end{aligned}$$

i det gamle koordinatsystem, fås som parameterfremstilling i det nye

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1 &= s_1 + s_{11}(a_1 + tv_1) + s_{12}(a_2 + tv_2) + s_{13}(a_3 + tv_3), \\
\hat{x}_2 &= s_2 + s_{21}(a_1 + tv_1) + s_{22}(a_2 + tv_2) + s_{23}(a_3 + tv_3), \quad -\infty<t<\infty. \\
\hat{x}_3 &= s_3 + s_{31}(a_1 + tv_1) + s_{32}(a_2 + tv_2) + s_{33}(a_3 + tv_3),
\end{aligned}$$

<u>Koordinattransformation i planen</u>.

Man finder her ganske tilsvarende forhold som i rummet:

Lad $(O; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ og $(\hat{O}; \hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2)$ være to koordinatsystemer i samme plan; vi kalder dem det gamle og det nye system.

Nye koordinater $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ til et vilkårligt <u>punkt</u> P udtrykkes ved gamle koordinater (x_1, x_2) til samme punkt ved koordinattransformationsformler

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1 &= s_1 + s_{11}x_1 + s_{12}x_2 \\
\hat{x}_2 &= s_2 + s_{21}x_1 + s_{22}x_2 ,
\end{aligned}$$

for <u>vektorers</u> koordinater haves

$$\hat{x}_1 = s_{11}x_1 + s_{12}x_2$$
$$\hat{x}_2 = s_{21}x_1 + s_{22}x_2 \;;$$

her er (s_1, s_2) nye koordinater til det gamle begyndelsespunkt O, (s_{11}, s_{21}) og (s_{12}, s_{22}) nye koordinater til de gamle grundvektorer $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$.

Idet såvel det gamle som det nye koordinatsystem er sædvanligt retvinklet, vil <u>koordinattransformationsmatricen</u>

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

være <u>ortogonal</u>, dvs.

$$s_{1i}s_{1j} + s_{2i}s_{2j} = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ 1 & \text{for } i = j \,. \end{cases}$$

Koordinattransformationsmatricen for overgangen fra gamle til nye sædvanlige retvinklede koordinater fremgår af matricen

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

for den omvendte koordinattransformation ved <u>transponering</u>,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix},$$

idet $$s_{ji} = r_{ij} = \cos(\underline{e}_i, \hat{\underline{e}}_j), \qquad i = 1,2, \quad j = 1,2.$$

Som noget specielt for planen fremhæves, at beliggenheden af det nye sædvanlige retvinklede koordinatsystem $\hat{X}_1\hat{X}_2$ i forhold til det gamle X_1X_2 kan beskrives ved ud over de gamle koordinater (r_1, r_2) til det nye begyndelsespunkt $\hat{O}$ at angive vinklen $\alpha = (X_1, \hat{X}_1)$ fra den gamle til den nye 1. akse regnet med fortegn svarende til det omløb i planen, hvorved $(X_1, X_2) = +\frac{\pi}{2}$, idet det tillige må oplyses, om $(\hat{X}_1, \hat{X}_2) = +\frac{\pi}{2}$ eller $(\hat{X}_1, \hat{X}_2) = -\frac{\pi}{2}$. I de to tilfælde haves

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{henh.} \quad \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Kurver af 2. orden.

Som en anvendelse af koordinattransformationer i planen vil vi undersøge de algebraiske kurver af 2. orden.

Ved en algebraisk kurve af 2. orden forstås en mængde k af punkter i planen, som i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem X_1X_2 kan fremstilles ved en algebraisk ligning af 2. grad,

$$(*) \qquad b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + b = 0,$$

hvor b'erne er konstanter og $(b_{11},b_{12},b_{22}) \neq (0,0,0)$. Hermed menes, at k er mængden af punkter P, hvis koordinater (x_1,x_2) tilfredsstiller ligningen, eller anderledes udtrykt:

$$P \text{ tilhører } k \Leftrightarrow b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + b = 0,$$

hvor (x_1,x_2) er koordinater til P med hensyn til X_1X_2.

Vi bemærker, at blot en punktmængde k i ét koordinatsystem kan fremstilles ved en algebraisk ligning af 2. grad, gælder det samme i ethvert koordinatsystem.

Lad nemlig k i koordinatsystemet X_1X_2 være fremstillet ved ligningen $(*)$, hvor vi for kortheds skyld vil betegne 2. grads polynomiet på venstre side med $F(x_1,x_2)$, og lad $\hat{X}_1\hat{X}_2$ være et nyt koordinatsystem. Idet formlerne for overgang fra nye til gamle koordinater er

$$x_1 = r_1 + r_{11}\hat{x}_1 + r_{12}\hat{x}_2$$
$$x_2 = r_2 + r_{21}\hat{x}_1 + r_{22}\hat{x}_2 ,$$

betegner vi med $\hat{F}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ det polynomium, der fremgår af $F(x_1,x_2)$ ved indsættelse af udtrykkene for x_1 og x_2. For hvert punkt P i planen fås nu samme tal, hvad enten man indsætter de gamle koordinater i $F(x_1,x_2)$ eller de nye i $\hat{F}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$; specielt fås tallet 0 for de samme punkter, således at ligningen

$$\hat{F}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = 0$$

er en fremstilling af k i koordinatsystemet $\hat{X}_1\hat{X}_2$.

Efter den måde, hvorpå polynomiet $\hat{F}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ er dannet, er det klart, at det er af højst 2. grad. At graden virkelig er 2, kan man da indse ved i $\hat{F}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ at tænke sig indsat $\hat{x}_1$ og $\hat{x}_2$ udtrykt ved x_1 og x_2; thi herved fås det oprindelige 2. grads polynomium $F(x_1,x_2)$, - man får nemlig et polynomium i x_1 og x_2 af højst 2. grad, som for ethvert talpar (x_1,x_2) antager samme værdi som $F(x_1,x_2)$, hvilket medfører overensstemmelse også for koefficienternes vedkommende (jfr. øv. 34).

Vi vil nu nærmere undersøge en algebraisk kurve k af 2. orden givet ved en ligning

$$(*) \qquad b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + b = 0$$

i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2)$. Det forudsættes, at $(b_{11},b_{12},b_{22}) \neq (0,0,0)$.

Metoden består i ved overgang til et nyt koordinatsystem $(\hat{0};\ \hat{\underline{e}}_1,\hat{\underline{e}}_2)$ at få polynomiet $F(x_1,x_2)$ på venstre side i $(*)$ til at gå over i et simplere polynomium $\hat{F}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$.

