MAT 101 1979/80

P A K K E 1 0 1 Ø

BESTÅR AF

L I N E Æ R A L G E B R A

OG

A F F I N G E O M E T R I

NOTER TIL MATEMATIK 101

ARNE BRØNDSTED

KØBENHAVNS UNIVERSITET

MATEMATISK INSTITUT

1977

PAKKE 1010

INDHOLD

KAPITEL 1. VEKTORRUM.

1.1. VEKTORRUM.

Overalt i det følgende betegner L de *reelle tals legeme* $\mathbb{R}$ eller de *komplekse tals legeme* $\mathbb{C}$. Det bemærkes dog, at meget også er gyldigt for vilkårlige kommutative legemer.

En ikke-tom mængde V, med elementer $\underline{u},\underline{v},\underline{w},\ldots$, siges at være et *vektorrum over legemet* L, hvis der er givet en komposition $(\underline{u},\underline{v}) \mapsto \underline{u} + \underline{v}$ af $V \times V$ ind i V, kaldet *addition*, og en komposition $(\lambda,\underline{v}) \mapsto \lambda\underline{v}$ af $L \times V$ ind i V, kaldet *multiplikation*, således at følgende betingelser er opfyldt:

(a) $\forall\ \underline{u},\underline{v} \in V : \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$.

(b) $\forall\ \underline{u},\underline{v},\underline{w} \in V : \underline{u} + (\underline{v}+\underline{w}) = (\underline{u}+\underline{v}) + \underline{w}$.

(c) $\exists\ \underline{o} \in V\ \forall\ \underline{v} \in V : \underline{v} + \underline{o} = \underline{v}$.

(d) $\forall\ \underline{v} \in V\ \exists\ -\underline{v} \in V : \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{o}$.

(e) $\forall\ \lambda,\mu \in L\ \forall\ \underline{v} \in V : \lambda(\mu\underline{v}) = (\lambda\mu)\underline{v}$.

(f) $\forall\ \underline{v} \in V : 1\underline{v} = \underline{v}$.

(g) $\forall\ \lambda,\mu \in L\ \forall\ \underline{v} \in V : (\lambda+\mu)\underline{v} = \lambda\underline{v} + \mu\underline{v}$.

(h) $\forall\ \lambda \in L\ \forall\ \underline{u},\underline{v} \in V : \lambda(\underline{u}+\underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$.

Er V et vektorrum over L, kaldes elementerne i V *vektorer*, og elementerne i L *skalarer*. Vektoren $\underline{u} + \underline{v}$ kaldes *summen* af $\underline{u}$ og $\underline{v}$, og vektoren $\lambda\underline{v}$ kaldes *produktet* af λ og $\underline{v}$. Vektoren $\underline{o}$ kaldes *nulvektoren*, vektoren $-\underline{v}$ kaldes den til $\underline{v}$ *modsatte* vektor. Som betegnelse for vektorrummet bruges (V,L) eller blot V. Vektorrum over $\mathbb{R}$ hhv. $\mathbb{C}$ kaldes *reelle* hhv. *komplekse vektorrum*.

Det bemærkes, at betingelserne (a) - (d) netop udtrykker, at $(V,+)$ er en kommutativ gruppe med $\underline{o}$ som neutralelement og $-\underline{v}$ som inverst element til $\underline{v}$. Der gælder derfor, at nulvektoren og den til en vektor modsatte vektor er entydigt bestemte. Endvidere følger, at der for vilkårlige vektorer $\underline{u},\underline{v} \in V$ findes netop een vektor $\underline{x} \in V$ med $\underline{u} + \underline{x} = \underline{v}$; nemlig $\underline{x} = \underline{v} + (-\underline{u})$, som også betegnes $\underline{v} - \underline{u}$ og kaldes *differencen* af $\underline{v}$ og $\underline{u}$. Idet $\underline{v} + \underline{o} = \underline{v}$, kan man altså af $\underline{v} + \underline{x} = \underline{v}$ slutte, at $\underline{x} = \underline{o}$.

Af (b) kan sluttes, at man ved addition af flere end to vektorer kan undvære parenteser til angivelse af den orden, hvori additionerne udføres. Af (a) kan dernæst sluttes, at en sum af flere vektorer ikke afhænger af disses rækkefølge. For multiplikation af en vektor med flere skalarer gælder tilsvarende, at parenteser kan undværes, sml. (e). De distributive love (g) og (h) kan udvides til et vilkårligt (endeligt) antal summander.

For en sum $\underline{v}_1+\underline{v}_2+\ldots+\underline{v}_n$ skal vi også bruge betegnelsen

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i .$$

Det viser sig at være bekvemt at kunne tale om den tomme sum, d.v.s. summen af ingen vektorer; denne tillæges værdien $\underline{o}$.

Vi skal vise nogle simple regler for multiplikation af vektorer med skalarer. Idet λ og μ betegner vilkårligt skalarer, og $\underline{u}$ og $\underline{v}$ vilkårlige vektorer, gælder:

(1) $$\lambda\underline{v} = \underline{o} \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \underline{v} = \underline{o}.$$

Vi har $0\underline{v} = (0+0)\underline{v} = 0\underline{v} + 0\underline{v}$, hvormed $0\underline{v} = \underline{o}$, og vi har $\lambda\underline{o} = \lambda(\underline{o}+\underline{o}) = \lambda\underline{o} + \lambda\underline{o}$, hvormed $\lambda\underline{o} = \underline{o}$. Er omvendt $\lambda\underline{v} = \underline{o}$ og $\lambda \neq 0$, fås $\underline{o} = \lambda^{-1}\underline{o} = \lambda^{-1}(\lambda\underline{v}) = (\lambda^{-1}\lambda)\underline{v} = 1\underline{v} = \underline{v}$. (1) kaldes *nulreglen*.

(2) $$(\mu-\lambda)\underline{v} = \mu\underline{v} - \lambda\underline{v}.$$

Vi har $\lambda\underline{v} + (\mu-\lambda)\underline{v} = (\lambda+(\mu-\lambda))\underline{v} = \mu\underline{v}$, hvoraf (2) følger.

(3) $$\lambda(\underline{u}-\underline{v}) = \lambda\underline{u} - \lambda\underline{v}.$$

Vi har $\lambda\underline{v} + \lambda(\underline{u}-\underline{v}) = \lambda(\underline{v}+(\underline{u}-\underline{v})) = \lambda\underline{u}$, hvoraf (3) følger.

(4) $$(-\lambda)\underline{v} = \lambda(-\underline{v}) = -\lambda\underline{v}.$$

Indsættes $\mu = 0$ i (2) fås $(-\lambda)\underline{v} = 0\underline{v} - \lambda\underline{v} = \underline{o} - \lambda\underline{v} = -\lambda\underline{v}$, og indsættes $\underline{u} = \underline{o}$ i (3) fås $\lambda(-\underline{v}) = \lambda\underline{o} - \lambda\underline{v} = \underline{o} - \lambda\underline{v} = -\lambda\underline{v}$.

(5) $$(-1)\underline{v} = -\underline{v}.$$

Indsættes $\lambda = 1$ i (4) fås $(-1)\underline{v} = 1(-\underline{v}) = -\underline{v}$.

Bemærkning. Lad $(G,+)$ være en gruppe. For $g \in G$ og $n \in \mathbb{N}$ defineres da den n'te "potens" ng af g som summen af n addender g,

$$ng = g+\ldots+g.$$

Dernæst defineres, stadig for $n \in \mathbb{N}$, den $(-n)$'te potens $(-n)g$ ved

$$(-n)g = n(-g),$$

altså

$$(-n)g = (-g)+...+(-g),$$

hvor $-g$ er det til g inverse element i gruppen. Endelig defineres den 0'te potens $0g$ ved

$$0g = o$$

hvor o er gruppens neutralelement. Er nu (V,L) et vektorrum, bliver $(V,+)$ en kommutativ gruppe. For $n \in \mathbb{Z}$ og $\underline{v} \in V$ har symbolet $n\underline{v}$ således to betydninger, nemlig dels produktet af skalaren n og vektoren $\underline{v}$, og dels den n'te potens af $\underline{v}$. Lad os et øjeblik skrive $n*\underline{v}$ for den n'te potens af $\underline{v}$, og fastholde betegnelsen $n\underline{v}$ for produktet af n og $\underline{v}$. For $n \in \mathbb{N}$ og $\underline{v} \in V$ gælder da

$$\begin{aligned} n*\underline{v} &= \underline{v}+...+\underline{v} \\ &= 1\underline{v}+...+1\underline{v} \\ &= (1+...+1)\underline{v} \\ &= n\underline{v}, \end{aligned}$$

hvor første lighedstegn begrundes ved definitionen af $n*\underline{v}$ for $n \in \mathbb{N}$, andet ved (f), og tredie ved (g). Derefter fås, stadig for $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (-n)*\underline{v} &= n*(-\underline{v}) \\ &= n(-\underline{v}) \\ &= (-n)\underline{v}, \end{aligned}$$

hvor første lighedstegn begrundes ved definitionen af $(-n)*\underline{v}$ for $n \in \mathbb{N}$, andet ved det ovenfor viste, og tredie ved (4). Endelig fås

$$0*\underline{v} = \underline{o} = 0\underline{v},$$

hvor første lighedstegn begrundes ved definitionen af $0*\underline{v}$, og andet ved (1). Vi har således $n\underline{v} = n*\underline{v}$ for alle $n \in \mathbb{Z}$ og $\underline{v} \in V$, - og betegnelsen $n*\underline{v}$ er altså overflødig. ▯

Bemærkning. Fra den elementære geometri kendes begrebet *geometrisk vektor* i *planen* og i *rummet*, herunder *addition* af to geometriske vektorer og *multiplikation* af en geometrisk vektor med et reelt tal. Mængden af geometriske vektorer i planen og i rummet er (med de egenskaber, som begreberne tillægges) reelle vektorrum. Dette motiverer brugen af gloserne vektor og vektorrum i definitionen side 1.1.1.

Eksempel. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er L^n et vektorrum over L med kompositionerne

$$(x_1,\ldots,x_n) + (y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n),$$
$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n).$$

For $n = 1$ fås specielt L som vektorrum over sig selv.

Eksempel. Mængden $L^{\mathbb{N}}$ af alle følger af elementer fra L er et vektorrum over L med kompositionerne

$$(x_1,\dots,x_n,\dots) + (y_1,\dots,y_n,\dots) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n,\dots),$$

$$\lambda(x_1,\dots,x_n,\dots) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n,\dots).$$

Eksempel. Lad T være en vilkårlig ikke-tom mængde, og lad $\mathrm{F}(T,L)$ betegne mængden af alle afbildninger af T ind i L. For $\varphi,\psi \in \mathrm{F}(T,L)$ og $\lambda \in L$ defineres $\varphi + \psi \in \mathrm{F}(T,L)$ ved

$$t \mapsto (\varphi+\psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t)$$

og $\lambda\varphi \in \mathrm{F}(T,L)$ ved

$$t \mapsto (\lambda\varphi)(t) = \lambda\varphi(t).$$

Herved er $\mathrm{F}(T,L)$ organiseret som et vektorrum over L. Nulvektoren er den konstante funktion $t \mapsto 0$, den til $\varphi \in \mathrm{F}(T,L)$ modsatte vektor $-\varphi$ er funktionen $t \mapsto (-\varphi)(t) = -\varphi(t)$. - Er T en endelig mængde med n elementer, $T = \{t_1,\dots,t_n\}$, kan $(\mathrm{F}(T,L),L)$ identificeres med (L^n,L), idet $\varphi \in \mathrm{F}(T,L)$ identificeres med n-sættet $(\varphi(t_1),\dots,\varphi(t_n)) \in L^n$. Er T en numerabel mængde, $T = \{t_1,\dots,t_n,\dots\}$, kan $(\mathrm{F}(T,L),L)$ identificeres med $(L^{\mathbb{N}},L)$, idet $\varphi \in \mathrm{F}(T,L)$ identificeres med følgen $(\varphi(t_1),\dots,\varphi(t_n),\dots) \in L^{\mathbb{N}}$.

1.2. UNDERRUM.

Lad (V,L) være et vektorrum. En ikke-tom delmængde U af V siges at være et *underrum* af V, hvis for det første additionen i V inducerer en addition i U, d.v.s.

(1) $$\forall\, \underline{u},\underline{v} \in U : \underline{u} + \underline{v} \in U,$$

hvis for det andet multiplikationen i V med skalarer fra L inducerer en multiplikation i U med skalarer fra L, d.v.s.

(2) $$\forall\, \lambda \in L\ \forall\, \underline{v} \in U : \lambda\underline{v} \in U,$$

og hvis for det tredie U herved bliver organiseret som et vektorrum over L. Det påstås, at den sidste betingelse følger af de to første. Først bemærkes, at betingelserne (a) - (b) og (e) - (h) side 1.1.1 oplagt er opfyldt for U, da de er det for V. For at vise, at (c) og (d) er opfyldt for U, er det tilstrækkeligt at godtgøre, at såvel nulvektoren $\underline{o}$ i V som den til en vektor $\underline{u} \in U$ modsatte vektor $-\underline{u}$ i V tilhører U. For en vilkårlig vektor $\underline{u} \in U$ har vi $0\underline{u} = \underline{o} \in U$ ved brug af (1) side 1.1.3 og (2) ovenfor, og for enhver vektor $\underline{u} \in U$ har vi $(-1)\underline{u} = -\underline{u} \in U$ ved brug af (5) side 1.1.3 og (2) ovenfor. Vi har dermed:

En ikke-tom delmængde U af (V,L) er et underrum, hvis og kun hvis betingelserne (1) - (2) er opfyldt. Er U et underrum, så er nulvektoren i V tillige nulvektor i U, og den til en vektor $\underline{u} \in U$ modsatte vektor $-\underline{u}$ i V er tillige modsat vektor til $\underline{u}$ i U.

Det ses let, at (1) - (2) er ensbetydende med

(3) $$\forall \lambda,\mu \in L \ \forall \underline{u},\underline{v} \in U : \lambda\underline{u} + \mu\underline{v} \in U.$$

Det bemærkes, at (V,L) altid har $\{\underline{o}\}$ og V som underrum. Et underrum U af V kaldes et *ægte* underrum, dersom $U \neq V$.

Lad U_i, $i \in I$, være underrum af (V,L). Da betingelserne (1) - (2) er opfyldt for hvert U_i, er de også opfyldt for $\bigcap_{i\in I} U_i$, og da $\underline{o}$ tilhører hvert U_i, har vi også $\underline{o} \in \bigcap_{i\in I} U_i$, hvormed $\bigcap_{i\in I} U_i \neq \emptyset$. Følgelig gælder:

Fællesmængden af underrum af (V,L) er igen et underrum af (V,L).

Lad M være en delmængde af (V,L). Da V selv er et underrum af V, er mængden af underrum af V, som indeholder M, ikke tom. Fællesmængden af disse underrum er ifølge det foregående igen et underrum, som indeholder M. Dette underrum kaldes det af M *udspændte* eller *frembragte* underrum, og betegnes span$M$. Det er det "mindste" underrum, som indeholder M, i den forstand, at det er indeholdt i ethvert andet sådant. Bemærk, at span$\emptyset = \{\underline{o}\}$.

Lad $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p$ være (ikke nødvendigvis forskellige) vektorer fra (V,L). En vektor $\underline{v}$ af formen

$$\underline{v} = \lambda_1\underline{v}_1+\ldots+\lambda_p\underline{v}_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\underline{v}_i,$$

hvor $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in L$, siges at være en *linearkombination* af vektorerne $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p$ (med koefficienterne $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$). Det viser sig bekvemt også at kunne tale om den tomme linearkombination, d.v.s. linearkombinationen af ingen vektorer; denne fremstiller $\underline{o}$, i overensstemmelse med, at den tomme sum har værdien $\underline{o}$.

Det af en delmængde M af (V,L) frembragte underrum span$M$ *er identisk med mængden af linearkombinationer af vektorer fra M.*

Bevis. Lad U betegne mængden af linearkombinationer af vektorer fra M; bemærk, at $\underline{o} \in U$. Det er klart, at ethvert underrum, som indeholder M, tillige indeholder U; specielt er altså U indeholdt i span$M$. På den anden side er M åbenbart indeholdt i U; og da såvel summen af to linearkombinationer af vektorer fra M som produktet af en skalar og en linearkombination af vektorer fra M er en linearkombination af vektorer fra M, er U et underrum. Heraf fremgår, at U indeholder span$M$. Ialt har vi altså U = span$M$, som påståaet. ▯

1.3. LINEÆR AFHÆNGIGHED OG UAFHÆNGIGHED.

Lad $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ være et sæt af endelig mange (ikke nødvendigvis forskellige) vektorer fra et vektorrum (V,L). Der findes da skalarer $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, således at

(1) $$\lambda_1\underline{v}_1+\ldots+\lambda_p\underline{v}_p = \underline{o},$$

nemlig $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$. Hvis (1) kun er opfyldt for $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$, siges sættet $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ at være *lineært uafhængigt*. Hvis sættet ikke er lineært uafhængigt, siges det at være *lineært afhængigt*; dette kommer altså ud på, at der findes skalarer $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, som ikke alle er 0, således at (1) er opfyldt.

Det viser sig bekvemt at kunne tale om det tomme sæt; ved definition fastsættes, at dette er lineært uafhængigt.

En identitet af formen (1) kaldes en *lineær relation* mellem vektorerne $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p$; den siges at være *egentlig*, hvis ikke alle koefficienterne $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ er 0. Et endeligt (evt. tomt) sæt af vektorer er altså lineært afhængigt eller lineært uafhængigt, efter som der består eller ikke består nogen egentlig lineær relation mellem vektorerne i sættet.

Et sæt bestående af een vektor $\underline{v}$ er lineært afhængigt, hvis og kun hvis der findes en skalar $\lambda \neq 0$, således at $\lambda\underline{v} = \underline{o}$, altså hvis og kun hvis $\underline{v} = \underline{o}$. Et sæt $(\underline{v}_1,\underline{v}_2)$ bestående af to vektorer er lineært afhængigt, hvis og kun hvis der findes skalarer λ_1 og λ_2, som ikke begge er 0, således at $\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 = \underline{o}$, altså hvis og kun hvis mindst een af de to vektorer fremgår af den anden ved multiplikation med en skalar.

Når et delsæt af et vektorsæt er lineært afhængigt, er hele sættet lineært afhængigt. Thi i en egentlig lineær relation mellem en del af sættets vektorer kan de øvrige tilføjes med koefficienten 0.

Specielt noteres, at et vektorsæt, som indeholder $\underline{o}$, eller som indeholder samme vektor to gange, er lineært afhængigt.

Hvert delsæt af et lineært uafhængigt sæt er lineært uafhængigt. Dette er blot en omformulering af resultatet ovenfor.

Et sæt $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_p)$*, hvor* $p \geqq 2$*, er lineært afhængigt, hvis og kun hvis mindst een af vektorerne i sættet kan fremstilles som en linearkombination af de øvrige.*

Bevis. Hvis sættet er lineært afhængigt, består der en egentlig lineær relation mellem vektorerne,

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_p\underline{v}_p = \underline{o}. \tag{2}$$

Ved eventuel omnummerering kan opnås, at $\lambda_1 \neq 0$. Ved multiplikation med $-\lambda_1^{-1}$ i (2) og efterfølgende addition af $\underline{v}_1$ fås

$$\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\underline{v}_2 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_p}{\lambda_1}\right)\underline{v}_p = \underline{v}_1 .$$

$\underline{v}_1$ er altså en linearkombination af de øvrige vektorer. Antag omvendt, at en af vektorerne er en linearkombination af de øvrige; ved eventuel omnummerering kan opnås, at

$$\underline{v}_1 = \mu_2\underline{v}_2 + \ldots + \mu_p\underline{v}_p .$$

Adderes vektoren $-\underline{v}_1$ fås

$$\underline{o} = (-1)\underline{v}_1 + \mu_2\underline{v}_2+\ldots+\mu_p\underline{v}_p .$$

I denne lineære relation er koefficienten til $\underline{v}_1$ forskellig fra 0, og sættet $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ er følgelig lineært afhængigt. □

Hvis en vektor $\underline{v}$ kan fremstilles som linearkombination af vektorerne i et sæt $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$, så vil koefficienterne i fremstillingen være entydigt bestemte, hvis og kun hvis sættet $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ er lineært uafhængigt.

Bevis. Lad

$$\underline{v} = \lambda_1\underline{v}_1+\ldots+\lambda_p\underline{v}_p \tag{3}$$

være en fremstilling af $\underline{v}$ som linearkombination af $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p$. Er

$$\underline{o} = \mu_1\underline{v}_1+\ldots+\mu_p\underline{v}_p$$

en vilkårlig lineær relation mellem vektorerne $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p$, vil

$$\underline{v} = (\lambda_1+\mu_1)\underline{v}_1+\ldots+(\lambda_p+\mu_p)\underline{v}_p$$

være en fremstilling af $\underline{v}$. Antages, at fremstillingen (3) er entydig, kan således sluttes, at $\mu_1 = \ldots = \mu_p = 0$, og dermed at sættet $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ er lineært uafhængigt. Er

$$\underline{v} = \nu_1\underline{v}_1+\ldots+\nu_p\underline{v}_p$$

en vilkårlig fremstilling af $\underline{v}$, fås

$$\underline{o} = (\lambda_1 - \nu_1)\underline{v}_1 + \ldots + (\lambda_p - \nu_p)\underline{v}_p .$$

Antages, at sættet $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_p)$ er lineært uafhængigt, fås $\lambda_1 - \nu_1 = \ldots = \lambda_p - \nu_p = 0$, og dermed, at fremstillingen (3) er entydig. ▯

1.4. DIMENSION. BASIS. KOORDINATER.

Lad $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ være et sæt af vektorer fra et vektorrum (V,L). Ved *rangen* $\mathrm{rg}(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ af sættet forstås det maksimale antal vektorer i noget lineært uafhængigt delsæt. Det tomme sæt har rang 0. Et sæt med rang 0 er enten det tomme sæt eller et sæt af formen $(\underline{o},\ldots,\underline{o})$.

Lad M være en vilkårlig delmængde af V. Ved *rangen* $\mathrm{rg}M$ af M forstås supremum for mængden af de $r \in \mathbb{N}_0$ for hvilke der findes et sæt af vektorer fra M med rang r. Der gælder altså $\mathrm{rg}M = 0$, hvis og kun hvis $M = \emptyset$ eller $M = \{\underline{o}\}$, der gælder $\mathrm{rg}M = r \in \mathbb{N}$, hvis og kun hvis der findes et lineært uafhængigt r-sæt $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r)$ af vektorer fra M, men intet sådant $(r+1)$-sæt, og der gælder $\mathrm{rg}M = \infty$, hvis og kun hvis der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ findes et lineært uafhængigt n-sæt af vektorer fra M.

Er $\mathrm{rg}M = r \in \mathbb{N}_0$, forstås ved et *maksimalsæt* for M et lineært uafhængigt sæt af r vektorer fra M.

Ved *dimensionen* $\dim V$ af vektorrummet (V,L) forstås rangen af V, idet V opfattes som delmængde af sig selv. Det er klart, at der da også for ethvert underrum U af V gælder $\dim U = \mathrm{rg}U$, hvor $\mathrm{rg}U$ betegner rangen af U som delmængde af V. Hvis $\dim V < \infty$, siges V at have endelig dimension eller at være endelig-dimensionalt. Et vektorrum har dimension 0, hvis og kun hvis det kun består af $\underline{o}$.

Er (V,L) et endelig-dimensionalt vektorrum, forstås ved en *basis* for V et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra V, som frembringer V, - idet et sæt af vektorer fra V siges at frembringe V, dersom $V = \mathrm{span}M$, hvor M betegner mængden af sættets vektorer. Et vektorrum af dimension 0 har det tomme sæt som (eneste) basis. Et hovedpunkt i det følgende er at vise, at et vektorsæt er en basis for V, hvis og kun hvis det er et maksimalsæt for V. Heraf fremgår, at ethvert vektorrum V af endelig dimension har (mindst) en basis, og at enhver basis indeholder det samme antal vektorer, nemlig $\dim V$.

Af en tidligere sætning (side 1.3.3) fremgår umiddelbart:

Et sæt af vektorer fra et endelig-dimensionalt vektorrum V er en basis for V, hvis og kun hvis hver vektor i V har en og kun een fremstilling som linearkombination af vektorerne i sættet.

Den videre undersøgelse af begreberne dimension og basis bygger på nedenstående fundamentale "udskiftningssætning" samt følgende *hjælpesætning*:

Er M en delmængde af et vektorrum V med $\mathrm{rg}M = r \in \mathbb{N}$, og er $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_r)$ et maksimalsæt for M, så kan hver vektor i M fremstilles som linearkombination af vektorerne $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_r$.

Bevis. For hver vektor $\underline{v} \in M$ er sættet $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_r,\underline{v})$ lineært afhængigt, da det indeholder $r + 1$ vektorer. I en egentlig lineær relation mellem sættets vektorer kan koefficienten til $\underline{v}$ ikke være 0, idet der ellers ville bestå en egentlig lineær relation mellem vektorerne $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r$, i strid med, at sættet $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r)$ er lineært uafhængigt. Heraf sluttes, at $\underline{v}$ kan fremstilles som linearkombination af $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r$. □

Udskiftningssætningen. Lad V være et vektorrum, lad $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_q)$ *være et sæt af vektorer fra V, som frembringer V, og lad* $(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_p)$ *være et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra V. Da er* $p \leqq q$, *og der findes* $q-p$ *blandt vektorerne* $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_q$, *som sammen med* $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_p$ *frembringer V.*

Bevis. Da $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_q$ frembringer V, kan $\underline{u}_1$ fremstilles som linearkombination af disse vektorer. I en sådan linearkombination må mindst een af vektorerne $\underline{v}_i$ forekomme med en fra 0 forskellig koefficient; thi i modsat fald ville vi have $\underline{u}_1 = \underline{o}$, i strid med, at $\underline{u}_1$ er en vektor i et lineært uafhængigt sæt. Det kan antages, at $\underline{v}_1$ har en fra 0 forskellig koefficient. Da kan $\underline{v}_1$ fremstilles som linearkombination af vektorerne $\underline{u}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_q$. Disse vektorer vil derfor frembringe V; thi enhver vektor $\underline{w} \in V$ er linearkombination af $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_q$, og erstattes i en sådan linearkombination $\underline{v}_1$ med en linearkombination af $\underline{u}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_q$, fås $\underline{w}$ fremstillet som en linearkombination af $\underline{u}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_q$. Er $p \geqq 2$, betragtes dernæst vektoren $\underline{u}_2$. Den kan ifølge det netop viste fremstilles som en linearkombination af $\underline{u}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_q$. I en sådan fremstilling må mindst een af vektorerne $\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_q$ forekomme med en fra 0 forskellig koefficient; thi ellers ville $\underline{u}_2$ fremgå at $\underline{u}_1$ ved multiplikation med en skalar, i strid med, at

$\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$ er vektorer i et lineært uafhængigt sæt. Det kan antages, at koefficienten til $\underline{v}_2$ er forskellig fra 0. Da kan $\underline{v}_2$ fremstilles som linearkombination af $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_q$, og det indses som ovenfor, at disse vektorer frembringer V. Således fortsættes, idet vi efter det k'te skridt har et frembringersæt for V bestående af $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k$ samt $q - k$ af vektorerne $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_q$. Var nu $p > q$, ville vi ende med som frembringersæt at få sættet $(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_q)$, og enhver af vektorerne $\underline{u}_{q+1}, \ldots, \underline{u}_p$ skulle da have en fremstilling som linearkombination af $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_q$, i strid med, at sættet $(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_p)$ er lineært uafhængigt. Der gælder altså som påstået $p \leq q$. Heraf fremgår videre, at udskiftningsprocessen bringes til afslutning i p skridt, hvormed også sætningens anden påstand er vist. $\square$

Vi skal herefter udnytte hjælpesætningen og udskiftningssætningen; ved beviset for den første af de følgende sætninger dog kun hjælpesætningen.

For ethvert underrum U af et vektorrum V gælder $\dim U \leq \dim V$. *Hvis V er endelig-dimensionalt, gælder* $\dim U = \dim V$ *kun for $U = V$.*

Bevis. For $\dim V = \infty$ er der intet at vise. For $\dim V = r \in \mathbb{N}_0$ kan der i delmængden U af V ikke findes lineært uafhængige sæt bestående af flere end r vektorer; heraf følger uligheden. Er $\dim U = \dim V = r$, vil et maksimalsæt for U tillige være et maksimalsæt for V; ifølge hjælpesætningen vil sættet da frembringe både U og V, hvormed $U = V$. $\square$

Ethvert endelig-dimensionalt vektorrum V har en basis. Enhver basis for V indeholder det samme antal vektorer, nemlig $\dim V$.

Dette hovedresultat er en umiddelbar konsekvens af følgende sætning:

Et sæt af vektorer fra et endelig-dimensionalt vektorrum V er en basis for V, hvis og kun hvis det er et maksimaltsæt for V.

Bevis. For $\dim V = 0$ er påstanden trivielt opfyldt. Antag derefter, at $\dim V > 0$; maksimalsættene og de eventuelle baser er da ikke-tomme sæt. Ethvert maksimalsæt er en basis; thi et maksimalsæt er lineært uafhængigt, og det frembringer V ifølge hjælpesætningen. Lad omvendt $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_q)$ være en basis for V; da enhver basis er et lineært uafhængigt sæt, skal det blot vises, at $q = \dim V$. Uligheden $q \leqq \dim V$ følger af, at $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_q)$ er et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra V. Er på den anden side $(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_p)$ et vilkårligt lineært uafhængigt sæt af vektorer fra V, så gælder $p \leqq q$ ifølge udskiftningssætningen; heraf fremgår, at $\dim V \leqq q$. ▯

Vi skal dernæst vise:

For enhver delmængde M af et vektorrum V gælder $\dim(\operatorname{span} M) = \operatorname{rg} M$. *Er dette tal endeligt, bliver ethvert maksimalsæt for M et maksimalsæt (og dermed en basis) for* $\operatorname{span} M$.

Bevis. For $\mathrm{rg}M = 0$ og for $\mathrm{rg}M = \infty$ er påstanden klart gyldig. Er $\mathrm{rg}M = r \in \mathbb{N}$, og er $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r)$ et maksimalsæt for M, kan enhver vektor i M ifølge hjælpesætningen fremstilles som linearkombination af $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r$. Det samme gælder da om enhver vektor $\underline{v} \in \mathrm{span}M$; thi $\underline{v}$ kan fremstilles som linearkombination af vektorer fra M (sml. side 1.2.3). Sættet $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r)$ frembringer altså $\mathrm{span}M$, og da det tillige er lineært uafhængigt, er det en basis for $\mathrm{span}M$. Ifølge den foregående sætning er sættet da også et maksimalsæt for $\mathrm{span}M$, hvormed $\dim(\mathrm{span}M) = r$. ▯

Vi skal endelig vise:

Lad V være et vektorrum med $\dim V = n \in \mathbb{N}$, *og lad $(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_p)$ være et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra V. Hvis $p < n$, kan sættet $(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_p)$ suppleres til en basis for V ved tilføjelse af $n - p$ vektorer $\underline{u}_{p+1},\ldots,\underline{u}_n$.*

Bevis. Lad $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n)$ være en basis for V (sml. side 1.4.5). Ifølge udskiftningssætningen findes da $n - p$ vektorer $\underline{u}_{p+1},\ldots,\underline{u}_n$ blandt vektorerne $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n$, som sammen med vektorerne $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_p$ frembringer V. Sættes $M = \{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n\}$, har vi altså $\dim(\mathrm{span}M) = n$. Ifølge den foregående sætning har vi da også $\mathrm{rg}M = n$, hvoraf følger, at sættet $(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n)$ er lineært uafhængigt, og dermed er en basis. ▯

Er $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ en basis for et vektorrum (V,L) med $\dim V = n \in \mathbb{N}$, så har hver vektor $\underline{v} \in V$ en og kun een fremstilling som linearkombination af $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$,

$$\underline{v} = v_1\underline{e}_1+\ldots+v_n\underline{e}_n.$$

Talsættet $(v_1,\ldots,v_n) \in L^n$ kaldes *koordinatsættet* for vektoren $\underline{v}$ m.h.t. basen (eller *koordinatsystemet*) $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$; tallet v_i kaldes vektorens i'te *koordinat*. Den herved definerede afbildning

$$\underline{v} = v_1\underline{e}_1+\ldots+v_n\underline{e}_n \mapsto k(\underline{v}) = (v_1,\ldots,v_n)$$

af V ind i L^n kaldes *koordinatafbildningen* (hørende til den betragtede basis). Koordinatafbildningen $k\colon V \to L^n$ er bijektiv; thi for ethvert sæt $(v_1,\ldots,v_n) \in L^n$ findes netop en vektor $\underline{v} \in V$ med $k(\underline{v}) = (v_1,\ldots,v_n)$, nemlig vektoren $\underline{v} = v_1\underline{e}_1 +\ldots+v_n\underline{e}_n$. Endvidere noteres, at

$$k(\underline{u}+\underline{v}) = k(\underline{u}) + k(\underline{v}),$$
$$k(\lambda\underline{v}) = \lambda k(\underline{v}).$$

Thi

$$(u_1\underline{e}_1+\ldots+u_n\underline{e}_n) + (v_1\underline{e}_1+\ldots+v_n\underline{e}_n) = (u_1+v_1)\underline{e}_1+\ldots+(u_n+v_n)\underline{e}_n$$

og

$$\lambda(v_1\underline{e}_1+\ldots+v_n\underline{e}_n) = \lambda v_1\underline{e}_1+\ldots+\lambda v_n\underline{e}_n.$$

Bemærkning. Vektorrummet af geometriske vektorer i planen hhv. rummet har dimension 2 hhv. 3 (sml. i øvrigt side 1.1.5).

Eksempel. I vektorrummet (L^n, L) udgør sættet bestående af vektorerne $\underline{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \underline{e}_n = (0,\ldots,0,1)$ en basis, den såkaldte *naturlige* eller *kanoniske* basis. Thi af

$$v_1\underline{e}_1 + \ldots + v_n\underline{e}_n = (v_1,\ldots,v_n)$$

følger dels, at sættet er lineært uafhængigt, dels at det frembringer L^n. Vektorrummet (L^n, L) har således dimension n. Det kaldes derfor det *n-dimensionale reelle* eller *komplekse tal(vektor)rum.* (En bekvem skrivemåde for vektorerne $\underline{e}_i$ fås ved benyttelse af det såkaldte *Kronecker-symbol* δ_{ij}. Dette er defineret ved

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j, \\ 0 & \text{for } i \neq j. \end{cases}$$

Ved brug heraf har vi $\underline{e}_i = (\delta_{i1},\ldots,\delta_{in})$.)

1.5. SUM OG DIREKTE SUM AF UNDERRUM.

Lad (V,L) være et vektorrum. For to vilkårlige delmængder M_1 og M_2 af V defineres deres *sum* $M_1 + M_2$ ved

$$M_1 + M_2 \doteq \{ \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \mid \underline{u}_1 \in M_1 \wedge \underline{u}_2 \in M_2 \}.$$

Det noteres, at hvis en af mængderne M_1 og M_2 er tom, så er også summen tom.

Herved er defineret en komposition i mængden af delmængder af V. Det er klart, at den er kommutativ og associativ, idet vektoradditionen har disse egenskaber. Der findes et neutralt element, nemlig $\{\underline{o}\}$. Men en mængde M_1, der indeholder mindst to vektorer, har ikke nogen "modsat" mængde; thi for enhver ikke-tom mængde M_2 vil $M_1 + M_2$ indeholde mindst to vektorer. Forkortningsreglen gælder heller ikke.

Vi skal i det følgende interessere os for summer af underrum af V. Vi viser først:

For to underrum U_1 og U_2 af (V,L) er $U_1 + U_2$ det mindste underrum, der indeholder både U_1 og U_2, altså
$U_1 + U_2 = \text{span}(U_1 \cup U_2)$.