Vi betragter først overgangen til et koordinatsystem $(0;\hat{\underline{e}}_1,\hat{\underline{e}}_2)$, der fremgår af det oprindelige ved en drejning vinklen α om begyndelsespunktet 0; som side 5 regnes α med fortegn svarende til det omløb i planen, hvorved $(\underline{e}_1,\underline{e}_2) = +\frac{\pi}{2}$. Det givne polynomium $F(x_1,x_2)$ går herved over i et nyt, idet man indsætter

$$x_1 = \tilde{x}_1\cos\alpha - \tilde{x}_2\sin\alpha$$
$$x_2 = \tilde{x}_1\sin\alpha + \tilde{x}_2\cos\alpha.$$

For koefficienterne til leddene af 2. grad i det fremkomne polynomium

$$\hat{b}_{11}\tilde{x}_1^{\,2} + 2\hat{b}_{12}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \hat{b}_{22}\tilde{x}_2^{\,2} + 2\hat{b}_1\tilde{x}_1 + 2\hat{b}_2\tilde{x}_2 + b$$

findes efter simple omskrivninger

$$\begin{aligned}
\hat{b}_{11} &= \tfrac{1}{2}(b_{11}+b_{22}) + \tfrac{1}{2}(b_{11}-b_{22})\cos 2\alpha + b_{12}\sin 2\alpha \\
\hat{b}_{12} &= \qquad\qquad\quad - \tfrac{1}{2}(b_{11}-b_{22})\sin 2\alpha + b_{12}\cos 2\alpha \\
\hat{b}_{22} &= \tfrac{1}{2}(b_{11}+b_{22}) - \tfrac{1}{2}(b_{11}-b_{22})\cos 2\alpha - b_{12}\sin 2\alpha \,.
\end{aligned}$$

Vi noterer at

$$\hat{b}_{11} + \hat{b}_{22} = b_{11} + b_{22} \quad \text{og} \quad \hat{b}_{11}\,\hat{b}_{22} - \hat{b}_{12}^{\,2} = b_{11}b_{22} - b_{12}^{\,2},$$

som en udregning viser.

Af udtrykket for $\hat{b}_{12}$ ses, at man ved et passende valg af α kan opnå, at $\hat{b}_{12} = 0$. Er allerede $b_{12} = 0$, kan man f.eks. vælge $\alpha = 0$, dvs. bevare det oprindelige koordinatsystem, og er $b_{12} \neq 0$, bestemmes de brugbare værdier af α ved ligningen

$$\cot 2\alpha = \frac{b_{11} - b_{22}}{2b_{12}},$$

som jo har løsninger, bl.a. netop én i det åbne interval $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Vi forudsætter nu, at $\hat{b}_{12} = 0$. Ved overgang fra $(O;\underline{\hat{e}}_1,\underline{\hat{e}}_2)$ til et parallelforskudt koordinatsystem $(\hat{O};\underline{\hat{e}}_1,\underline{\hat{e}}_2)$ og dermed indsættelse af

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= r_1 + \hat{x}_1 \\
\tilde{x}_2 &= r_2 + \hat{x}_2
\end{aligned}$$

i polynomiet

$$\hat{b}_{11}\tilde{x}_1^{\,2} + \hat{b}_{22}\tilde{x}_2^{\,2} + 2\hat{b}_1\tilde{x}_1 + 2\hat{b}_2\tilde{x}_2 + b$$

kan man, hvis $\hat{b}_{11}$ og $\hat{b}_{22}$ begge er forskellige fra 0, for det nye polynomium $\hat{F}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ opnå formen

$$\hat{b}_{11}\hat{x}_1^{\,2} + \hat{b}_{22}\hat{x}_2^{\,2} + \hat{b},$$

og ellers en af formerne

$$\hat{b}_{11}\hat{x}_1^2 + 2\hat{b}_2\hat{x}_2 \quad \text{eller} \quad \hat{b}_{11}\hat{x}_1^2 + \hat{b},$$

henh. $$\hat{b}_{22}\hat{x}_2^2 + 2\hat{b}_1\hat{x}_1 \quad \text{eller} \quad \hat{b}_{22}\hat{x}_2^2 + \hat{b},$$

eftersom $\hat{b}_{11} \neq 0$ og $\hat{b}_2 \neq 0$, eller $\hat{b}_{11} \neq 0$ og $\hat{b}_2 = 0$, henholdsvis $\hat{b}_{22} \neq 0$ og $\hat{b}_1 \neq 0$, eller $\hat{b}_{22} \neq 0$ og $\hat{b}_1 = 0$. Følgelig haves:

For en algebraisk kurve k af 2. orden, givet ved en ligning (*) af 2. grad i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, er der følgende muligheder:

Ellipsetilfældet $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$:

k er en ellipse, et punkt eller tom.

Parabeltilfældet $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$:

k er en parabel, to parallelle linier, en linie eller tom.

Hyperbeltilfældet $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$:

k er en hyperbel eller to hinanden skærende linier.

Står man over for den opgave at skulle bestemme art og beliggenhed af en algebraisk kurve af 2. orden givet ved en forelagt ligning (*) i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, vil det oftest være fordelagtigt at begynde med om muligt at fjerne leddene af 1. grad ved en parallelforskydning af koordinatsystemet. Koefficienterne til leddene af 2. grad ændres ikke herved. Er $b_{12} \neq 0$, går man derpå over til et nyt koordinatsystem drejet vinklen α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, bestemt ved

$$\cot 2\alpha = \frac{b_{11} - b_{22}}{2b_{12}} ;$$

herved opnås $\hat{b}_{12} = 0$, medens de nye koefficienter $\hat{b}_{11}$ og $\hat{b}_{22}$ kan findes som rødder i andengradsligningen

$$z^2 - (b_{11} + b_{22})z + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0 ;$$

hvilken af rødderne der er $\hat{b}_{11}$, kan afgøres ved, at $\hat{b}_{11} - \hat{b}_{22}$ har samme fortegn som b_{12}. - Den nævnte overensstemmelse i fortegn følger af, at

$$\hat{b}_{11} - \hat{b}_{22} = (b_{11}-b_{22})\cos 2\alpha + 2b_{12}\sin 2\alpha = \frac{2b_{12}}{\sin 2\alpha} ,$$

idet α er valgt i intervallet $]0,\frac{\pi}{2}[$.

§ 8. Isometrier.

En afbildning f af rummet ind i sig selv vil sige en tilordning, hvorved til hvert punkt P i rummet igen svarer ét punkt i rummet. Sidstnævnte punkt betegnes f(P) og kaldes billedet af P ved afbildningen f. Betragtes kun én afbildning, vil vi også skrive P' for billedet af P. - Begrebet afbildning af en plan ind i sig selv har en ganske tilsvarende betydning, og de samme betegnelser benyttes.

Blandt afbildningerne af en plan ind i sig selv og af rummet ind i sig selv spiller de afstandsbevarende eller isometriske en fremtrædende rolle, ikke mindst i den elementære geometri. De kaldes også isometrier eller kongruenser.

Vi betegner med $|PQ|$ afstanden mellem punkterne P og Q.

At en afbildning f af en plan ind i sig selv eller af rummet ind i sig selv er isometrisk, betyder, at der for hvilkesomhelst punkter P og Q i planen, henholdsvis rummet gælder

$$|f(P)f(Q)| = |PQ|.$$

Som eksempler på isometrier af planen nævnes translation (dvs. parallelforskydning), drejning om et punkt, spejling i en linie; for rummets vedkommende nævnes translation, drejning om en linie, spejling i en plan. Den identiske afbildning af plan eller rum, hvorved hvert punkt har sig selv som billede, er naturligvis isometrisk; den regnes i reglen med blandt translationer såvel som blandt drejninger.