Bevis. Som bekendt er $\text{span}(U_1 \cup U_2)$ mængden af linearkombinationer af vektorer fra $U_1 \cup U_2$. For $\underline{u}_1 \in U_1$ og $\underline{u}_2 \in U_2$ er $\underline{u}_1 + \underline{u}_2$ en sådan linearkombination. Dette viser, at $U_1 + U_2 \subseteq \text{span}(U_1 \cup U_2)$. For at vise den modsatte inklusion skal godtgøres, at $U_1 + U_2$ er et underrum, som indeholder U_1 og U_2. For $\lambda,\mu \in L$, $\underline{u}_1', \underline{u}_1'' \in U_1$ og $\underline{u}_2', \underline{u}_2'' \in U_2$ har vi $\lambda\underline{u}_1' + \mu\underline{u}_1'' \in U_1$ og $\lambda\underline{u}_2' + \mu\underline{u}_2'' \in U_2$, idet U_1 og U_2 er underrum (sml. side 1.2.1 - 1.2.2). Endvidere gælder

$$\lambda(\underline{u}_1'+\underline{u}_2') + \mu(\underline{u}_1''+\underline{u}_2'') = (\lambda\underline{u}_1'+\mu\underline{u}_1'') + (\lambda\underline{u}_2'+\mu\underline{u}_2'').$$

Ialt har vi således

$$\lambda(\underline{u}_1'+\underline{u}_2') + \mu(\underline{u}_1''+\underline{u}_2'') \in U_1 + U_2,$$

hvormed er vist, at $U_1 + U_2$ er et underrum (sml. side 1.2.1 - 1.2.2). Endvidere har vi $U_1 = U_1 + \{\underline{o}\} \subseteqq U_1 + U_2$ og $U_2 = \{\underline{o}\} + U_2 \subseteqq U_1 + U_2$. □

For endelig-dimensionale underrum U_1 og U_2 af (V,L) gælder $\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$. *(Grassmann's dimensionsformel.)*

Bevis. Vi sætter $\dim U_1 = p$, $\dim U_2 = q$ og $\dim(U_1 \cap U_2) = r$. Hvis $r > 0$, $p > r$ og $q > r$ vælges en basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_r)$ for $U_1 \cap U_2$, og denne suppleres dels til en basis

$$(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_r,\underline{e}_{r+1}',\ldots,\underline{e}_p')$$

for U_1, og dels til en basis

$$(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_r,\underline{e}_{r+1}'',\ldots,\underline{e}_q'')$$

for U_2. Enhver vektor i $U_1 + U_2$ kan da fremstilles som linearkombination af vektorerne i $(p+q-r)$-sættet

(1) $$(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_r,\underline{e}_{r+1}',\ldots,\underline{e}_p',\underline{e}_{r+1}'',\ldots,\underline{e}_q'') .$$

Dette sæt er lineært uafhængigt. Lad nemlig

(2) $\lambda_1\underline{e}_1+\ldots+\lambda_r\underline{e}_r + \lambda'_{r+1}\underline{e}'_{r+1}+\ldots+\lambda'_p\underline{e}'_p + \lambda''_{r+1}\underline{e}''_{r+1}+\ldots+\lambda''_q\underline{e}''_q = \underline{o}$

være en lineær relation mellem sættets vektorer. Vektoren $-(\lambda''_{r+1}\underline{e}''_{r+1}+\ldots+\lambda''_q\underline{e}''_q)$ vides at tilhøre U_2; af (2) fremgår, at den også tilhører U_1, og dermed $U_1 \cap U_2$. Den er følgelig en linearkombination af $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_r$, og der må altså bestå en lineær relation af formen

$$\mu_1\underline{e}_1+\ldots+\mu_r\underline{e}_r + \lambda''_{r+1}\underline{e}''_{r+1}+\ldots+\lambda''_q\underline{e}''_q = \underline{o}.$$

Da sættet $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_r,\underline{e}''_{r+1},\ldots,\underline{e}''_q)$ er lineært uafhængigt, kan specielt sluttes, at $\lambda''_{r+1} = \ldots = \lambda''_q = 0$. Derefter følger af (2), at $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = \lambda'_{r+1} = \ldots = \lambda'_p = 0$, idet sættet $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_r,\underline{e}'_{r+1},\ldots,\underline{e}'_p)$ er lineært uafhængigt. Dermed er vist, at sættet (1) er lineært uafhængigt, og følgelig er en basis for $U_1 + U_2$. Der gælder altså $\dim(U_1+U_2) = p + q - r$, som påstået. - For $r = 0$, $p = r$ eller $q = r$ forløber beviset efter samme retningslinier som ovenfor, med visse oplagte modifikationer. For $p = r$ eller $q = r$ kan formlens gyldighed også indses direkte. □

Lad U,U_1 og U_2 være underrum af V med $U = U_1 + U_2$. Hver vektor $\underline{u} \in U$ har da (mindst) en fremstilling af formen $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ med $\underline{u}_1 \in U_1$ og $\underline{u}_2 \in U_2$. Har hver vektor fra U kun een sådan fremstilling, siges U at være *direkte sum* af underrummene U_1 og U_2, og man skriver

$$U = U_1 \oplus U_2.$$

Dette kommer altså ud på, at der for alle vektorer $\underline{u}_1', \underline{u}_1'' \in U_1$, $\underline{u}_2', \underline{u}_2'' \in U_2$ gælder

(3) $$\underline{u}_1' + \underline{u}_2' = \underline{u}_1'' + \underline{u}_2'' \Rightarrow \underline{u}_1' = \underline{u}_1'' \wedge \underline{u}_2' = \underline{u}_2''.$$

Lad U, U_1 og U_2 være underrum af (V,L) med $U = U_1 + U_2$. Da er hver af følgende to betingelser ensbetydende med, at U er direkte sum af U_1 og U_2:

(a) *Nulvektoren har kun een fremstilling som sum af en vektor fra U_1 og en vektor fra U_2, nemlig fremstillingen $\underline{o} = \underline{o} + \underline{o}$*

(b) $U_1 \cap U_2 = \{\underline{o}\}$.

Hvis U_1 og U_2 er endelig-dimensionale, så er også følgende betingelse ensbetydende med, at U er direkte sum af U_1 og U_2:

(c) $\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

Bevis. Det er klart, at hvis summen er direkte, så er (a) opfyldt. Antag omvendt, at (a) er opfyldt. Af $\underline{u}_1' + \underline{u}_2' = \underline{u}_1'' + \underline{u}_2''$, hvor $\underline{u}_1', \underline{u}_1'' \in U_1$, $\underline{u}_2', \underline{u}_2'' \in U_2$, følger da $(\underline{u}_1' - \underline{u}_1'') + (\underline{u}_2' - \underline{u}_2'') = \underline{o}$, og dermed, ifølge (a), $\underline{u}_1' - \underline{u}_1'' = \underline{u}_2' - \underline{u}_2'' = \underline{o}$, altså $\underline{u}_1' = \underline{u}_1''$ og $\underline{u}_2' = \underline{u}_2''$; betingelsen (3) følger altså af (a). Vi skal dernæst vise, at (a) og (b) er ensbetydende. Antag (a) opfyldt, og lad $\underline{u} \in U_1 \cap U_2$. Da gælder $\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{o}$ med $\underline{u} \in U_1$ og $-\underline{u} \in U_2$. Ifølge (a) har vi da $\underline{u} = -\underline{u} = \underline{o}$, hvormed er vist, at

(a) implicerer (b). Er omvendt (b) opfyldt, og $\underline{u}_1 \in U_1$, $\underline{u}_2 \in U_2$ vektorer med $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{o}$, fås $\underline{u}_1 = -\underline{u}_2 \in U_1 \cap U_2$, og derfor, ved brug af (b), $\underline{u}_1 = -\underline{u}_2 = \underline{o}$; dette viser, at (b) implicerer (a). Er endelig U_1 og U_2 endelig-dimensionale, så fremgår af Grassmann's dimensionsformel, at (b) og (c) er ens-betydende. ▯

To underrum U_1 og U_2 af (V,L) siges at være *komplementære*, dersom $V = U_1 \oplus U_2$. Hver vektor $\underline{v} \in V$ kan da på en og kun een måde skrives på formen $\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$, hvor $\underline{u}_1 \in U_1$ og $\underline{u}_2 \in U_2$. Vektoren $\underline{u}_1$ kaldes *komponenten* af $\underline{v}$ efter U_1 m.h.t. U_2, eller *projektionen* af $\underline{v}$ på U_1 langs U_2; tilsvarende for $\underline{u}_2$.

Lad (V,L) være et endelig-dimensionalt vektorrum, og lad U_1 være et underrum af V. Der findes da (mindst) et til U_1 komplementært underrum U_2.

Bevis. Påstanden er triviel for $\dim V = 0$. For $\dim V = n \geq 1$ er påstanden ligeledes triviel for $\dim U_1 = 0$ og for $\dim U_1 = n$. For $n > \dim U_1 = p \geq 1$ vælges en basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_p)$ for U_1, og denne suppleres til en basis for V ved tilføjelse af vektorer $\underline{e}_{p+1},\ldots,\underline{e}_n$. Sættes nu $U_2 = \operatorname{span}\{\underline{e}_{p+1},\ldots,\underline{e}_n\}$, har vi $U_1 + U_2 = V$ og $\dim(U_1+U_2) = n$. Da vi endvidere har $\dim U_1 = p$ og $\dim U_2 = n - p$, følger påstanden af sidste del af den foregående sætning. ▯

Idet additionen af delmængder af et vektorrum er associativ og kommutativ, er summen af flere end to mængder uafhængig af den orden, hvori additionerne udføres, og af mængdernes rækkefølge. Specielt kan sådanne summer skrives uden parenteser.

Lad $U_1,\dots,U_p$ være underrum af (V,L). Vi har da ifølge definitionen

$$U_1+\dots+U_p = \{ \underline{u}_1+\dots+\underline{u}_p \mid \underline{u}_i \in U_i \}.$$

Som i tilfældet $p = 2$ gælder (med et analogt bevis):

For underrum $U_1,\dots,U_p$ af (V,L) er $U_1+\dots+U_p$ det mindste underrum, som indeholder $U_1,\dots,U_p$, altså $U_1+\dots+U_p \doteq$ span$(U_1 \cup \dots \cup U_p)$.

Har hver vektor $\underline{u} \in U = U_1+\dots+U_p$ kun een fremstilling af formen $\underline{u} = \underline{u}_1+\dots+\underline{u}_p$ med $\underline{u}_i \in U_i$, siges U at være *direkte sum* af underrummene $U_1,\dots,U_p$, og man skriver $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_p$. Som for $p = 2$ gælder:

Lad $U, U_1,\dots,U_p$ være underrum af (V,L) med $U = U_1+\dots+U_p$. Da er U direkte sum af $U_1,\dots,U_p$, hvis og kun hvis $\underline{o}$ kun har een fremstilling af formen $\underline{o} = u_1+\dots+\underline{u}_p$ med $\underline{u}_i \in U_i$, nemlig fremstillingen $\underline{o} = \underline{o}+\dots+\underline{o}$.

Vi skal til sidst vise:

For endelig-dimensionale underrum $U_1,\dots,U_p$ af (V,L) gælder $\dim(U_1+\dots+U_p) \leqq \dim U_1+\dots+\dim U_p$. *Lighedstegner gælder, hvis og kun hvis summen af $U_1,\dots,U_p$ er direkte.*

Bevis. Vælges en basis for hvert af underrummene $U_1,\ldots,U_p$, og sammenstykkes disse baser til eet sæt af vektorer, fås et frembringersæt for underrummet $U_1+\ldots+U_p$, bestående af $\dim U_1+\ldots+\dim U_p$ vektorer. Anvendes sætningen nederst side 1.4.5 fås uligheden. Hvis summen er direkte, så har $\underline{o}$ kun een fremstilling af formen $\underline{o} = \underline{u}_1+\ldots+\underline{u}_p$ med $\underline{u}_i \in U_i$, og dermed kun een fremstilling som linearkombination af vektorerne i frembringersættet; følgelig er frembringersættet lineært uafhængigt, og dermed en basis for $U_1+\ldots+U_p$. Der gælder derfor lighedstegn. Omvendt, gælder lighedstegnet og betegner M mængden af frembringersættets vektorer, så har vi (sml. side 1.4.5) $\mathrm{rg}M = \dim(\mathrm{span}M) = \dim(U_1+\ldots+U_p) = \dim U_1+\ldots+\dim U_p$; rangen af M stemmer altså overens med antallet af vektorer i frembringersættet, og sættet er derfor lineært uafhængigt. Følgelig har $\underline{o}$ kun een fremstilling som linearkombination af vektorerne i sættet, og dermed kun een fremstilling af formen $\underline{o} = \underline{u}_1+\ldots+\underline{u}_p$ med $\underline{u}_i \in U_i$, hvoraf sluttes, ved brug af den foregående sætning, at summen er direkte. ▯

1.6. KVOTIENTRUM.

Lad U være et underrum af et vektorrum (V,L). Er $\underline{v}$ en vektor i V, skal vi for summen $\{\underline{v}\} + U$ af mængderne $\{\underline{v}\}$ og U indføre den forenklede betegnelse $\underline{v} + U$. Vi har altså

$$\underline{v} + U = \{ \underline{v} + \underline{u} \mid \underline{u} \in U \}.$$

Mængderne af formen $\underline{v} + U$ kaldes *sideunderrum* til U. Mængden af sideunderrum til U betegnes $V/_U$. Ved dimensionen $\dim(\underline{v}+U)$ af et sideunderrum $\underline{v} + U$ forstås $\dim U$.

Med det formål for øje at undersøge sideunderrummene til U, defineres følgende relation i V: En vektor $\underline{v}_1 \in V$ siges at være *kongruent modulo* U med en vektor $\underline{v} \in V$, dersom $\underline{v}_1 - \underline{v} \in U$. Vi skriver da $\underline{v}_1 \equiv \underline{v} (\text{ mod } U)$, eller blot $\underline{v}_1 \equiv \underline{v}$, dersom U er underforstået. For enhver vektor $\underline{v} \in V$ gælder $\underline{v} \equiv \underline{v}$; thi $\underline{v} - \underline{v} = \underline{o} \in U$. Er $\underline{v}_1$ og $\underline{v}$ vektorer i V med $\underline{v}_1 \equiv \underline{v}$, gælder også $\underline{v} \equiv \underline{v}_1$; thi af $\underline{v}_1 - \underline{v} \in U$ følger $\underline{v} - \underline{v}_1 \in U$. Og er $\underline{v}_2, \underline{v}_1$ og $\underline{v}$ vektorer i V med $\underline{v}_2 \equiv \underline{v}_1$ og $\underline{v}_1 \equiv \underline{v}$, gælder også $\underline{v}_2 \equiv \underline{v}$; thi af $\underline{v}_2 - \underline{v}_1 \in U$ og $\underline{v}_1 - \underline{v} \in U$ følger $(\underline{v}_2-\underline{v}_1) + (\underline{v}_1-\underline{v}) \in U$, altså $\underline{v}_2 - \underline{v} \in U$. Ialt er hermed godtgjort, at relationen kongruens modulo U er en ækvivalensrelation i V. Det fremgår af definitionen, at ækvivalensklassen, som indeholder en given vektor $\underline{v} \in V$, altså mængden af vektorer $\underline{v}_1 \in V$ som er kongruente modulo U med $\underline{v}$, netop er sideunderrummet $\underline{v} + U$. Vi har altså:

Sideunderrummene til et underrum U af (V,L) er netop ækvivalensklasserne ved ækvivalensrelationen kongruens modulo U.

Heraf følger, at forskellige sideunderrum er disjunkte. Idet $\underline{v} \in \underline{v} + U$, sluttes endvidere, at følgende tre betingelser er ensbetydende: $\underline{v}_1 + U = \underline{v}_2 + U$; $\underline{v}_1 \in \underline{v}_2 + U$; $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in U$.

Ækvivalensrelationen $\equiv$ harmonerer med vektorrummets kompositionsforskrifter i den betydning, at

$$\underline{v}_1' \equiv \underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2' \equiv \underline{v}_2 \Rightarrow \underline{v}_1' + \underline{v}_2' \equiv \underline{v}_1 + \underline{v}_2,$$

$$\underline{v}' \equiv \underline{v} \Rightarrow \lambda\underline{v}' \equiv \lambda\underline{v}.$$

Thi af $\underline{v}_1' - \underline{v}_1 \in U$ og $\underline{v}_2' - \underline{v}_2 \in U$ følger $(\underline{v}_1'-\underline{v}_1) + (\underline{v}_2'-\underline{v}_2) \in U$, og dermed $(\underline{v}_1'+\underline{v}_2') - (\underline{v}_1+\underline{v}_2) \in U$; og af $\underline{v}' - \underline{v} \in U$ følger $\lambda(\underline{v}'-\underline{v}) \in U$, og dermed $\lambda\underline{v}' - \lambda\underline{v} \in U$. Vi har altså, at summen af en vilkårlig vektor i sideunderrummet $\underline{v}_1 + U$ og en vilkårlig vektor i sideunderrummet $\underline{v}_2 + U$ altid vil tilhøre sideunderrummet $(\underline{v}_1+\underline{v}_2) + U$, og at produktet af en skalar $\lambda \in L$ og en vilkårlig vektor i sideunderrummet $\underline{v} + U$ altid vil tilhøre sideunderrummet $\lambda\underline{v} + U$. Dette viser, at der ved

$$(\underline{v}_1+U) + (\underline{v}_2+U) = (\underline{v}_1+\underline{v}_2) + U$$

defineres en komposition ${}^{V}/_{U} \times {}^{V}/_{U} \rightarrow {}^{V}/_{U}$, kaldet addition, og at der ved

$$\lambda(\underline{v}+U) = \lambda\underline{v} + U$$

defineres en komposition $L \times {}^{V}/_{U} \rightarrow {}^{V}/_{U}$, kaldet multiplikation. (Man regner altså med sideunderrummene ved at regne med repræsentanter for sideunderrummene.) Det eftervises uden besvær, at ${}^{V}/_{U}$ herved er organiseret som et vektorrum $({}^{V}/_{U}, L)$ over L. Dette vektorrum kaldes *kvotientrummet* af (V,L) over U. Nulvektoren i kvotientrummet er sideunderrummet $\underline{o} + U$, altså U, den modsatte vektor til $\underline{v} + U$ er $-\underline{v} + U$. For $U = V$ bliver kvotientrummet $^V/_U$ et vektorrum kun indeholdende nulvektoren. For $U = \{\underline{o}\}$ bliver sideunderrummene til U af formen $\underline{v} + \{\underline{o}\} = \{\underline{v}\}$.

Bemærkning. Det eftervises let, at

$$(\underline{v}_1+U) + (\underline{v}_2+U) = \{ (\underline{v}_1+\underline{u}_1) + (\underline{v}_2+\underline{u}_2) \mid \underline{u}_1,\underline{u}_2 \in U \},$$

hvor $(\underline{v}_1+U) + (\underline{v}_2+U)$ betegner summen af $\underline{v}_1 + U$ og $\underline{v}_2 + U$ i $^V/_U$; additionen i $^V/_U$ er altså den sammen som "mængdeadditionen" (sml. side 1.5.1). - Det vises let, at der for $\lambda \neq 0$ gælder

$$\lambda(\underline{v}+U) = \{ \lambda(\underline{v}+\underline{u}) \mid \underline{u} \in U \},$$

hvorimod $0(\underline{v}+U) = U$, som for $U \neq \{\underline{o}\}$ er forskelligt fra $\{ 0(\underline{v}+\underline{u}) \mid \underline{u} \in U \} = \{\underline{o}\}$. ▯

Vi skal endelig vise:

Er (V,L) et endelig-dimensionalt vektorrum, og er U et underrum af V, så gælder $\dim U + \dim {}^V/_U = \dim V$.

Bevis. For $\dim V = 0$ er ligningen oplagt. For $\dim V \geq 1$, og $U = V$ eller $U = \{\underline{o}\}$ er ligningen ligeledes oplagt. Antag derfor, at U er et underrum med $\dim U = p$, hvor $1 \leq p < n = \dim V$. Lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_p)$ være en basis for U; denne suppleres til en basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_p,\underline{e}_{p+1},\ldots,\underline{e}_n)$ for V. Det påstås, at sættet

(1) $$(\underline{e}_{p+1}+U,\ldots,\underline{e}_n+U)$$

er en basis for $V/_U$. Lad

$$\lambda_{p+1}(\underline{e}_{p+1}+U)+\ldots+\lambda_n(\underline{e}_n+U) = U$$

være en lineær relation mellem vektorerne i sættet. Vi har da

$$U = \lambda_{p+1}(\underline{e}_{p+1}+U)+\ldots+\lambda_n(\underline{e}_n+U)$$

$$= (\lambda_{p+1}\underline{e}_{p+1}+U)+\ldots+(\lambda_n\underline{e}_n+U)$$

$$= (\lambda_{p+1}\underline{e}_{p+1}+\ldots+\lambda_n\underline{e}_n) + U,$$

hvilket medfører

$$\lambda_{p+1}\underline{e}_{p+1}+\ldots+\lambda_n\underline{e}_n \in U.$$

Der findes derfor $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in L$, således at

$$\lambda_{p+1}\underline{e}_{p+1}+\ldots+\lambda_n\underline{e}_n = \lambda_1\underline{e}_1+\ldots+\lambda_p\underline{e}_p.$$

Men da sættet $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ er lineært uafhængigt, sluttes, at $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ $(= \lambda_1 = \ldots = \lambda_p)$, hvormed er vist, at sættet (1) er lineært uafhængigt. Lad dernæst $\underline{v} + U$ være en vilkårlig vektor i $V/_U$. Der findes da $\mu_1,\ldots,\mu_n \in L$, således at

$$\underline{v} = \mu_1\underline{e}_1 +\ldots+ \mu_n\underline{e}_n.$$

Dette giver

$$\underline{v} + U = (\mu_1\underline{e}_1+\ldots+\mu_n\underline{e}_n) + U$$

$$= ((\mu_1\underline{e}_1+\ldots+\mu_p\underline{e}_p)+U) + (\mu_{p+1}\underline{e}_{p+1}+U)+\ldots+(\mu_n\underline{e}_n+U)$$

$$= U + (\mu_{p+1}\underline{e}_{p+1}+U)+\ldots+(\mu_n\underline{e}_n+U)$$

$$= (\mu_{p+1}\underline{e}_{p+1}+U)+\ldots+(\mu_n\underline{e}_n+U)$$

$$= \mu_{p+1}(\underline{e}_{p+1}+U)+\ldots+\mu_n(\underline{e}_n+U),$$

hvormed er vist, at sættet (1) frembringer $^V/_U$. Sættet er derfor en basis for $^V/_U$. Dette giver

$$\dim U + \dim {}^V/_U = p + (n-p)$$

$$= n = \dim V \ . \ \square$$

1. Vis, at betingelsen (f) i definitionen af vektorrum ikke er en konsekvens af de øvrige betingelser. (Betragt f.eks. mængden $\mathbb{R}^2$ med den sædvanlige addition,

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2),$$

samt "multiplikationen"

$$\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, 0).)$$

2. Lad $(V, \mathbb{R})$ være et reelt vektorrum. Vis, at produktmængden $V \times V$ organiseres som et komplekst vektorrum ved kompositionerne

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_2) + (\underline{v}_1, \underline{v}_2) = (\underline{u}_1+\underline{v}_1, \underline{u}_2+\underline{v}_2),$$

$$(\lambda+i\mu)(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = (\lambda\underline{u}_1-\mu\underline{u}_2, \mu\underline{u}_1+\lambda\underline{u}_2),$$

hvor $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Vektorrummet kaldes *den komplekse udvidelse* af $(V, \mathbb{R})$.

3. Undersøg, hvilke af følgende delmængder af $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, der er underrum af $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$:

   a) Mængden af konvergente følger.

   b) Mængden af konvergente følger med 0 som grænseværdi.

   c) Mængden af konvergente følger med 1 som grænseværdi.

4. Undersøg, hvilke af følgende delmængder af $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, der er underrum af $(F(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R})$:

a) Mængden af kontinuerte funktioner.

b) Mængden af differentiable funktioner.

c) Mængden af polynomier.

d) Mængden af n'te grads polynomier, hvor n er et givet naturligt tal.

e) Mængden af polynomier af grad $\leq n$ (herunder nulpolynomiet), hvor n er et givet naturligt tal.

f) Mængden af funktioner φ med $\varphi(1) = 0$.

g) Mængden af funktioner φ med $\varphi(1) = 1$.

h) Mængden af funktioner φ med $\varphi(1) = \varphi(-1)$.

i) Mængden af funktioner φ med $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| < \infty$.

j) Mængden af funktioner φ med $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| < k$, hvor k er et givet positivt tal.

5. I vektorrummet $(L^{\mathbb{N}},L)$ betragtes mængden M bestående af vektorerne $(1,0,0,0,\ldots)$, $(0,1,0,0,\ldots)$, $(0,0,1,0,\ldots)$, . Bestem span$M$.

6. Undersøg, om følgende sæt af vektorer fra de angivne vektorrum er lineært afhængige, og fremstil i bekræftende fald en af vektorerne som en linearkombination af de øvrige.

a) $((-1,1),(2,2),(0,3))$, - $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

b) $((i,1),(1+i,0),(0,1-i))$, - $(\mathbb{C}^2,\mathbb{C})$.

c) $((1,1,1),(0,2,2),(0,1,3))$, - $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.

d) $((1,0,1,0),(0,1,0,1),(1,-1,1,-1),(0,0,1,1))$, - $(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$.

7. Bestem mængden af de $t \in \mathbb{R}$ for hvilke sættet $((1,t),(t,1))$ er et lineært afhængigt sæt af vektorer fra $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

8. Bestem mængden af de $t \in L$ for hvilke sættet $((1,t,0),(t,0,1),(0,1,t))$ er et lineært afhængigt sæt af vektorer fra (L^3,L).

9. Angiv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at sættet bestående af vektorerne

$$\begin{array}{l}(a_{11},\ 0\ ,\ 0\ ,\dots,\ 0\ )\\(a_{21},a_{22},\ 0\ ,\dots,\ 0\ )\\\quad\vdots\\(a_{n1},a_{n2},a_{n3},\dots,a_{nn})\end{array}$$

fra vektorrummet (L^n,L) er lineært uafhængigt.

10. Vis, at hvis et sæt $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n)$ af vektorer fra et vektorrum (V,L) er lineært uafhængigt, så vil også ethvert sæt af formen $(\underline{v}_1+\lambda\underline{v}_2, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n)$ være lineært uafhængigt.

11. Vis, at et sæt $((a_1,a_2),(b_1,b_2))$ af vektorer fra (L^2,L) er lineært afhængigt, hvis og kun hvis $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

12. Lad $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3 \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ være givet ved $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = \sin t$ og $\varphi_3(t) = \cos t$ for $t \in \mathbb{R}$. Vis, at sættet $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ er et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra $(F(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R})$.

13. Lad $p_1,\ldots,p_n$ være indbyrdes forskellige tal fra $\mathbb{N}_0$. Vis, at sættet bestående af polynomierne $t^{p_1},\ldots,t^{p_n}$ er et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra $(F(\mathbb{C},\mathbb{C})\mathbb{C})$.

14. For $a \in \mathbb{R}_+$ sættes $\exp_a(t) = a^t$, $t \in \mathbb{R}$. Vis, at hvis $a_1,\ldots,a_n$ er indbyrdes forskellige tal fra $\mathbb{R}_+$, så er $(\exp_{a_1},\ldots,\exp_{a_n})$ et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra $(F(\mathbb{R},\mathbb{R})\mathbb{R})$.

15. I vektorrummet $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ betragtes mængden M bestående af vektorerne $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ og $(-1,-1)$. Bestem $\mathrm{rg}M$, og angiv samtlige maksimalsæt for M.

16. I vektorrummet $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ betragtes mængden M bestående af vektorerne $(-2,4,0)$, $(0,3,1)$ og $(2,-1,1)$. Bestem rg$M$, og angiv et maksimalsæt for M. Undersøg, om vektorerne $(1,0,0)$ og $(2,2,2)$ tilhører span$M$.

17. Angiv en basis for $(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$, som indeholder vektorerne $(3,0,1,2)$ og $(-1,2,0,-1)$.

18. For $n \in \mathbb{N}_0$ betegnes med P_n underrummet af $(F(\mathbb{C},\mathbb{C}),\mathbb{C})$ bestående af alle polynomier af grad $\leq n$. Vis, at sættet bestående af polynomierne t^p, $p = 0,1,\ldots,n$, udgør en basis for P_n. Vis, at ethvert sæt bestående af $n + 1$ egentlige polynomier fra P_n, således at ikke to har samme grad, udgør en basis for P_n.

19. Lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en basis for et reelt vektorrum $(V,\mathbb{R})$. Angiv en basis for den komplekse udvidelse af $(V,\mathbb{R})$, (sml. øv. 2).

20. Lad $(V,\mathbb{C})$ være et komplekst vektorrum. Mængden V kan da på naturlig måde organiseres som et reelt vektorrum. (Hvordan?). Udtryk dimensionen af V som reelt vektorrum ved dimensionen af V som komplekst vektorrum.

21. Lad $\varphi_1,\dots,\varphi_6 \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ være givet ved $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = \cos t$, $\varphi_3(t) = \sin t$, $\varphi_4(t) = \cos^2 t$, $\varphi_5(t) = \cos t\cdot\sin t$ og $\varphi_6(t) = \sin^2 t$ for $t \in \mathbb{R}$. Bestem dimensionen og angiv en basis for det af disse vektorer udspændte underrum af $(F(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R})$.

22. For $u \in \mathbb{R}$ og $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ sættes $\varphi_{u,a}(t) = a\cdot\cos(t-u)$, $t \in \mathbb{R}$. Vis, at mængden af alle sådanne funktioner $\varphi_{u,a}$ udgør et underrum af $(F(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R})$. Vis, at underrummet har endelig dimension, og angiv en basis for det.

23. Lad $t_0,t_1,\dots,t_n$ være $n+1$ forskellig komplekse tal. For $\mu = 0,1,\dots,n$ sættes

$$f_\mu(t) = (t-t_0)\dots(t-t_{\mu-1})(t-t_{\mu+1})\dots(t-t_n)$$

for $t \in \mathbb{C}$. Vis, at sættet bestående af funktionerne f_μ, $\mu = 0,1,\dots,n$, udgør en basis for P_n, (sml. øv. 18). Vis, at for ethvert polynomium $g \in P_n$ gælder *Lagrange's interpolationsformel*

$$g(t) = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{g(t_\mu)}{f_\mu(t_\mu)} f_\mu(t), \quad t \in C.$$

Gør rede for, at der for $n+1$ vilkårlige (ikke nødvendigvis forskellige) komplekse tal $a_0,a_1,\dots,a_n$ findes netop eet polynomium h af højst n'te grad med $h(t_\mu) = a_\mu$, $\mu = 0,1,\dots,n$.

24. Bestem polynomiet g af højst tredie grad således, at $g(-1) = 3$, $g(0) = 1$, $g(2) = -1$ og $g(4) = 2$, (sml. øv. 23).

25. Vis, at der for vilkårlige, indbyrdes forskellige komplekse tal, $t_0, t_1, \ldots, t_n$ gælder

$$\sum_{\mu=0}^{n} \frac{t_\mu^m}{f_\mu(t_\mu)} = \begin{cases} 1 & \text{for } m = n \\ 0 & \text{for } 0 \leqq m \leqq n-1, \end{cases}$$

hvor $f_\mu(t) = (t-t_0)\ldots(t-t_{\mu-1})(t-t_{\mu+1})\ldots(t-t_n)$, (sml. øv. 23).

26. I vektorrummet $(V,\mathbb{R})$ af geometriske vektorer er givet fra $\underline{0}$ forskellige vektorer $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d},\underline{e}$. Det forudsættes, at $\underline{b},\underline{c},\underline{d},\underline{e}$ er parallelle med samme plan, at $\underline{a}$ ikke er parallel med denne plan, at $\underline{b} \neq \underline{c}$, og at $\underline{d}$ og $\underline{e}$ er indbyrdes vinkelrette enhedsvektorer. Giv geometriske beskrivelser af følgende delmængder af V:

$$M_1 = \{ \lambda\underline{a} \mid \lambda \in \mathbb{R} \},$$

$$M_2 = \{ \mu\underline{b} \mid \mu \in [0,\infty[\},$$

$$M_3 = \{ \nu\underline{c} \mid \nu \in [0,1] \},$$

$$M_4 = \{ \rho\underline{d} + \sigma\underline{e} \mid \rho^2 + \sigma^2 \leqq 1 \},$$

samt $M_1 + M_1$, $M_1 + M_2$, $M_1 + M_2 + M_3$, $M_3 + M_4$, $M_2 + M_3 + M_4$, $M_4 + M_4$.

27. Lad M_1, M_2 og M_3 være delmængder af et vektorrum. Mængderne $M_1 \cap (M_2+M_3)$ og $(M_1 \cap M_2) + (M_1 \cap M_3)$ stemmer almindeligvis ikke overens. Vis dette ved angivelse af et eksempel, og undersøg, om en inklusion mellem de to mængder er almengyldig.

28. Lad U, U_1 og U_2 være endelig-dimensionale underrum af et vektorrum, således at $U \cap U_1 = U \cap U_2$ og $U + U_1 = U + U_2$. Vis, at $U_1 \subseteq U_2$ implicerer $U_1 = U_2$.

29. Hvilke direkte summer kan dannes af underrummene

$$U_1 = \mathrm{span}\{(1,1,1,1)\},$$

$$U_2 = \mathrm{span}\{(0,1,0,-1),(1,2,1,0)\},$$

$$U_3 = \mathrm{span}\{(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$$

i vektorrummet (L^4, L)?

30. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaldes lige, dersom $f(-t) = f(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$, og ulige, dersom $f(-t) = -f(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Vis, at såvel mængden af lige funktioner som mængden af ulige funktioner er underrum af $(\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R})$, og at disse to underrum er komplementære.

31. Angiv en basis for et komplementært underrum U_2 til underrummet $U_1 = \text{span}\{(3,-2,1)\}$ i (L^3,L). Find derefter projektionen af vektoren $(2,2,2)$ på U_1 langs det fundne underrum U_2.

32. Lad (V,L) være et endelig-dimensionalt vektorrum, og lad U være et underrum af V med $0 < \dim U < \dim V$. Vis, at der findes uendelig mange til U komplementære underrum af V.

33. Vis, at summen $U_1 + U_2 + U_3$ af tre underrum af et vektorrum er direkte, hvis og kun hvis der gælder

$U_1 \cap (U_2+U_3) = U_2 \cap (U_1+U_3) = U_3 \cap (U_1+U_2) = \{\underline{o}\}$.

34. Vis, at en ikke-tom delmængde M af et vektorrum (V,L) er et sideunderrum i V, hvis og kun hvis M er afsluttet over for dannelse af linearkombinationer med koefficientsum 1, altså hvis og kun hvis der for ethvert sæt $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n)$ af vektorer fra M og ethvert sæt $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ af skalarer med $\lambda_1+\ldots+\lambda_n = 1$ gælder $\lambda_1\underline{v}_1+\ldots+\lambda_n\underline{v}_n \in M$.

35. Vis, at en ikke-tom fællesmængde af sideunderrum i et vektorrum igen er et sideunderrum.

36. Lad $(V_1,L),\dots,(V_n,L)$ være vektorrum over samme legeme L. Overvej, at produktmængden

$$V_1\times\dots\times V_n = \{\ (\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n)\ \mid\ \underline{v}_1 \in V_1 \wedge\dots\wedge \underline{v}_n \in V_n\ \}$$

på naturlig måde kan organiseres som et vektorrum over L; dette vektorrum kaldes produktet (eller det direkte produkt) af vektorrummene $(V_1,L),\dots,(V_n,L)$. Udtryk dimensionen af produktet ved dimensionerne af $(V_1,L),\dots,(V_n,L)$.

For $i = 1,\dots,n$ betegnes med W_i delmængden af $V_1\times\dots\times V_n$ bestående af vektorerne af formen

$$(\underline{o}_1,\dots,\underline{o}_{i-1},\underline{v}_i,\underline{o}_{i+1},\dots,\underline{o}_n),$$

hvor $\underline{o}_j$ er nulvektoren i V_j, og $\underline{v}_i \in V_i$. Vis, at delmængderne W_i er underrum af produktet $V_1\times\dots\times V_n$, og at $W_1\oplus\dots\oplus W_n = V_1\times\dots\times V_n$. Beskriv kvotientrummene ${}^{V_1\times\dots\times V_n}/_{W_i}$.

KAPITEL 2. LINEÆRE AFBILDNINGER.

2.1. LINEÆRE AFBILDNINGER.

Lad (U,L) og (V,L) være (ikke nødvendigvis forskellige) vektorrum over samme legeme. Vi skal benytte samme betegnelser for kompositionerne i de to vektorrum, og både nulvektoren i U og nulvektoren i V vil blive betegnet $\underline{o}$. En afbildning $f : U \to V$ kaldes en *lineær afbildning* (også *homomorf afbildning* eller *homomorfi*), dersom følgende to betingelser er opfyldt:

(a) $\forall\ \underline{u}_1,\underline{u}_2 \in U : f(\underline{u}_1+\underline{u}_2) = f(\underline{u}_1) + f(\underline{u}_2)$.

(b) $\forall\ \lambda \in L\ \forall\ \underline{u} \in U : f(\lambda\underline{u}) = \lambda f(\underline{u})$.

En bijektiv lineær afbildning kaldes også en *isomorf afbildning* eller en *isomorfi*. For $U = V$ benyttes også gloserne *endomorf afbildning* eller *endomorfi* for en homomorf afbildning, og gloserne *automorf afbildning* eller *automorfi* for en isomorf afbildning.

Det ses umiddelbart, at betingelserne (a) - (b) er ensbetydende med følgende ene betingelse, som således også kunne være benyttet ved definitionen:

(c) $\forall\ \lambda_1,\lambda_2 \in L\ \forall\ \underline{u}_1,\underline{u}_2 \in U : f(\lambda_1\underline{u}_1+\lambda_2\underline{u}_2) = \lambda_1 f(\underline{u}_1) + \lambda_2 f(\underline{u}_2)$.

Betingelsen (c) kan siges at udtrykke, at f bevarer linearkombinationer af to vektorer. Ved brug af (c) vises let ved induktion, at hvis f er lineær, så har vi

(1) $$f(\lambda_1\underline{u}_1+\ldots+\lambda_p\underline{u}_p) = \lambda_1 f(\underline{u}_1)+\ldots+\lambda_p f(\underline{u}_p)$$

for alle $p \in \mathbb{N}$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in L$ og $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_p \in U$; for $p = 1$ er (1) blot (b). Idet omvendt enhver afbildning f med egenskaben (1) trivielt har egenskaben (c), gælder altså:

En afbildning $f : U \to V$ er lineær hvis og kun hvis den bevarer (ikke-tomme) linearkombinationer.

Vedrørende eksistensen af lineære afbildninger skal vi vise:

Hvis U har endelig dimension $n \in \mathbb{N}$, så findes for enhver basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ for U og ethvert sæt $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n)$ af n vektorer fra V en og kun een lineær afbildning $f : U \to V$ med $f(\underline{e}_i) = \underline{v}_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Bevis. Lad f være den ved

$$f(u_1\underline{e}_1+\ldots+u_n\underline{e}_n) = u_1\underline{v}_1+\ldots+u_n\underline{v}_n$$

definerede afbildning af U ind i V. Det eftervises let, at f er lineær, og at $f(\underline{e}_i) = \underline{v}_i$ for $i = 1,\ldots,n$. Lad omvendt $g : U \to V$ være en lineær afbildning med $g(\underline{e}_i) = \underline{v}_i$ for $i = 1,\ldots,n$. Der gælder da

$$\begin{aligned} g(u_1\underline{e}_1+\ldots+u_n\underline{e}_n) &= u_1g(\underline{e}_1)+\ldots+u_ng(\underline{e}_n) \\ &= u_1\underline{v}_1+\ldots+u_n\underline{v}_n, \end{aligned}$$

hvilket viser, at $g = f$. ▯

Vi skal herefter undersøge egenskaber ved en lineær afbildning $f : U \to V$.

Modsat vektor afbildes i modsat vektor, altså $f(-\underline{u}) = -f(\underline{u})$ *for* $\underline{u} \in U$*, og nulvektor afbildes i nulvektor, altså* $f(\underline{o}) = \underline{o}$.

Bevis. Ved brug af (b) fås $f(-\underline{u}) = f((-1)\underline{u}) = (-1)f(\underline{u}) = -f(\underline{u})$ og $f(\underline{o}) = f(0\underline{o}) = 0f(\underline{o}) = \underline{o}$. ▯

Er $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_p)$ *et lineært afhængigt sæt af vektorer i* U*, så er også sættet* $(f(\underline{u}_1),\dots,f(\underline{u}_p))$ *af billedvektorer i* V *lineært afhængigt.*

Bevis. Lad $\lambda_1\underline{u}_1+\dots+\lambda_p\underline{u}_p = \underline{o}$ være en egentlig lineær relation mellem vektorerne i sættet $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_p)$. Af den foregående sætning følger da $f(\lambda_1\underline{u}_1+\dots+\lambda_p\underline{u}_p) = \underline{o}$, altså $\lambda_1 f(\underline{u}_1)+\dots+\lambda_p f(\underline{u}_p) = \underline{o}$. Heraf fremgår, at sættet $(f(\underline{u}_1),\dots,f(\underline{u}_p))$ er lineært afhængigt. ▯

Det noteres, at den foregående sætning kan omformuleres til følgende:

Er $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_p)$ *et sæt af vektorer i* U *for hvilket sættet* $(f(\underline{u}_1),\dots,f(\underline{u}_p))$ *af billedvektorer i* V *er lineært uafhængigt, så er også sættet* $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_p)$ *lineært uafhængigt.*

Det bemærkes, at der til et lineært uafhængigt sæt meget vel kan svare et lineært afhængigt sæt af billedvektorer. Dette vil f.eks. gælde for enhver basis for U og enhver lineær afbildning $f : U \to V$, dersom $\dim V < \dim U < \infty$.

For ethvert underrum V_1 *af* V *er originalmængden* $f^{-1}(V_1)$ *et underrum af* U.

Bevis. Af $f(\underline{o}) = \underline{o}$ følger, at $f^{-1}(V_1)$ er ikke-tom. Det skal derefter vises, at $\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 \in f^{-1}(V_1)$ for $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ og $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in f^{-1}(V_1)$. Af $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in f^{-1}(V_1)$ følger $f(\underline{u}_1), f(\underline{u}_2) \in V_1$, og dermed $\lambda_1 f(\underline{u}_1) + \lambda_2 f(\underline{u}_2) \in V_1$, idet V_1 er et underrum. Ved brug af lineariteten giver dette $f(\lambda_1\underline{u}_1+\lambda_2\underline{u}_2) \in V_1$, altså $\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 \in f^{-1}(V_1)$. $\square$

Idet $\{\underline{o}\}$ er et underrum af V, følger af den foregående sætning, at originalmængden $f^{-1}(\underline{o})$ er et underrum af U. Det kaldes f's *kerne* (eller *nulrum*), og betegnes K_f eller blot K. Vi har altså

$$K_f = \{ \underline{u} \in U \mid f(\underline{u}) = \underline{o} \}$$

For ethvert underrum U_1 *af* U *er billedet* $f(U_1)$ *er underrum af* V.

Bevis. Det skal vises, at $\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 \in f(U_1)$ for $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ og $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in f(U_1)$. Lad $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$ være vektorer i U_1 med $f(\underline{u}_1) = \underline{v}_1$ og $f(\underline{u}_2) = \underline{v}_2$. Vi har da $\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 \in U_1$, idet U_1 er et underrum, og dermed $f(\lambda_1\underline{u}_1+\lambda_2\underline{u}_2) \in f(U_1)$, altså $\lambda_1 f(\underline{u}_1) + \lambda_2 f(\underline{u}_2) = \lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 \in f(U_1)$. $\square$

Af denne sætning fremgår specielt, at billedmængden $f(U)$ er et underrum af V. Det kaldes *billedrummet* ved afbildningen f. Dimensionen af billedrummet kaldes lejlighedsvis for *rangen* af f og betegnes da $\mathrm{rg}f$, - altså $\mathrm{rg}f = \dim f(U)$.

Dimensionen af billedrummet ved afbildningen $f : U \to V$ *er mindre end eller lig med dimensionen af* U*, altså* $\dim f(U) \leq \dim U$.

Bevis. For ethvert lineært uafhængigt sæt $(f(\underline{u}_1), \ldots, f(\underline{u}_p))$ af p vektorer fra $f(U)$ findes også et lineært uafhængigt sæt af p vektorer fra U, nemlig sættet $(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_p)$, (sml. side 2.1.3). Heraf følger påstanden. ▯

Idet restriktionen af f til et underrum af U er en lineær afbildning af dette underrum ind i V, følger af den sidste sætning, at der for ethvert underrum U_1 af U gælder $\dim f(U_1) \leq \dim U_1$.

Hvis f *er bijektiv, altså en isomorfi, så er den omvendte afbildning* $f^{-1} : V \to U$ *lineær, og dermed en isomorfi. Det gælder da* $\dim U = \dim V$.

Bevis. For $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ og $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ har vi

$$f\left(\lambda_1 f^{-1}(\underline{v}_1) + \lambda_2 f^{-1}(\underline{v}_2)\right) = \lambda_1 f \circ f^{-1}(\underline{v}_1) + \lambda_2 f \circ f^{-1}(\underline{v}_2)$$
$$= \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2,$$

og dermed

$$f^{-1}(\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2) = \lambda_1 f^{-1}(\underline{v}_1) + \lambda_2 f^{-1}(\underline{v}_2),$$

hvilket viser, at f^{-1} er lineær. Af den foregående sætning fås derefter dels $\dim V = \dim f(U) \leq \dim U$, idet f er surjektiv og lineær, dels $\dim U = \dim f^{-1}(V) \leq \dim V$, idet f^{-1} er surjektiv og lineær. ▯

Af denne sætning følger, at hvis $f : U \to V$ er en injektiv lineær afbildning, så gælder $\dim f(U_1) = \dim U_1$ for ethvert underrum U_1 af U; thi restriktionen af f til U_1 er en isomorfi af U_1 på $f(U_1)$.

Eksempel. Lad (U,L) være et vektorrum, og lad $\alpha \in L$. Ved $\underline{u} \mapsto \alpha\underline{u}$ defineres da en lineær afbildning af U ind i U; for $\alpha \neq 0$ er afbildningen bijektiv, altså en isomorfi. Den kaldes *homotetien* eller *multiplikation* med α som *faktor*.

Eksempel. Lad U_1 og U_2 være komplementære underrum af et vektorrum (U,L), (sml. side 1.5.5). Ved til hver vektor i U at lade svare dens projektion på U_1 langs U_2, (sml. side 1.5.5), fås en lineær afbildning pr_1 af U ind i U, kaldet *parallelprojektionen* på U_1 langs U_2. Billedrummet for pr_1 er U_1, kernen er U_2. Tilsvarende defineres parallelprojektionen pr_2 på U_2 langs U_1.

Eksempel. Lad (U,L) være et vektorrum med $\dim U = n \in \mathbb{N}$, og lad der i U være valgt en basis. Den tilhørende koordinatafbildning er da en isomorfi af (U,L) på (L^n,L), (sml. side 1.4.7).

Eksempel. Lad U være et underrum af et vektorrum (V,L). Afbildningen $\underline{v} \mapsto \underline{v} + U$ er da en lineær afbildning af V på kvotientrummet V/U, (sml. side 1.6.3). Afbildningen kaldes den *naturlige projektion* eller den *naturlige homomorfi* af V på V/U.

2.2. DIMENSIONSSÆTNINGEN.

Lad $f : U \to V$ være en lineær afbildning, og lad K være afbildningens kerne. Vi viser først:

Originalmængderne til vektorerne i billedrummet $f(U)$ er præcis sideunderrummene til K i U. For enhver vektor $\underline{u} \in U$ gælder $\underline{u} + K = f^{-1}(f(\underline{u}))$.

Bevis. Den første påstand kommer ud på, at to vektorer i U har samme billede ved f, hvis og kun hvis de tilhører samme sideunderrum til K. Af $f(\underline{u}_1-\underline{u}_2) = f(\underline{u}_1+(-\underline{u}_2)) = f(\underline{u}_1) + f(-\underline{u}_2)$ $= f(\underline{u}_1) + (-f(\underline{u}_2)) = f(\underline{u}_1) - f(\underline{u}_2)$ for $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$ følger, at $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$ har samme billede ved f, hvis og kun hvis $\underline{u}_1 - \underline{u}_2$ tilhører K; men dette sidste er ensbetydende med, at $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$ tilhører samme sideunderrum til K, (sml. side 1.6.1). Idet $\underline{u}$ tilhører både $\underline{u} + K$ og $f^{-1}(f(\underline{u}))$, følger sætningens anden påstand af den første. ▯

En oplagt konsekvens af den foregående sætning er følgende:

Afbildningen f er injektiv, hvis og kun hvis kernen K kun indeholder $\underline{o}$.

Vi skal herefter vise den såkaldte *homomorfisætning*:

Afbildningen $\underline{u} + K \mapsto f(\underline{u})$ er en isomorfi af U/K på $f(U)$, afbildningen $\underline{v} \mapsto f^{-1}(\underline{v})$ er den omvendte isomorfi af $f(U)$ på U/K.

Bevis. Af den første af de to foregående sætninger følger, at

$$\underline{u} + K \mapsto \phi(\underline{u}+K) = f(\underline{u})$$

er en veldefineret bijektiv afbildning af $U/_K$ på $f(U)$, og at ϕ's omvendte afbildning er afbildningen $\underline{v} \mapsto f^{-1}(\underline{v})$. Det skal herefter blot vises, at ϕ er lineær. For $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$ har vi

$$\begin{aligned}
\phi((\underline{u}_1+K)+(\underline{u}_2+K)) &= \phi((\underline{u}_1+\underline{u}_2)+K) \\
&= f(\underline{u}_1+\underline{u}_2) \\
&= f(\underline{u}_1) + f(\underline{u}_2) \\
&= \phi(\underline{u}_1+K) + \phi(\underline{u}_2+K),
\end{aligned}$$

og for $\lambda \in L$ og $\underline{u} \in U$ har vi

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda(\underline{u}+K)) &= \phi(\lambda\underline{u}+K) \\
&= f(\lambda\underline{u}) \\
&= \lambda f(\underline{u}) \\
&= \lambda\phi(\underline{u}+K).
\end{aligned}$$

(Sml. i øvrigt side 1.6.2). Hermed er vist, at ϕ er lineær.

Vi kan nu vise *dimensionssætningen*:

Hvis U *har endelig dimension, så gælder* $\dim K + \dim f(U) = \dim U$.

Bevis. Som tidligere vist (side 1.6.3) har vi $\dim K + \dim {}^{U}/_{K} = \dim U$. Men ifølge homomorfisætningen findes der en isomorfi af ${}^{U}/_{K}$ på $f(U)$, og der gælder derfor $\dim {}^{U}/_{K} = \dim f(U)$, (sml. side 2.1.5). ▯

Ved anvendelse af dimensionssætningen skal vi vise:

Når U *har endelig dimension, så er* f *injektiv, hvis og kun hvis* $\dim f(U) = \dim U$.

Bevis. Som vist i det foregående er f injektiv hvis og kun hvis $K = \{\underline{o}\}$, altså $\dim K = 0$. Men dette er ifølge dimensionssætningen ensbetydende med, at $\dim f(U) = \dim U$. (Vi har i øvrigt tidligere bemærket (side 2.1.5), at hvis f er injektiv, så gælder $\dim f(U) = \dim U$, - også når U har uendelig dimension.) ▯

Som et modstykke til den foregående sætning har vi:

Når V *har endelig dimension, så er* f *surjektiv, hvis og kun hvis* $\dim f(U) = \dim V$.

Bevis. Det er klart, at vi har $\dim f(U) = \dim V$, når f er surjektiv, (i øvrigt også for $\dim V = \infty$). Omvendt vides (sml. side 1.4.4), at det eneste underrum af V, som har samme dimension som V, er V selv; af $\dim f(U) = \dim V$ følger derfor, at f er surjektiv. ▯

Af de to sidste sætninger følger umiddelbart:

Når U og V har samme endelige dimension, så er afbildningen f injektiv, hvis og kun hvis den er surjektiv; injektivitet eller surjektivitet af f er således tilstrækkeligt til at sikre, at f er bijektiv, og dermed en isomorfi.

2.3. REGNING MED LINEÆRE AFBILDNINGER.

Lad U og V være vektorrum over samme legeme L. Vi skal da med $\mathrm{L}(U,V)$ betegne mængden af lineære afbildninger af U ind i V. For $f,g \in \mathrm{L}(U,V)$ og $\lambda \in L$ defineres afbildninger $f + g : U \to V$ og $\lambda f : U \to V$ ved

$$\underline{u} \mapsto (f+g)(\underline{u}) = f(\underline{u}) + g(\underline{u}),$$

$$\underline{u} \mapsto (\lambda f)(\underline{u}) = \lambda f(\underline{u}).$$

Det eftervises let, at også $f + g$ og λf er lineære afbildninger, altså elementer af $\mathrm{L}(U,V)$. Det eftervises ligeledes let, at $\mathrm{L}(U,V)$ herved er organiseret som et vektorrum over L. Nulvektoren i dette vektorrum er "nulafbildningen" $\underline{u} \mapsto \underline{o}$, den modsatte $-f$ til f er afbildningen $\underline{u} \mapsto (-f)(\underline{u}) = -f(\underline{u})$.

Som tidligere omtalt, (side 1.1.5), kan L opfattes som et vektorrum over sig selv. Vektorrummet $\mathrm{L}(V,L)$ af alle lineære afbildninger af (V,L) ind i L kaldes det til (V,L) *duale vektorrum*, og betegnes også (V^*,L) eller blot V^*. Afbildningerne i V^* kaldes *linearformer* på V; nulafbildningen, altså nulvektoren i V^*, kaldes *nulformen*.

Lad U,V og W være vektorrum over samme legeme L. Det eftervises let, at er $f : U \to V$ og $g : V \to W$ lineære afbildninger, så er også den sammensatte afbildning $g \circ f : U \to W$ lineær. Endvidere vises let, at der for $f,f_1,f_2 \in \mathrm{L}(U,V)$, $g,g_1,g_2 \in \mathrm{L}(V,W)$ og $\lambda \in L$ gælder

$$(g_1+g_2)\circ f = g_1\circ f + g_2\circ f,$$

$$g\circ(f_1+f_2) = g\circ f_1 + g\circ f_2,$$

$$\lambda(g\circ f) = (\lambda g)\circ f = g\circ(\lambda f).$$

Vi skal sige, at (U,L) er *isomorft med* (V,L), dersom der findes en isomorfi af U på V; vi skriver da $U \simeq V$. Det er klart, at den identiske afbildning af et vektorrum på sig selv er en isomorfi; relationen $\simeq$ er således refleksiv. Vi har tidligere vist, (side 2.1.5), at den omvendte afbildning til en isomorfi igen er en isomorfi; relationen $\simeq$ er således også symmetrisk. (Vi kan herefter tillade os at sige, at to vektorrum er indbyrdes *isomorfe*, dersom det ene er isomorft med det andet). Endelig fremgår af det foregående, at der ved sammensætning af to isomorfier igen fås en isomorfi; relationen $\simeq$ er derfor også transitiv. Ialt er dermed godtgjort, at $\simeq$ er en ækvivalensrelation i klassen af vektorrum over L.

Vi har tidligere vist, (side 2.1.5), at isomorfe vektorrum har samme dimension. Omvendt overbeviser man sig let om, at to vektorrum over samme legeme af samme endelige dimension er isomorfe. Uden bevis anføres, at to uendelig-dimensionale vektorrum over samme legeme ikke nødvendigvis er isomorfe.

Det noteres, at mængden af isomorfier af et givet vektorrum på sig selv er en gruppe med sammensætning som komposition, kaldet vektorrummets *automorfigruppe*.

1. Lad $(V,\mathbb{R})$ betegne vektorrummet af geometriske vektorer i rummet, og lad $(\underline{a},\underline{b})$ være et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra V. Vis, at afbildningen

$$\underline{v} \mapsto \underline{a} \cdot \underline{v}$$

af $(V,\mathbb{R})$ ind i $(\mathbb{R},\mathbb{R})$ er lineær, og at afbildningerne

$$\underline{v} \mapsto \underline{a} \times \underline{v},$$
$$v \mapsto (\underline{a}\cdot\underline{v})\underline{b} + (\underline{b}\cdot\underline{v})\underline{a},$$

af $(V,\mathbb{R})$ ind i $(V,\mathbb{R})$ er lineære. Angiv for hver af afbildningerne billedrum og kerne.

2. Lad $(V,\mathbb{R})$ betegne vektorrummet af geometriske vektorer i en given plan, og lad $(\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ være en basis for V. Ved

$$f_1(\underline{e}_1) = \underline{e}_1, \quad f_1(\underline{e}_2) = -\underline{e}_2,$$
$$f_2(\underline{e}_1) = \underline{e}_2, \quad f_2(\underline{e}_2) = \underline{e}_1 ,$$
$$f_3(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 - \underline{e}_2, \quad f_3(\underline{e}_2) = \underline{e}_2 - \underline{e}_1,$$

fastlægges lineære afbildninger f_1,f_2,f_3 af V ind i V. Konstruer billedet af en vilkårlig vektor $\underline{v} \in V$ ved hver af de tre afbildninger, idet $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$ tegnes som ikke-vinkelrette vektorer af forskellig længde. Bestem endvidere for hver af de tre afbildninger kerne og billedrum, samt mængden af vektorer,som afbildes i sig selv.

3. Lad $(C^0(A),\mathbb{R})$ hhv. $(C^1(A),\mathbb{R})$ betegne vektorrummet af alle kontinuerte hhv. 1 gang kontinuert differentiable reelle funktioner på et interval A i $\mathbb{R}$. Ved til hver funktion $\varphi \in C^1(A)$ at lade svare dens afledede $D\varphi$ fås en afbildning D af $C^1(A)$ ind i $C^0(A)$. Overvej, at afbildningen er lineær. Angiv billedrum og kerne. Bestem for en vilkårlig funktion $\varphi \in C^1(A)$ originalmængden $D^{-1}(D\varphi)$. Find et til kernen komplementært underrum U af $C^1(A)$, og eftervis, at restriktionen af D til U er injektiv og har samme billedrum som D.

4. Lad U_1 og U_2 være komplementære underrum af et vektorrum (U,L). Angiv en naturlig isomorfi af U_1 på $^U/_{U_2}$.

5. Lad $U_1,\ldots,U_n$ være underrum af et vektorrum (U,L) med $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$. Angiv en naturlig isomorfi af U på produktet $U_1 \times \ldots \times U_n$, (sml. 1. øv. 36).

6. Lad f være en lineær afbildning af et (ikke nødvendigvis endelig-dimensionalt) vektorrum (U,L) ind i et vektorrum (V,L), og lad U_1 være et til kernen K komplementært underrum af U. Vis, at restriktionen af f til U_1 er injektiv og har samme billedrum som f.

7. Lad $f : (U,L) \to (V,L)$ være en lineær afbildning med kerne K, og lad π være den naturlige projektion af U på ${}^{U}/_{K}$. Vis, at der findes en og kun een lineær afbildning $\tilde{f}: {}^{U}/_{K} \to V$, således at $f = \tilde{f}\circ\pi$.

8. Lad $f : (U,L) \to (V,L)$ være en lineær afbildning, lad U_1 være et underrum af U, og lad V_1 være et underrum af V med $f(U_1) \subseteq V_1$. Lad π_U og π_V være de naturlige projektioner af U på ${}^{U}/_{U_1}$ hhv. V på ${}^{V}/_{V_1}$. Vis, at der findes en og kun een lineær afbildning $\tilde{f} : {}^{U}/_{U_1} \to {}^{V}/_{V_1}$, således at $\pi_V \circ f = \tilde{f}\circ\pi_U$.

KAPITEL 3. DUALITET.

3.1. VEKTORRUM I DUALITET.

Lad (V,L) og (V',L) være vektorrum over samme legeme. Ved en *bilinearform* på $V \times V'$ forstås en afbildning $B : V \times V' \to L$ med følgende to egenskaber:

(a) For enhver vektor $\underline{v}' \in V'$ er afbildningen $\underline{v} \mapsto B(\underline{v},\underline{v}')$ en linearform på V.

(b) For enhver vektor $\underline{v} \in V$ er afbildningen $\underline{v}' \mapsto B(\underline{v},\underline{v}')$ en linearform på V'.

Det eftervises let, at hvis B er en bilinearform på $V \times V'$, så er linearformen $\underline{v} \mapsto B(\underline{v},\underline{o})$ nulformen på V, og linearformen $\underline{v}' \mapsto B(\underline{o},\underline{v}')$ er nulformen på V'. Modsvarende siges B at være *ikke-udartet*, hvis følgende to betingelser er opfyldt:

(c) For enhver vektor $\underline{v}' \in V' \setminus \{\underline{o}\}$ er linearformen $\underline{v} \mapsto B(\underline{v},\underline{v}')$ forskellig fra nulformen på V.

(d) For enhver vektor $\underline{v} \in V \setminus \{\underline{o}\}$ er linearformen $\underline{v}' \mapsto B(\underline{v},\underline{v}')$ forskellig fra nulformen på V'.

Vektorrummene (V,L) og (V',L) siges at være i *dualitet*, eller at være et *dualt par* af vektorrum, hvis der er givet en ikke-udartet bilinearform B på $V \times V'$. Vi vil da skrive $<\underline{v},\underline{v}'>$ i stedet for $B(\underline{v},\underline{v}')$, og kalde $<\underline{v},\underline{v}'>$ for *produktet* af $\underline{v}$ og $\underline{v}'$.

To vektorrum (V,L) og (V',L) med samme endelige dimension kan altid bringes i dualitet. For dimensionen 0 er dette oplagt. For $\dim V = \dim V' = n \in \mathbb{N}$ vælges baser $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_n)$ for hhv. V og V'. Afbildningen $B : V \times V' \to L$ givet ved

$$B(v_1\underline{e}_1+\ldots+v_n\underline{e}_n, v_1'\underline{f}_1+\ldots+v_n'\underline{f}_n) = v_1v_1'+\ldots+v_nv_n'$$

er da en ikke-udartet bilinearform på $V \times V'$. - Omvendt har vi:

Hvis (V,L) og (V',L) er i dualitet, så gælder $\dim V = \dim V'$.

Bevis. På grund af den fuldstændige symmetri mellem V og V' er det tilstrækkeligt at vise, at hvis V har endelig dimension, så har også V' endelig dimension, og $\dim V' \leq \dim V$. For $\dim V = 0$ er dette klart. Antag derfor, at $\dim V = n \in \mathbb{N}$, og lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en basis for V. Ved

$$(1) \qquad \underline{v}' \mapsto f(\underline{v}') = (\langle\underline{e}_1,\underline{v}'\rangle,\ldots,\langle\underline{e}_n,\underline{v}'\rangle)$$

defineres da en afbildning $f : V' \to L^n$. Ved brug af (b) ses let, at f er lineær. Endvidere er f injektiv. Thi lad $\underline{v}'$ være en vektor i V' med $f(\underline{v}') = (0,\ldots,0)$. Der gælder da $\langle\underline{e}_1,\underline{v}'\rangle = \ldots = \langle\underline{e}_n,\underline{v}'\rangle = 0$, og dermed $\langle\underline{v},\underline{v}'\rangle = 0$, for enhver vektor $\underline{v} \in V$ ifølge (a); men ifølge (c) har vi da $\underline{v}' = \underline{o}$. Kernen for f består altså kun af $\underline{o}$, hvormed er vist, at f er injektiv. Vi har derfor, (sml. side 2.2.3), $\dim V' = \dim f(V') \leq \dim L^n = n = \dim V$, som ønsket. ▯

Lad (V,L) og (V',L) være i dualitet, og antag, at $\dim V = \dim V' = n \in \mathbb{N}$. Et par bestående af en basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ for V og en basis $(\underline{e}'_1,\ldots,\underline{e}'_n)$ for V' siges at være et par af *duale baser*, dersom

$$(2) \qquad \langle \underline{e}_i, \underline{e}'_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,\ldots,n;$$

baserne siges da også at være duale til hinanden. Herom gælder:

Hvis (V,L) og (V',L) er i dualitet, og $\dim V = \dim V' = n \in \mathbb{N}$, *så findes for enhver basis for V hhv. V' netop en hermed dual basis for V' hhv. V.*

Bevis. Det er tilstrækkeligt at vise, at der for enhver basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ for V findes netop een hermed dual basis for V'. Lad $f : V' \to L^n$ være afbildningen defineret ved (1) ovenfor. Som vist er f lineær og injektiv. Idet $\dim V' = \dim L^n$, er f også surjektiv, (sml. side 2.2.3), og dermed bijektiv. Der findes følgelig for ethvert sæt $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in L^n$ en og kun een vektor $\underline{v}' \in V'$ med $\langle \underline{e}_i, \underline{v}' \rangle = \alpha_i$, $i = 1,\ldots,n$. Specielt findes entydigt bestemte vektorer $\underline{e}'_1,\ldots,\underline{e}'_n$ i V', således at (2) er opfyldt. Det skal vises, at sættet $(\underline{e}'_n,\ldots,\underline{e}'_n)$ er en basis for V'. Da antallet af vektorer i sættet stemmer overens med dimensionen, er det tilstrækkeligt at vise, at sættet er lineært uafhængigt. Lad derfor $\lambda_1\underline{e}'_1+\ldots+\lambda_n\underline{e}'_n = \underline{o}$ være en lineær relation mellem vektorerne i sættet; for $i = 1,\ldots,n$ har vi da $0 = \langle \underline{e}_i, \underline{o} \rangle = \langle \underline{e}_i, \lambda_1\underline{e}'_1+\ldots+\lambda_n\underline{e}'_n \rangle = \lambda_1\langle \underline{e}_i, \underline{e}'_1 \rangle+\ldots+\lambda_n\langle \underline{e}_i, \underline{e}'_n \rangle = \lambda_i$, hvoraf det ønskede fremgår. ▯

Det bemærkes, at er $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\underline{e}_1',\ldots,\underline{e}_n')$ duale baser for vektorrum (V,L) og (V',L) i dualitet, og er $\underline{v} = v_1\underline{e}_1+\ldots+v_n\underline{e}_n$ og $\underline{v}' = v_1'\underline{e}_1'+\ldots+v_n'\underline{e}_n'$ vektorer i hhv. V og V', så gælder

$$<\underline{v},\underline{v}'> = v_1v_1'+\ldots+v_nv_n'.$$

Specielt noteres, at

$$<\underline{v},\underline{e}_i'> = v_i, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

$$<\underline{e}_i,\underline{v}'> = v_i', \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Lad (V,L) og (V',L) være i dualitet. Hvis $\underline{v} \in V$ og $\underline{v}' \in V'$ er vektorer med $<\underline{v},\underline{v}'> = 0$, siges $\underline{v}$ at *annihilere* $\underline{v}'$, og $\underline{v}'$ siges at annihilere $\underline{v}$. Nulvektoren i V hhv. V' annihilerer samtlige vektorer i V' hhv. V, og er den eneste vektor med denne egenskab. Mængden af vektorer i V' hhv. V, som annihilerer samtlige vektorer i en ikke-tom delmængde M af V hhv. V', kaldes M's *annihilator*, og betegnes M°. Annihilatoren til M° betegnes $M^{\circ\circ}$, og annihilatoren til $M^{\circ\circ}$ betegnes $M^{\circ\circ\circ}$.

Det eftervises meget let, at for en ikke-tom delmængde M af V eller V' er M° et underrum af V' hhv. V. Endvidere vises let, at

$$M \subseteq M^{\circ\circ},$$

og at

$$M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_1^{\circ} \supseteq M_2^{\circ}.$$

Vi skal derefter vise:

Hvis (V, L) og (V', L) er endelig-dimensionale vektorrum i dualitet, så gælder for ethvert underrum W af V eller V':

(3) $\dim W + \dim W^{\circ} = \dim V = \dim V'$.

(4) $W = W^{\circ\circ}$.

Bevis. For at vise (3) er det tilstrækkeligt at vise, at $\dim W + \dim W^{\circ} = \dim V$ for ethvert underrum W af V. For $\dim W = 0$ har vi $W^{\circ} = V'$, og påstanden er oplagt. For $\dim W = \dim V > 0$ har vi $W = V$, og dermed $W^{\circ} = \{\underline{o}\}$, hvorefter påstanden er oplagt. For $0 < \dim W = r < \dim V$ vælges en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r)$ for W, som derefter suppleres til en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ for V. Lad $(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$ være den til basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ duale basis for V'. Det er da klart, at vektorerne $\underline{e}'_{r+1}, \dots, \underline{e}'_n$ tilhører W°. Er endvidere $\underline{v}' = v'_1\underline{e}'_1 + \dots + v'_n\underline{e}'_n$ en vektor i W°, har vi $<\underline{e}_i, \underline{v}'> = 0$ for $i = 1, \dots, r$, og dermed $v'_i = 0$ for $i = 1, \dots, r$, (sml. side 3.1.4). Heraf følger, at $\underline{v}'$ er en linearkombination af vektorerne $\underline{e}'_{r+1}, \dots, \underline{e}'_n$. Sættet $(\underline{e}'_{r+1}, \dots, \underline{e}'_n)$ er altså en basis for W°, og vi har dermed $\dim W + \dim W^{\circ} = r + (n-r) = n = \dim V$, som ønsket. – For at vise (4) noteres, at da der gælder $W \subseteq W^{\circ\circ}$, er det tilstrækkeligt at vise, at $\dim W = \dim W^{\circ\circ}$. Dette fås ved at anvende (3), dels på W, og dels på W°. ▯

Af sætningens anden påstand fremgår, at hvis M er en ikke-tom delmængde af V eller V', hvor (V,L) og (V',L) er endelig-dimensionale vektorrum i dualitet så gælder

$$M^{\circ} = M^{\circ\circ\circ}.$$

Med henblik på en senere anvendelse skal vi endelig vise:

Lad (V,L) og (V',L) være endelig-dimensionale vektorrum i dualitet, lad U og U' være underrum af hhv. V og V', og antag, at U og U' er i dualitet ved restriktionen af den på $V \times V'$ givne bilinearform til $U \times U'$. Da gælder $U \oplus (U')^{\circ} = V$.

Bevis. Da U og U' er i dualitet, er $\underline{o}$ den eneste vektor i U, som annihilerer samtlige vektorer i U'. Heraf følger, at $U \cap (U')^{\circ} = \{\underline{o}\}$, hvilket viser, at U og $(U')^{\circ}$ danner direkte sum. Idet vektorrum i dualitet har samme dimension (sml. side 3.1.2), har vi $\dim U = \dim U'$. Ved brug af (3) får vi herefter $\dim(U \oplus (U')^{\circ}) = \dim U + \dim(U')^{\circ} = \dim U' + \dim(U')^{\circ} = \dim V$, hvoraf fremgår, at $U \oplus (U')^{\circ} = V$. ▯

3.2. DUALT VEKTORRUM.

Ved det til et vekotrrum (V,L) duale vektorrum (V^*,L) forstås som bekendt vektorrummet $(\mathrm{L}(V,L),L)$ af alle linearformer på V, (sml. side 2.3.1). Vi skal vise:

Ethvert endelig-dimensionalt vektorrum (V,L) er i dualitet med sit duale vektorrum (V^*,L) ved afbildningen $(\underline{v},\xi) \mapsto \xi(\underline{v})$, $\underline{v} \in V$, $\xi \in V^*$.

Bevis. At afbildningen for fastholdt ξ er lineær i $\underline{v}$ følger af, at ξ er en lineær afbildning. Af afbildningen for fastholdt $\underline{v}$ er lineær i ξ følger af definitionen af vektorrumskompositionerne i V^*. At der til enhver fra nulformen forskellig linearform ξ på V findes en vektor $\underline{v} \in V$ med $\xi(\underline{v}) \neq 0$ er trivielt. Endelig, at der for enhver vektor $\underline{v} \in V\setminus\{\underline{o}\}$ findes en linearform ξ med $\xi(\underline{v}) \neq 0$, indses på følgende måde. For $\dim V = 0$ er der intet at vise. For $\dim V > 0$ vælges en basis for V af formen $(\underline{v},\underline{e}_2,\ldots,\underline{e}_n)$; dette er muligt, fordi $\underline{v} \neq \underline{o}$. Der findes da en (og kun een) linearform ξ på V med $\xi(\underline{v}) = 1$ og $\xi(\underline{e}_2) = \ldots = \xi(\underline{e}_n) = 0$, (sml. side 2.1.2). Denne linearform ξ har den ønskede egenskab. $\square$

Uden bevis anføges, at den foregående sætning også gælder for uendelig-dimensionale vektorrum. Derimod gælder de følgende sætninger kun for vektorrum af endelig dimension.

Den følgende sætning viser, at hvis (V,L) er et endelig-dimensionalt vektorrum, så er det duale vektorrum (V^*,L)

"i det væsentlige" det eneste vektorrum som er i dualitet med (V,L), i den forstand, at ethvert vektorrum (V',L), som er i dualitet med (V,L), på entydig måde kan "identificeres" med (V^*,L). Specielt noteres, at da (V,L) er i dualitet med (V^*,L), kan (V,L) identificeres med det til (V^*,L) duale vektorrum (V^{**},L).

Lad (V,L) være et endelig-dimensionalt vektorrum. Hvis (V',L) er et vektorrum i dualitet med (V,L), så findes en og kun een afbildning $\phi : V' \to V^*$ med

(1) $$\Big(\phi(\underline{v}')\Big)(\underline{v}) = \langle\underline{v},\underline{v}'\rangle, \qquad \underline{v} \in V,\ \underline{v}' \in V',$$

og denne afbildning ϕ er en isomorfi af V' på V^*.

Afbildningen $\phi : V' \to V^*$ kaldes den *naturlige isomorfi* af V' på V^*.