Lad os studere en vilkårlig isometrisk afbildning f af rummet ind i sig selv:

Først bemærkes, at der for vilkårlige punkter P, Q og R gælder

$$\overrightarrow{P'Q'}\cdot\overrightarrow{P'R'} = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}.$$

Ved anvendelse af

$$|\underline{b} - \underline{a}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - 2(\underline{a}\cdot\underline{b})$$

fås nemlig

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} &= \tfrac{1}{2}(\ |PQ|^2 + |PR|^2 - |QR|^2)\\ &= \tfrac{1}{2}(\ |P'Q'|^2 + |P'R'|^2 - |Q'R'|^2) = \overrightarrow{P'Q'}\cdot\overrightarrow{P'R'}.\end{aligned}$$

Idet nu O er begyndelsespunktet, A_1, A_2 og A_3 enhedspunkterne på akserne i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $X_1X_2X_3$ i rummet, dvs.

$$\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j} = \begin{cases}0 & \text{for } i \neq j\\ 1 & \text{for } i = j\end{cases},$$

vil ligeledes O' være begyndelsespunkt, A_1', A_2' og A_3' enhedspunkter på akserne i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $\hat{X}_1\hat{X}_2\hat{X}_3$, idet jo

$$\overrightarrow{O'A_i'}\cdot\overrightarrow{O'A_j'} = \begin{cases}0 & \text{for } i \neq j\\ 1 & \text{for } i = j\end{cases}.$$

Da koordinaterne (x_1, x_2, x_3) med hensyn til koordinatsystemet $X_1X_2X_3$ for et vilkårligt punkt P kan udtrykkes

$$x_1 = \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA_1},\quad x_2 = \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA_2},\quad x_3 = \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA_3},$$

hvor de skalære produkter ikke ændres når O, A_1, A_2, A_3, P erstattes med de respektive billedpunkter, ser man, at billedet P' af P med hensyn til koordinatsystemet $\hat{X}_1\hat{X}_2\hat{X}_3$ ligeledes har koordinaterne (x_1, x_2, x_3).

<u>Ved en vilkårlig isometrisk afbildning af rummet ind i sig selv har altså ethvert punkt P og dets billedpunkt P' samme koordinater med hensyn til hvert sit sædvanlige retvinklede koordinat-</u>

system $X_1X_2X_3$ og $\hat{X}_1\hat{X}_2\hat{X}_3$.

Heraf følger umiddelbart en række egenskaber:

En isometrisk afbildning af rummet ind i sig selv er bijektiv, dvs. ethvert punkt er billede, og af netop ét punkt.

Til en plan π svarer en plan π', dvs. billedpunkterne svarende til punkterne i π udgør igen en plan π'.

Thi er

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = k$$

en ligning for π med hensyn til koordinatsystemet $X_1X_2X_3$, vil billedpunkterne udgøre planen π' med samme ligning med hensyn til $\hat{X}_1\hat{X}_2\hat{X}_3$.

Til en (orienteret) ret linie l svarer en (orienteret) ret linie l'.

Thi en parameterfremstilling

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + tv_1, \\ x_2 &= a_2 + tv_2 \qquad -\infty < t < \infty, \\ x_3 &= a_3 + tv_3, \end{aligned}$$

af l med hensyn til $X_1X_2X_3$ vil jo i $\hat{X}_1\hat{X}_2\hat{X}_3$ ligeledes fremstille en ret linie, l'. Ved brug af parameterfremstillinger fås videre:

Til parallelle (ens orienterede) linier svarer parallelle (ens orienterede) linier. Til (orienteret) liniestykke svarer (orienteret) liniestykke af samme længde. Til parallelle, ens orienterede liniestykker svarer parallelle, ens orienterede liniestykker.

Idet der således til orienterede liniestykker, der opfattes som samme vektor $\underline{v}$, igen svarer orienterede liniestykker, der opfattes som samme vektor $\underline{v}'$, kan man sige, at der til hver vektor $\underline{v}$ i rummet svarer en vektor $\underline{v}'$:

En isometri f af rummets punkter bestemmer tillige en afbildning af rummets vektorer. Billedet $\underline{v}'$ af en vektor $\underline{v}$ betegnes også $f(\underline{v})$. Der gælder

$$\underline{v} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \underline{v}' = \overrightarrow{P'Q'}$$

og dermed $|\underline{v}'| = |\underline{v}|$ samt $\underline{u}' \cdot \underline{v}' = \underline{u} \cdot \underline{v}$.

Ligesom for punkter gælder det, at enhver vektor $\underline{v}$ og dens billedvektor $\underline{v}'$ har samme koordinater i hver sit af de to sædvanlige retvinklede koordinatsystemer $X_1X_2X_3$ og $\hat{X}_1\hat{X}_2\hat{X}_3$. Vi erindrer om, at $X_1X_2X_3$ eller $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ kan vælges vilkårligt, hvorefter det andet koordinatsystem, som oprindelig måtte indføres på anden vis, åbenbart kan karakteriseres som $X_1'X_2'X_3'$ eller $(0';\underline{e}_1',\underline{e}_2',\underline{e}_3')$.

Ud over det allerede nævnte bemærkes, at en isometri af rummet bevarer vinkler, arealer, volumener, - kort sagt alt, der kan udtrykkes i sædvanlige retvinklede koordinater.

Egentlige og uegentlige kongruenser.

Vi vil her gøre rede for, at de isometriske afbildninger af rummet ind i sig selv falder i to klasser, dels sådanne, der som translation og drejning kan siges at bevare rummets orientering, dels sådanne, der som spejling i en plan ændrer rummets orientering; nøjagtigt:

En isometri af rummet vil enten føre ethvert sæt af tre vektorer, der ikke ligger i samme plan, over i tre dermed ensstillede, dvs. højrestillede i højrestillede, venstrestillede i venstrestillede, eller den vil føre ethvert sæt af tre vektorer, der ikke ligger i samme plan, over i tre modsat stillede.

I første tilfælde kaldes isometrien en flytning eller en egentlig kongruens, i andet en uegentlig kongruens. Ofte træffes dog en afvigende terminologi.

Bevis. Vi tænker os valgt et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$. Ved en vilkårlig isometri vil $(0';\underline{e}_1',\underline{e}_2',\underline{e}_3')$ igen være et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, og enhver vektor og dens billedvektor har samme koordinater i hver sit af koordinatsystemerne. Er nu $\underline{e}_1',\underline{e}_2',\underline{e}_3'$ i højrestilling, altså $(0';\underline{e}_1',\underline{e}_2',\underline{e}_3')$ et højrekoordinatsystem, finder vi for vilkårlige tre vektorer $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$

$$[\underline{u}'\underline{v}'\underline{w}'] = [\underline{u}\underline{v}\underline{w}],$$

thi for de to rumprodukter haves jo samme koordinatudtryk i hver sit højrekoordinatsystem (EV,6,2). Og bevarelse af rumprodukt medfører for tre vektorer, der ikke ligger i samme plan, specielt bevarelse af stilling (EV,6,1). Er derimod $\underline{e}_1',\underline{e}_2',\underline{e}_3'$ i venstrestilling, fås

$$[\underline{u}'\underline{v}'\underline{w}'] = -[\underline{u}\underline{v}\underline{w}],$$

idet man i koordinatudtrykket for et rumprodukt (EV,6,2) må indføre et minustegn ved benyttelse af et venstrekoordinatsystem. Specielt vil da vektorer $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$, der ikke ligger i samme plan, føres over i modsat stillede.

Bestemmelse af isometrier.

Ifølge det foregående er en isometri af rummet fuldstændig bestemt, blot man for ét sædvanligt retvinklet koordinatsystem $X_1X_2X_3$ kender billedet $X_1'X_2'X_3'$, igen et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Her kan $X_1'X_2'X_3'$ foreskrives vilkårligt:

<u>Der findes en og kun en isometri af rummet, der fører et givet sædvanligt retvinklet koordinatsystem $X_1X_2X_3$ over i et vilkårligt foreskrevet sædvanligt retvinklet koordinatsystem $Y_1Y_2Y_3$.</u>

Eksistensen fremgår af, at afbildningen, hvorved et punkt P med koordinater (x_1, x_2, x_3) med hensyn til $X_1X_2X_3$ afbildes i punktet P' med samme koordinater med hensyn til $Y_1Y_2Y_3$, altid vil være isometrisk, da afstand mellem punkter jo kan udtrykkes i sædvanlige retvinklede koordinater.

Isometrien, der fører $X_1X_2X_3$ over i $Y_1Y_2Y_3$, vil naturligvis være en egentlig eller uegentlig kongruens, efter som aksenne i de to sædvanlige retvinklede koordinatsystemer er ens eller modsat stillede.

Et sæt af et punkt O, er halvlinie l ud fra O og en halvplan π med l på randen vil vi her kalde en "<u>fane</u>". Ved en isometrisk afbildning af rummet ind i sig selv føres en fane igen over i en fane. Endvidere gælder:

<u>Der findes en og kun en egentlig kongruens og ligeledes en og kun en uegentlig kongruens af rummet, som fører en given fane</u> O,l,π <u>over i en vilkårligt foreskrevet fane</u> Q,m,ρ.

Lad nemlig X_1 og X_2 være de to orienterede, indbyrdes vinkelrette linier gennem O, hvor "den positive del" af X_1 er halvlinien l, og "den positive del" af X_2 ligger i halvplanen π. Vi supplerer til et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $X_1X_2X_3$, idet en af de to muligheder for orientering af tredie koordinatakse vælges. Til fanen Q,m,ρ svarer på samme måde et par orienterede linier Y_1, Y_2. En egentlig, henholdsvis uegentlig kongruens, der fører O,l,π over i Q,m,ρ, er nu det samme som en isometri, der fører $X_1X_2X_3$ over i det sædvanlige retvinklede koordinatsystem $Y_1Y_2Y_3$, hvis akser er ensstillede, henholdsvis modsat stillede til akserne X_1, X_2, X_3. Hermed er sætningen ført tilbage til den foregående.

Som en første anvendelse nævner vi:

En flytning f af rummet, hvorved to forskellige punkter O og A går over i sig selv, $f(O) = O$ og $f(A) = A$, er en drejning om den rette linie gennem O og A, evt. den identiske afbildning.

En fane O,l,π, hvor l er halvlinien fra O gennem A, vil nemlig ved f føres over i en fane O,l,ρ. Nu findes der øjensynlig en drejning om linien gennem O og A, som fører O,l,π over i O,l,ρ, og ifølge sætningen ovenfor er f da denne drejning.

Regning med isometrier.

Er f og g isometriske afbildninger af rummet ind i sig selv, da vil den sammensatte afbildning $g \circ f$, hvorved hvert punkt P afbildes i $g(f(P))$, igen være isometrisk, idet jo

$$|g(f(P))g(f(Q))| = |f(P)f(Q)| = |PQ|.$$

Da en isometrisk afbildning f af rummet ind i sig selv er bijektiv, dvs. hvert punkt R er billede af netop ét punkt P, findes der en omvendt afbildning f^{-1}, hvorved hvert punkt R afbildes i det pågældende P. Den omvendte afbildning er igen en isometri af rummet, idet

$$|f^{-1}(R)f^{-1}(S)| = |f(f^{-1}(R))f(f^{-1}(S))| = |RS|.$$

Sammensættes to egentlige eller to uegentlige kongruenser, fås en egentlig kongruens; sammensættes en egentlig og en uegentlig kongruens, fås en uegentlig kongruens. Den omvendte til en egentlig, henholdsvis uegentlig kongruens er igen en egentlig, henholdsvis uegentlig kongruens.

Som vigtige eksempler nævnes:

1° Ved sammensætning af to drejninger om akser gennem et punkt O fås igen en drejning om en akse gennem O, evt. den identiske afbildning.

Bevis. Lad f og g være de to drejninger. Vi kan tænke os, at ingen af dem er udartet til den identiske afbildning. Endvidere kan vi antage, at akserne l og m ikke falder sammen, da det ellers er indlysende, at $g \circ f$ igen er en drejning om den fælles akse, evt. den identiske afbildning. Idet vi med π betegner planen indeholdende l og m, findes der en plan ρ gennem l, således at hvert punkt i ρ ved drejningen f føres over i sit spejlbillede med hensyn til π, samt en plan δ gennem m, hvor hvert punkt fremgår af sit spejlbillede med hensyn til π ved drejningen g. Ved flytningen $g \circ f$ vil nu ikke blot O, men ethvert punkt på skæringslinien for ρ og δ gå over i sig selv, hvorfor $g \circ f$ er en drejning om denne linie (jfr. side 7).

2° Ved sammensætning af en egentlig drejning, dvs. en drejning der ikke er udartet til den identiske afbildning, og en translation i en retning vinkelret på drejningsaksen l fås igen en egentlig drejning, med akse parallel med l.

Bevis. Lad f være drejningen og g translationen. Vi kan tænke os, at g ikke er udartet til den identiske afbildning. Idet vi med π betegner planen gennem drejningsaksen l vinkelret på translationsretningen, findes der en plan ρ gennem l, således at hvert punkt i ρ ved drejningen f føres over i sit spejlbillede med hensyn til π, samt en med π parallel plan δ, hvor hvert punkt fremgår af sit spejlbillede med hensyn til π ved translationen g. Ved flytningen $g \circ f$ vil nu hvert punkt på skæringslinien for ρ og δ gå over i sig selv, hvorfor $g \circ f$ er en drejning om denne linie (jfr. side 7).

Ved en nærliggende ændring i valget af planerne ρ og δ indses, at også $f \circ g$ er en drejning med akse parallel med l.

Arter af flytninger.