Bevis. Hvis ϕ_1 og ϕ_2 er afbildninger af V' ind i V^* med egenskaben (1), så er $\phi_1(\underline{v}')$ og $\phi_2(\underline{v}')$ for hver vektor $\underline{v}' \in V'$ den samme linearform på V, og ϕ_1 og ϕ_2 dermed den samme afbildning. Hermed er entydigheden vist. Lad $\underline{v}'$ være en vektor i V'. Afbildningen $\underline{v} \mapsto \langle\underline{v},\underline{v}'\rangle$ er da en linearform på V, altså et element i V^*. Til hver vektor $\underline{v}' \in V'$ er således knyttet en linearform $\phi(\underline{v}')$ på V, bestemt ved $\Big(\phi(\underline{v}')\Big)(\underline{v}) = \langle\underline{v},\underline{v}'\rangle$, $\underline{v} \in V$. Hermed er påvist eksistensen af en afbildning $\phi : V' \to V^*$ med egenskaben (1). Det skal endelig vises, at denne afbildning er en isomorfi. For $\underline{v}_1',\underline{v}_2' \in V'$ og $\lambda_1,\lambda_2 \in L$ har vi for alle vektorer $\underline{v} \in V$

$$\begin{aligned}\Big(\phi(\lambda_1\underline{v}_1' + \lambda_2\underline{v}_2')\Big)(\underline{v}) &= \langle\underline{v},\lambda_1\underline{v}_1' + \lambda_2\underline{v}_2'\rangle \\ &= \lambda_1\langle\underline{v},\underline{v}_1'\rangle + \lambda_2\langle\underline{v},\underline{v}_2'\rangle \\ &= \lambda_1\Big[\Big(\phi(\underline{v}_1')\Big)(\underline{v})\Big] + \lambda_2\Big[\Big(\phi(\underline{v}_2')\Big)(\underline{v})\Big] \\ &= \Big(\lambda_1\phi(\underline{v}_1')\Big)(\underline{v}) + \Big(\lambda_2\phi(\underline{v}_2')\Big)(\underline{v}) \\ &= \Big(\lambda_1\phi(\underline{v}_1') + \lambda_2\phi(\underline{v}_2')\Big)(\underline{v}),\end{aligned}$$

hvor gyldigheden af de to sidste lighedstegn følger af definitionen af vektorrumskompositionerne i V^*. Dette viser, at

$$\phi(\lambda_1\underline{v}_1' + \lambda_2\underline{v}_2') = \lambda_1\phi(\underline{v}_1') + \lambda_2\phi(\underline{v}_2'),$$

altså at ϕ er lineær. Af $\underline{v}' \in V'\setminus\{\underline{o}\}$ følger, at linearformen $\underline{v} \mapsto \langle\underline{v},\underline{v}'\rangle$ er forskellig fra nulformen; nulvektoren i V' er altså den eneste vektor, som ved ϕ afbildes i nulvektoren i V^*. Heraf fremgår, at ϕ har kernen $\{\underline{o}\}$, og følgelig er injektiv. Men da V' og V^* begge er i dualitet med V, har de samme dimension. Afbildningen ϕ er derfor også surjektiv, og dermed en isomorfi. ▯

Lad (V,L) være et endelig-dimensionalt vektorrum. Hvis (V',L) er et vektorrum i dualitet med (V,L), så findes en og kun een afbildning $\psi : V^* \to V'$ med

(2) $$\langle\underline{v},\psi(\xi)\rangle = \xi(\underline{v}), \quad \underline{v} \in V, \quad \xi \in V^*,$$

og denne afbildning ψ er en isomorfi af V^* på V'.

Afbildningen $\psi : V^* \to V'$ kaldes den *naturlige isomorfi* af V^* på V'.

Bevis. Lad $\psi : V^* \to V'$ være en afbildning med egenskaben (2), og lad $\phi : V' \to V^*$ være den naturlige isomorfi af V' på V^*. For enhver vektor $\underline{v} \in V$ og enhver linearform $\xi \in V^*$ gælder da

$$\xi(\underline{v}) = <\underline{v},\psi(\xi)> = \left[\phi\Big(\psi(\xi)\Big)\right](\underline{v}).$$

Heraf fremgår, at $\phi\circ\psi$ er den identiske afbildning af V^*, hvoraf videre sluttes, at ψ er den inverse til ϕ. Hermed er entydigheden vist. Omvendt er ϕ^{-1} en afbildning med de ønskede egenskaber. ▯

Af beviset for den foregående sætning fremgår:

Lad (V,L) være et endelig-dimensionalt vektorrum, og lad (V',L) være et vektorrum i dualitet med (V,L). Da er de naturlige isomorfier $\phi : V' \to V^*$ og $\psi : V^* \to V'$ hinandens inverse.

3.3. DUALE AFBILDNINGER.

Lad U, U', V og V' være endelig-dimensionale vektorrum over samme legeme L, og antag, at såvel U og U' som V og V' er i dualitet.

For enhver lineær afbildning $f : U \to V$ findes en og kun een afbildning $f' : V' \to U'$ med

$$(1) \qquad \langle f(\underline{u}), \underline{v}' \rangle = \langle \underline{u}, f'(\underline{v}') \rangle, \quad \underline{u} \in U, \ \underline{v}' \in V',$$

og denne afbildning f' er lineær.

Afbildningen $f' : V' \to U'$ kaldes den til afbildningen $f : U \to V$ *duale afbildning* m.h.t. de duale par U, U' og V, V'.

Bevis. Hvis f_1' og f_2' er afbildninger af V' ind i U' med egenskaben (1), så vil der for enhver vektor $\underline{v}' \in V'$ gælde $\langle \underline{u}, f_1'(\underline{v}') \rangle = \langle \underline{u}, f_2'(v') \rangle$, altså $\langle \underline{u}, f_1'(\underline{v}') - f_2'(\underline{v}') \rangle = 0$, for alle vektorer $\underline{u} \in U$. Heraf følger, at $f_1'(\underline{v}') - f_2'(\underline{v}') = 0$ for alle $\underline{v}' \in V'$, altså at $f_1' = f_2'$. Hermed er entydigheden vist. Lad $\underline{v}'$ være en vektor i V'. Det indses let, at afbildningen $\underline{u} \mapsto \langle f(\underline{u}), \underline{v}' \rangle$ er en linearform på U, altså et element i U^*. Til $\underline{v}' \in V'$ er således knyttet en linearform $\xi_{\underline{v}'} \in U^*$ med $\langle f(\underline{u}), \underline{v}' \rangle = \xi_{\underline{v}'}(\underline{u})$ for alle $\underline{u} \in U$. Sættes $f'(\underline{v}') = \psi(\xi_{\underline{v}'})$, hvor ψ er den naturlige isomorfi af U^* på U', fås for alle $\underline{u} \in U$

$$\begin{aligned} \langle f(\underline{u}), \underline{v}' \rangle &= \xi_{\underline{v}'}(\underline{u}) \\ &= \langle \underline{u}, \psi(\xi_{\underline{v}'}) \rangle \\ &= \langle \underline{u}, f'(\underline{v}') \rangle, \end{aligned}$$

hvormed eksistensen af f' er vist. Det skal herefter vises, at f' er lineær. Lad $\underline{v}_1', \underline{v}_2' \in V'$ og $\lambda_1, \lambda_2 \in L$. For alle vektorer $\underline{u} \in U$ har vi da

$$\begin{aligned}
<\underline{u}, f'(\lambda_1\underline{v}_1'+\lambda_2\underline{v}_2')> &= <f(\underline{u}), \lambda_1\underline{v}_1'+\lambda_2\underline{v}_2'> \\
&= \lambda_1<f(\underline{u}), \underline{v}_1'> + \lambda_2<f(\underline{u}), \underline{v}_2'> \\
&= \lambda_1<\underline{u}, f'(\underline{v}_1')> + \lambda_2<\underline{u}, f'(\underline{v}_2')> \\
&= <\underline{u}, \lambda_1 f'(\underline{v}_1')+\lambda_2 f'(\underline{v}_2')>.
\end{aligned}$$

Heraf følger, at $f'(\lambda_1\underline{v}_1'+\lambda_2\underline{v}_2') - \left(\lambda_1 f'(\underline{v}_1') + \lambda_2 f'(\underline{v}_2')\right) = \underline{o}$, altså at $f'(\lambda_1\underline{v}_1'+\lambda_2\underline{v}_2') = \lambda_1 f'(\underline{v}_1') + \lambda_2 f'(\underline{v}_2')$. ▯

Er g en lineær afbildning af V' ind i U', kan på tilsvarende måde tales om den duale afbildning g' af U ind i V. Den er bestemt ved

(2) $$<\underline{u}, g(\underline{v}')> = <g'(\underline{u}), \underline{v}'>, \quad \underline{v}' \in V', \ \underline{u} \in U.$$

Lad f være en lineær afbildning af U ind i V, og lad f'' betegne den duale afbildning til f's duale afbildning f'. Afbildningen f'' er da ifølge (2) bestemt ved

$$<\underline{u}, f'(\underline{v}')> = <f''(\underline{u}), \underline{v}'>, \quad \underline{v}' \in V', \ \underline{u} \in U.$$

Sammenlignes dette med (1), ses at

$$f'' = f.$$

Det har herefter god mening at tale om f og f' som et *par af duale afbildninger*.

I den følgende sætning opsummeres egenskaber ved den duale til en lineær afbildning. Som ovenfor forudsættes, at U,U',V og V' er endelig-dimensionale vektorrum over samme legeme, og at både U,U' og V,V' er duale par.

Lad $f : U \to V$ være en lineær afbildning, og lad $f' : V' \to U'$ være den duale afbildning. Da gælder:

(3) $K_{f'} = f(U)^{\circ}$.

(4) $K_f = f'(V')^{\circ}$.

(5) *f' er injektiv hhv. surjektiv, hvis og kun hvis f er surjektiv hhv. injektiv.*

(6) *f' har samme rang som f.*

For $U = V$ og $U' = V'$ har vi for ethvert underrum U_1 af U:

(7) $f(U_1) \subseteq U_1$ *implicerer* $f'(U_1^{\circ}) \subseteq U_1^{\circ}$.

Bevis. Ifølge (1) er $\underline{v}' \in f(U)^{\circ}$ ensbetydende med $f'(\underline{v}') \in U^{\circ}$, altså med $f'(\underline{v}') = \underline{o}$. Heraf fremgår (3). Idet $f'' = f$, fås (4) ved anvendelse af (3) på f'. Påstanden (5) følger umiddelbart af (3) og (4). For at vise (6) noteres, at $\dim K_f + \dim K_f^{\circ} = \dim U$. Sammenholdes dette med den velkendte formel $\dim K_f + \dim f(U) = \dim U$, fås $\dim K_f^{\circ} = \dim f(U)$. Ifølge (4) har vi imidlertid $K_f^{\circ} = f'(V')^{\circ\circ} = f'(V')$, og dermed $\dim f'(V') = \dim f(U)$. Antag endelig, at $f(U_1) \subseteq U_1$, og lad $\underline{u}' \in U_1^{\circ}$. For alle $\underline{u} \in U_1$ har vi da $\langle f(\underline{u}),\underline{u}'\rangle = 0$, altså $\langle \underline{u},f'(\underline{u}')\rangle = 0$, hvormed $f'(\underline{u}') \in U_1^{\circ}$. □

Vi skal til sidst i kort form opsummere "regler" for dannelse af duale afbildninger. Det overlades til læseren at præcisere påstandene og at udføre beviserne.

$(f+g)' = f' + g' \qquad f,g \in L(U,V)$

$(\lambda f)' = \lambda f' \qquad f \in L(U,V),\ \lambda \in L$

$(h \circ f)' = f' \circ h' \qquad f \in L(U,V),\ h \in L(V,W)$

$(f^n)' = (f')^n \qquad f \in L(U,U) \quad n \in \mathbb{N}$

$(Id_U)' = Id_{U'}$

$(f^{-1})' = (f')^{-1} \qquad f \in L(U,V)$

Den duale til nulafbildningen $o : U \to V$ er nulafbildningen $o : V' \to U'$.

1. Vis, at vektorrummet $(V,\mathbb{R})$ af geometriske vektorer i rummet er i dualitet med sig selv ved afbildningen $(\underline{u},\underline{v}) \mapsto \langle\underline{u},\underline{v}\rangle = \underline{u}\cdot\underline{v}$, hvor $\underline{u}\cdot\underline{v}$ betegner det skalære produkt af $\underline{u}$ og $\underline{v}$. Undersøg hvilke baser, der er duale til sig selv. Beskriv M° og $M^{\circ\circ}$, idet M er en vilkårlig ikke-tom delmængde af V. Gør rede for, at der for enhver linearform ξ på V findes en og kun een vektor $\underline{u} \in V$, således at der for enhver vektor $\underline{v} \in V$ gælder $\xi(\underline{v}) = \underline{v}\cdot\underline{u}$. Lad $\underline{a}$ være en vilkårlig vektor i V, og lad f være den ved $\underline{u} \mapsto \underline{a}\times\underline{u}$ definerede lineære afbildning af V ind i V. Bestem den til f duale afbildning f' (m.h.t. de duale par V,V og V,V).

2. Lad (U,L) og (V,L) være endelig-dimensionale vektorrum, og lad $B : U\times V \to L$ være en bilinearform. Sæt

$$U_1 = \{\, \underline{u} \in U \mid \forall\, \underline{v} \in V : B(\underline{u},\underline{v}) = 0 \,\},$$

$$V_1 = \{\, \underline{v} \in V \mid \forall\, \underline{u} \in U : B(\underline{u},\underline{v}) = 0 \,\}.$$

Overvej, at U_1 og V_1 er underrum af hhv. U og V. Vis, at der ved $(\underline{u}+U_1,\underline{v}+V_1) \mapsto \tilde{B}(\underline{u}+U_1,\underline{v}+V_1) = B(\underline{u},\underline{v})$ defineres en afbildning $\tilde{B} : {}^{U}/_{U_1} \times {}^{V}/_{V_1} \to L$, og at denne afbildning er en ikke-udartet bilinearform. Vis, at $\dim U - \dim U_1 = \dim V - \dim V_1$.

3. Lad (V,L) og (V',L) være endelig-dimensionale vektorrum i dualitet. Lad videre V_1 og V_1' være underrum af V hhv. V', således at V_1 og V_1' er i dualitet ved restriktionen af den givne bilinearform til $V_1 \times V_1'$. Vis, at $V_1 \oplus V_1'^{\circ} = V$.

4. Lad (U,L), (U',L) og (V,L), (V',L) være par af endelig-dimensionale vektorrum i dualitet. Angiv en naturlig isomorfi af $(\mathrm{L}(U,V),L)$ på $(\mathrm{L}(V',U'),L)$.

5. Lad (V,L) og (V',L) være endelig-dimensionale vektorrum i dualitet, og lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning. Vis, at hvis f er idempotent, d.v.s. $f^2 = f$, så er også den duale afbildning $f' : V' \to V'$ idempotent. Vis, at i så fald er såvel $f(V)$ og $f'(V')$ som K_f og $K_{f'}$ i dualitet ved restriktionen af den givne bilinearform.

KAPITEL 4. MATRICER.

af n elementer fra matricen bestående af et element fra hver søjle, således at også hver række er repræsenteret en gang.

Man kan naturligt opfatte "determinant" som en afbildning af $M_{n,n}(L)$ ind i L, nemlig afbildningen $\underline{\underline{A}} \mapsto \det\underline{\underline{A}}$. Determinanten af $\underline{\underline{A}}$ bliver herved billedet af $\underline{\underline{A}}$ ved afbildningen "determinant". Alligevel vil vi tillade os at kalde determinanten af en matrix for "en determinant".

Man har ofte anledning til at betragte *funktionsmatricer*, d.v.s. matricer, hvis elementer er reelle eller komplekse funktioner definerede på en mængde M. Det overlades til læseren at overveje i hvilken udstrækning det foregående finder anvendelse på sådanne matricer. Dog noteres, at man på oplagt måde kan definere determinanten af en funktionsmatrix; determinanten bliver igen en reel eller kompleks funktion med samme definitionsmængde M som funktionerne i matricen.

Man har også anledning til at betragte *vektormatricer*, d.v.s. matricer, hvis elementer er vektorer fra et vektorrum (V,L). Også her overlades til læseren at overveje i hvilken udstrækning det foregående finder anvendelse. Dog bemærkes, at der ikke kan tales om produktet af to vektormatricer. Derimod kan produktet af en vektormatrix og en talmatrix defineres på oplagt måde (når de nødvendige betingelser vedrørende række- og søjleantal er opfyldt); produktet bliver igen en vektormatrix.

En regulær kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$ med elementer fra $\mathbb{C}$ siges at være *unitær*, dersom $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}^{-1}$. Det vises let, at mængden af unitære $(n\times n)$-matricer en en undergruppe i $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Gruppen kaldes den *unitære gruppe* af grad n (over $\mathbb{C}$), og betegnes $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$.

Ved *søjlerangen* $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}$ af en $(m\times n)$-matrix $\underline{\underline{A}}$ med elementer fra L forstås rangen af sættet af søjler, idet søjlerne opfattes som vektorer i vektorrummet $(\mathrm{M}_{m,1}(L),L)$. Tilsvarende defineres *rækkerangen* af $\underline{\underline{A}}$ som rangen af sættet af rækker, idet rækkerne opfattes som vektorer i vektorrummet $(\mathrm{M}_{1,n}(L),L)$. Det vil senere blive vist, at søjlerangen og rækkerangen faktisk stemmer overens, hvorefter vi simpelthen kan tale om *rangen* af $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}$ af $\underline{\underline{A}}$; indtil da må vi forbeholde betegnelsen $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}$ for søjlerangen.

Ved *determinanten* af en $(n\times n)$-matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$ forstås tallet

$$\det\underline{\underline{A}} = \sum_{p\in S_n} \mathrm{sign}p\cdot a_{p(1)1}\cdots a_{p(n)n}.$$

For determinanten af $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$ bruges også betegnelsen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Det fremgår et definitionen, at $\det\underline{\underline{A}}$ er en sum af $n!$ led. Når bortses fra fortegnet, er de $n!$ led netop samtlige produkter nale $(n\times n)$-matricer en en undergruppe i $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Gruppen kaldes den *ortogonale gruppe* af grad n (over $\mathbb{R}$), og betegnes $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Ved den (kompleks) *konjugerede* af en $(m\times n)$-matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ forstås matricen $\overline{\underline{\underline{A}}} = (\overline{a}_{ij})_{m,n}$, altså matricen, som fremgår af $\underline{\underline{A}}$ ved konjugering af alle elementerne. For en matrix $\underline{\underline{A}}$ med reelle elementer gælder $\underline{\underline{A}} = \overline{\underline{\underline{A}}}$. Det verificeres let, at der gælder

$$(\overline{\overline{\underline{\underline{A}}}}) = \underline{\underline{A}}, \quad (\overline{\lambda\underline{\underline{A}}}) = \overline{\lambda}\,\overline{\underline{\underline{A}}}, \quad (\overline{\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}}) = \overline{\underline{\underline{A}}} + \overline{\underline{\underline{B}}}, \quad (\overline{\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}}) = \overline{\underline{\underline{A}}}\,\overline{\underline{\underline{B}}}$$

samt følgende: Er $\underline{\underline{A}}$ en regulær kvadratisk matrix, så er også $\overline{\underline{\underline{A}}}$ regulær, og $(\overline{\underline{\underline{A}}})^{-1} = \overline{\underline{\underline{A}}^{-1}}$.

Ved den *adjungerede* af en $(m\times n)$-matrix $\underline{\underline{A}}$ forstås matricen $\underline{\underline{A}}^* = \overline{\underline{\underline{A}}}'$ $(= \overline{\underline{\underline{A}}'})$. For en matrix $\underline{\underline{A}}$ med reelle elementer gælder $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}'$. Det verificeres let, at der gælder

$$(\underline{\underline{A}}^*)^* = \underline{\underline{A}}, \quad (\lambda\underline{\underline{A}})^* = \overline{\lambda}\,\underline{\underline{A}}^*, \quad (\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})^* = \underline{\underline{A}}^* + \underline{\underline{B}}^*, \quad (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^* = \underline{\underline{B}}^*\underline{\underline{A}}^*,$$

samt følgende: Er $\underline{\underline{A}}$ en regulær kvadratisk matrix, så er også $\underline{\underline{A}}^*$ regulær, og $(\underline{\underline{A}}^*)^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^*$.

En kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$ siges at være *Hermite'sk* (eller Hermite'sk symmetrisk), dersom $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}$, og *anti-Hermite'sk* dersom $\underline{\underline{A}}^* = -\underline{\underline{A}}$. Bemærk, at diagonalelementerne i en Hermite'sk matrix alle er reelle, og at diagonalelementerne i en anti-Hermite'sk matrix alle er rent imaginære.

Ved den *transponerede* af en $(m\times n)$-matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ forstås den $(n\times m)$-matrix $\underline{\underline{A}}'$, hvis element i k'te række og l'te søjle er a_{lk}. Sættes $\underline{\underline{A}}' = (a'_{kl})_{n,m}$, har vi altså $a'_{kl} = a_{lk}$. ("Rækkerne hhv. søjlerne i $\underline{\underline{A}}'$ er søjlerne hhv. rækkerne i $\underline{\underline{A}}$".) Den transponerede af en række - hhv. søjlematrix er en søjle - hhv. rækkematrix. Det verificeres let, at der gælder

$$(\underline{\underline{A}}')' = \underline{\underline{A}}, \quad (\lambda\underline{\underline{A}})' = \lambda\underline{\underline{A}}', \quad (\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{A}}' + \underline{\underline{B}}', \quad (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{B}}'\underline{\underline{A}}'.$$

For en regulær kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$ har vi $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$. Anvendes det sidste af de ovenstående resultater herpå, fås $(\underline{\underline{A}}^{-1})'\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{A}}'(\underline{\underline{A}}^{-1})' = \underline{\underline{E}}'$. Idet $\underline{\underline{E}}' = \underline{\underline{E}}$, har vi dermed: Er $\underline{\underline{A}}$ en regulær kvadratisk matrix, så er også den transponerede matrix $\underline{\underline{A}}'$ regulær, og $(\underline{\underline{A}}')^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})'$.

En kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$ siges at være *symmetrisk* hhv. *antisymmetrisk* (eller skævsymmetrisk), dersom $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{A}}$ hhv. $\underline{\underline{A}}' = -\underline{\underline{A}}$. Bemærk, at diagonalelementerne i en antisymmetrisk matrix alle er 0.

En regulær kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$ med elementer fra $\mathbb{R}$ siges at være *ortogonal*, dersom $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{A}}^{-1}$. Det er klart, at alle enhedsmatricer er ortogonale. Er $\underline{\underline{A}}$ ortogonal, så har vi $(\underline{\underline{A}}^{-1})' = (\underline{\underline{A}}')^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1}$, hvilket viser, at også $\underline{\underline{A}}^{-1}$ er ortogonal. Og er $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ ortogonale $(n\times n)$-matricer, så har vi $(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{B}}'\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1} = (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^{-1}$, hvilket viser, at også $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$ er ortogonal. Ialt er hermed godtgjort, at mængden af ortogo-

Produkter af flere end to matricer kan altså skrives uden parenteser.

Det ses let, at når $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ kan dannes, så gælder $(\lambda\underline{\underline{A}})\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}(\lambda\underline{\underline{B}}) = \lambda(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})$ for $\lambda \in L$.

Matrixmultiplikationen er *distributiv* m.h.t. additionen i den forstand, at når $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ er en $(m\times n)$-matrix, og $\underline{\underline{B}} = (b_{jk})_{n,p}$ og $\underline{\underline{C}} = (c_{jk})_{n,p}$ er $(n\times p)$-matricer, så kan $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}})$ og $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}$ dannes, og der gælder $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}$.

Dette følger af, at $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk}) = \sum_{j=1}^{j} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}$.

Tilsvarende ses, at der gælder $(\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}})\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}$, når $\underline{\underline{D}}$ er en $(p\times q)$-matrix.

Af det foregående fremgår, at matrixaddition og matrixmultiplikation er kompositioner i $\mathsf{M}_{n,n}(L)$, og at $\mathsf{M}_{n,n}(L)$ herved er organiseret som en (for $n > 1$ ikke-kommutativ) ring. Det ses let at $\underline{\underline{E}}_{n,n}$ er et et-element i ringen. Ringen kaldes *matrixringen* af grad n over L.

En $(n\times n)$-matrix $\underline{\underline{A}}$ siges at være *regulær* eller *invertibel*, dersom den har en invers matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ m.h.t. multiplikationen i $\mathsf{M}_{n,n}(L)$, altså dersom der findes en $(n\times n)$-matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ med $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$; den inverse er da entydigt bestemt. Af et almindeligt resultat fremgår, at mængden af regulære $(n\times n)$-matricer med elementer fra L udgør en gruppe med matrixmultiplikation som komposition. Gruppen kaldes den *generelle lineære gruppe* af grad n over L, og betegnes $\mathrm{GL}(n,L)$.

$$\underline{\underline{AB}} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right)_{i=1,\ldots,m;k=1,\ldots,p}.$$

For andre par af matricer defineres ikke nogen produktmatrix.

Matrixmultiplikationen er ikke kommutativ. Kun når $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er kvadratiske matricer med samme rækkeantal vil der kunne gælde $\underline{\underline{AB}} = \underline{\underline{BA}}$, - men i almindelighed gælder $\underline{\underline{AB}} \neq \underline{\underline{BA}}$.

Matrixmultiplikationen er *associativ* i den forstand, at når $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ er en $(m\times n)$-matrix, $\underline{\underline{B}} = (b_{jk})_{n,p}$ en $(n\times p)$-matrix og $\underline{\underline{C}} = (c_{kl})_{p,q}$ en $(p\times q)$-matrix, så kan $(\underline{\underline{AB}})\underline{\underline{C}}$ og $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{BC}})$ dannes, og der gælder $(\underline{\underline{AB}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{BC}})$. Idet elementet i i'te række og l'te søjle af $(\underline{\underline{AB}})\underline{\underline{C}}$ er $\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right)c_{kl}$ og elementet i i'te række og l'te søjle af $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{BC}})$ er $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}c_{kl}\right)$, følger påstanden af følgende udregning:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right)c_{kl} &= \sum_{k=1}^{p}\left(a_{i1}b_{1k}+\ldots+a_{in}b_{nk}\right)c_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\left(a_{i1}b_{1k}c_{kl}+\ldots+a_{in}b_{nk}c_{kl}\right) \\
&= (a_{i1}b_{11}c_{1l}+\ldots+a_{in}b_{n1}c_{1l})+\ldots \\
&\qquad \ldots+(a_{i1}b_{1p}c_{pl}+\ldots+a_{in}b_{np}c_{pl}) \\
&= a_{i1}(b_{11}c_{1l}+\ldots+b_{1p}c_{pl})+\ldots \\
&\qquad \ldots+a_{in}(b_{n1}c_{1l}+\ldots+b_{np}c_{pl}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}\right).
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{E}}_{m,n}^{(r)} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{E}}_{r,r} & \underline{\underline{0}}_{r,n-r} \\ \underline{\underline{0}}_{m-r,r} & \underline{\underline{0}}_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

hvor dog nogle af blokkene falder bort for $r = 0$, $r = m$, eller $r = n$.

Mængden af $(m \times n)$-matricer med elementer fra L betegnes $\mathsf{M}_{m,n}(L)$. Er $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ og $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})_{m,n}$ to matricer fra $\mathsf{M}_{m,n}(L)$, defineres *summen* $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ af $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ ved

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = (a_{ij}+b_{ij})_{m,n}.$$

For $\lambda \in L$ defineres *produktet* $\lambda\underline{\underline{A}}$ af λ og $\underline{\underline{A}}$ ved

$$\lambda\underline{\underline{A}} = (\lambda a_{ij})_{m,n}.$$

Det verificeres let, at $\mathsf{M}_{m,n}(L)$ ved disse kompositioner er organiseret som et vektorrum $(\mathsf{M}_{m,n}(L),L)$ over L. Nulvektoren i dette vektorrum er nulmatricen $\underline{\underline{0}}_{m,n}$; den modsatte $-\underline{\underline{A}}$ til en matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ er matricen $(-a_{ij})_{m,n}$. Vektorrummets dimension er mn, idet sættet bestående af de ialt mn matricer, som har et element lig med 1 og alle øvrige elementer lig med 0, udgør en basis.

Er $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ og $\underline{\underline{B}} = (b_{jk})_{n,p}$ to matricer for hvilke den førstes søjleantal er lig med den andens rækkeantal, defineres *produktmatricen* $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$ som $(m \times p)$-matricen

Ved $(m\times n)$-*nulmatricen* $\underline{\underline{O}} = \underline{\underline{O}}_{m,n}$ forstås $(m\times n)$-matricen, hvis elementer alle er 0.

Ved $(n\times n)$-*enhedsmatricen* $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_{n,n}$ forstås $(n\times n)$-diagonalmatricen, hvis diagonalelementer alle er 1. Vi har altså $\underline{\underline{E}}_{n,n} = (\delta_{ij})_{n,n}$.

For $0 \leq r \leq m,n$ betegnes med $\underline{\underline{E}}_{m,n}^{(r)}$ den $(m\times n)$-matrix $(a_{ij})_{m,n}$ for hvilken $a_{ii} = 1$ for $i \leq r$, mens alle øvrige elementer a_{ij} er 0.

Lad der være givet matricer $\underline{\underline{A}}^{(\alpha,\beta)}$, $\alpha = 1,\ldots,r$, $\beta = 1,\ldots,s$, således at matricerne med samme index α har samme rækkeantal m_α, og matricerne med samme index β har samme søjleantal n_β. Matricerne $\underline{\underline{A}}^{(\alpha,\beta)}$ kan da på oplagt måde "sammenstykkes" til en ny matrix $\underline{\underline{A}}$ med rækkeantal $m = m_1+\ldots+m_r$ og søjleantal $n = n_1+\ldots+n_s$. Vi siger, at $\underline{\underline{A}}$ er en *blokmatrix* med *blokkene* $\underline{\underline{A}}^{(\alpha,\beta)}$, og skriver

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}^{(1,1)} & \cdots & \underline{\underline{A}}^{(1,s)} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{\underline{A}}^{(r,1)} & \cdots & \underline{\underline{A}}^{(r,s)} \end{pmatrix}$$

Omvendt er det klart, hvad der menes med, at en given matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ er "opdelt" i blokke. Eksempelvis er der ved

$$\underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{a}}_{|1}\ \underline{\underline{a}}_{|2}\ \cdots\ \underline{\underline{a}}_{|n})$$

angivet en opdeling af $\underline{\underline{A}}$ i blokke, nemlig søjlerne. Matricen $\underline{\underline{E}}_{m,n}^{(r)}$ kan på naturlig måde opdeles i blokke, for $\underline{\underline{A}}$'s *j'te søjle*. Matricen $\underline{\underline{A}}$ har således m rækker og n søjler. Elementet a_{ij} tilhører den i'te række og den j'te søjle.

Er $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et talsæt tilhørende L^n, sættes

$$\underline{\underline{a}}_{-} = (a_j)_{1,n} = (a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n)$$

og

$$\underline{\underline{a}}_{|} = (a_i)_{n,1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

Er $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ koordinatsættet for en vektor i et n-dimensionalt vektorrum m.h.t. en valgt basis, så kaldes $\underline{\underline{a}}_{-}$ hhv. $\underline{\underline{a}}_{|}$ for vektorens *koordinatrække* hhv. *koordinatsøjle*.

Ved en *delmatrix* af $\underline{\underline{A}}$ forstås en matrix, som fremgår af $\underline{\underline{A}}$ ved at visse rækker og/eller søjler slettes.

En $(m \times n)$-matrix siges at være *kvadratisk*, dersom $m = n$. Elementerne a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, i en $(n \times n)$-matrix $(a_{ij})_{n,n}$ kaldes matricens diagonalelementer. En $(n \times n)$-matrix $(a_{ij})_{n,n}$ siges at være en *nedre trekantsmatrix*, dersom $a_{ij} = 0$ for $i < j$, og en *øvre trekantsmatrix*, dersom $a_{ij} = 0$ for $i > j$. En $(n \times n)$-matrix $(a_{ij})_{n,n}$ siges at være en *diagonalmatrix*, dersom $a_{ij} = 0$ for $i \neq j$.

4.1. MATRICER.

Lad m og n være naturlige tal. Ved en $(m\times n)$-*matrix* med elementer fra L forstås et rektangulært skema af formen

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

hvor $a_{ij} \in L$ for $i = 1,\ldots,m$ og $j = 1,\ldots,n$. Som betegnelse for matricen (1) benyttes også $(a_{ij})_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$, eller $(a_{ij})_{m,n}$, eller blot (a_{ij}). Endvidere benyttes betegnelsen $\underline{\underline{A}}_{m,n}$, eller blot $\underline{\underline{A}}$.

Ved en *rækkematrix* hhv. *søjlematrix* forstås en $(1\times n)$-matrix hhv. en $(m\times 1)$-matrix.

Lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ være en $(m\times n)$-matrix. For $i = 1,\ldots,m$ kaldes rækkematricen

$$\underline{\underline{a}}_{i-} = (a_{i1} \; a_{i2} \; \ldots \; a_{in})$$

for $\underline{\underline{A}}$'s i'te *række*, og for $j = 1,\ldots,n$ kaldes søjlematricen

$$\underline{\underline{a}}_{|j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

4.2. LINEÆRE AFBILDNINGERS MATRIXLIGNINGER.

Lad (U,L) være et vektorrum med $\dim U = n \in \mathbb{N}$, lad (V,L) være et vektorrum med $\dim V = m \in \mathbb{N}$, og lad f være en lineær afbildning af U ind i V. Lad endvidere $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1,\dots,\underline{f}_m)$ være baser for hhv. U og V. Billederne $f(\underline{e}_j)$ af vektorerne $\underline{e}_j$ i basen for U kan da på en og kun een måde skrives som linearkombinationer af vektorerne i basen for V,

$$\begin{aligned}
f(\underline{e}_1) &= a_{11}\underline{f}_1 + a_{21}\underline{f}_2 + \dots + a_{m1}\underline{f}_m \\
f(\underline{e}_2) &= a_{12}\underline{f}_1 + a_{22}\underline{f}_2 + \dots + a_{m2}\underline{f}_m \\
&\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
f(\underline{e}_n) &= a_{1n}\underline{f}_1 + a_{2n}\underline{f}_2 + \dots + a_{mn}\underline{f}_m ,
\end{aligned}$$

eller kort

$$f(\underline{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\underline{f}_i, \quad j = 1,\dots,n.$$

Sættes $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ kan disse ligninger sammenfattes til matrixligningen

(1) $$(f(\underline{e}_1)\dots f(\underline{e}_n)) = (\underline{f}_1\dots\underline{f}_m)\underline{\underline{A}}.$$

Det bemærkes, at den j'te søjle i $\underline{\underline{A}}$ er koordinatsøjlen for vektoren $f(\underline{e}_j)$ m.h.t. basen $(\underline{f}_1,\dots,\underline{f}_m)$. Lad nu $\underline{u}$ være en vektor i U med billedvektor $\underline{v} = f(\underline{u})$ i V, og lad koordinatsøjlerne for $\underline{u}$ og $\underline{v}$ (m.h.t. de betragtede baser) være hhv. $\underline{\underline{u}}_|$ og $\underline{\underline{v}}_|$. Vi har da

$$\underline{u} = (\underline{e}_1\dots\underline{e}_n)\underline{\underline{u}}_|$$

og

(2) $$\underline{v} = (\underline{f}_1 \cdots \underline{f}_m)\underline{\underline{v}}_{|},$$

hvor venstresiderne skal opfattes som (1×1)-matricer. Endvidere gælder på grund af lineariteten

$$\begin{aligned} \underline{v} &= f(\underline{u}) \\ &= (f(\underline{e}_1)\cdots f(\underline{e}_n))\underline{\underline{u}}_{|}. \end{aligned}$$

Sammenholdes dette sidste med (1) og (2) fås

$$(\underline{f}_1 \cdots \underline{f}_m)\underline{\underline{v}}_{|} = (\underline{f}_1 \cdots \underline{f}_m)\underline{\underline{A}}\underline{\underline{u}}_{|}.$$

Idet $(\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_m)$ er et lineært uafhængigt sæt, kan man heraf slutte, at

(3) $$\underline{\underline{v}}_{|} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{u}}_{|}.$$

Til afbildningen f hører altså (mindst) en matrix $\underline{\underline{A}}$ (m.h.t. de betragtede baser), således at koordinatsøjlen $\underline{\underline{v}}_{|}$ for billedet af vektoren med koordinatsøjlen $\underline{\underline{u}}_{|}$ kan udregnes ved ligningen (3). Det påstås, at den ovenfor bestemte matrix $\underline{\underline{A}}$ er den eneste matrix med denne egenskab. Lad nemlig $\underline{\underline{B}}$ være en vilkårlig $(m\times n)$-matrix hørende til f (i den omtalte betydning). Produktet $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{\delta}}_{|j}$ af $\underline{\underline{B}}$ og den j'te søjle $\underline{\underline{\delta}}_{|j}$ i $\underline{\underline{E}}_{n,n}$ giver ved udregning den j'te søjle i $\underline{\underline{B}}$. Nu er imidlertid $\underline{\underline{\delta}}_{|j}$ koordinatsøjlen for $\underline{e}_j$, og følgelig er den j'te søjle i $\underline{\underline{B}}$ koordinatsøjlen for $f(\underline{e}_j)$. Da også den j'te søjle i $\underline{\underline{A}}$ er koordinatsøjlen for $f(\underline{e}_j)$, stemmer $\underline{\underline{B}}$ overens med $\underline{\underline{A}}$ søjle for søjle, og vi har altså som påstået $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}$. - Ligningen (3) kaldes *matrixligningen* for afbildningen f m.h.t. de betragtede baser.

Det er let at se, at hvis der til lineære afbildninger f og g af U ind i V hører hhv. $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ (m.h.t. valgte baser), så vil der til $f + g$ høre $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$, og til λf høre $\lambda\underline{\underline{A}}$ for $\lambda \in L$. Det er klart, at hvis f og g er forskellige, så er $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ forskellige. Endelig bemærkes, at er $\underline{\underline{C}}$ en vilkårlig $(m \times n)$-matrix med elementer fra L, så findes en lineær afbildning af U ind i V, hvortil der (m.h.t. de valgte baser) hører matricen $\underline{\underline{C}}$, nemlig afbildningen, som fører en vektor i U med koordinatsøjlen $\underline{\underline{u}}_|$ over i den vektor i V, som har koordinatsøjlen $\underline{\underline{C}}\underline{\underline{u}}_|$.