En flytning f af rummet, hvorved et punkt O går over i sig selv, er en drejning om en ret linie gennem O, evt. den identiske afbildning.

Lad os nemlig vælge en fane O,l,π. Ved flytningen f går den over i en fane O,m,ρ. Videre tænker vi os valgt en drejning d_1 om en akse gennem O, der fører halvlinien l over i halvlinien m. Ved d_1 går O,l,π altså over i en fane O,m,δ. Betegner vi nu med d_2 den drejning, der fører O,m,δ over i O,m,ρ, vil flytningen $d_2 \circ d_1$ ligesom f bringe O,l,π over i O,m,ρ. Ifølge eksempel 1° ovenfor er $d_2 \circ d_1$ en drejning om en akse gennem O, og ifølge sætningen side 6 er $f = d_2 \circ d_1$; beviset er fuldført.

Ved sammensætning af en drejning om en linie l og en translation langs l fås en skruning med akse l. Drejninger og translationer kan regnes for udartede skruninger; ved en egentlig skruning går intet punkt over i sig selv, og skrueaksen er den eneste rette linie, der går over i sig selv.

En flytning f af rummet er enten den identiske afbildning, en translation, en drejning eller en skruning.

Thi findes der et punkt, der ved f føres over i sig selv, ved vi allerede, at f er den identiske afbildning eller en drejning. I modsat fald tænker vi os valgt et punkt O i rummet og betegner med t den til vektoren $\underline{v} = \overrightarrow{Of(O)}$ svarende translation. Punktet O går nu over i sig selv ved flytningen $d = t^{-1} \circ f$, som derfor er den identiske afbildning eller en drejning. I første tilfælde er $f = t$, altså en translation, og er d en egentlig drejning, vil $f = t \circ d$ være en skruning: opløses nemlig $\underline{v}$ i en vektor $\underline{v}_1$ vinkelret på drejningsaksen l og en vektor $\underline{v}_2$ på l, $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$, og betegnes med t_1 og t_2 de tilsvarende translationer, er $f = t \circ d = (t_2 \circ t_1) \circ d = t_2 \circ (t_1 \circ d)$, hvor $t_1 \circ d$ ifølge eksempel 2° ovenfor er en drejning om en akse parallel med l, og t_2 er en translation langs l.

Isometrier udtrykt i koordinater.

Lad der i rummet være givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$. Idet f er en isometri af rummet, vil vi søge udtryk for koordinaterne (x_1',x_2',x_3') til billedet $P' = f(P)$ af et vilkårligt punkt $P(x_1,x_2,x_3)$.

Hertil erindres om, at $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ ved f føres over i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O';\underline{e}_1',\underline{e}_2',\underline{e}_3')$, samt at P' med hensyn til dette nye koordinatsystem har koordinaterne (x_1,x_2,x_3), jfr. side 4. Betegnes koordinaterne til O', $\underline{e}_1'$, $\underline{e}_2'$ og $\underline{e}_3'$ med hensyn til det oprindelige koordinatsystem med (a_1,a_2,a_3), (a_{11},a_{21},a_{31}), (a_{12},a_{22},a_{32}) og (a_{13},a_{23},a_{33}), er de oprindelige koordinater (x_1',x_2',x_3') til P' derfor, ifølge koordinattransformationsformlerne side EV,7,1, givet ved

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\
x_2' &= a_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\
x_3' &= a_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 .
\end{aligned}
$$

Her er matricen af koefficienter til x_1, x_2 og x_3 ortogonal (EV,7,3). Vi noterer:

En isometri f af rummet kan ved benyttelse af et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ udtrykkes ved

$$(*)\qquad Q = f(P) \iff \begin{aligned} y_1 &= a_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 , \end{aligned}$$

hvor (x_1,x_2,x_3) er koordinater til P og (y_1,y_2,y_3) koordinater til Q. Konstanterne $a_1,a_2, \dots ,a_{33}$ kan kun vælges på én måde. Koefficientmatricen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

er ortogonal.

Omvendt vil en afbildning f af rummet udtrykt på formen (*) i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ med brug af en ortogonal koefficientmatrix være isometrisk.

Til begrundelse af den sidste påstand bemærkes, at vektorerne $\hat{\underline{e}}_1(a_{11},a_{21},a_{31})$, $\hat{\underline{e}}_2(a_{12},a_{22},a_{32})$, $\hat{\underline{e}}_3(a_{13},a_{23},a_{33})$ vil være parvis ortogonale enhedsvektorer, idet

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j} = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ 1 & \text{for } i = j . \end{cases}$$

De kan således benyttes som grundvektorer i et nyt sædvanligt retvinklet koordinatsystem; som begyndelsespunkt vælges $\hat{O}(a_1,a_2,a_3)$. Det ses nu, at f er identisk med den isometri, der fører $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ over i $(\hat{O};\hat{\underline{e}}_1,\hat{\underline{e}}_2,\hat{\underline{e}}_3)$, idet denne har samme koordinatudtryk som f.

Er en isometri f af rummet udtrykt i koordinater ved (*), da udtrykkes den tilsvarende afbildning af rummets vektorer ved

$$\underline{v} = f(\underline{u}) \iff \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 , \end{aligned}$$

hvor (x_1, x_2, x_3) er koordinater til $\underline{u}$ og (y_1, y_2, y_3) koordinater til $\underline{v}$.

Thi sættes $\underline{u} = \overrightarrow{OP}$, er $\underline{u}' = \overrightarrow{O'P'}$, og koordinaterne til $\underline{u}'$ fås derfor ved fra koordinaterne til P' at subtrahere henholdsvis a_1, a_2, a_3.

En isometri f af rummet udtrykt på formen (*) i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ er en egentlig eller uegentlig kongruens, eftersom determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

er 1 eller -1.

Idet (a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}) og (a_{13}, a_{23}, a_{33}) er koordinaterne til billederne $\underline{e}_1', \underline{e}_2'$ og $\underline{e}_3'$ af $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ og $\underline{e}_3$, vil nemlig determinanten, hvis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ f.eks. er i højrestilling, angive rumproduktet $[\underline{e}_1' \; \underline{e}_2' \; \underline{e}_3']$, altså være 1 eller -1 eftersom $\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'$ er i højre- eller venstrestilling, dvs. eftersom kongruensen er egentlig eller uegentlig.

Isometrier af planen.

Isometriske afbildninger af en plan ind i sig selv kan behandl[es] på ganske tilsvarende måde som ovenfor isometrier af rummet. Vi vil derfor nøjes med at anføre en række resultater:

En isometrisk afbildning af planen ind i sig selv er bijektiv. Til en (orienteret) ret linie svarer en (orienteret) ret linie.

Til en vektor svarer en vektor. Skalarprodukter, vinkler, arealer, kort sagt alt, der kan udtrykkes i sædvanlige retvinklede koordinater, bevares.