Alt det foregående kan sammenfattes således:

Lad (U,L) *og* (V,L) *være vektorrum med* $\dim U = n \in \mathbb{N}$ *og* $\dim V = m \in \mathbb{N}$, *og lad* $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ *og* $(\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_m)$ *være baser for hhv.* U *og* V. *Til hver lineær afbildning* $f : U \to V$ *findes da en og kun een* $(m \times n)$*-matrix* $\underline{\underline{A}}$, *således at der mellem koordinatsøjlen* $\underline{\underline{u}}_|$ *for en vektor* $\underline{u} \in U$ *og koordinatsøjlen* $\underline{\underline{v}}_|$ *for billedvektoren* $\underline{v} = f(\underline{u}) \in V$ *består relationen*

$$\underline{\underline{v}}_| = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{u}}_| .$$

Matricen $\underline{\underline{A}}$ *er bestemt ved*

$$(f(\underline{e}_1)\ldots f(\underline{e}_n)) = (\underline{f}_1\ldots\underline{f}_m)\underline{\underline{A}}.$$

Den ved $f \mapsto \underline{\underline{A}}$ *definerede afbildning er en isomorfi af* $(\mathsf{L}(U,V),L)$ *på* $(\mathsf{M}_{m,n}(L),L)$.

I det følgende betragtes lineære afbildninger mellem vektorrum over samme legeme med endelige dimensioner ≥ 1.

For (søjle)rangen af den til en lineær afbildning $f : U \rightarrow V$ *hørende matrix* $\underline{\underline{A}}$ *m.h.t. baser* $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ *og* $(\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_m)$ *for hhv.* U *og* V *gælder* $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = \dim f(U)$.

Bevis. Da billedrummet $f(U)$ frembringes af vektorerne $f(\underline{e}_1),\ldots,f(\underline{e}_n)$, er dimensionen af $f(U)$ lig med rangen af sættet $(f(\underline{e}_1),\ldots,f(\underline{e}_n))$. Rangen af dette sæt er imidlertid den samme som rangen af det tilsvarende sæt af koordinatsøjler, altså søjlerangen af $\underline{\underline{A}}$. ▯

Lad $f : U \rightarrow V$ *være en lineær afbildning. Der findes da en basis for* U *og en basis for* V*, således at der m.h.t. disse baser til* f *hører matricen* $\underline{\underline{E}}^{(r)}_{m,n}$*, hvor* $n = \dim U$*,* $m = \dim V$ *og* $r = \dim f(U)$.

Bevis. Ifølge dimensionssætningen har kernen K dimension $n - r$. For $r = 0$ er f nulafbildningen, og matricen er for ethvert valg af baser nulmatricen $\underline{\underline{O}}_{m,n}$, altså af den ønskede form. For $0 < r < n$ vælges en basis $(\underline{e}_{r+1},\ldots,\underline{e}_n)$ for K, og denne suppleres til en basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ for U; for $r = n$ vælges en vilkårlig basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ for U. Vektorsættet $(f(\underline{e}_1),\ldots,f(\underline{e}_n))$ har rangen r, og da vi for $r < n$ har $f(\underline{e}_{r+1}) = \ldots = f(\underline{e}_n) = \underline{o}$, må sættet $(f(\underline{e}_1),\ldots,f(\underline{e}_r))$ være lineært uafhængigt. For $r = m$ er det derfor en basis for V, og for $r < m$ kan det suppleres til en basis $(f(\underline{e}_1),\ldots,f(\underline{e}_r),\underline{f}_{r+1},\ldots,\underline{f}_m)$ for V. For disse valg af baser fås matricen $\underline{\underline{E}}^{(r)}_{m,n}$.

Bemærkning. Vi skal senere skærpe den foregående sætning derhen, at en vilkårlig matrix $\underline{\underline{A}}$ i $M_{m,n}(L)$ med (søjle)rang r hører til f for passende valg af baser, (sml. side 4.3.3).▯

Lad $f : U \to V$ og $g : V \to W$ være lineære afbildninger, hvortil der hører hhv. $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ m.h.t. baser $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$, $(\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_m)$ og $(\underline{g}_1,\ldots,\underline{g}_l)$ for hhv. U, V og W. Til den sammensatte afbildning $g \circ f : U \to W$ hører da matricen $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}$ m.h.t. baserne $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\underline{g}_1,\ldots,\underline{g}_l)$.

Bevis. Af det givne følger, at der (med oplagte betegnelser) gælder $\underline{\underline{w}}_{|} = \underline{\underline{B}}\underline{\underline{v}}_{|} = \underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{u}}_{|}$, hvoraf påstanden følger. ▯

En lineær afbildning $f : U \to V$ er bijektiv, hvis og kun hvis den tilhørende matrix $\underline{\underline{A}}$ m.h.t. baser $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_m)$ for hhv. U og V er (kvadratisk og) regulær. Er f bijektiv, så hører der til den omvendte afbildning $f^{-1} : V \to U$ den inverse matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ m.h.t. baserne $(\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_m)$ og $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$.

Bevis. Antag, at f er bijektiv. Af tidligere resultater (side 2.2.3) følger da, at $m = n$; den til f hørende matrix er således en $(n \times n)$-matrix. Den omvendte afbildning $f^{-1} : V \to U$ er ligeledes lineær, (side 2.1.5); lad $\underline{\underline{B}}$ være den til f^{-1} hørende $(n \times n)$-matrix. Da der til såvel den identiske afbildning e_U af U som den identiske afbildning e_V af V hører matricen $\underline{\underline{E}}_{n,n}$, og da vi har $f^{-1} \circ f = e_U$ og $f \circ f^{-1} = e_V$, sluttes af den foregående sætning, at $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}}$. Matricen $\underline{\underline{A}}$ er altså regulær, og $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$. Antag omvendt, at den til f hørende matrix

$\underline{\underline{A}}$ er kvadratisk og regulær. Vi har da specielt $\dim U = \dim V = n$, og der findes derfor en og kun een lineær afbildning $g : V \to U$, hvis tilhørende matrix m.h.t. de betragtede baser er $\underline{\underline{A}}^{-1}$. Af den foregående sætning følger nu, at der til afbildningen $g \circ f : U \to U$ hører matricen $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}$, altså $\underline{\underline{E}}_{n,n}$, og at der til afbildningen $f \circ g : V \to V$ hører matricen $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^{-1}$, altså $\underline{\underline{E}}_{n,n}$. Dette viser, at

(1) $$g \circ f = e_U,$$

og at

(2) $$f \circ g = e_V.$$

Da e_U specielt er injektiv, sluttes af (1), at f er injektiv, og da e_V specielt er surjektiv, sluttes af (2), at f er surjektiv. Ialt fås således, at f er bijektiv. ▯

Lad U, U' og V, V' være par af vektorrum i dualitet. Hvis der til en lineær afbildning $f : U \to V$ hører matricen $\underline{\underline{A}}$ m.h.t. baser $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_m)$ for hhv. U og V, så vil der til den duale afbildning $f' : V' \to U'$ høre den transponerede matrix $\underline{\underline{A}}'$ m.h.t. de duale baser $(\underline{f}_1', \ldots, \underline{f}_n')$ og $(\underline{e}_1', \ldots, \underline{e}_n')$ for hhv. V' og U'.

Bevis. Elementet a_{ij} i den til f hørende matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ er den i'te koordinat for $f(\underline{e}_j)$, altså (sml. side 3.1.4).

$$a_{ij} = \langle f(\underline{e}_j), \underline{f}_i' \rangle.$$

Tilsvarende er elementet b_{kl} i den til f' hørende matrix $\underline{\underline{B}} = (b_{kl})_{n,m}$ den k'te koordinat for $f'(\underline{f}'_l)$, altså

$$b_{kl} = <\underline{e}_k, f'(\underline{f}'_l)>.$$

Da f og f' er duale afbildninger, har vi endvidere, (sml. side 3.3.1).

$$<\underline{e}_k, f'(\underline{f}'_l)> = <f(\underline{e}_k), \underline{f}'_l>.$$

Sammenholdes dette med det foregående fås $a_{ij} = b_{ji}$, som påstået. ▯

4.3. KOORDINATTRANSFORMATION.

Vi skal undersøge, hvilken sammenhæng der består mellem koordinatsættene for en og samme vektor m.h.t. forskellige baser. Herom gælder:

Lad (U,L) være et vektorrum med $\dim U = n \in \mathbb{N}$, *og lad* $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ *og* $(\hat{\underline{e}}_1,\dots,\hat{\underline{e}}_n)$ *være baser for U. Der findes da en og kun een $(n\times n)$-matrix $\underline{\underline{S}}$, således at der mellem koordinatsøjlerne $\underline{\underline{u}}_|$ og $\hat{\underline{\underline{u}}}_|$ for en vektor $\underline{u} \in U$ m.h.t. basen $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ og basen $(\hat{\underline{e}}_1,\dots,\hat{\underline{e}}_n)$ består relationen*

(1) $$\hat{\underline{\underline{u}}}_| = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{u}}_| .$$

Matricen $\underline{\underline{S}}$, som er regulær, er bestemt ved

(2) $$(\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n) = (\hat{\underline{e}}_1 \dots \hat{\underline{e}}_n)\underline{\underline{S}} .$$

Bevis. Af sætningen om matrixligninger for lineære afbildninger (side 4.2.3) følger, at der findes en og kun een matrix $\underline{\underline{S}}$, således at (1) er opfyldt, nemlig matricen hørende til den identiske afbildning af U, idet originalvektorer henføres til basen $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ og billedvektorer til basen $(\hat{\underline{e}}_1,\dots,\hat{\underline{e}}_n)$. Af samme sætning fremgår også, at $\underline{\underline{S}}$ er bestemt ved (2). Endelig, at $\underline{\underline{S}}$ er regulær følger af, at den identiske afbildning er bijektiv (sml. side 4.2.5). ▯

Overgangen fra koordinaterne m.h.t. basen $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ til koordinaterne m.h.t. basen $(\hat{\underline{e}}_1,\dots,\hat{\underline{e}}_n)$ kaldes en *koordinattransformation*, og matricen $\underline{\underline{S}}$ kaldes den tilhørende *koordinattransformationsmatrix*.

Det bemærkes, at (2) er ensbetydende med

(3) $$(\hat{\underline{e}}_1 \ldots \hat{\underline{e}}_n) = (\underline{e}_1 \ldots \underline{e}_n)\underline{\underline{S}}^{-1}.$$

Koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$ er kendt, når vektorerne i basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ er givet som linearkombinationer af vektorerne i basen $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$. Er derimod vektorerne i basen $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ givet som linearkombinationer af vektorerne i basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$, er $\underline{\underline{S}}^{-1}$ kendt, og $\underline{\underline{S}}$ må bestemmes som dennes inverse.

Lad $\underline{\underline{S}}$ være en vilkårlig regulær $(n\times n)$-matrix med elementer fra L. For enhver basis $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ for U er da det ved (2) bestemte sæt $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ en basis for U, og $\underline{\underline{S}}$ er koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ til basen $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$. Den sidste påstand følger af den første. For at indse gyldigheden af den første påstand bemærkes, at det af (3) fremgår, at enhver af vektorerne i basen $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ er en linearkombination af vektorerne i sættet $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$; sættet $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ frembringer derfor U, og er følgelig en basis for U, (sml. side 1.4.5). På tilsvarende måde indses, at for enhver basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ for U er det ved (3) bestemte sæt $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ en basis for U, og $\underline{\underline{S}}$ er koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ til basen $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$. Enhver regulær $(n\times n)$-matrix (med elementer fra L) er således en koordinattransformationsmatrix, idet endda een af de to baser kan foreskrives vilkårligt.

Ved anvendelse af sætningen ovenfor skal vi dernæst vise:

Lad (U,L) og (V,L) være vektorrum med endelige dimensioner ≥ 1, lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ være baser for U, og lad $(\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_m)$ og $(\hat{\underline{f}}_1,\ldots,\hat{\underline{f}}_m)$ være baser for V. Lad videre $f : U \to V$ være en lineær afbildning, lad den til f hørende matrix m.h.t. baserne $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_m)$ være $\underline{\underline{A}}$, og lad den til f hørende matrix m.h.t. baserne $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ og $(\hat{\underline{f}}_1,\ldots,\hat{\underline{f}}_m)$ være $\hat{\underline{\underline{A}}}$. Der gælder da

$$\hat{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1},$$

hvor $\underline{\underline{S}}$ og $\underline{\underline{T}}$ er koordinattransformationsmatricerne hørende til hhv. overgangen fra $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ til $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ i U og overgangen fra $(\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_m)$ til $(\hat{\underline{f}}_1,\ldots,\hat{\underline{f}}_m)$ i V.

Bevis. Påstanden følger af, at der (med oplagte betegnelser) gælder

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\underline{v}}}_| &= \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{v}}_| \\ &= \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{u}}_| \\ &= \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}\hat{\underline{\underline{u}}}_| \ . \ \square\end{aligned}$$

Lad f være en lineær afbildning af et n-dimensionalt vektorrum (U,L) ind i et m-dimensionalt vektorrum (V,L), og lad $\underline{\underline{A}}$ være en $(m\times n)$-matrix med elementer fra L. Der findes da en basis for U og en basis for V m.h.t. hvilke den til f hørende matrix er $\underline{\underline{A}}$, hvis (og kun hvis) $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = \dim f(U)$.

Bevis. Det er tidligere vist, at hvis $\underline{\underline{A}}$ hører til f for passende basisvalg, så gælder rg$\underline{\underline{A}}$ = dim$f(U)$, (sml. side 4.2.4). Antag omvendt, at rg$\underline{\underline{A}}$ = dim$f(U)$ = r. Af en tidligere sætning fremgår, at der findes baser $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_m)$ for hhv. U og V m.h.t. hvilke den til f hørende matrix er $\underline{\underline{E}}_{m,n}^{(r)}$, (sml. side 4.2.4). Lad $g : U \to V$ være den lineære afbildning, hvis tilhørende matrix m.h.t. disse baser er $\underline{\underline{A}}$. Idet dim$g(U)$ = rg$\underline{\underline{A}}$ = r, findes også baser $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ og $(\hat{\underline{f}}_1,\ldots,\hat{\underline{f}}_m)$ for hhv. U og V m.h.t. hvilke den til g hørende matrix er $\underline{\underline{E}}_{m,n}^{(r)}$. Betegnes med $\underline{\underline{S}}$ og $\underline{\underline{T}}$ koordinattransformationsmatricerne hørende til hhv. overgangen fra $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ til $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ og overgangen fra $(\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_m)$ til $(\hat{\underline{f}}_1,\ldots,\hat{\underline{f}}_m)$, så har vi ifølge den foregående sætning $\underline{\underline{E}}_{m,n}^{(r)} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$, altså $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{E}}_{m,n}^{(r)}\underline{\underline{S}}$. Heraf fremgår, at $\underline{\underline{A}}$ er den til f hørende matrix m.h.t. de baser, som fås ved at anvende koordinattransformatricerne $\underline{\underline{S}}^{-1}$ og $\underline{\underline{T}}^{-1}$ på hhv. $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_n)$. $\square$

4.4. MATRIXRANG.

Enhver matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{M}_{m,n}(L)$ kan opfattes som matricen hørende til en lineær afbildning, idet der for ethvert n-dimensionalt vektorrum (U,L), ethvert n-dimensionalt vektorrum (V,L) og ethvert valg af en basis for U og en basis for V findes en (og kun een) lineær afbildning $f : U \to V$, hvis tilhørende matrix m.h.t. de valgte baser netop er $\underline{\underline{A}}$. Det er derfor muligt at udnytte sætninger i de to foregående afsnit til at bevise sætninger om matricer. Vi viser først:

For enhver matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{M}_{m,n}(L)$ *stemmer søjlerang og rækkerang overens.*

Bevis. Vi opfatter matricen $\underline{\underline{A}}$ som matricen hørende til en lineær afbildning $f : U \to V$ m.h.t. valgte baser. Lad U' og V' være vektorrum, som er i dualitet med hhv. U og V. Til den duale afbildning $f' : V' \to U'$ hører da den transponerede matrix $\underline{\underline{A}}'$ m.h.t. de duale baser, (sml. side 4.2.6). Det er tidligere vist, at f og f' har samme rang, (side 3.3.3). Rangen af en lineær afbildning, d.v.s. dimensionen af billedrummet, stemmer imidlertid overens med søjlerangen af den tilhørende matrix, (sml. side 4.2.4). Matricerne $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{A}}'$ har derfor samme søjlerang. Men søjlerangen af $\underline{\underline{A}}'$ er identisk med rækkerangen af $\underline{\underline{A}}$, thi søjlerne i $\underline{\underline{A}}'$ er (de transponerede af) rækkerne i $\underline{\underline{A}}$. Hermed er påstanden vist. ▯

Vi skal herefter ved *rangen* $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}$ af $\underline{\underline{A}}$ forstå den fælles rang af sættet af søjler og sættet af rækker.

En kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{M}_{n,n}(L)$ *er regulær, hvis og kun hvis* $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = n$.

Bevis. Vi opfatter $\underline{\underline{A}}$ som matricen hørende til en lineær afbildning $f : U \to U$ m.h.t. en valgt basis. Det vides, at $\underline{\underline{A}}$ er regulær, hvis og kun hvis f er bijektiv, (sml. side 4.2.5), og det vides, at f er bijektiv, hvis og kun hvis $\dim f(U) = n$, (sml. side 2.2.3). Påstanden følger herefter af, at der alment gælder $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = \dim f(U)$. $\square$

For enhver fra nulmatricen forskellig matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{M}_{m,n}(L)$ *er* $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}$ *det største af de naturlige tal* p *for hvilke der findes en regulær* $(p\times p)$*-delmatrix af* A.

Bevis. Idet vi sætter $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = r$, skal det vises, at $\underline{\underline{A}}$ har (mindst) en regulær $(r\times r)$-delmatrix, men ingen regulær $(p\times p)$-delmatrix for $p > r$. Lad $\underline{\underline{B}}$ være en $(m\times r)$-delmatrix af $\underline{\underline{A}}$ med (søjle)rang r; en sådan findes, idet $\underline{\underline{A}}$ har (søjle)rang r. Da $\underline{\underline{B}}$ har (række)rang r, findes en $(r\times r)$-delmatrix $\underline{\underline{C}}$ af $\underline{\underline{B}}$ med (række)rang r. Ifølge den foregående sætning er $\underline{\underline{C}}$ regulær, hvormed er vist, at $\underline{\underline{A}}$ har en regulær $(r\times r)$-delmatrix. Lad omvendt $\underline{\underline{C}}$ være en regulær $(p\cdot p)$-delmatrix af $\underline{\underline{A}}$. Matricen $\underline{\underline{C}}$ er da delmatrix af en (entydigt bestemt) $(m\times p)$-delmatrix $\underline{\underline{B}}$ af $\underline{\underline{A}}$. Da $\underline{\underline{C}}$ har (søjle)rang p, vil også $\underline{\underline{B}}$ have (søjle)rang p. Heraf følger, at (søjle)rangen af $\underline{\underline{A}}$ er mindst p, altså $p \leq r$, som påstået. $\square$

For vilkårlige matricer $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{M}_{m,n}(L)$ *og* $\underline{\underline{B}} \in \mathrm{M}_{n,p}(L)$ *gælder* $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} \leq \mathrm{rg}\underline{\underline{A}}$ *og* $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} \leq \mathrm{rg}\underline{\underline{B}}$. *For* $\mathrm{rg}\underline{\underline{B}} = n$ *gælder* $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \mathrm{rg}\underline{\underline{A}}$, *og for* $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = n$ *gælder* $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \mathrm{rg}\underline{\underline{B}}$.

Bevis. Vi opfatter $\underline{\underline{B}}$ og $\underline{\underline{A}}$ som matricerne hørende til lineære afbildninger $f : U \to V$ hhv. $g : V \to W$, hvor U, V og W er vektorrum over L med dimensionerne p, n og m. Matricen $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$ er da den til $g \circ f : U \to W$ hørende matrix, (sml. side 4.2.5). Vi har nu $\mathrm{rg}\underline{\underline{B}} = \dim f(U)$, $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = \dim g(V)$ og $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \dim g(f(U))$. Af $f(U) \subseteq V$ følger $g(f(U)) \subseteq g(V)$, og dermed $\dim g(f(U)) \leq \dim g(V)$, altså den første ulighed. For $\mathrm{rg}\underline{\underline{B}} = n$ bliver f surjektiv, hvormed $f(U) = V$; vi får da $\dim g(f(U)) = \dim g(V)$, altså $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \mathrm{rg}\underline{\underline{A}}$. Det er klart, at der gælder $\dim g(f(U)) \leq \dim g(V)$, altså den anden ulighed. For $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = n$ bliver g injektiv; vi får da $\dim g(f(U)) = \dim f(U)$, altså $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \mathrm{rg}\underline{\underline{B}}$. $\square$

To matricer $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathrm{M}_{m,n}(L)$ siges at være *ækvivalente*, hvis der findes regulære matricer $\underline{\underline{P}} \in \mathrm{M}_{m,m}(L)$ og $\underline{\underline{Q}} \in \mathrm{M}_{n,n}(L)$, således at $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{Q}}^{-1}$. Som antydet er herved defineret en ækvivalensrelation i $\mathrm{M}_{m,n}(L)$. Refleksiviteten vises ved benyttelse af, at alle enhedsmatricer er regulære, symmetrien ved benyttelse af, at den inverse til en regulær matrix er regulær, og transitiviteten ved benyttelse af, at produktet af to regulære matricer er en regulær matrix.

Det ses, at to matricer er ækvivalente, hvis og kun hvis de hører til de samme lineære afbildninger for forskellige basisvalg, (sml. side 4.3.2, 4.3.3). (Heraf fremgår i øvrigt på ny, at relationen er en ækvivalensrelation.) Vi har tidligere vist, at de til en given lineær afbildning hørende matricer m.h.t. forskellig basisvalg netop er de matricer (med det relevante række- og søjleantal), der har samme rang som afbildningen, (sml. side 4.3.3). Vi får derfor:

To matricer $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in M_{m,n}(L)$ *er ækvivalente, hvis og kun hvis de har samme rang.*

4.5. LINEÆRE LIGNINGSSYSTEMER.

Lad der være givet et lineært ligningssystem med m ligninger og n ubekendte,

$$\begin{array}{lcccl} a_{11}x_1 & + \; a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + \; a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \;\;\vdots \\ a_{m1}x_1 & + \; a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \tag{1}$$

hvor $a_{ij}, b_i \in L$ for $i = 1,\ldots,m$ og $j = 1,\ldots,n$. En *løsning* (eller en *partikulær løsning*) til (1) er et sæt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i L^n, som tilfredsstiller alle ligningerne. Mængden af løsninger kaldes *løsningsmængden* (eller den *fuldstændige løsning*). Matricen $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ kaldes *koefficientmatricen* ; matricen $(\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{b}}_|)$, som fås ved til $\underline{\underline{A}}$ at føje $\underline{\underline{b}}_| = (b_i)_{m,1}$ som $(n+1)$'te søjle, kaldes den *udvidede koefficientmatrix*. Ligningssystemet siges at være *homogent*, dersom $b_1 = \ldots = b_m = 0$, og *inhomogent*, dersom mindst et af tallene b_i er $\neq 0$. (Ofte vil man dog bruge adjektivet "inhomogent" i betydningen "ikke nødvendigvis, men muligvis, homogent"; et inhomogent lineært ligningssystem er da simpelthen et lineært ligningssystem.) Ved det til (1) hørende homogene ligningssystem forstås det ligningssystem, som fås ved at erstatte alle tallene b_i med 0.

Det noteres, at ligningssystemet (1) kan sammenfattes i matrixligningen $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{b}}_|$, forstået således, at $(x_1, \ldots, x_n)$ er løsning til (1), hvis og kun hvis $\underline{\underline{x}}_| = (x_i)_{n,1}$ er løsning til matrixligningen.

EKSISTENS OG ENTYDIGHED AF LØSNINGER. STRUKTUR AF LØSNINGSMÆNGDEN. Sammen med ligningssystemet (1) vil vi betragte den lineære afbildning f af (L^n, L) ind i (L^m, L), hvortil der m.h.t. de kanoniske baser hører matricen $\underline{\underline{A}}$. Idet vi sætter $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, ses, at $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ er løsning til (1), hvis og kun hvis $f(\underline{x}) = \underline{b}$. Ligningssystemet (1) har derfor (mindst) en løsning, hvis og kun hvis $\underline{b}$ tilhører billedmængden $f(L^n)$, altså hvis og kun hvis $\underline{b}$ er linearkombination af vektorerne $\underline{a}_{|j} = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$, $j = 1, \ldots, n$. Dette sidste ses imidlertid let at være ensbetydende med, at rangen af den udvidede koefficientmatrix ikke er større end rangen af koefficientmatricen. Vi har altså:

Ligningssystemet (1) har (mindst) en løsning, hvis og kun hvis $\mathrm{rg}(\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{b}}_|) = \mathrm{rg}\underline{\underline{A}}$.

Som bekendt er f surjektiv hhv. injektiv, hvis og kun hvis $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = m$ hhv. $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = n$; vi får derfor:

Ligningssystemet (1) har mindst en hhv. højst en løsning for ethvert sæt $(b_1, \ldots, b_m)$*, hvis og kun hvis* $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = m$ *hhv.* $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = n$*, - altså netop en, hvis og kun hvis* $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = m = n$.

Løsningsmængden til (1) er identisk med originalmængden $f^{-1}(\underline{b})$. For $\underline{b} = (0, \ldots, 0)$ er der derfor altid løsningen $(0, \ldots, 0)$, og løsningsmængden er kernen for f. For $\underline{b} \neq (0, \ldots, 0)$ kan $f^{-1}(\underline{b})$ være tom; men hvis $f^{-1}(\underline{b})$ er ikke-tom, så har vi $f^{-1}(\underline{b}) = \underline{\tilde{x}} + K$, hvor $\underline{\tilde{x}}$ er en vilkårlig vektor i $f^{-1}(\underline{b})$ og K er f's kerne.

Heraf fremgår:

Hvis ligningssystemet (1) er homogent, har det i det mindste løsningen (0,...,0). Løsningsmængden er et underrum i L^n *med dimension* $n - \mathrm{rg}\underline{A}$.

Hvis ligningssystemet (1) er inhomogent, har det ikke nødvendigvis nogen løsning. Er løsningsmængden ikke-tom, så er den et sideunderrum i L^n *med dimension* $n - \mathrm{rg}\underline{A}$, *- nemlig sideunderrummet* $\underline{\tilde{x}} + K$, *hvor* $\underline{\tilde{x}} = (\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$ *er en vilkårlig løsning til (1) og K er løsningsmængden til det tilsvarende homogene ligningssystem.*

Hvis (1) har løsning(er), fås den fuldstændige løsning således ved til en vilkårlig partikulær løsning at addere den fuldstændige løsning til det tilhørende homogene ligningssystem.

Vektorrummet (L^n,L) er i dualitet med sig selv ved

$$<(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)> = x_1y_1+\ldots+x_ny_n;$$

den kanoniske basis bliver herved dual til sig selv. Tilsvarende gælder for (L^m,L). Til den duale afbildning $f' : L^m \to L^n$ hører den transponerede matrix $\underline{A}'$ m.h.t. de kanoniske baser. Idet $f(L^n) = K_{f'}^{\circ}$ (sml. side 3.3.3), har vi derfor:

Ligningssystemet (1) har (mindst) en løsning, hvis og kun hvis der for enhver løsning $(y_1,\ldots,y_m)$ *til det "transponerede" homogene ligningssystem*

$$
\begin{aligned}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m &= 0 \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m &= 0 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad &\;\vdots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m &= 0
\end{aligned}
$$

gælder

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m = 0.$$

LØSNING VED REDUKTION TIL ET CRAMER'SK LIGNINGSSYSTEM.

I det foregående er vist, at et ligningssystem med en (kvadratisk og) regulær koefficientmatrix har netop en løsning; et sådant ligningssystem vil vi kalde et *Cramer'sk ligningssystem*. I et senere afsnit (5.3) skal vi explicit angive løsningen til et sådant ligningssystem. Vi skal på dette sted vise, hvorledes bestemmelsen af løsningsmængden til (1) - hvis der er løsning(er) - kan føres tilbage til løsning af et Cramer'sk ligningssystem.

Vi sætter rg$\underline{\underline{A}}$ = r. Ved eventuel omnummerering af ligningerne kan opnås, at sættet bestående af de første r rækker i $\underline{\underline{A}}$ er lineært uafhængigt. Sættet bestående af de første r rækker i $(\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{b}}_|)$ er da også lineært uafhængigt. Hvis der nu blandt de sidste $m - r$ rækker i $(\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{b}}_|)$ findes en, som ikke kan fremstilles som linearkombination af de første r, så har $(\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{b}}_|)$ en (række)rang, som er større end r, og (1) har derfor ingen løsning. Hvis derimod enhver af de sidste $m - r$ rækker kan fremstilles som linearkombination af de første r, så har vi rg$(\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{b}}_|) = r$, hvilket sikrer eksistensen af mindst en løsning til (1). Endvidere vil da gælde, at enhver løsning til systemet (†) bestående af de første r ligninger i (1) tillige er løsning til de sidste $m - r$ ligninger; følgelig vil (1) og (†) have samme løsningsmængde. Koefficientmatricen for (†) er en $(r\times n)$-matrix med rangen r; ved eventuel omnummerering af de ubekendte kan opnås, at sættet bestående af de første r søjler er lineært uafhængigt. Skrives (†) på formen

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & +\dots+ & a_{rr}x_r & = & b_1 & - & a_{1,r+1}x_{r+1} & -\dots- & a_{1n}x_n \\
a_{21}x_1 & +\dots+ & a_{2r}x_r & = & b_2 & - & a_{2,r+1}x_{r+1} & -\dots- & a_{2n}x_n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{r1}x_1 & +\dots+ & a_{rr}x_r & = & b_r & - & a_{r,r+1}x_{r+1} & -\dots- & a_{rn}x_n
\end{array}$$

ses, at der for hvert valg af $x_{r+1},\dots,x_n$ fremkommer et Cramer'sk ligningssystem til bestemmelse af $x_1,\dots,x_r$. Der findes derfor for ethvert valg af $x_{r+1},\dots,x_n$ netop et sæt $(x_1,\dots,x_r)$, således at $(x_1,\dots,x_n)$ er løsning til (†), og dermed til (1).

LØSNING VED ELIMINATION. Et lineært ligningssystem, hvis udvidede koefficientmatrix fremgår af den udvidede koefficientmatrix for det givne ligningssystem (1) ved multiplikation af en række med et tal $\neq 0$, har åbenbart samme løsningsmængde som (1); ("man har lov til at multiplicere en ligning med et tal $\neq 0$"). Tilsvarende gælder, at et ligningssystem, hvis udvidede koefficientmatrix fremgår af den udvidede koefficientmatrix for (1) ved at en række er adderet til en af de øvrige rækker, har samme løsningsmængde som (1); ("man har lov til at addere en ligning til en af de øvrige ligninger"). Under et kaldes disse to operationer for *simple omformninger*. Vi skal vise, at det givne ligningssystem (1) ved successive simple omformninger og eventuelle omnummereringer af ubekendte og ligninger kan overføres i et ligningssystem (*), hvis udvidede koefficientmatrix har følgende form (hvor a_{ij} og b_i naturligvis i almindelighed ikke betegner de samme tal som i (1)):

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & & & & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & & & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & b_m \end{pmatrix}$$

Hvis $\underline{\underline{A}}$ er nulmatricen, så har ligningssystemet den ønskede form (med $r = 0$). Hvis $\underline{\underline{A}}$ ikke er nulmatricen, kan man ved eventuel omnummerering af ligningerne opnå, at første række i $\underline{\underline{A}}$ ikke er nulrækken, hvorefter man ved eventuel omnummerering af de ubekendte kan opnå, at $a_{11} \neq 0$. Ved simple omformninger kan derefter opnås, at $a_{11} = 1$ og $a_{i1} = 0$ for $i \geqq 1$. Er herefter $a_{ij} = 0$ for $i,j \geqq 2$, har ligningssystemet den ønskede form. Ellers kan ved eventuel omnummerering af ligningerne, som ikke berører første ligning, opnås, at anden række i $\underline{\underline{A}}$ ikke er nulrækken. Ved derefter eventuelt at omnummerere de ubekendte, dog ikke den første, kan opnås, at $a_{22} \neq 0$. Herefter kan ved simple omformninger, som ikke involverer første række, opnås, at $a_{22} = 1$ og $a_{i2} = 0$ for $i \geqq 3$. Ved at fortsætte denne proces fås et ligningssystem (*) af den ønskede form.

Løsningsmængden til (*), og dermed løsningsmængden til (1), kan let bestemmes. Hvis $r < m$ og mindst et af tallene $b_{r+1},\dots,b_m$ er $\neq 0$, har (*) ingen løsninger. Hvis $r < m$ og $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$, har (*) for $r = 0$ hele L^n som løsningsmængde, og for $r > 0$ samme løsningsmængde som delsystemet bestående af de første r ligninger. Dette delsystem kan umiddelbart løses: For hvert valg af $x_{r+1},\dots,x_n$ kan x_r bestemmes af den r'te ligning, x_{r-1} derefter af den $(r-1)$'te ligning, etc; vi får altså netop en løsning $(x_1,\dots,x_n)$ for hvert valg af $x_{r+1},\dots,x_n$. Hvis endelig $r = n$, så er x_n bestemt ved den n'te ligning, x_{n-1} derefter ved den $(n-1)$'te ligning, etc; vi får altså netop en løsning.

1. Udregn alle produkter med to faktorer, som kan dannes af matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = (1 \ \ -1 \ \ 1), \quad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Udregn matrixprodukterne $\underline{\underline{a}}_{|}\underline{\underline{b}}_{-}$ og $\underline{\underline{b}}_{-}\underline{\underline{a}}_{|}$, hvor $\underline{a} = (a_1,\dots,a_n)$ og $\underline{b} = (b_1,\dots,b_n)$.

3. Udregn matrixprodukterne $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{C}}$, hvor $\underline{\underline{A}}$ er en vilkårlig $(m\times n)$-matrix, $\underline{\underline{B}}$ er en $(m\times m)$-diagonalmatrix og $\underline{\underline{C}}$ er en $(n\times n)$-diagonalmatrix.

4. Hvad kan siges om produktet af to $(n\times n)$-matricer, som begge er øvre trekantsmatricer?

5. Ved *sporet* $\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}$ af en kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$ forstås summen af matricens diagonalelementer. Vis, at der for hver $(m\times n)$-matrix $\underline{\underline{B}}$ og hver $(n\times m)$-matrix $\underline{\underline{C}}$ gælder $\mathrm{tr}(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}}) = \mathrm{tr}(\underline{\underline{C}}\underline{\underline{B}})$.

6. Lad $\underline{\underline{A}}$ være en vilkårlig $(n\times n)$-matrix, og lad $\underline{\underline{E}}_{\alpha\beta}$ være den $(n\times n)$-matrix, hvor elementet i α-te række og β-te søjle er 1, mens alle øvrige elementer er 0. Udregn matrixprodukterne $\underline{\underline{E}}_{\alpha\beta}\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}_{\alpha\beta}$. Bestem mængden af $(n\times n)$-matricer $\underline{\underline{B}}$ for hvilke $\underline{\underline{X}}\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\underline{\underline{X}}$ for enhver $(n\times n)$-matrix $\underline{\underline{X}}$.

7. Vis, at matrixaddition og matrixmultiplikation er kompositioner i mængden af (2×2)-matricer af formen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$, og vis, at mængden med disse kompositioner er isomorf med de komplekse tals legeme.

8. Angiv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en diagonalmatrix er regulær.

9. Udregn matrixproduktet

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

hvor a, b, c, d er vilkårlige tal fra L. Angiv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en (2×2)-matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

er regulær, og angiv dens eventuelle inverse.

10. Beregn samtlige potenser

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

og samtlige potenser

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Angiv ordenen af de to undergrupper af $GL(2, L)$, der udgøres af disse potenser.

11. Vis, at når en symmetrisk hhv. antisymmetrisk matrix er regulær, vil den inverse matrix ligeledes være symmetrisk hhv. antisymmetrisk. Vis, at ingen antisymmetrisk (3×3)-matrix er regulær.

12. Om en blokmatrix af formen

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}} \end{pmatrix}$$

forudsættes, at blokkene $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{C}}$ er kvadratiske. Vis, at matricen er regulær, hvis og kun hvis $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{C}}$ er regulære, og angiv i bekræftende fald den inverse i form af en tilsvarende blokmatrix.

13. Angiv matrixligningerne (m.h.t. den valgte basis) for de lineære afbildninger i 2. øv. 2.

14. Lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ være en basis for et vektorrum (U,L), og lad $(\underline{f}_1, \underline{f}_2)$ være en basis for et vektorrum (V,L). Angiv matrixligningen for den lineære afbildning $f : U \to V$ bestemt ved $f(\underline{e}_1) = \underline{f}_1$, $f(\underline{e}_2) = \underline{f}_2$, $f(\underline{e}_3) = \underline{f}_1 + \underline{f}_2$. Bestem endvidere kernen for f, samt originalmængden $f^{-1}(\underline{f}_1 + \underline{f}_2)$.

15. Lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ være en ortonormal basis i højrestilling for vektorrummet $(V, \mathbb{R})$ af geometriske vektorer i rummet. For en given vektor $\underline{a} \in V$ med koordinatsættet (a_1, a_2, a_3) betragtes den lineære afbildning $\underline{v} \mapsto \underline{a} \times \underline{v}$ af $(V, \mathbb{R})$ ind i $(V, \mathbb{R})$. Find den tilhørende matrix (m.h.t. den valgte basis).

Lad $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ være reelle tal med $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$. Angiv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} -a_3x_2 + a_2x_3 &= b_1 \\ a_3x_1 \qquad\quad - a_1x_3 &= b_2 \\ -a_2x_1 + a_1x_2 \qquad\quad &= b_3 \end{aligned}$$

har mindst een løsning $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, og bestem i bekræftende fald samtlige løsninger.

16. Lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ være en ortonormal basis for vektorrummet $(V, \mathbb{R})$ af geometriske vektorer i en given plan, og lad f og g være de lineære afbildninger af $(V, \mathbb{R})$ bestemt ved $f(\underline{e}_1) = \underline{e}_2$, $f(\underline{e}_2) = -\underline{e}_1$, $g(\underline{e}_1) = 2\underline{e}_1$, $g(\underline{e}_2) = \underline{e}_2$. Giv (eventuelt med støtte i regninger med matricer) geometriske beskrivelser af følgende afbildninger, idet e betegner den identiske afbildning af V: $(\sqrt{2})^{-1}(f+e)$, $\frac{1}{2}(g+e)$, $g - e$, $(g-e)\circ f \circ (g-e)$, $f \circ g \circ f^{-1}$.

17. Lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ være en basis for et vektorrum $(U, \mathbb{R})$, lad $(\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3)$ være en basis for et vektorrum $(V, \mathbb{R})$, og lad $f : U \to V$ være den lineære afbildning, som m.h.t. de betragtede baser har matrixligningen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestem matrixligningerne for samtlige lineære afbildninger $g : V \to U$ med egenskaben, at $g \circ f$ er den identiske afbildning af U.

18. Lad (V, L) være et vektorrum af dimension $n \in \mathbb{N}$. Vis, at vektorrummets automorfigruppe er isomorf med den generelle lineære gruppe af grad n over L.

19. Lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ være en basis for et vektorrum (V, L). Lad a, b og c være tal fra L, og sæt $\hat{\underline{e}}_1 = \underline{e}_1 + a\underline{e}_2 + b\underline{e}_3$, $\hat{\underline{e}}_2 = \underline{e}_2 + c\underline{e}_3$, $\hat{\underline{e}}_3 = \underline{e}_3$. Vis, at også sættet $(\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2, \hat{\underline{e}}_3)$ er en basis for V. Find koordinaterne til en vilkårlig vektor $\underline{v} \in V$ m.h.t. basen $(\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2, \hat{\underline{e}}_3)$ udtrykt ved dens koordinater m.h.t. basen $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Find også omvendt de sidstnævnte koordinater udtrykt ved de førstnævnte.

20. Vis, at sættet $(\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2, \hat{\underline{e}}_3)$ bestående af vektorerne $\hat{\underline{e}}_1 = (1,2,1)$, $\hat{\underline{e}}_2 = (3,3,0)$, $\hat{\underline{e}}_3 = (-1,0,2)$ er en basis for $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, og at sættet $(\hat{\underline{f}}_1, \hat{\underline{f}}_2)$ bestående af vektorerne $\hat{\underline{f}}_1 = (1,1)$, $\hat{\underline{f}}_2 = (1,-1)$ er en basis for $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er m.h.t. de kanoniske baser $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ hhv. $((1,0),(0,1))$ givet ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestem den til f hørende matrix $\hat{\underline{\underline{A}}}$ m.h.t. baserne $(\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2, \hat{\underline{e}}_3)$ og $(\hat{\underline{f}}_1, \hat{\underline{f}}_2)$.

21. Lad f være en lineær afbildning af et endelig-dimensionalt vektorrum (V,L) ind i sig selv, og lad $\underline{\underline{A}}$ være den til f hørende matrix m.h.t. en valgt basis for V. Ved *sporet* tr$f$ af f forstås da sporet tr$\underline{\underline{A}}$ af matricen $\underline{\underline{A}}$, (sml. øv. 5). Begrund, at definitionen er uafhængig af den valgte basis.

22. Lad (V,L) være et endelig-dimensionalt vektorrum. Bestem mængden af lineære afbildninger $f : V \to V$ med egenskaben, at der til f hører samme matrix for ethvert valg af basis for V.

23. En lineær afbildning f af et 3-dimensionalt vektorrum (U,L), hvori der er valgt en basis $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$, ind i et 2-dimensionalt vektorrum (V,L), hvori der er valgt en basis $(\underline{f}_1,\underline{f}_2)$, er med hensyn til de anførte baser givet ved matrixligningen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a-1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

hvor a er et tal tilhørende L. Angiv for enhver værdi af a afbildningens rang r. Bestem dernæst nye baser m.h.t. hvilke der til f hører matricen $\underline{\underline{E}}_{2,3}^{(r)}$. Angiv også de tilhørende koordinattransformationsmatricer $\underline{\underline{S}}$ og $\underline{\underline{T}}$, og gennemfør en kontrol ved at udregne $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$, hvor $\underline{\underline{A}}$ er ovenstående (2×3)-matrix.

24. Lad (V,L) og (V',L) være et par af endelig-dimensionale vektorrum i dualitet. Lad $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ og $(\hat{\underline{e}}_1,\dots,\hat{\underline{e}}_n)$ være baser for V, og lad $\underline{\underline{S}}$ være koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ til $(\hat{\underline{e}}_1,\dots,\hat{\underline{e}}_n)$. Bestem koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen mellem de tilsvarende duale baser for V'.

25. Bestem rangen af følgende matricer:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

26. Undersøg, om der for vilkårlige matricer $\underline{\underline{A}} \in M_{m,n}(L)$ og $\underline{\underline{B}} \in M_{n,p}(L)$ gælder $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \mathrm{rg}\underline{\underline{A}} \Rightarrow \mathrm{rg}\underline{\underline{B}} = n$ og $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \mathrm{rg}\underline{\underline{B}} \Rightarrow \mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = n$.

27. Vis, at der for vilkårlige matricer $\underline{\underline{A}} \in M_{m,n}(L)$ og $\underline{\underline{B}} \in M_{n,p}(L)$ gælder $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} + \mathrm{rg}\underline{\underline{B}} - n \leq \mathrm{rg}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$. Overvej, at der gælder lighedstegn for $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = n$ og for $\mathrm{rg}\underline{\underline{B}} = n$. Undersøg, om der kan gælde lighedstegn selv om $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} < n$ og $\mathrm{rg}\underline{\underline{B}} < n$.

28. Find de eventuelle løsninger $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

29. Find de eventuelle løsninger $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ til hvert af de følgende tre ligningssystemer med samme venstre side:

$$\begin{array}{rrrrrll} -2x_1 & & + 2x_3 & = 0, & = 1 & = 2 \\ 4x_1 & + 3x_2 & - x_3 & = 0, & = 0, & = 2 \\ & x_2 & + x_3 & = 0, & = 0, & = 2 \end{array}$$

30. Bestem mængden af de $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ for hvilke ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_3 &= b_2 \end{aligned}$$

har mindst een løsning $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, og find for hvert sådant (b_1, b_2) den fuldstændige løsning. Gennemfør det tilsvarende for ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= b_1 \\ -x_1 &= b_2 \\ x_1 + x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

KAPITEL 5. DETERMINANT.

5.1. ALTERNERENDE n-LINEARFORMER.

Ved en *n-linearform* på et vektorrum (V,L) forstås en afbildning $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n) \mapsto \Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n)$ af V^n ind i L med egenskaberne

(a) $\Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_i'+\underline{v}_i'',\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_n) =$
$$\Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_i',\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_n) + \Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_i'',\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_n),$$

(b) $\Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_{i-1},\lambda\underline{v}_i,\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_n) =$
$$\lambda\Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_i,\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_n).$$

Eller med andre ord: En n-linearform på (V,L) er en afbildning $\Phi : V^n \to L$, som er lineær i hver enkelt variabel, når de øvrige $n-1$ variable tillægges (vilkårlige) faste værdier. En n - linearform siges at være *ikke-triviel*, dersom den er forskellig fra *nulformen*, d.v.s. den konstante afbildning $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n) \mapsto 0$. En 1-linearform på V er det samme som en linearform på V. En 2-linearform på V er det samme som en bilinearform på $V\times V$, (sml. side 3.1.1); en sådan vil vi også kalde en bilinearform på V.

En n-linearform Φ på V siges at være *alternerende*, dersom der gælder

(c) $$\underline{v}_i = \underline{v}_j \wedge i \neq j \Rightarrow \Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_i,\dots,\underline{v}_j,\dots,\underline{v}_n) = 0,$$

altså dersom Φ's værdi er 0 på ethvert sæt, som indeholder samme vektor to gange.

Inden vi går i gang med en nøjere undersøgelse af alternerende n-linearformer skal vi vise følgende vigtige sætning:

Determinanten af en $(n\times n)$-matrix er en alternerende n-linearform i matricens søjler med værdien 1 på sættet af enhedsmatricens søjler.

Bemærkning. Sætningen er formuleret noget kortfattet. En fuldstændig formulering lyder f.eks. således: Den afbildning af $\mathrm{M}_{n,1}(L)^n$ ind i L, som til et n-sæt $(\underline{\underline{A}}_{n,1}^{(1)},\ldots,\underline{\underline{A}}_{n,1}^{(n)})$ af $(n\times 1)$-matricer lader svare determinanten af $(n\times n)$-matricen $\underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{A}}_{n,1}^{(1)} \ \ldots \ \underline{\underline{A}}_{n,1}^{(n)})$, er en alternerende n-linearform på $(\mathrm{M}_{n,1}(L),L)$ med værdien 1 på sættet $(\underline{\underline{\delta}}_{|1},\ldots,\underline{\underline{\delta}}_{|n})$.$\square$

Bevis. Lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$ være en $(n\times n)$-matrix. Determinanten af $\underline{\underline{A}}$ er summen af alle produkter af formen $\operatorname{sign} p\cdot a_{p(1)1}\cdots a_{p(n)n}$, hvor $p \in S_n$. Hvert af disse produkter indeholder som faktor netop et element fra $\underline{\underline{A}}$'s j'te søjle. Vi kan derfor skrive $\det\underline{\underline{A}}$ på formen

$$\det\underline{\underline{A}} = a_{1j}A_{1j}+\ldots+a_{nj}A_{nj},$$

hvor $A_{1j},\ldots,A_{nj}$ ikke afhænger af elementerne i j'te søjle. Heraf følger umiddelbart, at determinanten er lineær i j'te søjle, når alle øvrige søjler fastholdes; determinanten er altså en n-linearform i søjlerne.

Dernæst skal vises, at hvis den i'te søjle i $\underline{\underline{A}}$ er identisk med den j'te, hvor $i < j$, så er $\det\underline{\underline{A}} = 0$. Hertil inddeles S_n i to klasser,

$$S'_n = \{ p \in S_n \mid p(i) < p(j) \},$$

$$S''_n = \{ q \in S_n \mid q(i) > q(j) \}.$$

Betegnes med t transpositionen, som ombytter i og j, har vi $p \circ t \in S''_n$ for alle permutationer $p \in S'_n$. Afbildningen $p \mapsto p \circ t$ af S'_n ind i S''_n er oplagt injektiv; og da der for enhver permutation $q \in S''_n$ gælder $q \circ t \in S'_n$ og $q \circ t \mapsto q \circ t \circ t = q$, er afbildningen også surjektiv, og dermed bijektiv. Vi har derfor

$$\begin{aligned}
\det \underline{A} &= \sum_{p \in S'_n} \operatorname{sign} p \cdot a_{p(1)1} \cdots a_{p(n)n} + \sum_{q \in S''_n} \operatorname{sign} q \cdot a_{q(1)1} \cdots a_{q(n)n} \\
&= \sum_{p \in S'_n} \left(\operatorname{sign} p \cdot a_{p(1)1} \cdots a_{p(n)n} + \operatorname{sign}(p \circ t) \cdot a_{p \circ t(1)1} \cdots a_{p \circ t(n)n} \right) \\
&= \sum_{p \in S'_n} \operatorname{sign} p \cdot \left(a_{p(1)1} \cdots a_{p(n)n} - a_{p \circ t(1)1} \cdots a_{p \circ t(n)n} \right),
\end{aligned}$$

hvor der ved den sidste omskrivning er benyttet, at $\operatorname{sign}(p \circ t) = \operatorname{sign} p \cdot \operatorname{sign} t = -\operatorname{sign} p$. Imidlertid gælder

$$\begin{aligned}
& a_{p \circ t(1)1} \cdots a_{p \circ t(i)i} \cdots a_{p \circ t(j)j} \cdots a_{p \circ t(n)n} \\
= \ & a_{p(1)1} \cdots a_{p(j)i} \cdots a_{p(i)j} \cdots a_{p(n)n} \\
= \ & a_{p(1)1} \cdots a_{p(j)j} \cdots a_{p(i)i} \cdots a_{p(n)n} \\
= \ & a_{p(1)1} \cdots a_{p(i)i} \cdots a_{p(j)j} \cdots a_{p(n)n},
\end{aligned}$$

hvor der ved den næstsidste omskrivning er benyttet, at den i'te og den j'te søjle i $\underline{A}$ er identiske, og hvor den sidste omskrivning blot består i en omordning af faktorerne. Heraf fremgår, at alle led i den sidst opskrevne sum er 0, hvormed $\det \underline{A} = 0$.

Det skal endelig vises, at $\det\underline{\underline{E}} = 1$. Dette følger af, at man ved udregning af $\det\underline{\underline{E}}$ efter definitionen får bidraget 1 fra den identiske permutation, mens alle øvrige permutationer giver bidraget 0. ▯

I den følgende sætning opsummeres væsentlige egenskaber ved alternerende n-linearformer.

For en alternerende n-linearform Φ på et vektorrum (V,L) gælder:

(1) $\Phi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_{i-1},\underline{o},\underline{v}_{i+1},\ldots,\underline{v}_n) = 0.$

(2) $$\Phi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_i+\sum_{j\neq i}\lambda_j\underline{v}_j,\underline{v}_{i+1},\ldots,\underline{v}_n) = \Phi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_i,\underline{v}_{i+1},\ldots,\underline{v}_n).$$

(3) $\Phi(\underline{v}_{p(1)},\ldots,\underline{v}_{p(n)}) = \operatorname{sign}p\cdot\Phi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n),\quad p\in S_n.$

(4) $(\underline{v}_1\ldots\underline{v}_n) = (\underline{u}_1\ldots\underline{u}_n)\underline{\underline{A}} \Rightarrow \Phi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) = \det\underline{\underline{A}}\cdot\Phi(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n).$

Bevis. Påstand (1) fås ved indsættelse af $\lambda = 0$ i (b) Påstand (2) fås let ved anvendelse af (a), (b) og (c). For at bevise (3) er det tilstrækkeligt at vise, at

(5) $\Phi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_j,\ldots,\underline{v}_i,\ldots,\underline{v}_n) = -\Phi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_i,\ldots,\underline{v}_j,\ldots,\underline{v}_n);$

thi fortegnet for en permutation p, som kan sammensættes af m transpositioner, er $(-1)^m$. Ved anvendelse af (a) og (c) fås

$$
\begin{aligned}
0 &= \Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_i+\underline{v}_j,\dots,\underline{v}_i+\underline{v}_j,\dots,\underline{v}_n)\\
&= \Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_i,\dots,\underline{v}_i,\dots,\underline{v}_n) + \Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_i,\dots,\underline{v}_j,\dots,\underline{v}_n)\\
&+ \Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_j,\dots,\underline{v}_i,\dots,\underline{v}_n) + \Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_j,\dots,\underline{v}_j,\dots,\underline{v}_n)\\
&= \Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_i,\dots,\underline{v}_j,\dots,\underline{v}_n) + \Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_j,\dots,\underline{v}_i,\dots,\underline{v}_n),
\end{aligned}
$$

hvoraf (5), og dermed (3), følger. Sættes $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$, er relationen $(\underline{v}_1\dots\underline{v}_n) = (\underline{u}_1\dots\underline{u}_n)\underline{\underline{A}}$ ensbetydende med

$$\underline{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\underline{u}_i \qquad j = 1,\dots,n.$$

Ved brug af (a) og (b) får vi da

$$
\begin{aligned}
\Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n) &= \Phi\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}\underline{u}_{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\underline{u}_{i_n}\right)\\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1}\cdots a_{i_n n}\Phi(\underline{u}_{i_1},\dots,\underline{u}_{i_n}).
\end{aligned}
$$

Ved benyttelse af (c) ses, at det er tilstrækkeligt at summere over de sæt $(i_1,\dots,i_n)$, som består af indbyrdes forskellige elementer, d.v.s. over alle permutationer $\begin{pmatrix} 1\dots n \\ i_1\dots i_n\end{pmatrix}$ af mængden $\{1,\dots,n\}$. Vi får da

$$\Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n) = \sum_{p\in S_n} a_{p(1)1}\cdots a_{p(n)n}\Phi(\underline{u}_{p(1)},\dots,\underline{u}_{p(n)}).$$

Anvendes dernæst (3) fås endelig

$$\Phi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) = \sum_{p\in S_n} a_{p(1)1}\cdots a_{p(n)n}\cdot \mathrm{sign}p\cdot\Phi(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n)$$

$$= \det\underline{\underline{A}}\cdot\Phi(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n),$$

hvormed (4) er bevist. ▯

Vi skal herefter vise følgende hovedsætning:

Lad der i et n-dimensionalt vektorrum (V,L) være givet en basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$, og lad $k \in L$. Der findes da en og kun een alternerende n-linearform Φ på (V,L) med $\Phi(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n) = k$. For $(\underline{v}_1\ldots\underline{v}_n) = (\underline{e}_1\ldots\underline{e}_n)\underline{\underline{A}}$ gælder $\Phi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) = k\cdot\det\underline{\underline{A}}$.

Bevis. Lad $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n)$ være et vilkårligt sæt af n vektorer fra V, og lad $\underline{\underline{A}}$ være matricen, hvis j'te søjle er koordinatsøjlen for $\underline{v}_j$ m.h.t. den givne basis, altså

(6) $$(\underline{v}_1\ldots\underline{v}_n) = (\underline{e}_1\ldots\underline{e}_n)\underline{\underline{A}}.$$

Hvis nu Φ er en alternerende n-linearform med den ønskede egenskab, må der derfor ifølge (4) gælde

$$\Phi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) = \det\underline{\underline{A}}\cdot\Phi(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$$

$$= k\cdot\det\underline{\underline{A}}.$$

Afbildningen

$$(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) \mapsto \Psi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) = k\cdot\det\underline{\underline{A}},$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er bestemt ved (6), er altså den eneste mulige alternerende n-linearform med $\Psi(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n) = k$. At Ψ faktisk er en alternerende n-linearform med værdien k på sættet $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ følger let af, at determinanten af en $(n\times n)$-matrix - som ovenfor vist - er en alternerende n-linearform i søjlerne med værdien 1 på sættet af enhedsmatricens søjler. □

Til sidst vises:

Lad Φ være en ikke-triviel alternerende n-linearform på et n-dimensionalt vektorrum (V,L). Der gælder da $\Phi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) \neq 0$, hvis og kun hvis sættet $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n)$ er lineært uafhængigt.

Bevis. Af den foregående sætning fremgår, at hvis en alternerende n-linearform på V antager værdien 0 på en basis, så er den nulformen. Heraf følger, at hvis $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n)$ er et lineært uafhængigt sæt, så gælder $\Phi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) \neq 0$. Omvendt, antag at $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n)$ er et lineært afhængigt sæt. Da er mindst en af vektorerne en linearkombination af de øvrige, $\underline{v}_i = \sum_{j\neq i} \mu_j \underline{v}_j$. Benyttes nu (2) med $\lambda_j = -\mu_j$, og benyttes derefter (1), fås $\Phi(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) = 0$. □

5.2. DETERMINANT-SÆTNINGER.

Vi viser først to sætninger, som begge er simple konsekvenser af definitionen.

En kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$ *og dens transponerede* $\underline{\underline{A}}'$ *har samme determinant,* $\det\underline{\underline{A}} = \det\underline{\underline{A}}'$.

Bevis. Sættes $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$, har vi ifølge definitionen

$$\det\underline{\underline{A}}' = \sum_{q\in S_n} \operatorname{sign}q \cdot a_{1q(1)} \cdots a_{nq(n)}.$$

Ordnes faktorerne i et produkt $a_{1q(1)} \cdots a_{nq(n)}$ efter søjlenummeret, får produktet udseendet $a_{q^{-1}(1)1} \cdots a_{q^{-1}(n)n}$. Vi har derfor

$$\det\underline{\underline{A}}' = \sum_{q\in S_n} \operatorname{sign}q \cdot a_{q^{-1}(1)1} \cdots a_{q^{-1}(n)n}.$$

Det bemærkes nu, at $\operatorname{sign}q = \operatorname{sign}q^{-1}$, og at q^{-1} gennemløber S_n, når q gør det. Sættes derfor $q^{-1} = p$, fås som ønsket

$$\det\underline{\underline{A}}' = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sign}p \cdot a_{p(1)1} \cdots a_{p(n)n}. \ \square$$

Determinanten af en trekantsmatrix er lig med produktet af elementerne i diagonalen.

Bevis. Ifølge den foregående sætning er det tilstrækkeligt at betragte en øvre trekantsmatrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$, hvor altså $a_{ij} = 0$ for $i > j$. Lad p være en permutation i S_n, forskellig fra den identiske. Der findes da mindst et $j \in \{1,\ldots,n\}$ med $p(j) > j$, nemlig (i hvert fald) det mindste af tallene $1,\ldots,n$, som ved p ikke afbildes i sig selv. Vi har da $a_{p(j)j} = 0$, og dermed $\operatorname{sign} p \cdot a_{p(1)1} \cdots a_{p(n)n} = 0$. Heraf fremgår, at $\det \underline{\underline{A}} = \operatorname{sign} e \cdot a_{e(1)1} \cdots a_{e(n)n}$, hvor e betegner den identiske permutation, altså $\det \underline{\underline{A}} = a_{11} \cdots a_{nn}$, som påstået. □

Som vist er determinanten af en $(n \times n)$-matrix en alternerende n-linearform i søjlerne med værdien 1 på sættet af enhedsmatricens søjler, (sml. side 5.1.2). Af den første af de to sætninger ovenfor fremgår, at rækkerne kan træde i stedet for søjlerne. De følgende fire sætninger er derfor umiddelbare konsekvenser af hhv. (a), (b), (2) og (3) i forrige afsnit.

Adderes til den j'te søjle i en kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$ en søjlematrix $\underline{\underline{b}}_{|}$, så er determinanten af den fremkomne matrix lig med summen af $\det \underline{\underline{A}}$ *og determinanten af den matrix, som fremgår af $\underline{\underline{A}}$ ved at den j'te søjle erstattes med $\underline{\underline{b}}_{|}$. - Tilsvarende for rækkerne.*

Multipliceres den j'te søjle i en kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$ med en skalar λ, så er determinanten af den fremkomne matrix lig med $\lambda \cdot \det \underline{\underline{A}}$. *- Tilsvarende for rækkerne.*

Adderes til en søjle i en kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$ en linearkombination af de øvrige søjler, så har den fremkomne matrix samme determinant som $\underline{\underline{A}}$. - Tilsvarende for rækkerne. (Sådanne omformninger af matricen kaldes *søjleoperationer* hhv. *rækkeoperationer*.)

Underkastes søjlerne i en kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$ *en permutation p, så har den fremkomne matrix determinanten* sign$p\cdot$det$\underline{\underline{A}}$. - *Tilsvarende for rækkerne.*

Af en sætning i forrige afsnit (side 5.1.7) fremgår direkte:

Determinanten af en $(n\times n)$*-matrix er* $\neq 0$*, hvis og kun hvis sættet af søjler (rækker) er lineært uafhængigt.*

Idet en $(n\times n)$-matrix er regulær, hvis og kun hvis dens rang er n, (sml. side 4.4.2), har vi også:

Determinanten af en $(n\times n)$*-matrix er* $\neq 0$*, hvis og kun hvis matricen er regulær.*

Ved en *underdeterminant af p'te orden* af en (ikke nødvendigvis kvadratisk) matrix $\underline{\underline{A}}$ forstås determinanten af en $(p\times p)$-delmatrix af $\underline{\underline{A}}$. Idet rangen af en fra $\underline{\underline{0}}_{m,n}$ forskellig $(m\times n)$-matrix $\underline{\underline{A}}$ er r, hvis og kun hvis $\underline{\underline{A}}$ har en regulær $(r\times r)$-delmatrix, men ingen regulær delmatrix med større række- og søjleantal, (sml. side 4.4.2), følger af den foregående sætning:

Rangen af en fra $\underline{\underline{0}}_{m,n}$ *forskellig* $(m\times n)$*-matrix* $\underline{\underline{A}}$ *er det største af de naturlige tal p for hvilke* $\underline{\underline{A}}$ *har en fra 0 forskellig underdeterminant af p'te orden.*

Lad $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ være $(n\times n)$-matricer. Betegnes med $\underline{\underline{a}}_{|j}$ og $\underline{\underline{c}}_{|j}$ den j'te søjle i hhv. $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{AB}}$, gælder trivielt

$$(\underline{\underline{c}}_{|1}\cdots\underline{\underline{c}}_{|n}) = (\underline{\underline{a}}_{|1}\cdots\underline{\underline{a}}_{|n})\underline{\underline{B}},$$

thi $(\underline{\underline{a}}_{|1}\cdots\underline{\underline{a}}_{|n}) = \underline{\underline{A}}$ og $(\underline{\underline{c}}_{|1}\cdots\underline{\underline{c}}_{|n}) = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$. Ligningen gælder imidlertid også, dersom man opfatter $(\underline{\underline{a}}_{|1}\cdots\underline{\underline{a}}_{|n})$ og $(\underline{\underline{c}}_{|1}\cdots\underline{\underline{c}}_{|n})$ som række(vektor)matricer med elementer fra vektorrummet $M_{n,1}(L)$. Af et resultat i forrige afsnit ((4), side 5.1.4) følger derfor:

For to (n×n)-matricer $\underline{\underline{A}}$ *og* $\underline{\underline{B}}$ *gælder* $\det(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}) = \det\underline{\underline{A}}\cdot\det\underline{\underline{B}}$.

Idet $\det\underline{\underline{E}} = 1$, følger umiddelbart heraf:

For en regulær matrix $\underline{\underline{A}}$ *gælder* $\det\underline{\underline{A}}\cdot\det\underline{\underline{A}}^{-1} = 1$.

For en ortogonal hhv. unitær matrix $\underline{\underline{A}}$ gælder $\det\underline{\underline{A}}^{-1} = \det\underline{\underline{A}}' = \det\underline{\underline{A}}$ hhv. $\det\underline{\underline{A}}^{-1} = \det\overline{\underline{\underline{A}}'} = \overline{\det\underline{\underline{A}}'} = \overline{\det\underline{\underline{A}}}$; af den foregående sætning følger derfor:

For en ortogonal eller unitær matrix $\underline{\underline{A}}$ *gælder* $|\det\underline{\underline{A}}| = 1$.

5.3. UDVIKLING AF DETERMINANT.

Lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$ være en $(n\times n)$-matrix. Som tidligere bemærket kan vi for ethvert $j \in \{1,\dots,n\}$ skrive $\det\underline{\underline{A}}$ på formen

$$\det\underline{\underline{A}} = a_{1j}A_{1j}+\dots+a_{nj}A_{nj},$$

hvor $A_{1j},\dots,A_{nj}$ ikke afhænger af elementerne i den j'te søjle; tallet A_{ij} kaldes *komplementet* til elementet a_{ij}. Det ses umiddelbart, at for ethvert $i \in \{1,\dots,n\}$ er A_{ij} determinanten af den matrix, som fremgår af $\underline{\underline{A}}$ ved at den j'te søjle udskiftes med den i'te søjle i $\underline{\underline{E}}$, altså

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Idet ombytning af to søjler eller to rækker bevirker fortegnsskift for determinanten, får vi

$$A_{ij} = (-1)^{n-j}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} & 1 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-j}\cdot(-1)^{n-i}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} & 1 \end{vmatrix}$$

Ved udregning af den sidst opskrevne determinant efter definitionen kommer der åbenbart kun bidrag til summen fra de permutationer $p \in S_n$ for hvilke $p(n) = n$. Det er let at se, at for en sådan permutation p har restriktionen $\tilde{p}$ til $\{1,\ldots,n-1\}$ samme fortegn som p. Betegnes derfor med $\underline{\underline{A}}_{ij}$ den delmatrix af $\underline{\underline{A}}$, som fås ved at stryge i'te række og j'te søjle, har vi

$$\begin{aligned} A_{ij} &= (-1)^{n-j}(-1)^{n-i}\det\underline{\underline{A}}_{ij} \\ &= (-1)^{i+j}\det\underline{\underline{A}}_{ij}. \end{aligned}$$

Ialt får vi derfor

$$(1) \qquad \det\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det\underline{\underline{A}}_{ij},$$

som kaldes formlen for *udvikling af* $\det\underline{\underline{A}}$ *efter* j*'te søjle*.

Ved udvikling af $\det\underline{\underline{A}}'$ efter i'te søjle fås

$$\det\underline{\underline{A}}' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(\underline{\underline{A}}_{ij})'.$$

Idet $\det\underline{\underline{A}}' = \det\underline{\underline{A}}$ og $\det(\underline{\underline{A}}_{ij})' = \det\underline{\underline{A}}_{ij}$, har vi altså

(2) $$\det\underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det\underline{\underline{A}}_{ij},$$

som kaldes formlen for *udvikling af* $\det\underline{\underline{A}}$ *efter* i*'te række*.

BESTEMMELSE AF INVERS MATRIX. Det foregående kan udnyttes til at angive den inverse til en regulær matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$. Erstattes den j'te søjle i $\underline{\underline{A}}$ med den k'te, hvor $j \neq k$, fås en matrix med to ens søjler. Dens determinant er følgelig 0. Ved udvikling efter den j'te søjle får vi derfor

(3) $$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+j}\det\underline{\underline{A}}_{ij} = 0.$$

Idet $\det\underline{\underline{A}} \neq 0$, giver (1) og (3)

(4) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+j}\det\underline{\underline{A}}_{ij}}{\det\underline{\underline{A}}} a_{ik} = \delta_{jk}.$$

Sættes

$$\frac{(-1)^{i+j}\det\underline{\underline{A}}_{ij}}{\det\underline{\underline{A}}} = b_{ij},$$

og sættes derefter $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})_{n,n}$, har vi altså ifølge (4)

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{ik} = \delta_{jk},$$

og dermed $\underline{\underline{B}}'\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$. Heraf følger, at $\underline{\underline{B}}' = \underline{\underline{B}}'\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}$, altså

$$(5) \qquad \underline{\underline{A}}^{-1} = \left(\frac{(-1)^{i+j} \det \underline{\underline{A}}_{ij}}{\det \underline{\underline{A}}} \right)'_{i=1,\dots,n;\, j=1,\dots,n}$$

Den inverse til en regulær matrix $\underline{\underline{A}}$ kan altså udregnes som den transponerede til den matrix, hvis element i i'te række og j'te søjle er $(-1)^{i+j}\det\underline{\underline{A}}_{ij}$ divideret med $\det\underline{\underline{A}}$.

CRAMER'S FORMLER. Vi skal til sidst angive den entydigt bestemte løsning til et Cramer'sk ligningssystem, (sml. side 4.5.4). Skrives ligningssystemet på formen $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{b}}_|$, (sml. side 4.5.1), er løsningen åbenbart bestemt ved $\underline{\underline{x}}_| = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{b}}_|$. Ved brug af (5) fås da

$$(6) \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{i+j}\det\underline{\underline{A}}_{ji}}{\det\underline{\underline{A}}}\, b_j, \quad i = 1,\dots,n.$$

Idet udvikling af $\det(\underline{\underline{a}}_{|1}\cdots\underline{\underline{a}}_{|i-1}\underline{\underline{b}}_|\underline{\underline{a}}_{|i+1}\cdots\underline{\underline{a}}_{|n})$ efter i'te søjle giver

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(-1)^{i+j}\det\underline{\underline{A}}_{ji},$$

kan (6) omskrives til

$$(7) \qquad x_i = \frac{\det(\underline{\underline{a}}_{|1}\cdots\underline{\underline{a}}_{|i-1}\underline{\underline{b}}_|\underline{\underline{a}}_{|i+1}\cdots\underline{\underline{a}}_{|n})}{\det\underline{\underline{A}}}, \quad i = 1,\dots,n.$$

Formlerne (7) til beregning af løsningen $(x_1,\dots,x_n)$ kaldes Cramer's formler.

1. Som bekendt (sml. side 5.1.6) er to vilkårlige ikke-trivielle alternerende n-linearformer (i det følgende blot kaldet "former") Φ_1 og Φ_2 på et n-dimensionalt vektorrum (V,L) proportionale, idet der findes en og kun een skalar $\lambda \in L \setminus \{0\}$, således at $\Phi_2 = \lambda\Phi_1$. Dette leder for $L = \mathbb{R}$ til begrebet *orientering*.
To former Φ_1 og Φ_2 på et reelt n-dimensionalt vektorrum $(V,\mathbb{R})$ siges at være ækvivalente, dersom den tilhørende proportionalitetsfaktor λ er positiv. Overvej, at der herved er defineret en ækvivalensrelation i mængden af former på $(V,\mathbb{R})$ med to ækvivalensklasser. Hver af disse to klasser kaldes en orientering af $(V,\mathbb{R})$. Vektorrummet siges at være orienteret, dersom der er valgt en orientering; enhver form tilhørende den valgte orientering siges da at repræsentere orienteringen. Er vektorrummet orienteret, siges en basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ at være positiv, dersom $\Phi(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n) > 0$ for en, og dermed enhver af de repræsenterende former Φ; er $\Phi(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n) < 0$, siges basen at være negativ.
Uafhængigt af valg af orientering siges to baser $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ for et n-dimensionalt vektorrum $(V,\mathbb{R})$ at være ens eller modsat orienterede efter som der for en og dermed enhver form Φ gælder, at Φ's værdi på $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ har samme eller modsat fortegn. Vis, at $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ er ens eller modsat orienterede efter som koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$ hørende til overgangen fra $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ til $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ har positiv eller negativ determinant.

2. Lad (V,L) og (V',L) være et par af n-dimensionale vektorrum i dualitet, og lad Φ være en ikke-triviel alternerende n-linearform på V. En afbildning $\Phi' : V'^n \to L$ defineres på følgende måde: Er $(\underline{v}_1',\dots,\underline{v}_n') \in V'^n$ et lineært afhængigt sæt, sættes $\Phi'(\underline{v}_1',\dots,\underline{v}_n') = 0$. Er $(\underline{v}_1',\dots,\underline{v}_n') \in V'^n$ et lineært uafhængigt sæt, og dermed en basis for V', sættes $\Phi'(\underline{v}_1',\dots,\underline{v}_n') = (\Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n))^{-1}$, hvor $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n)$ betegner den til $(\underline{v}_1',\dots,\underline{v}_n')$ duale basis for V. Vis, at Φ' er en ikke-triviel alternerende n-linearform på V'; den siges at være dual til Φ. Vis endvidere, at der for vilkårlige sæt $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n) \in V^n$ og $(\underline{v}_1',\dots,\underline{v}_n') \in V'^n$ gælder

$$\Phi(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n)\cdot\Phi'(\underline{v}_1',\dots,\underline{v}_n') = \det(\langle\underline{v}_i,\underline{v}_j'\rangle)_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,n}.$$

3. Udregn determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & \dots & c_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ c_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Udregn determinanterne

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

5. Udregn determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2 \end{vmatrix}$$

6. Vis, at determinantan af en antisymmetrisk $(n \times n)$-matrix er 0, når n er ulige.

7. I en $(n \times n)$-matrix er alle elementer i diagonalen lig med tallet a og alle øvrige elementer lig med tallet b. Udregn matricens determinant.

8. Udregn determinanten

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

9. Vis, f.eks. ved induktion efter n, at

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i,j \\ i<j}}^{n} (a_j - a_i)$$

(Vandermonde's determinant.)

10. Lad f være en lineær afbildning af et endelig-dimensionalt vektorrum (V,L) ind i sig selv, og lad $\underline{\underline{A}}$ være den til f hørende matrix m.h.t. en valgt basis for V. Ved determinanten $\det f$ af f forstås da determinanten $\det \underline{\underline{A}}$ af matricen $\underline{\underline{A}}$. Begrund, at definitionen er uafhængig af den valgte basis.