Idet to par $\underline{u}, \underline{v}$ og $\underline{x}, \underline{y}$ af vektorer i planen, hvor hverken $\underline{u}$ og $\underline{v}$ eller $\underline{x}$ og $\underline{y}$ ligger på samme linie, siges at være ens eller modsat stillede, eftersom den korteste drejning fra $\underline{u}$ til $\underline{v}$ og den korteste drejning fra $\underline{x}$ til $\underline{y}$ bestemmer samme eller modsat omløbsretning i planen, gælder:

En isometri af planen vil enten føre ethvert par af vektorer, der ikke ligger på samme linie, over i et dermed ensstillet par, eller den vil føre ethvert par af vektorer, der ikke ligger på samme linie, over i et modsat stillet par.

I første tilfælde kaldes isometrien en <u>flytning</u> ellen en <u>egentlig kongruens</u>, i andet en <u>uegentlig kongruens.</u> Man kan sige, at en egentlig kongruens vil bevare, en uegentlig ændre en valgt omløbsretning i planen.

Der findes en og kun en isometri af planen, der fører et givet sædvanligt retvinklet koordinatsystem X_1X_2 over i et foreskrevet sædvanligt retvinklet koordinatsystem Y_1Y_2.

Der findes en og kun en egentlig kongruens og ligeledes en og kun en uegentlig kongruens af planen, som fører et givet punkt O med halvlinie l ud fra O over i et foreskrevet punkt Q med halvlinie m ud fra Q.

Ved sammensætning af to kongruenser fås igen en kongruens, egentlig, hvis de to kongruenser er af samme art, uegentlig, hvis de er af modsat art. Den omvendte afbildning til en kongruens er en kongruens af samme art.

En flytning af planen er enten den identiske afbildning, en translation eller en drejning om et punkt.

En isometri f af planen kan ved benyttelse af et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ udtrykkes ved

$$(*)\qquad Q = f(P) \iff \begin{aligned} y_1 &= a_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 , \end{aligned}$$

hvor (x_1,x_2) er koordinater til P og (y_1,y_2) koordinater til Q. Koefficientmatricen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

er ortogonal.

Omvendt vil en afbildning f af planen udtrykt på formen $(*)$ i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem med brug af en ortogonal koefficientmatrix være isometrisk.

Den tilsvarende afbildning af rummets vektorer udtrykkes ved

$$\underline{v} = f(\underline{u}) \iff \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 , \end{aligned}$$

hvor (x_1,x_2) er koordinater til $\underline{u}$ og (y_1,y_2) koordinater til $\underline{v}$.

Der foreligger en egentlig eller uegentlig kongruens, eftersom determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

er 1 eller -1. Koefficientmatricen kan i de to tilfælde skrives på formen

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \text{henh.} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Øvelser i elementær vektorregning.

1. Vis ved brug af stedvektorer, at forbindelseslinierne mellem midtpunkterne af modstående kanter i et tetraeder skærer og halverer hinanden.

Idet A og B er to forskellige punkter, vil vi sige, at et punkt P deler liniestykket AB i forholdet f, hvis

$$(*) \qquad \underline{AP} = f\underline{BP}.$$

Ethvert punkt på den ved A og B bestemte linie l, bortset fra punktet B selv, deler AB i et bestemt forhold, negativt for punkter mellem A og B, positivt for punkter ud over A eller B (indvendig og udvendig deling skelnes således ved hjælp af fortegnet). Tallet 1 forekommer ikke som delingsforhold.

Vis, at (*) kan omregnes til

$$\underline{AP} = \frac{f}{f-1}\,\underline{AB}.$$

Heraf ses, at ethvert reelt tal $f \neq 1$ er delingsforhold for netop ét punkt P.

---

2. Vis ved brug af stedvektorer, at de fire liniestykker AA_1, BB_1, CC_1 og DD_1, som forbinder hjørnerne i et tetraeder ABCD med skæringspunkterne mellem medianerne i de modstående sideflader, går gennem samme punkt U, og at dette deler hvert af liniestykkerne i forholdet -3.

3. Idet A og B er to forskellige punkter med stedvektorer $\underline{a} = \underline{OA}$ og $\underline{b} = \underline{OB}$, skal man finde et udtryk for stedvektoren

til det punkt P, der deler AB i forholdet f. Vis endvidere, at et punkt Q, hvis stedvektor kan skrives

$$\underline{OQ} = s\underline{a} + t\underline{b}, \text{ hvor } s + t = 1,$$

må ligge på linie med A og B, og bestem for $t \neq 1$ det forhold, hvori Q deler AB.

4. Parallelogrammet OACB er bestemt ved vektorerne OA = $\underline{a}$ og $\underline{OB} = \underline{b}$. Punktet D deler siden BC i forholdet $f \neq \frac{1}{2}$. Linien OD skærer diagonalen AB i E. Find vektorerne $\underline{OD}$ og $\underline{OE}$ udtrykt ved $\underline{a}$, $\underline{b}$ og f. Find endvidere for $f \neq 0$ det forhold, i hvilket AB deles af E.

5. Vis ved vektorregning, at to vektorer, hvis sum og differens er $\neq \underline{0}$, da og kun da har samme længde, når summen og differensen er vinkelrette på hinanden. Hvilken elementærgeometrisk sætning er dette ensbetydende med ?

6. Vis ved regning med vektorer, at højderne i en vilkårlig trekant OAB går gennem samme punkt. (Vis, at skæringspunktet P mellem h_a og h_b ligger på h_o.)

7. Hjørnerne A, B, C og D i et tetraeder har stedvektorerne $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ og $\underline{d}$. Vis ved regning med vektorer, at forbindelseslinierne mellem midtpunkterne af to par modstående kanter da og kun da er vinkelrette på hinanden, når det tredje par modstående kanter er lige lange.

8. Find cosinusserne af vinklerne i en trekant med vinkelspidserne A(0, 0, 0), B(-1, -2, 2) og C(1, -3, 4).

9. Opskriv en parameterfremstilling for den ved punkterne A(2, 1, 1) og B(0, 3, 2) bestemte rette linie, og find koordinaterne til skæringspunktet med X_1X_2-planen.

10. Beregn afstanden fra linien l givet ved parameterfremstillingen

$$x_1 = 2 + 2t \,, \quad x_2 = 4 - t \,, \quad x_3 = 6 + 2t \,, \qquad -\infty < t < \infty \,,$$

til punktet $P(6, 8, 1)$.

11. Find en ret linie i X_1X_2-planen, som skærer linien

$$x_1 = t \,, \quad x_2 = t \,, \quad x_3 = t \,, \qquad -\infty < t < \infty \,,$$

og danner en vinkel på 60° med denne.

12. Find en ligning for planen gennem $P(2, -3, 1)$ parallel med den ved ligningen

$$6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2 = 0$$

givne plan.

13. Find en parameterfremstilling for skæringslinien mellem de to planer med ligninger

$$8x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \quad \text{og} \quad 3x_1 - 2x_3 + 6 = 0 \,.$$

(Man kan f.eks. benytte x_1 som parameter, dvs. for det vilkårlige punkt på linien sættes $x_1 = t$, hvorpå udtryk for x_2 og x_3 kan findes af ligningerne.)

14. Find en ligning for den plan gennem punktet $P(-1, 6, 0)$, som er vinkelret på begge planerne

$$8x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \quad \text{og} \quad 3x_1 - 2x_3 + 6 = 0 \,.$$

(Man kan benytte øvelse 13.)

Hvorledes kan man finde en ligning for en plan bestemt ved et punkt og to vektorer, hvis koordinater alle er opgivet?

15. Find koordinaterne til projektionen af vektoren $\underline{v}(6, -2, 3)$ på normalen til planen

$$-2x_1+x_2-2x_3+3 = 0$$

samt koordinaterne til vektorens projektion på selve planen.

16. Find projektionen af punktet P(4, -3, 6) på planen med ligning

$$-2x_1+x_2+2x_3-10 = 0.$$

17. Find en parameterfremstilling for projektionen af linien

$$\begin{aligned} x_1 &= -t \, , \\ x_2 &= 4 + 3t \, , \quad -\infty<t<\infty, \\ x_3 &= -3 - 3t \, , \end{aligned}$$

på planen

$$4x_1+x_2-2x_3-6 = 0.$$

18. Givet er to forskellige linier gennem et punkt O, begge orienterede. Bestem mængden af punkter P i rummet, for hvilke summen af de med fortegn regnede længder af OP's projektioner på de to linier har en given værdi k. (Benyt enten stedvektorer med O som begyndelsespunkt, eller indfør et koordinatsystem med O som begyndelsespunkt.)

19. Vis formlen

$$(\underline{a}\times\underline{b})^2 = \underline{a}^2\underline{b}^2 - (\underline{a}\cdot\underline{b})^2.$$

20. Vis, at afstanden d fra linien l bestemt ved punktet A og vektoren $\underline{v}$ til punktet P er

$$d = \frac{|\underline{v} \times \underline{AP}|}{|\underline{v}|} \quad .$$

Anvend formlen på det i øvelse 10. betragtede taleksempel.

21. Vis, at afstanden mellem to ikke parallelle linier l_1 og l_2 givet ved

$$l_1: \quad \underline{OP} = \underline{OA}_1 + \underline{v}_1 t \ , \quad -\infty < t < \infty,$$
$$l_2: \quad \underline{OP} = \underline{OA}_2 + \underline{v}_2 t \ , \quad -\infty < t < \infty,$$

er den numeriske værdi af

$$\underline{A_1A_2} \cdot \frac{\underline{v}_1 \times \underline{v}_2}{|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2|} \ .$$

22. Et tetraeder har hjørnespidserne A(0, 0, 0), B(3, 0, 0), C(2, 1, 0) og D(1, 1, 1). Find cosinus af rumvinklerne langs kanterne AB og BD.

23. Vis

$$[\underline{abc}] = [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} + h\underline{a} + k\underline{b}].$$

Formuler en hertil svarende sætning om determinanter (af 3. orden).

24. Givet et liniestykke AB samt to linier l og m parallelle med AB, således at AB, l og m ikke ligger i samme plan. På l vælges et punkt C og på m et punkt D. Vis, at volumenet af tetraedret ABCD er uafhængigt af, hvor på l og m man har valgt C og D.

25. Et tetraeder har hjørnespidserne A(0, 0, 0), B(3, 0, 0), C(3, 4, 0) og D(3, 0, 1). Find ligninger for sidefladernes planer og bring dem på normeret form, idet der for hver sideflade vælges den normerede ligning, som svarer til, at tetraedret ligger på planens positive side. Find dernæst centrum for tetraedrets indskrevne kugle samt dennes radius.

26. Find en parameterfremstilling for den rette linie gennem

punktet (3, 2, -1), som skærer hver af linierne

$$(x_1,x_2,x_3) = (1+t,\ t,\ -1+t), \quad -\infty < t < \infty,$$

og $$(x_1,x_2,x_3) = (10+5t,\ 5+t,\ 2+2t), \quad -\infty < t < \infty.$$

27. Vis, at volumenet af tetraedret PABC, hvor P, A, B og C har koordinaterne (x_1,x_2,x_3), (a, 0, 0), (0, b, 0) og (0, 0, c), er den numeriske værdi af

$$\frac{1}{6}abc\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} - 1\right).$$

(a, b og c forudsættes alle $\neq 0$.)

Angiv en ligning for planen gennem A, B og C.

28. Bevis formlen

$$(\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c} = -(\underline{b}\cdot\underline{c})\underline{a} + (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b}$$

ved regning i koordinater. (Anbring koordinatsystemet, så $\underline{a}$ ligger på X_1-aksen og $\underline{b}$ i X_1X_2-planen.)

29. Vis ved hjælp af øvelse 28. formlen

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{a}\times\underline{c}) = \underline{a}^2(\underline{b}\cdot\underline{c}) - (\underline{a}\cdot\underline{c})(\underline{b}\cdot\underline{a}) .$$

Udled derpå ved anvendelse heraf cosinusrelationen i den sfæriske trigonometri.

30. Vis ved hjælp af øvelse 28. formlen

$$(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{a}\times\underline{c}) = [\underline{a}\underline{b}\underline{c}]\underline{a} .$$

Udled derpå ved anvendelse heraf sinusrelationen i den sfæriske trigonometri.

31. I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem X_1X_2 i planen har linien l ligningen

$$x_1 + x_2\sqrt{3} = 3.$$

Et andet sædvanligt retvinklet koordinatsystem $\hat{X}_1\hat{X}_2$ har sit begyndelsespunkt på X_2, linien l har i $\hat{X}_1\hat{X}_2$ ligningen

$$\hat{x}_2 = 0,$$

og begyndelsespunktet for X_1X_2 har negative koordinater i $\hat{X}_1\hat{X}_2$. Opstil koordinattransformationsformlerne for overgang fra $\hat{X}_1\hat{X}_2$ til X_1X_2 og omvendt.

32. Lad $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ være et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem. Bestem den på enhedsvektoren $\underline{\hat{e}}_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ vinkelrette enhedsvektor $\underline{\hat{e}}_2$ i X_1X_2-planen, for hvilken vinklen med $\underline{e}_1$ er mindst mulig, og dernæst den på $\underline{\hat{e}}_1$ og $\underline{\hat{e}}_2$ vinkelrette enhedsvektor $\underline{\hat{e}}_3$, for hvilken $\underline{\hat{e}}_1,\underline{\hat{e}}_2,\underline{\hat{e}}_3$ er i højrestilling. Udtryk koordinaterne (x_1,x_2,x_3) i systemet $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ til et vilkårligt punkt P ved punktets koordinater $(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)$ i systemet $(0;\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3)$ og omvendt.