11. Beregn den inverse til hver af matricerne

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Vis, at den inverse til en regulær trekantsmatrix igen er en trekantsmatrix, og angiv dennes elementer i diagonalen.

13. Lad (V,L) være et 3-dimensionalt vektorrum, hvori der er valgt en basis $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$. For hvert $a \in L$ betegnes med f_a den lineære afbildning af V ind i V, som m.h.t. den valgte basis har matrixligningen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & a \\ 1 & a & 1 \\ -1 & -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Bestem mængden af de $a \in L$ for hvilke f_a er bijektiv, og find for sådanne a matrixligningen for f_a^{-1}.

14. Bestem mængden af de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ for hvilke ligningssystemet

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= b \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

har mindst en løsning $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, og find for ethvert sådant (a,b) den fuldstændige løsning.

15. Lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{i=1,\dots,n-1;\,j=1,\dots,n}$ være en reel $((n-1)\times n)$-matrix, og sæt

$$A_j = (-1)^j \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j+1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

for $j = 1,\dots,n$. Vis, at $(A_1,\dots,A_n)$ er løsning til ligningssystemet

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + \dots + & a_{1n}x_n & = 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 & + \dots + & a_{n-1,n}x_n & = 0 \end{matrix}$$

og find for $\mathrm{rg}\underline{\underline{A}} = n - 1$ den fuldstændige løsning.

KAPITEL 6. NORMALFORMER FOR MATRICER.

6.1. EGENVÆRDIER OG EGENVEKTOR.

Lad i det følgende f være en endomorfi af et vektorrum (V,L).

Et underrum U af V siges at være *invariant* ved f, dersom $f(U) \subseteq U$; at U er invariant kommer således ud på, at restriktionen af f til U er en endomorfi af U. Det er trivielt, at $\{\underline{o}\}$ og V er invariante underrum; også f's kerne er invariant.

En skalar $\lambda \in L$ siges at være en *egenværdi* for f, dersom der findes en vektor $\underline{v} \in V \setminus \{\underline{o}\}$, således at $f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$. En vektor $\underline{v} \in V \setminus \{\underline{o}\}$ siges at være en *egenvektor* for f, dersom der findes en skalar $\lambda \in L$, således at $f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$. Gælder $f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$ for en skalar λ og en vektor $\underline{v} \neq \underline{o}$, siges $\underline{v}$ at være en til λ hørende egenvektor, og λ siges at være den til $\underline{v}$ hørende egenværdi. Det noteres, at en vektor er en egenvektor, hvis og kun hvis den frembringer et 1-dimensionalt invariant underrum.

Lad e betegne den identiske afbildning af V. For enhver skalar $\lambda \in L$ er da afbildningen $f - \lambda e$ en endomorfi af V. Kernen $K_{f-\lambda e}$ for $f - \lambda e$ kaldes *egenrummet* hørende til λ, og betegnes kort K_λ. Dimensionen af K_λ kaldes *egenværdimultipliciteten* (eller den geometriske multiplicitet) for λ, og betegnes $\text{em}\lambda$. Idet $f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$ er ensbetydende med $(f-\lambda e)(\underline{v}) = \underline{o}$, ses, at λ er en egenværdi, hvis og kun hvis $\text{em}\lambda \geq 1$; de til λ hørende egenvektorer er da netop de fra $\underline{o}$ forskellige vektorer i K_λ. Bemærk i øvrigt, at $\text{em}\lambda \geq 1$ er ensbetydende med, at $f - \lambda e$ er ikke-injektiv.

Det noteres, at hvis λ er en egenværdi, så er K_λ et invariant underrum, og $f : K_\lambda \to K_\lambda$ er en homoteti med faktor λ. Er omvendt U et invariant underrum forskelligt fra $\{\underline{o}\}$ med egenskaben, at $f : U \to U$ er en homoteti med faktor λ, så er λ en egenværdi og $U \subseteq K_\lambda$. Kendskab til egenværdierne og de tilhørende egenrum giver således fuldstændigt kendskab til de invariante underrum U med egenskaben, at $f : U \to U$ er en homoteti.

Vi skal herefter forudsætte, at (V,L) har endelig dimension $n \in \mathbb{N}$. (Påstandene (1) og (2) i den følgende sætning gælder dog også uden denne forudsætning.)

Lad $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ være (indbyrdes forskellige) egenværdier for f. Da gælder:

(1) *Ethvert sæt $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$, hvor $\underline{v}_i$ er en egenvektor hørende til λ_i, $i = 1,\ldots,p$, er lineært uafhængigt.*

(2) *Egenrummene $K_{\lambda_1},\ldots,K_{\lambda_p}$ danner direkte sum.*

(3) *Summen af egenværdimultipliciteterne er højst n, altså $\mathrm{em}\lambda_1+\ldots+\mathrm{em}\lambda_p \leqq n$.*

Bevis. Påstanden (1) vises ved induktion efter p. Da egenvektorer ifølge definitionen er $\neq \underline{o}$, er ethvert sæt bestående af een egenvektor lineært uafhængigt; dette sikrer induktionens start. Antag herefter, at påstanden er rigtig for ethvert sæt af den betragtede art bestående af $p - 1$ vektorer, hvor $p \geqq 2$, og lad $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ være et sæt af egenvektorer hørende til indbyrdes forskellige egenværdier $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$. Lad

$$\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_p\underline{v}_p = \underline{o}$$

være en lineær relation mellem vektorerne i sættet. Der gælder da dels

$$\begin{aligned} f(\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_p\underline{v}_p) &= f(\underline{o}) \\ &= \underline{o}, \end{aligned}$$

og dels

$$\begin{aligned} f(\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_p\underline{v}_p) &= \alpha_1 f(\underline{v}_1)+\ldots+\alpha_p f(\underline{v}_p) \\ &= \alpha_1\lambda_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_p\lambda_p\underline{v}_p, \end{aligned}$$

altså

$$\alpha_1\lambda_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_p\lambda_p\underline{v}_p = \underline{o}.$$

Multipliceres den givne relation med λ_p, og subtraheres den derefter fra den sidst opskrevne, fås

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_p)\underline{v}_1+\ldots+\alpha_{p-1}(\lambda_{p-1}-\lambda_p)\underline{v}_{p-1} = \underline{o}.$$

Ved brug af induktionsantagelsen kan heraf sluttes, at $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_p) = \ldots = \alpha_{p-1}(\lambda_{p-1}-\lambda_p) = 0$, og dermed, idet $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ er indbyrdes forskellige, at $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$. Ved indsættelse i den givne relation sluttes endelig, at også $\alpha_p = 0$. Hermed er (1) bevist.

Påstanden (2) kommer ud på, at man af $\underline{v}_1+\ldots+\underline{v}_p = \underline{o}$, $\underline{v}_1 \in K_{\lambda_1},\ldots,\underline{v}_p \in K_{\lambda_p}$, kan slutte, at $\underline{v}_1 = \ldots = \underline{v}_p = \underline{o}$, (sml. side 1.5.6). Dette fås let ved brug af (1).

Påstanden (3) følger af (2), (sml. side 1.5.6). ▯

Vi noterer en triviel konsekvens af (3):

Endomorfien f har højst n egenværdier.

Vi skal sige, at f er *diagonaliserbar*, dersom der findes en basis for V m.h.t. hvilken den til f hørende matrix er en diagonalmatrix. Det er oplagt, at f er diagonaliserbar, hvis og kun hvis der findes en basis bestående af egenvektorer.

Endomorfien f er diagonaliserbar, hvis og kun hvis den har mindst en egenværdi og der gælder $\mathrm{em}\lambda_1+\ldots+\mathrm{em}\lambda_p = n$, *hvor* $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ *er samtlige egenværdier for f. Er f diagonaliserbar, så er de til f hørende diagonalmatricer netop de diagonalmatricer hvis diagonalelementer er egenværdierne, idet hver egenværdi λ forekommer* $\mathrm{em}\lambda$ *gange.*

Bevis. Antag, at f har egenværdierne $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, og at der gælder $\mathrm{em}\lambda_1+\ldots+\mathrm{em}\lambda_p = n$. Sammenholdes dette med (2) fås $K_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus K_{\lambda_p} = V$, (sml. side 1.5.6). Vælges en basis for hvert af underrummene K_{λ_i}, og sammenstykkes disse baser til eet sæt af vektorer, fås derfor en basis for V bestående af egenvektorer. Følgelig er f diagonaliserbar.

Antag omvendt, at f er diagonaliserbar, og lad $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ være en basis bestående af egenvektorer. Der er da mindst en egenværdi; lad $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ være samtlige egenværdier, og lad m_i betegne antallet af vektorer i basen, som hører til egenværdien λ_i, $i = 1,\dots,p$. Vi har da $m_1+\dots+m_p = n$ og $0 \leqq m_i \leqq \mathrm{em}\lambda_i$. Sammenholdes dette med (3) fås $m_i = \mathrm{em}\lambda_i$ for $i = 1,\dots,p$, og dermed som ønsket $\mathrm{em}\lambda_1+\dots+\mathrm{em}\lambda_p = n$.

Antag endelig, at f er diagonaliserbar, og lad $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ være en basis bestående af egenvektorer. Af det ovenfor beviste fremgår, at den tilhørende diagonalmatrix har den omtalte form. En vilkårlig anden diagonalmatrix af den omtalte form er da også en til f hørende matrix, nemlig m.h.t. en basis af formen $(\underline{e}_{q(1)},\dots,\underline{e}_{q(n)})$, hvor $q \in S_n$. $\square$

Hvis f er diagonaliserbar, så har vi ifølge det foregående $K_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus K_{\lambda_p} = V$, hvor $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ er de indbyrdes forskellige egenværdier. Lad pr_i betegne projektionen af V på K_{λ_i} langs $K_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus K_{\lambda_{i-1}}\oplus K_{\lambda_{i+1}}\oplus\dots\oplus K_{\lambda_p}$. Der gælder da åbenbart

$$f = \lambda_1 pr_1+\dots+\lambda_p pr_p. \tag{4}$$

Vi siger, at (4) er en *spektralfremstilling* af f. Omvendt er det let at vise, at hvis det om f er givet, at der findes underrum $U_1,\dots,U_q$ af V og indbyrdes forskellige skalarer $\mu_1,\dots,\mu_q \in L$, således at $U_1\oplus\dots\oplus U_1 = V$, og således at $f = \mu_1 pr_1+\dots+\mu_q pr_q$, hvor pr_i betegner projektionen af V på U_i langs $U_1\oplus\dots\oplus U_{i-1}\oplus U_{i+1}\oplus\dots\oplus U_q$, så er $\mu_1,\dots,\mu_q$ netop egenværdierne for f, og underrummene U_i er de tilhørende egenrum, (og f er altså diagonaliserbar).

Eksempel. En endomorfi f af et vektorrum (V,L) siges at være *idempotent*, dersom $f^2 = f$. Lad f være en sådan afbildning, og antag, at $\dim V \geq 1$. For enhver eventuel egenværdi λ og tilhørende egenvektor $\underline{v}$ gælder da $\lambda^2\underline{v} = \lambda\underline{v}$, altså $\lambda^2 = \lambda$. Kun 0 og 1 kan altså være egenværdier for f. Det påstås, at $K_0 \oplus K_1 = V$. Da summen af K_0 og K_1 vides at være direkte, er det tilstrækkeligt at vise, at enhver vektor $\underline{v} \in V$ kan fremstilles som sum af en vektor i K_0 og en vektor i K_1. En sådan fremstilling er givet ved $\underline{v} = (\underline{v}-f(\underline{v})) + f(\underline{v})$. Thi $f(\underline{v}-f(\underline{v})) = f(\underline{v}) - f^2(\underline{v}) = \underline{o} = o(\underline{v}-f(\underline{v}))$, og $f(f(\underline{v})) = f^2(\underline{v}) = 1\cdot f(\underline{v})$. (Bemærk, at for $f = e$ er kun 1 egenværdi, og for $f = o$, hvor o betegner nulafbildningen, er kun 0 egenværdi; for alle andre idempotente endomorfier f er både 0 og 1 egenværdi.) Det ses, at f er parallelprojektionen af V på K_1 langs K_0. Idet omvendt enhver parallelprojektion er idempotent, følger, at de idempotente endomorfier af V netop er parallelprojektionerne.

Eksempel. En endomorfi f af et vektorrum (V,L) siges at være *nilpotent*, dersom der findes et $p \in \mathbb{N}$, således at $f^p = o$, hvor o betegner nulafbildningen af V. Lad f være en sådan afbildning, og antag, at $\dim V \geq 1$. Idet o ikke er injektiv, kan f ikke være injektiv. Tallet 0 er altså egenværdi for f. På den anden side gælder, som man let ser, at hvis λ er egenværdi for en endomorfi g, så er λ^p egenværdi for g^p. Da o $(= f^p)$ ikke har andre egenværdier end 0, sluttes, at f ikke har andre egenværdier end 0.

6.2. KARAKTERISTISK POLYNOMIUM.

To matricer $\underline{\underline{A}},\underline{\underline{B}} \in M_{n,n}(L)$ siges at være *regulær-ækvivalente*, dersom der findes en regulær matrix $\underline{\underline{S}} \in M_{n,n}(L)$, således at $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{S}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{S}}^{-1}$. Det eftervises let, at den herved definerede relation i $M_{n,n}(L)$ er en ækvivalensrelation. Det noteres (sml. side 4.3.3), at to matricer fra $M_{n,n}(L)$ er regulær-ækvivalente, hvis og kun hvis de hører til de samme endomorfier af et n-dimensionalt vektorrum over L for forskellige basisvalg. (Heraf ses i øvrigt på ny, at relationen er en ækvivalensrelation.)

Ved det *karakteristiske polynomium* for en matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) \in M_{n,n}(L)$ forstås polynomiet

$$p_{\underline{\underline{A}}}(t) = \det(\underline{\underline{A}}-t\underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-t \end{vmatrix}$$

hvor vi både for $L = \mathbb{R}$ og $L = \mathbb{C}$ skal opfatte t som en kompleks variabel. Det ses, at $p_{\underline{\underline{A}}}(t)$ har grad n. De komplekse rødder i $p_{\underline{\underline{A}}}(t)$ kaldes $\underline{\underline{A}}$'s *karakteristiske rødder*. Ved *rodmultipliciteten* (eller den algebraiske multiplicitet) $\text{rm}\lambda$ af et komplekst tal λ forstås multipliciteten af λ som rod i $p_{\underline{\underline{A}}}(t)$; der gælder altså $\text{rm}\lambda \geq 1$, hvis og kun hvis λ er en karakteristisk rod. Er $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ de indbyrdes forskellige karakteristiske rødder for $\underline{\underline{A}}$, gælder som bekendt $\text{rm}\lambda_1+\ldots+\text{rm}\lambda_p = n$.

Regulær-ækvivalente matricer har samme karakteristiske polynomium.

Bevis. Antag, at $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$. For ethvert $t \in \mathbb{C}$ gælder da

$$\begin{aligned}
\det(\underline{\underline{B}}-t\underline{\underline{E}}) &= \det(\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}-t\underline{\underline{E}}) \\
&= \det(\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}-\underline{\underline{S}}(t\underline{\underline{E}})\underline{\underline{S}}^{-1}) \\
&= \det\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{A}}-t\underline{\underline{E}})\underline{\underline{S}}^{-1} \\
&= \det\underline{\underline{S}}\ \det(\underline{\underline{A}}-t\underline{\underline{E}})\det\underline{\underline{S}}^{-1} \\
&= \det(\underline{\underline{A}}-t\underline{\underline{E}}),
\end{aligned}$$

hvormed $p_{\underline{\underline{B}}}(t) = p_{\underline{\underline{A}}}(t)$. □

Lad herefter f være en endomorfi af et n-dimensionalt vektorrum (V,L), og lad $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$ være den til f hørende matrix m.h.t. en valgt basis. Af det foregående fremgår, at det har god mening at definere det *karakteristiske polynomium* $p_f(t)$ for f som det karakteristiske polynomium for $\underline{\underline{A}}$. Rødderne i det karakteristiske polynomium kaldes da også for f's *karakteristiske rødder*, og ved *rodmultipliciteten* af et tal $\lambda \in \mathbb{C}$ m.h.t. f forstås rodmultipliciteten af λ m.h.t. $\underline{\underline{A}}$.

For en vilkårlig skalar $\lambda \in L$ er emλ defineret som dimensionen af kernen for $f - \lambda e$. Idet der til $f - \lambda e$ m.h.t. den valgte basis hører matricen $\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}$, følger umiddelbart af kendte sætninger (sml. side 2.2.2 og side 4.2.4):

For enhver skalar $\lambda \in L$ *gælder* $\mathrm{em}\lambda = n - \mathrm{rg}(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}})$.

Af denne sætning fremgår, at en skalar $\lambda \in L$ er en egenværdi for f, hvis og kun hvis $n - \mathrm{rg}(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}) \geq 1$, altså hvis og kun hvis $\mathrm{rg}(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}) < n$. Dette sidste er ensbetydende med, at $\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}$ er ikke-regulær, (sml. side 4.4.2), hvilket igen er ensbetydende med, at $\det(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}) = 0$, (sml. side 5.2.3). Vi får derfor:

Egenværdierne for f *er de karakteristiske rødder for* f*, som tilhører* L*. For* $L = \mathbb{C}$ *er altså egenværdierne netop de karakteristiske rødder, for* $L = \mathbb{R}$ *er egenværdierne de eventuelle reelle karakteristiske rødder.*

Vi skal dernæst vise:

For enhver skalar $\lambda \in L$ *gælder* $\mathrm{em}\lambda \leq \mathrm{rm}\lambda$.

Bevis. For $\mathrm{em}\lambda = 0$ er der intet at vise. Antag, at $\mathrm{em}\lambda \geq 1$, og vælg en basis for V, således at de første $\mathrm{em}\lambda$ vektorer udgør en basis for K_λ. Den til f hørende matrix m.h.t. en sådan basis får da formen

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{pmatrix} \lambda\underline{\underline{E}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}} \end{pmatrix}$$

hvor $\underline{\underline{E}}$ er en $(\mathrm{em}\lambda \times \mathrm{em}\lambda)$-enhedsmatrix. Ved successiv udvikling af $\det(\underline{\underline{A}}_1-t\underline{\underline{E}})$ efter de første $\mathrm{em}\lambda$ søjler fås
$\det(\underline{\underline{A}}_1-t\underline{\underline{E}}) = (\lambda-t)^{\mathrm{em}\lambda}\cdot q(t)$, hvor $q(t) = \det(\underline{\underline{C}}-t\underline{\underline{E}})$. Heraf fremgår umiddelbart, at $\mathrm{em}\lambda \leq \mathrm{rm}\lambda$. $\square$

Vi har tidligere fundet en "geometrisk" karakterisering af de diagonaliserbare endomorfier, (sml. side 6.1.4). Ved brug af det foregående kan vi nu få en "algebraisk" karakterisering:

Endomorfien f *er diagonaliserbar, hvis og kun hvis alle dens karakteristiske rødder tilhører* L *og der for enhver karakteristisk rod* λ *gælder* $\mathrm{rm}\lambda = n - \mathrm{rg}(f-\lambda e)$. *Er* f *diagonaliserbar, så er de til* f *hørende diagonalmatricer netop de diagonalmatricer hvis diagonalelementer er de karakteristiske rødder, idet hver karakteristisk rod* λ *forekommer* $\mathrm{rm}\lambda$ *gange.*

Bevis. Det vides, at summen af rodmultipliciteterne for samtlige karakteristiske rødder er n. I det foregående er vist, at hvis λ er en egenværdi, så er λ også en karakteristisk rod, og der gælder $\mathrm{em}\lambda = n - \mathrm{rg}(f-\lambda e) \leq \mathrm{rm}\lambda$. Sammenholdes dette med den tidligere karakterisering af de diagonaliserbare endomorfier, fås det ønskede. ▯

En matrix fra $\mathrm{M}_{n,n}(L)$ siges at være *diagonaliserbar*, dersom den er regulær-ækvivalent med en diagonalmatrix. Er f og $\underline{\underline{A}}$ som i det foregående, så er altså $\underline{\underline{A}}$ diagonaliserbar, hvis og kun hvis f er diagonaliserbar. Sætningen ovenfor kan derfor fortolkes som en sætning om matricer:

En matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$ *er diagonaliserbar, hvis og kun hvis alle dens karakteristiske rødder tilhører L og der for enhver karakteristisk rod* λ *gælder* $\mathrm{rm}\lambda = n - \mathrm{rg}(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}})$. *Er* $\underline{\underline{A}}$ *diagonaliserbar, så er* $\underline{\underline{A}}$ *regulær-ækvivalent med netop de diagonalmatricer hvis diagonalelementer er de karakteristiske rødder, idet hver karakteristisk rod* λ *forekommer* $\mathrm{rm}\lambda$ *gange.*

Vi anfører endelig, at man naturligt kan definere en *egenværdi* for en matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$ som en karakteristisk rod for $\underline{\underline{A}}$, der tilhører L, og *egenværdimultipliciteten* for en skalar $\lambda \in L$ m.h.t. $\underline{\underline{A}}$ som tallet $n - \mathrm{rg}(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}})$. Er f en endomorfi af et n-dimensionalt vektorrum (V,L), hvortil der for et passende basisvalg hører matricen $\underline{\underline{A}}$, så er altså egenværdierne for $\underline{\underline{A}}$ netop egenværdierne for f, (sml. side 6.2.3), og enhver skalar $\lambda \in L$ har samme egenværdimultiplicitet m.h.t. $\underline{\underline{A}}$ som m.h.t. f, (sml. side 6.2.3).

6.3. TRIAGONALISERING.

Lad f være en endomorfi af et n-dimensionalt vektorrum (V,L). Vi siger, at f er *triagonaliserbar*, dersom der findes en basis for V m.h.t. hvilken den til f hørende matrix er en øvre trekantsmatrix. Herom gælder:

Endomorfien f er triagonaliserbar, hvis og kun hvis alle dens karakteristiske rødder tilhører L. (For $L = \mathbb{C}$ er f altså sikkert triagonaliserbar, for $L = \mathbb{R}$ er f triagonaliserbar, hvis og kun hvis enhver karakteristisk rod er reel.)

Bevis. Antag først, at f er triagonaliserbar, og lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$ være en til f hørende øvre trekantsmatrix. Vi har da åbenbart $p_f(t) = (a_{11}-t)\ldots(a_{nn}-t)$. De karakteristiske rødder er altså netop diagonalelementerne i $\underline{\underline{A}}$, og dermed elementer i L. Det omvendte vises ved induktion efter n. For $n = 1$ er der intet at vise. Antag, at påstanden gælder for alle dimensionstal $\leqq n-1$, og lad f være en endomorfi af et n-dimensionalt vektorrum (V,L), således at alle f's karakteristiske rødder tilhører L. Lad λ_1 være en af de karakteristiske rødder. Da λ_1 tilhører L, er λ_1 tillige en egenværdi. Lad $\underline{e}_1$ være en til λ_1 hørende egenvektor, lad U være det af $\underline{e}_1$ frembragte 1-dimensionale underrum, lad $U^\sim$ være et til U komplementært underrum af V, og lad $(\underline{e}_2,\ldots,\underline{e}_n)$ være en basis for $U^\sim$. Sættet $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots,\underline{e}_n)$ er da en basis for V. Lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$ være den til f hørende matrix m.h.t. denne basis;

der gælder da $a_{11} = \lambda_1$ og $a_{i1} = 0$ for $i = 2,\ldots,n$. Lad p betegne projektionen af V på $U^{\sim}$ langs U; den til endomorfien $p\circ f : U^{\sim} \to U^{\sim}$ hørende matrix m.h.t. basen $(\underline{e}_2,\ldots,\underline{e}_n)$ er da $((n-1)\times(n-1))$-matricen $(a_{ij})_{i=2,\ldots,n;j=2,\ldots,n}$. Ved udvikling af $\det(\underline{\underline{A}}-t\underline{\underline{E}})$ efter første søjle får vi derfor $p_f(t) = (\lambda_1-t)p_{p\circ f}(t)$. Heraf fremgår umiddelbart, at enhver karakteristisk rod for $p\circ f$ tillige er karakteristisk rod for f, og dermed ifølge det givne element i L. Ifølge induktionsantagelsen er $p\circ f$ derfor triagonaliserbar. Lad $(\underline{\tilde{e}}_2,\ldots,\underline{\tilde{e}}_n)$ være en basis for $U^{\sim}$ m.h.t. hvilken den til $p\circ f$ hørende matrix $(b_{ij})_{n-1,n-1}$ er en øvre trekantsmatrix. Den til f hørende matrix m.h.t. basen $(\underline{e}_1,\underline{\tilde{e}}_2,\ldots,\underline{\tilde{e}}_n)$ bliver da af formen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

altså, som ønsket, en øvre trekantsmatrix. □

Idet en matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$ siges at være *triagonaliserbar*, dersom den er regulær-ækvivalent med en øvre trekantsmatrix, får vi umiddelbart af sætningen ovenfor:

En matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$ er triagonaliserbar, hvis og kun hvis alle dens karakteristiske rødder tilhører L.

Lad fortsat f være en endomorfi af et n-dimensionalt vektorrum (V,L). For hvert polynomium $p(t) = \alpha_m t^m + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0$ med koefficienter fra L bestemmes da ved $p(f) = \alpha_m f^m + \ldots + \alpha_1 f + \alpha_0 e$ en endomorfi $p(f)$ af (V,L). Er $p(f) = o$, hvor o betegner nulafbildningen af (V,L), vil vi sige, at f er rod i $p(t)$. Ligeledes bestemmes for enhver matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$ ved $p(\underline{\underline{A}}) = \alpha_m \underline{\underline{A}}^m + \ldots + \alpha_1 \underline{\underline{A}} + \alpha_0 \underline{\underline{E}}$ en matrix $p(\underline{\underline{A}})$ tilhørende $M_{n,n}(L)$. Er $\underline{\underline{A}}$ specielt den til f hørende matrix m.h.t. en valgt basis, så vil $p(\underline{\underline{A}})$ være den til $p(f)$ hørende matrix m.h.t. den samme basis. Gælder $p(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{O}}$, vil vi sige, at $\underline{\underline{A}}$ er rod i $p(t)$.

Vi skal vise *Hamilton-Cayley's sætning*:

Endomorfien f er rod i sit karakteristiske polynomium, altså $p_f(f) = o$.

Bevis. Det er nok at vise sætningen for $L = \mathbb{C}$. Thi heraf vil følge, at der for enhver matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ vil gælde $p_{\underline{\underline{A}}}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{O}}$. Og da enhver reel matrix kan opfattes som en kompleks matrix, vil heraf specielt følge, at der for enhver matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gælder $p_{\underline{\underline{A}}}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{O}}$. Men af dette sidste følger sætningen for $L = \mathbb{R}$. - Lad derfor f være en endomorfi af et n-dimensionalt vektorrum $(V,\mathbb{C})$. Ifølge den første af sætningerne ovenfor er f triagonaliserbar; lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en basis m.h.t. hvilken den til f hørende matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n,n}$ er en øvre trekantsmatrix. Vi har da $p_f(t) = (a_{11}-t)\ldots(a_{nn}-t)$. Dette giver $p_f(f) = (a_{11}e-f)\circ\ldots\circ(a_{nn}e-f)$. Vi sætter nu $g_i = a_{ii}e - f$ for $i = 1,\ldots,n$, og får derved $p_f(f) = g_1\circ\ldots\circ g_n$.

Endvidere får vi

(1) $\quad g_i(\underline{e}_j) = a_{ij}\underline{e}_j - a_{1j}\underline{e}_1 - \ldots - a_{jj}\underline{e}_j, \quad i,j = 1,\ldots,n.$

Sættes $V_i = \mathrm{span}\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_i\}$ for $i = 1,\ldots,n$, følger af (1), at der gælder $g_1(V_1) = \{\underline{o}\}$ og $g_i(V_i) \subseteqq V_{i-1}$ for $i = 2,\ldots,n$. Idet $V_n = V$, følger videre heraf, at

$$\begin{aligned} p_f(f)(V) &= g_1\circ\ldots\circ g_n(V_n) \\ &\subseteqq g_1\circ\ldots\circ g_{n-1}(V_{n-1}) \\ &\subseteqq \ldots \subseteqq g_1(V_1) = \{\underline{o}\}. \end{aligned}$$

Dette viser, at $p_f(f) = o$. □

Hamilton-Cayley's sætning kan åbenbart også formuleres som en sætning om matricer:

Enhver matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{M}_{n,n}(L)$ *er rod i sit karakteristiske polynomium, altså* $p_{\underline{\underline{A}}}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{0}}$.

6.4. JORDAN'S NORMALFORM.

En kvadratisk matrix $\underline{\underline{B}}$ siges at være en *simpel Jordan-matrix*, dersom den har formen

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b & 1 & & & \\ & b & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b \end{pmatrix}$$

hvor alle ikke anførte elementer er 0. En kvadratisk matrix $\underline{\underline{C}}$ siges at være en *Jordan-matrix*, dersom den har formen

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{B}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{\underline{B}}_q \end{pmatrix}$$

hvor matricerne $\underline{\underline{B}}_j$ langs diagonalen er simple Jordan-matricer, og hvor der uden for matricerne $\underline{\underline{B}}_j$ står lutter 0'er.

Lad herefter f være en endomorfi af et n-dimensionalt komplekst vektorrum $(V,\mathbb{C})$, og lad $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ være de indbyrdes forskellige karakteristiske rødder for f.

Vi skal vise følgende sætning:

Der findes en basis for V m.h.t. hvilken den til f hørende matrix er en Jordan-matrix af formen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{B}}_{11} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \underline{\underline{B}}_{1\mu_1} & & & & & & \\ & & & \underline{\underline{B}}_{21} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \underline{\underline{B}}_{2\mu_2} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \underline{\underline{B}}_{p1} & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \underline{\underline{B}}_{p\mu_p} \end{pmatrix}$$

hvor matricerne $\underline{\underline{B}}_{i\nu_i}$, $i = 1,\ldots,p$, $\nu_i = 1,\ldots,\mu_i$, *er simple Jordan-matricer med* λ_i *i diagonalen.*

Som en forberedelse viser vi først to lemmaer. I beviserne for disse inddrages dualitetsteorien som et hjælpemiddel.

Lemma 1. Lad g være en endomorfi af et endelig-dimensionalt vektorrum (U,L). Der findes da en opspaltning af U som direkte sum af to invariante underrum U_1 *og* U_2, *således at* $g : U_1 \to U_1$ *er nilpotent, og* $g : U_2 \to U_2$ *er bijektiv.*

Bevis. Lad U' være et vektorrum over L, som er i dualitet med U, og lad h være den til g duale endomorfi af U'. Sæt

$$U_1 = \{ \underline{u} \in U \mid \exists\, i \in \mathbb{N} : g^i(\underline{u}) = \underline{o} \}$$

og

$$U_1' = \{ \underline{u}' \in U' \mid \exists\, i \in \mathbb{N} : h^i(\underline{u}') = \underline{o} \}.$$

Det vises let, at U_1 og U_1' er underrum. Det påstås, at U_1 og U_1' er i dualitet ved restriktionen af den givne bilinearform til $U_1 \times U_1'$. På grund af den fuldstændige symmetri mellem U_1 og U_1' er det tilstrækkeligt at vise, at der for enhver vektor $\underline{u} \in U_1 \setminus \{\underline{o}\}$ findes en vektor $\underline{u}' \in U_1'$, således at $\langle \underline{u}, \underline{u}' \rangle \neq 0$. Lad $\underline{u}$ være en vektor i $U_1 \setminus \{\underline{o}\}$, og lad p være det mindste naturlige tal med $g^p(\underline{u}) = \underline{o}$. Vi har da $g^{p-1}(\underline{u}) \neq \underline{o}$, og på grund af dualiteten mellem U og U' findes følgelig en vektor $\underline{u}_1' \in U'$ med $\langle g^{p-1}(\underline{u}), \underline{u}_1' \rangle \neq 0$. Da U' har endelig dimension, vil der i følgen

$$U' \supseteq h(U') \supseteq h^2(U') \supseteq \dots \supseteq h^n(U') \supseteq \dots$$

gælde lighedstegn fra et vist trin. Betegner r er naturligt tal for hvilket $h^{r+p-1}(U') = h^{r+p}(U')$, findes en vektor $\underline{u}_2' \in U'$ med $h^{r+p-1}(\underline{u}_1') = h^{r+p}(\underline{u}_2')$. Sættes derfor $\underline{u}' = h^{p-1}(\underline{u}_1') - h^p(\underline{u}_2')$, fås dels $h^r(\underline{u}') = \underline{o}$, altså $\underline{u}' \in U_1'$, og dels

$$
\begin{aligned}
<\underline{u},\underline{u}'> &= <\underline{u}, h^{p-1}(\underline{u}_1') - h^p(\underline{u}_2')> \\
&= <\underline{u}, h^{p-1}(\underline{u}_p')> - <\underline{u}, h^p(\underline{u}_2')> \\
&= <g^{p-1}(\underline{u}), \underline{u}_1'> - <g^p(\underline{u}), \underline{u}_2'> \\
&= <g^{p-1}(\underline{u}), \underline{u}_1'> - <\underline{o}, \underline{u}_2'> \\
&= <g^{p-1}(\underline{u}), \underline{u}_1'> \\
&\neq 0,
\end{aligned}
$$

hvor vi har udnyttet, at den duale til g^q er h^q. Hermed er vist, at U_1 og U_1' er i dualitet. Sættes nu $U_2 = (U_1')^\circ$, fås $U = U_1 \oplus U_2$, (sml. side 3.1.6). Det er klart, at U_1 er invariant ved g, og at U_1' er invariant ved h. Af det sidste følger, at også U_2 er invariant ved g, (sml. side 3.3.3). At $g : U_1 \to U_1$ er nilpotent indses på følgende måde. For $\dim U_1 = 0$ er der intet at vise. Antag derfor, at $\dim U_1 \geq 1$, og lad $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_s)$ være en basis for U_1. For hver basisvektor $\underline{e}_i$ findes da et $p_i \in \mathbb{N}$, således at $g^{p_i}(\underline{e}_i) = \underline{o}$. Vælges p som det største af tallene p_i, gælder da åbenbart $g^p(\underline{u}) = \underline{o}$ for enhver vektor $\underline{u} \in U_1$. Endelig bemærkes, at da kernen for $g : U \to U$ er indeholdt i U_1, og da U_1 og U_2 danner direkte sum, har $g : U_2 \to U_2$ kernen $\{\underline{o}\}$; endomorfien $g : U_2 \to U_2$ er følgelig bijektiv. □

Lemma 2. Lad g være en nilpotent endomorfi af et endeligdimensionalt vektorrum (U,L). Lad p være det mindste naturlige tal for hvilket g^p er nulafbildningen, og lad $\underline{u}_1$ være en vektor i U med $g^{p-1}(\underline{u}_1) \neq \underline{o}$. Sættet $(g^{p-1}(\underline{u}_1), \ldots, g(\underline{u}_1), \underline{u}_1)$ er da en basis for et invariant underrum U_1 af U, og der findes et til U_1 komplementært invariant underrum U_2 af U.