33. Lad $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ være et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet, og lad $r_1,r_2,\dots,r_{33}$ være givne tal, hvor

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

er en ortogonal matrix. Vis, at

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 + r_{11}\hat{x}_1 + r_{12}\hat{x}_2 + r_{13}\hat{x}_3 \\ x_2 &= r_2 + r_{21}\hat{x}_1 + r_{22}\hat{x}_2 + r_{23}\hat{x}_3 \\ x_3 &= r_3 + r_{31}\hat{x}_1 + r_{32}\hat{x}_2 + r_{33}\hat{x}_3 \end{aligned}$$

er koordinattransformationsformler for overgang til $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ fra et sædvanligt retvinklet koordinatsystem

$(\hat{O};\hat{\underline{e}}_1,\hat{\underline{e}}_2,\hat{\underline{e}}_3)$. Vis, at den transponerede matrix

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix}$$

er ortogonal. Vis, at

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= r_1 + r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 \\ \tilde{x}_2 &= r_2 + r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3 \\ \tilde{x}_3 &= r_3 + r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 \end{aligned}$$

er koordinattransformationsformler for overgang fra $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ til et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(\tilde{O},\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3)$.

34. Vis, at der findes et og kun et polynomium i 2 variable af højst 2. grad, som antager vilkårligt foreskrevne værdier i $(0,0)$, $(r_1,0)$, $(s_1,0)$, $(0,r_2)$, $(0,s_2)$ og (t_1,t_2), hvor de 6 punkter er forskellige og $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$.

35. Bestem den punktmængde i planen, som i et givet sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ fremstilles ved ligningen

a) $5x_1^2 + 7x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - 32 = 0$,

b) $x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 3x_2 - 1 = 0$,

c) $x_1^2 + 3x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - 2x_1 = 0$.

36. Beskriv den punktmængde (flade), som i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet fremstilles ved ligningen

$$x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_1 - 2x_2 = 0.$$

37. En omdrejningskegleflade skæres af en kugleflade, hvis centrum C ikke ligger på keglefladens akse l. Vis, at snitkurvens projektion på planen gennem l og C er en del af en parabel med akse

vinkelret på l. (Indlæg et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $X_1X_2X_3$ med begyndelsespunkt i keglens toppunkt, således at l falder sammen med X_1, og C ligger i X_1X_2-planen.)

For drejninger af planen er det ofte bekvemt at regne drejningsvinklen med fortegn svarende til en valgt omløbsretning i planen.-

38. I planen er en translation t givet ved en vektor $\underline{v} \neq \underline{0}$, og en drejning d er givet ved centrum C og drejningsvinkel φ, $0 < \varphi \leq \pi$. Vis, at $d \circ t$ er en drejning med drejningsvinkel φ, og konstruer centret. Er t og d ombyttelige ?
Vis, at enhver flytning af planen er enten den identiske afbildning, en translation eller en drejning.

39. To drejninger d_1 og d_2 af planen er givet ved centrer og drejningsvinkler. Bestem den sammensatte afbildning $d_2 \circ d_1$. Diskussion ønskes.

40. Idet d er en drejning af planen om punktet C og s en spejling af planen i en linie l gennem C, skal man vise, at $s \circ d$ er en spejling.
Idet s er en spejling af planen i en linie og t en translation skal man vise, at $s \circ t$ er en spejling eller kan sammensættes af en spejling og en translation langs spejlingsaksen.
Vis, at enhver uegentlig kongruens af planen enten er en spejling i en linie eller kan sammensættes af en spejling i en linie og en translation langs denne.

41. Vis, at enhver translation af planen kan sammensættes af to spejlinger i punkter (dvs. multiplikationer med faktor -1).

Vis, at enhver flytning af planen kan sammensættes af to spejlinger i linier.
Vis, at enhver uegentlig kongruens af planen kan sammensættes af en spejling i et punkt og en spejling i en linie.

42. Lad ABC være en trekant i planen, og lad α, β og γ betegne de sædvanlige måltal for dens vinkler. Med d_A, d_B og d_C betegnes henholdsvis drejningen om A med drejningsvinklen 2α, drejningen om B med drejningsvinklen 2β og drejningen om C med drejningsvinklen 2γ, alle tre drejninger i den ved rækkefølgen CBA bestemte omløbsretning. Vis, at

$$d_C \circ d_B \circ d_A = e,$$

hvor e betegner den identiske afbildning af planen. (Benyt f.eks. et resultat fra øv. 41.)

43. Find for planen nødvendige og tilstrækkelige betingelser for, at

a) to spejlinger i linier,

b) en spejling i en linie og en translation,

c) en spejling i en linie og en drejning,

d) en translation og en drejning,

e) to drejninger

er ombyttelige.

44. I planen er givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem X_1X_2. Angiv koordinatfremstillinger af de isometrier, ved hvilke punktet $A(0,2)$ afbildes i punktet $B(1,1+\sqrt{2})$ og linien med ligningen $x_1 = x_2$ på en linie parallel med X_2.

45. En drejning af rummet om en given orienteret ret linie l kan angives ved et vinkeltal φ, $0 \leq \varphi < 2\pi$, idet drejningen tænkes udført mod urvisernes retning set fra liniens positive ende.

Lad f og g være egentlige drejninger af rummet om to hinanden skærende rette linier l og m. De to linier orienteres, og drejningsvinklerne betegnes φ og ψ, $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \psi < 2\pi$, medens vinklen mellem de orienterede linier l og m betegnes γ, $0 < \gamma < \pi$. Videre betegnes med n skæringslinien mellem de to planer ρ og δ, der fremgår af planen gennem l og m ved drejningen $\pi - \frac{\varphi}{2}$ om l, henholdsvis ved drejningen $\frac{\psi}{2}$ om m. Gør rede for, at $g \circ f$ er en drejning om n, og bestem drejningsvinklen χ, $0 < \chi < \pi$, idet n orienteres så l,m,n er i venstrestilling. (Man kan indlægge en kugleflade med centrum i skæringspunktet O for l og m og bl.a. betragte den sfæriske trekant ABC, hvor A og B er kuglefladens skæringspunkter med de positive halvlinier af l og m ud fra O, medens vinklerne ved A og B er henh. $\frac{\varphi}{2}$ og $\frac{\psi}{2}$, førstnævnte afsat fra siden AB med uret, set udefra.)

46. Lad f være en vilkårlig uegentlig kongruens af rummet.

a) Vis, at der findes vektorer $\underline{v} \neq \underline{0}$ med $f(\underline{v}) = -\underline{v}$. (Betragt kongruensen $s \circ f$, hvor s er en spejling i et punkt, dvs. en multiplikation med faktor -1.)

b) Vis, at f i et passende sædvanligt retvinklet koordinatsystem har en fremstilling af formen

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 + x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi \\ y_2 &= a_2 + x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \\ y_3 &= -x_3. \end{aligned}$$

c) Vis, at f enten er en spejling i en plan, en spejling i en plan efterfulgt af en translation i en retning i planen eller en spejling i en plan efterfulgt af en drejning om en normal til planen.

47. Vis, at enhver kongruens af rummet kan sammensættes af højst 4 spejlinger i planer. (Benyt bl.a. et resultat fra øv.46.) Vis, at enhver uegentlig kongruens kan sammensættes af en drejning på 180° om en linie og en spejling i en plan. Vis, at enhver flytning kan sammensættes af 2 drejninger på 180° om linier.