Bevis. Lad U_1 være det af vektorerne $g^{p-1}(\underline{u}_1),\ldots,g(\underline{u}_1),\underline{u}_1$ frembragte underrum. Det er klart, at U_1 er invariant. For at vise, at sættet $(g^{p-1}(\underline{u}_1),\ldots,g(\underline{u}_1),\underline{u}_1)$ er en basis for U_1, skal det vises, at sættet er lineært uafhængigt. Lad $\alpha_{p-1}g^{p-1}(\underline{u}_1) + \ldots + \alpha_1 g(\underline{u}_1) + \alpha_0\underline{u}_1 = \underline{o}$ være en lineær relation mellem vektorerne i sættet. Idet g^q for $q \geqq p$ er nulafbildningen, fås

$$g^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i g^i(\underline{u}_1)\right) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i g^{p-1+i}(\underline{u}_1)$$

$$= \alpha_0 g^{p-1}(\underline{u}_1).$$

Da samtidig $g^{p-1}(\underline{o}) = \underline{o}$, får vi altså $\alpha_0 g^{p-1}(\underline{u}_1) = \underline{o}$, og dermed $\alpha_0 = 0$. Hvis $p \geqq 2$, fås på tilsvarende måde

$$g^{p-2}\left(\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i g^i(\underline{u}_1)\right) = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i g^{p-2+i}(\underline{u}_1)$$

$$= \alpha_1 g^{p-1}(\underline{u}_1)$$

$$= \underline{o},$$

hvormed $\alpha_1 = 0$. Fortsættes således, får ialt $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$, som ønsket. For at vise den anden påstand vælges et vektorrum U' over L, som er i dualitet med U. Lad h være den til g duale endomorfi af U'. På grund af dualiteten findes en vektor $\underline{u}_1' \in U'$ med $\langle g^{p-1}(\underline{u}_1),\underline{u}_1'\rangle \neq 0$. Idet $\langle g^{p-1}(\underline{u}_1),\underline{u}_1'\rangle = \langle \underline{u}_1, h^{p-1}(\underline{u}_1')\rangle$, ses at $h^{p-1}(\underline{u}_1') \neq \underline{o}$. På den anden side er

$h^p : U' \to U'$ nulafbildningen; thi h^p er den duale til nulafbildningen $g^p : U \to U$. Af sætningens første påstand følger derfor, at sættet $(h^{p-1}(\underline{u}_1'),\ldots,h(\underline{u}_1'),\underline{u}_1')$ er en basis for et invariant underrum U_1' af U'. Det påstås, at U_1 og U_1' er i dualitet. På grund af symmetrien mellem U_1 og U_1' er det tilstrækkeligt at vise, at der for enhver vektor

$\underline{u} = \beta_{p-1}g^{p-1}(\underline{u}_1) +\ldots+ \beta_1 g(\underline{u}_1) + \beta_0\underline{u}_1$ i $U_1 \setminus \{\underline{o}\}$ findes en vektor $\underline{u}' \in U_1'$ med $\langle\underline{u},\underline{u}'\rangle \neq 0$. Lad k være det mindste af tallene $0,1,\ldots,p-1$ for hvilket $\beta_k \neq 0$. Sættes $\underline{u}' = h^{p-1-k}(\underline{u}_1')$, får vi, idet g^q for $q \geqq p$ er nulafbildningen,

$$\begin{aligned}
\langle\underline{u},\underline{u}'\rangle &= \langle\underline{u},h^{p-1-k}(\underline{u}_1')\rangle \\
&= \langle g^{p-1-k}(\underline{u}),\underline{u}_1'\rangle \\
&= \left\langle g^{p-1-k}\left(\sum_{i=k}^{p-1}\beta_i g^i(\underline{u}_1)\right),\underline{u}_1'\right\rangle \\
&= \beta_k\langle g^{p-1}(\underline{u}_1),\underline{u}_1'\rangle + \sum_{i=k+1}^{p-1}\beta_i\langle g^{p-1-k+i}(\underline{u}_1),\underline{u}_1'\rangle \\
&= \beta_k\langle g^{p-1}(\underline{u}_1),\underline{u}_1'\rangle \\
&\neq 0,
\end{aligned}$$

hvormed er vist, at U_1 og U_1' er i dualitet. Sættes nu $U_2 = (U_1')^{\circ}$, er U_2 invariant ved g, (sml. side 3.3.3), og der gælder $U = U_1 \oplus U_2$, (sml. side 3.1.6). ▯

Vi skal herefter gå over til beviset for sætningen. For $i = 1,\dots,p$ sættes $g_i = f - \lambda_i e$. Det bemærkes, at et underrum af V er invariant ved f, hvis og kun hvis det er invariant ved en/enhver af afbildningerne g_i.

Vi skal først søge en opspaltning af V som direkte sum af invariante underrum,

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_p,$$

således at alle endomorfierne $g_i : U_i \to U_i$ er nilpotente. Ifølge *lemma 1* findes komplementære invariante underrum U_1 og $U_1^\sim$ af V, således at $g_1 : U_1 \to U_1$ er nilpotent og $g_1 : U_1^\sim \to U_1^\sim$ er bijektiv. Af det sidste følger, at $f : U_1^\sim \to U_1^\sim$ ikke har λ_1 som egenværdi. For $p = 1$ har vi $U_1^\sim = \{\underline{o}\}$. Thi ellers ville $f : U_1^\sim \to U_1^\sim$ have mindst en egenværdi $\lambda_1^\sim$; denne egenværdi ville da også være egenværdi for $f : V \to V$, hvormed $\lambda_1^\sim = \lambda_1$, i strid med en bemærkning ovenfor. For $p = 1$ er altså $V = U_1$ en opspaltning af den søgte art. For $p \geq 2$ kan *lemma 1* anvendes på $g_2 : U_1^\sim \to U_1^\sim$, hvorved fås, at der findes komplementære invariante underrum U_2 og $U_2^\sim$ af $U_1^\sim$, således at $g_2 : U_2 \to U_2$ er nilpotent og $g_2 : U_2^\sim \to U_2^\sim$ er bijektiv. Afbildningen $f : U_2^\sim \to U_2^\sim$ har således hverken λ_1 eller λ_2 som egenværdi. For $p = 2$ har vi $U_2^\sim = \{\underline{o}\}$. Thi ellers ville $f : U_2^\sim \to U_2^\sim$ have mindst en egenværdi $\lambda_2^\sim$; denne ville da også være egenværdi for $f : V \to V$, hvormed $\lambda_2^\sim = \lambda_1$ eller $\lambda_2^\sim = \lambda_2$, i strid med en bemærkning ovenfor. For $p = 2$ er derfor $V = U_1 \oplus U_2$ en opspaltning af den søgte art. For $p \geq 3$ kan *lemma 1* dernæst anvendes på $g_3 : U_2^{\sim} \to U_2^{\sim}$, etc. Efter p skridt har vi da en opspaltning $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_p \oplus U_p^{\sim}$ af V som direkte sum af invariante underrum, således at alle afbildningerne $g_i : U_i \to U_i$ er nilpotente, og således at ingen af egenværdierne $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ er egenværdi for $f : U_p^{\sim} \to U_p^{\sim}$. Af det sidste følger som før, at $U_p^{\sim} = \{\underline{o}\}$, og vi har dermed en opspaltning af den søgte art.

Vi skal dernæst vise, at det er muligt at spalte hvert af underrummene U_i i en direkte sum af invariante underrum,

$$U_i = U_{i1} \oplus \dots \oplus U_{i\mu_i},$$

således at hvert af underrummene $U_{i\nu_i}$ har en basis m.h.t. hvilken den til $f : U_{i\nu_i} \to U_{i\nu_i}$ hørende matrix er en simpel Jordanmatrix med λ_i i diagonalen. Lad derfor i være et vilkårligt af tallene $1,\dots,p$, og betragt endomorfien $g_i : U_i \to U_i$. Lad p_1 være det mindste naturlige tal for hvilket $g_i^{p_1} : U_i \to U_i$ er nulafbildningen, og lad $\underline{u}_1$ være en vektor i U_i med $g_i^{p_1-1}(\underline{u}_1) \neq \underline{o}$. Ifølge *lemma 2* er da sættet $(g_i^{p_1-1}(\underline{u}_1),\dots,g_i(\underline{u}_1),\underline{u}_1)$ en basis for et invariant underrum U_{i1} af U_i, og der findes et til U_{i1} komplementært invariant underrum $U_{i1}^{\sim}$ af U_i. Hvis U_{i1} er et ægte underrum af U_i, betragtes dernæst endomorfien $g_i : U_{i1}^{\sim} \to U_{i1}^{\sim}$. Lad p_2 være det mindste naturlige tal for hvilket $g_i^{p_2} : U_{i1}^{\sim} \to U_{i1}^{\sim}$ er nulafbildningen, og lad $\underline{u}_2$ være en vektor i $U_{i1}^{\sim}$ med $g_i^{p_2-1}(\underline{u}_2) \neq \underline{o}$. Ifølge *lemma 2* er da sættet $(g_i^{p_2-1}(\underline{u}_2),\dots,g_i(\underline{u}_2),\underline{u}_2)$ en basis for et invariant underrum U_{i2} af $U_{i1}^{\sim}$, og der findes et til U_{i2} komplementært invariant underrum $\tilde{U_{i2}}$ af $\tilde{U_{i1}}$. Er U_{i2} et ægte underrum af $\tilde{U_{i1}}$, kan vi dernæst anvende *lemma 2* på $g_i : \tilde{U_{i2}} \to \tilde{U_{i2}}$, etc. Efter endelig mange skridt har vi da en opspaltning $U_i = U_{i1} \oplus \ldots \oplus U_{i\mu_i}$, hvor hvert af underrummene $U_{i\nu_i}$ er invariant og har en basis af formen

$$(g_i^{p_{\nu_i}-1}(\underline{u}_{\nu_i}),\ldots,g_i(\underline{u}_{\nu_i}),\underline{u}_{\nu_i}).$$

Det ses umiddelbart, at den til $g_i : U_{i\nu_i} \to U_{i\nu_i}$ hørende matrix m.h.t. den angivne basis har formen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Men heraf følger, at den til $f : U_{i\nu_i} \to U_{i\nu_i}$ hørende matrix får den ønskede form.

Idet vi sammenfatter det foregående, har vi: Der findes invariante underrum $U_{i\nu_i}$, $i = 1,\ldots,p$, $\nu_i = 1,\ldots,\mu_i$, og en baser for hvert af disse underrum, således at

(1) $$V = U_{11} \oplus \ldots \oplus U_{1\mu_1} \oplus \ldots \ldots \ldots \oplus U_{p1} \oplus \ldots \oplus U_{p\mu_p}$$

og således at de til afbildningerne $f : U_{i\nu_i} \to U_{i\nu_i}$ hørende matricer m.h.t. de betragtede baser er simple Jordan-matricer med λ_i i diagonalen. Sammenstykkes derfor baserne for underrummene

$U_{i\nu_i}$ til eet sæt af vektorer, fås en basis for V m.h.t. hvilken den til $f : V \to V$ hørende matrix er en Jordan-matrix af den ønskede form. Hermed er sætningen bevist.

Idet en permutation af de simple Jordan-matricer $\underline{\underline{B}}_{i\nu_i}$ i $\underline{\underline{A}}$ modsvarer den samme permutation af underrummene $U_{i\nu_i}$ i (1) ovenfor, gælder:

Enhver matrix, som fremgår af $\underline{\underline{A}}$ *ved permutation af de simple Jordan-matricer* $\underline{\underline{B}}_{i\nu_i}$*, er ligeledes en til* f *hørende Jordan-matrix.*

Omvendt har vi:

Enhver til f *hørende Jordan-matrix fremgår af* $\underline{\underline{A}}$ *ved permutation af de simple Jordan-matricer* $\underline{\underline{B}}_{i\nu_i}$.

I beviset for denne sætning skal vi benytte følgende skærpelse af *lemma 1*:

Lemma 3. Lad g *være en endomorfi af et endelig-dimensionalt vektorrum* (U,L)*. Der findes da (en og) kun een opspaltning af* U *som direkte sum af to invariante underrum* U_1 *og* U_2*, således at* $g : U_1 \to U_1$ *er nilpotent, og* $g : U_2 \to U_2$ *er bijektiv.*

Bevis. Lad $U = U_1 \oplus U_2$ være en vilkårlig opspaltning af den nævnte art, og lad p være det mindste naturlige tal for hvilket $g^p : U_1 \to U_1$ er nulafbildningen. For vilkårlige vektorer $\underline{u}_1 \in U_1$ og $\underline{u}_2 \in U_2$, og for ethvert naturligt tal q har vi $g^q(\underline{u}_1+\underline{u}_2) = g^q(\underline{u}_1) + g^q(\underline{u}_2)$. For ethvert $q \geq p$ har vi derfor $g^q(\underline{u}_1+\underline{u}_2) = g^q(\underline{u}_2)$. Heraf følger for det første, at $(g^q)^{-1}(\underline{o}) = U_1$ for alle $q \geq p$; thi $g^q(\underline{u}_2)$ er kun $\underline{o}$ for $\underline{u}_2 = \underline{o}$. For det andet følger, at $g^q(U) = U_2$ for alle $q \geq p$; thi $g^q(U_2) = U_2$. Heraf fremgår, at både U_1 og U_2 er entydigt bestemt. ▯

Vi kan herefter gå over til beviset for sætningen. Lad $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ være en til f hørende Jordan-matrix, og lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være den tilhørende basis. Da $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ er en (øvre) trekantsmatrix, må $\underline{\underline{\tilde{A}}}$'s diagonalelementer være de karakteristiske rødder for f, idet hver karakteristisk rod λ_i forekommer rmλ_i gange. Diagonalelementerne i de i $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ indgående simple Jordan-matricer er derfor også f's karakteristiske rødder. Lad $\underline{\underline{\tilde{B}}}_{i\nu_i}$, $\nu_i = 1,\ldots,\kappa_i$, være de simple Jordan-matricer i $\underline{\underline{\tilde{A}}}$, som indeholder den karakteristiske rod λ_i, $i = 1,\ldots,p$. (Det er i øvrigt let at se, at rg$(\underline{\underline{\tilde{A}}}-\lambda_i\underline{\underline{E}}) = n - \kappa_i$, hvormed $\kappa_i = n - $ rg$(\underline{\underline{\tilde{A}}}-\lambda_i\underline{\underline{E}})$=em$\lambda_i$.) Lad $\alpha(i,k)$ betegne antallet af simple $(k\times k)$-Jordan-matricer $\underline{\underline{B}}_{i\nu_i}$, $i = 1,\ldots,p$, $k = 1,\ldots,n$. Vi vil vise, at tallene $\alpha(i,k)$ kan bestemmes alene ud fra f, uafhængigt af basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$; hermed vil sætningen være vist. Lad λ_i være en vilkårlig karakteristisk rod, og sæt $g_i = f - \lambda_i e$. Lad U_1 være det underrum af V, som frembringes af de basisvektorer $\underline{e}_j$ for hvilke den j'te søjle i $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ indeholder λ_i i diagonalen.

Lad U_2 være det af de øvrige basisvektorer frembragte underrum af V. Underrummene U_1 og U_2 er da komplementære. Ved betragtning af den til g_i hørende matrix $\underline{\underline{\tilde{A}}} - \lambda_i\underline{\underline{E}}$ ses endvidere, at $g_i : U_1 \to U_1$ er nilpotent, og at $g_i : U_2 \to U_2$ er bijektiv. Af *lemma 3* følger derfor, at U_1 (og U_2) er bestemt uafhængigt af basen $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$. Betegnes med $\overline{g}_i$ afbildningen $g_i : U_1 \to U_1$, er altså $\overline{g}_i$ bestemt uafhængigt af basen. Idet $\operatorname{rg}\overline{g}_i$ er lig med antallet af 1'er i den til $\overline{g}_i$ hørende matrix m.h.t. den givne basis, ses umiddelbart, at

$$\operatorname{rg}\overline{g}_i = 1\cdot\alpha(i,2) + 2\cdot\alpha(i,3) + \dots + (n-1)\cdot\alpha(i,n).$$

Ved betragtning af de til $\overline{g}_i^{\,2},\dots,\overline{g}_i^{\,n-1}$ hørende matricer fås på tilsvarende måde

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}\overline{g}_i^{\,2} &= 1\cdot\alpha(i,3) + \dots + (n-2)\cdot\alpha(i,n)\\
&\ \ \vdots\\
\operatorname{rg}g_i^{\,n-1} &= 1\cdot\alpha(i,n)
\end{aligned}$$

Herefter kan $\alpha(i,n)$, $\alpha(i,n-1),\dots,\alpha(i,2)$ bestemmes successivt. Da der endvidere gælder

$$\operatorname{rm}\lambda_i = 1\cdot\alpha(i,1) + 2\cdot\alpha(i,2) + \dots + n\cdot\alpha(i,n),$$

kan også $\alpha(i,1)$ bestemmes. Idet $\operatorname{rm}\lambda_i$ og tallene $\operatorname{rg}\overline{g}_i^{\,j}$, $j = 1,\dots,n-1$, er givet alene ved f, er sætningen hermed bevist.

Det bemærkes, at enhver diagonalmatrix er en Jordan-matrix, hvori de simple Jordan-matricer er (1×1)-matricer. Hvis f er diagonaliserbar, så er følgelig de til f hørende Jordan-matricer netop de til f hørende diagonalmatricer.

Som tidligere vist er enhver endomorfi af et endelig-dimensionalt komplekst vektorrum triagonaliserbar, (sml. side 6.3.1). Det noteres, at det foregående indeholder en væsentlig skærpelse af dette resultat.

Det foregående giver åbenbart følgende sætning om matricer:

Enhver matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ *er regulær-ækvivalent med en Jordan-matrix* $\underline{\underline{B}}$. *De med* $\underline{\underline{A}}$ *regulær-ækvivalente Jordan-matricer er netop de Jordan-matricer, som fremgår af* $\underline{\underline{B}}$ *ved permutation af de i* $\underline{\underline{B}}$ *indgående simple Jordan-matricer.*

Bemærk, at der herved er givet en fuldstændig beskrivelse af ækvivalensklasserne ved ækvivalensrelationen "regulær-ækvivalens" i $M_{n,n}(\mathbb{C})$.

Det er klart, at hvis f er en endomorfi af et endelig-dimensionalt reelt vektorrum $(V,\mathbb{R})$, og f har ikke-reelle karakteristiske rødder, så kan der ikke til f høre nogen Jordan-matrix. Uden bevis anføres, at der findes en basis for V m.h.t. hvilken den til f hørende matrix har formen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{B}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{\underline{B}}_q \end{pmatrix}$$

hvor der uden for matricerne $\underline{\underline{B}}_j$ står lutter 0'er, og hvor matricerne $\underline{\underline{B}}_j$ er kvadratiske matricer hidrørende fra de karakteristiske rødder, således at de reelle karakteristiske rødder λ giver simple Jordan-matricer med λ i diagonalen, mens der hidrørende fra par af konjugerede ikke-reelle karakteristiske rødder λ og $\bar{\lambda}$ fås matricer af formen

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & & & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

hvor $a = \mathrm{Re}\lambda$ og $b = \mathrm{Im}\lambda$, og hvor der uden for de anførte (2×2)-matricer står lutter 0'er. Som i det komplekse tilfælde er $\underline{\underline{A}}$ entydigt bestemt på nær permutation af matricerne $\underline{\underline{B}}_j$.

Det bemærkes, at hvis $\underline{\underline{A}}$ er en reel Jordan-matrix, så er den i $M_{n,n}(\mathbb{R})$ regulær-ækvivalent med netop de (reelle) Jordan-matricer, som fremgår af $\underline{\underline{A}}$ ved permutation af de i $\underline{\underline{A}}$ indgående simple Jordan-matricer. Det er nemlig helt klart, at $\underline{\underline{A}}$ er regulær-ækvivalent med de nævnte matricer; omvendt følger af en sætning ovenfor, at $\underline{\underline{A}}$ (endda) i $M_{n,n}(\mathbb{C})$ ikke kan være regulær-ækvivalent med andre.

1. Lad f være en endomorfi af et vektorrum (V,L). Vis, at hvis U_1 og U_2 er underrum af V, som er invariante ved f, så er også underrummene $U_1 \cap U_2$ og $U_1 + U_2$ invariante ved f.

2. Lad f og g være endomorfier af et vektorrum (V,L). Vis, at hvis et underrum U er invariant ved f og g, så er det også invariant ved $\alpha f + \beta g$, hvor $\alpha,\beta \in L$, og ved $g\circ f$.

3. Lad $(V,\mathbb{R})$ være vektorrummet af alle vilkårligt ofte differentiable reelle funktioner af en reel variabel. Lad D være endomorfien af V, som til en funktion φ lader svare dens afledede $D\varphi$. Angiv et ægte uendelig-dimensionalt invariant underrum, et invariant underrum af dimension n, hvor $n \in \mathbb{N}$, et 2-dimensionalt invariant underrum U, således at $D : U \to U$ er bijektiv, samt et 1-dimensionalt invariant underrum U, således at $D : U \to U$ er bijektiv. Vis, at ethvert $\lambda \in \mathbb{R}$ er egenværdi for D.

4. En endomorfi f af et vektorrum (V,L) siges at være involutorisk, dersom $f^2 = e$. Lad f være en sådan afbildning, og antag, at $\dim V \geq 1$. Vis, at $K_1 \oplus K_{-1} = V$.

5. Om to endomorfier f og g af et vektorrum (V,L) forudsættes, at $g\circ f = f\circ g$. Vis, at ethvert underrum, som er egenrum for en af afbildningerne, er invariant ved den anden.

6. Lad f og g være endomorfier af et vektorrum (V,L). Vis, at der for alle $\lambda,\mu \in L$ gælder

$$K_{f-\lambda e} = K_{\alpha f-\alpha\lambda e} \qquad \alpha \neq 0,$$

$$K_{f-\lambda e} \cap K_{g-\mu e} \subseteq K_{f+g-(\lambda+\mu)e}$$

$$K_{f-\lambda e} \cap K_{g-\mu e} \subseteq K_{g\circ f-\lambda\mu e}$$

$$K_{f-\lambda e} \subseteq K_{f^p-\lambda^p e} \qquad p \in \mathbb{N},$$

samt, dersom f er bijektiv og $\lambda \neq 0$,

$$K_{f-\lambda e} = K_{f^{-1}-\lambda^{-1}e} \ .$$

Udled heraf sætninger om egenværdier.

7. En endomorfi f af et 2-dimensionalt vektorrum (V,L) er bestemt ved $f(\underline{e}_1) = \underline{e}_2$, $f(\underline{e}_2) = \underline{e}_1$, hvor $(\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ er en given basis. Find afbildningens invariante underrum, egenvektorer og egenværdier.

8. En endomorfi f af et 3-dimensionalt vektorrum (V,L) er bestemt ved $f(\underline{e}_1) = \underline{e}_2$, $f(\underline{e}_2) = \underline{e}_3$, $f(\underline{e}_3) = \underline{e}_1$, hvor $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ er en given basis. Find afbildningens invariante underrum, egenvektorer og egenværdier.

9. Lad $(V,\mathbb{R})$ være vektorrummet af alle reelle polynomier $p(t)$, og lad f være den ved $p(t) \mapsto t\cdot Dp(t)$ givne endomorfi af V. Bestem f's egenværdier og egenvektorer.

10. En endomorfi f af et 4-dimensionalt vektorrum $(V, \mathbb{R})$ har m.h.t. en valgt basis matrixligningen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} .$$

Find f's egenværdier.

11. En endomorfi f af et 3-dimensionalt vektorrum $(V, \mathbb{R})$ er bestemt ved $f(\underline{e}_1) = 2\underline{e}_3$, $f(\underline{e}_2) = \underline{e}_1 + 3\underline{e}_3$, $f(\underline{e}_3) = \underline{e}_2$, hvor $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ er en given basis for V. Find egenværdierne samt en basis for hvert af de tilhørende egenrum. Undersøg, om f er diagonaliserbar.

12. En endomorfi f af et 2-dimensionalt vektorrum $(V, \mathbb{R})$ har m.h.t. en valgt basis matrixligningen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

hvor $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestem f's egenværdier og de tilhørende egenrum. Undersøg, om f er diagonaliserbar.

Undersøg på tilsvarende måde endomorfien g med matrixligningen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} .$$

13. En endomorfi f af et 2-dimensionalt vektorrum $(V,\mathbb{C})$ har m.h.t. en valgt basis matrixligningen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

hvor $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestem f's egenværdier og de tilhørende egenrum. Undersøg, om f er diagonaliserbar.

14. Undersøg, om matricen $\underline{\underline{A}} \in M_{4,4}(L)$ givet ved

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & -2 & 1 \\ -8 & 0 & 13 & -1 \end{pmatrix}$$

er diagonaliserbar.

15. Vis ved et eksempel, at to kvadratiske matricer kan have samme karakteristiske polynomium uden at være regulærækvivalente.

16. Lad f være en automorfi af et vektorrum (V,L) med dimension $n \in \mathbb{N}$. Udtryk det karakteristiske polynomium for f^{-1} ved det karakteristiske polynomium for f.

17. Lad f være en endomorfi af et vektorrum (V,L) med dimension $n \in \mathbb{N}$, og lad U_1 og U_2 være komplementære invariante underrum af V. Lad f_1 hhv. f_2 betegne endomorfien $f : U_1 \to U_1$ hhv. $f : U_2 \to U_2$. Vis, at $p_f(t) = p_{f_1}(t) \cdot p_{f_2}(t)$.

18. Lad f være en endomorfi af et vektorrum (V,L) med dimension $n \in \mathbb{N}$. Vis, at f er nilpotent, hvis og kun hvis $p_f(t) = (-t)^n$.

19. Lad f være en endomorfi af et vektorrum $(V,\mathbb{R})$ med dimension $n \in \mathbb{N}$. Vis, at hvis n er ulige, så har f mindst en egenværdi; vis, at der for $\det f > 0$ findes mindst en positiv egenværdi, og at der for $\det f < 0$ findes mindst en negativ egenværdi. Vis, at hvis n er lige og $\det f < 0$, så har f mindst en positiv og en negativ egenværdi. Vis, at hvis n er lige, så findes en endomorfi g af V med $\det g > 0$, som ingen egenværdier har.

20. Lad $p_{\underline{\underline{A}}}(t) = (-1)^n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0$ være det karakteristiske polynomium for en matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$. Vis, at

$$c_{n-p} = (-1)^{n-p} \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_p \leqq n} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p i_1} & \cdots & a_{i_p i_p} \end{vmatrix} \qquad p = 1,\ldots,n.$$

De i summationen indgående determinanter kaldes $\underline{\underline{A}}$'s *hovedunderdeterminanter* af p'te orden; det er determinanterne af de delmatricer af $\underline{\underline{A}}$, som fremgår af $\underline{\underline{A}}$ ved at slette $n - p$ rækker og søjler med samme numre. Begrund, at for regulær-ækvivalente matricer er summen af hovedunderdeterminanterne af p'te orden den samme. Betragt specielt tilfældene $p = n$ og $p = 1$.

21. Lad $p_{\underline{\underline{A}}}(t) = (-1)^n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0$ være det karakteristiske polynomium for en matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$, og lad $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ være de karakteristiske rødder for $\underline{\underline{A}}$, regnet med multiplicitet. Vis, at

$$c_{n-p} = (-1)^{n-p} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_p} \qquad p = 1, \ldots, n.$$

Vis, at $\det\underline{\underline{A}} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ og at $\mathrm{tr}\underline{\underline{A}} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

22. Lad f være en endomorfi af et endelig-dimensionalt vektorrum (V,L). Af et resultat i øv. 6 fremgår, at hvis λ er en egenværdi for f, så er λ^p en egenværdi for f^p, hvor $p \in \mathbb{N}$. Lad omvendt μ være en egenværdi for f^p. Vis, at der for $L = \mathbb{C}$ findes en egenværdi λ for f, således at $\lambda^p = \mu$. Vis ved et eksempel, at dette ikke behøver at gælde for $L = \mathbb{R}$.

23. Undersøg, om følgende par af matricer fra $M_{3,3}(\mathbb{R})$ er regulær-ækvivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Bestem en Jordan-matrix $\underline{\underline{B}} \in M_{4,4}(\mathbb{C})$ og en regulær matrix $\underline{\underline{S}} \in M_{4,4}(\mathbb{C})$, således at $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$, hvor

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

KAPITEL 7. VEKTORRUM MED INDRE PRODUKT.

7.1. INDRE PRODUKT.

Ved et *indre produkt* i et vektorrum (V,L) forstås en afbildning $(\underline{u},\underline{v}) \mapsto \underline{u}\cdot\underline{v}$ af $V\times V$ ind i L med følgende egenskaber:

(a) $\forall\ \underline{u},\underline{v},\underline{w} \in V : (\underline{u}+\underline{v})\cdot\underline{w} = \underline{u}\cdot\underline{w} + \underline{v}\cdot\underline{w}$.

(b) $\forall\ \lambda \in L\ \forall\ \underline{u},\underline{v} \in V : (\lambda\underline{u})\cdot\underline{v} = \lambda(\underline{u}\cdot\underline{v})$.

(c) $\forall\ \underline{u},\underline{v} \in V : \underline{u}\cdot\underline{v} = \overline{\underline{v}\cdot\underline{u}}$.

(d) $\forall\ \underline{v} \in V : \underline{v} \neq \underline{o} \Rightarrow \underline{v}\cdot\underline{v} > 0$.

(Overstregningen i betingelsen (c) står for kompleks konjugering, som naturligvis falder bort for $L = \mathbb{R}$.)

Er (V,L) et vektorrum med indre produkt har vi for alle $\lambda \in L$ og alle $\underline{u},\underline{v},\underline{w} \in V$ (sml. (a) og (b)):

(1) $\underline{w}\cdot(\underline{u}+\underline{v}) = \underline{w}\cdot\underline{u} + \underline{w}\cdot\underline{v}$.

(2) $\underline{u}\cdot(\lambda\underline{v}) = \overline{\lambda}(\underline{u}\cdot\underline{v})$.

Dette vises let ved brug af (a) og (c) hhv. (b) og (c). Endvidere noteres, at der for alle $\underline{u},\underline{v} \in V$ gælder

(3) $\underline{u} = \underline{o} \vee \underline{v} = \underline{o} \Rightarrow \underline{u}\cdot\underline{v} = 0$

Dette fås ved at sætte $\lambda = 0$ i (b) og (2).

De distributive love (a) og (1) kan oplagt udvides til et vilkårligt (endeligt) antal addender.

Det er klart, at et indre produkt i et vektorrum (V,L) inducerer et indre produkt i ethvert underrum af V.

Et endelig-dimensionalt reelt hhv. komplekst vektorrum med indre produkt kaldes et *euklidisk* hhv. *unitært vektorrum*.

Ved *normen* $\|\underline{v}\|$ af en vektor $\underline{v}$ i et vektorrum (V,L) med indre produkt forstås tallet $\|\underline{v}\| = \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}}$, (sml. (d)). Det gælder $\|\underline{o}\| = 0$, og $\|\underline{v}\| > 0$ for $\underline{v} \neq \underline{o}$. Idet $(\lambda\underline{v})\cdot(\lambda\underline{v}) = \lambda\overline{\lambda}(\underline{v}\cdot\underline{v}) = |\lambda|^2(\underline{v}\cdot\underline{v})$, har vi $\|\lambda\underline{v}\| = |\lambda|\,\|\underline{v}\|$ for alle $\lambda \in L$ og alle $\underline{v} \in V$. En vektor $\underline{v}$ med $\|\underline{v}\| = 1$ kaldes en *normeret vektor* eller en *enhedsvektor*. For $\underline{v} \neq \underline{o}$ er vektorem $\frac{1}{\|\underline{v}\|}\underline{v}$ en normeret vektor; den siges at fremkomme ved *normering* af $\underline{v}$.

Lad herefter (V,L) være et vektorrum med indre produkt.

To vektorer $\underline{u},\underline{v} \in V$ siges at være (indbyrdes) *ortogonale*, dersom $\underline{u}\cdot\underline{v} = 0$; vi skrives da også $\underline{u} \perp \underline{v}$. Nulvektoren er ortogonal til samtlige vektorer, (sml. (3)), og er den eneste vektor med denne egenskab, (sml. (d)). Et sæt af vektorer siges at være et *ortogonalt sæt*, dersom vilkårlige to af sættes vektorer er ortogonale; det tomme sæt og alle sæt bestående af een vektor er således trivielt ortogonale sæt. Et ortogonalt sæt kaldes et *ortonormalt sæt*, dersom enhver vektor i sættet er normeret; det tomme sæt et trivielt ortonormalt. Hvis V har endelig dimension, forstås ved en *ortogonal* hhv. *ortonormal basis* for V en basis, som er et ortogonalt hhv. ortonormalt sæt.

Ethvert ortogonalt sæt, som ikke indeholder $\underline{o}$, er lineært uafhængigt.

Bevis. For det tomme sæt er det intet at vise. Lad derfor $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ være et ortogonalt sæt, som ikke indeholder $\underline{o}$, og lad $\lambda_1\underline{v}_1 +\ldots+ \lambda_p\underline{v}_p = \underline{o}$ være en lineær relation mellem sættets vektorer. For et vilkårligt af tallene $i = 1,\ldots,p$ gælder nu

$$(\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_p\underline{v}_p)\cdot\underline{v}_i$$
$$= \lambda_1(\underline{v}_1\cdot\underline{v}_i) + \ldots + \lambda_p(\underline{v}_p\cdot\underline{v}_i)$$
$$= \lambda_i(\underline{v}_i\cdot\underline{v}_i).$$

Da samtidig $\underline{o}\cdot\underline{v}_i = 0$, har vi altså $\lambda_i(\underline{v}_i\cdot\underline{v}_i) = 0$. Idet $\underline{v}_i\cdot\underline{v}_i > 0$, følger heraf som ønsket, at $\lambda_i = 0$. □

Som en umiddelbar konsekvens heraf har vi:

Ethvert ortonormalt sæt er lineært uafhængigt.

Vi skal dernæst vise:

Lad $(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_p)$ *være et lineært uafhængigt sæt. Der findes da et ortonormalt sæt* $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$, *således at* span$\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_q\}$ = span$\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_q\}$ *for* $q = 1,\ldots,p$.

Bevis. Først bestemmes et ortogonalt sæt $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ med den ønskede egenskab. Vi sætter $\underline{v}_1 = \underline{u}_1$. Sættet $(\underline{v}_1)$ er da et ortogonalt sæt med span$\{\underline{v}_1\}$ = span$\{\underline{u}_1\}$. Vektorerne $\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_p$ bestemmes herefter successivt efter følgende forskrift: Er $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r$ bestemt, således at $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r)$ er et ortogonalt sæt med span$\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_q\}$ = span$\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_q\}$ for $q = 1,\ldots,r$, sættes

$$\underline{v}_{r+1} = \underline{u}_{r+1} - \left(\frac{\underline{u}_{r+1}\cdot\underline{v}_1}{\underline{v}_1\cdot\underline{v}_1}\right)\underline{v}_1 - \ldots - \left(\frac{\underline{u}_{r+1}\cdot\underline{v}_r}{\underline{v}_r\cdot\underline{v}_r}\right)\underline{v}_r \quad . \tag{4}$$

(Det bemærkes, at $\underline{v}_{r+1}$ er veldefineret; af rg$(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r)$ = dim span$\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r\}$ = dim span$\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_r\}$ = rg$(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_r) = r$ følger, at sættet $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r)$ er lineært uafhængigt, og ingen af vektorerne $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r$ er derfor nulvektoren.) Det påstås, at sættet

$(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_{r+1})$ er ortogonalt, og at span$\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_q\}$ = span$\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_q\}$ for $q = 1,\ldots,r+1$. For at vise det første er det tilstrækkeligt at vise, at $\underline{v}_{r+1}\cdot\underline{v}_i = 0$ for $i = 1,\ldots,r$; dette verificeres ved en simpel udregning. For at vise det andet er det tilstrækkeligt at betragte tilfældet $q = r+1$. Hertil bemærkes, at span$\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r\}$ = span$\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_r\}$ implicerer span$\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r,\underline{u}_{r+1}\}$ = span$\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_r,\underline{u}_{r+1}\}$, og at der ved brug af (4) fås span$\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r,\underline{u}_{r+1}\}$ = span$\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r,\underline{v}_{r+1}\}$, hvoraf det ønskede fremgår. Hermed er bestemt et ortogonalt sæt $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ med den ønskede egenskab. Specielt har vi span$\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p\}$ = span$\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_p\}$, og dermed rg$(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ = rg$(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_p)$. Idet sættet $(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_p)$ er lineært uafhængigt, følger heraf, at også sættet $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ er lineært uafhængigt. Følgelig er ingen af vektorerne $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p$ nulvektoren, og ved normering af vektorerne i sættet $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ fås derfor et ortonormalt sæt med den ønskede egenskab. $\square$

Sætningen ovenfor kaldes *Gram-Schmidt's ortonormaliseringssætning*. Metoden til successiv bestemmelse af vektorerne $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p$ kaldes *ortonormalisering*.

Af det foregående fremgår umiddelbart:

Hvis V har endelig dimension, så findes en ortonormal basis for V.

Eksempel. I vektorrummet (L^n,L) defineres et indre produkt ved

$$(x_1,\ldots,x_n)\cdot(y_1,\ldots,y_n) = x_1\overline{y}_1 +\ldots+ x_n\overline{y}_n,$$

kaldet det *sædvanlige* indre produkt. Den kanoniske basis bliver herved en ortonormal basis. Åbenbart gælder

$$x_i = \underline{x}\cdot\underline{e}_i \ ,$$

hvor $\underline{e}_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, og

$$\|\underline{x}\|^2 = |x_1|^2 +\ldots+ |x_n|^2$$

for enhver vektor $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in L^n$. □

Eksempel. I analogi med eksemplet ovenfor defineres i $(M_{1,n}(L),L)$ et indre produkt ved

$$(x_1\ldots x_n)\cdot(y_1\ldots y_n) = x_1\overline{y}_1 +\ldots+ x_n\overline{y}_n,$$

og i $(M_{n,1}(L),L)$ et indre produkt ved

$$\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = x_1\overline{y}_1 +\ldots+ x_n\overline{y}_n \ .$$

Er $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$, $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})$ og $\underline{\underline{C}} = (c_{ij})$ matricer fra $M_{n,n}(L)$ med $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$, fås åbenbart

$$c_{ij} = \underline{\underline{a}}_{i-}\cdot\overline{(\underline{\underline{b}}_{|j})}\,' = (\underline{\underline{a}}_{i-})'\cdot\overline{(\underline{\underline{b}}_{|j})}.$$

Er $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$ en ortogonal hhv. unitær matrix, altså en regulær matrix med $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{A}}'\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$ hhv. $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}^*\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$, får vi derfor

$$\delta_{ij} = \underline{\underline{a}}_{i-}\cdot\underline{\underline{a}}_{j-} = \underline{\underline{a}}_{|i}\cdot\underline{\underline{a}}_{|j} \ .$$

Sættet af rækker hhv. søjler er følgelig et ortonormalt sæt af vektorer fra $(M_{1,n}(L),L)$ hhv. $(M_{n,1}(L),L)$. Lad omvendt $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(L)$ være en matrix for hvilken sættet af rækker er ortonormalt; der gælder da

$$\delta_{ij} = \underline{\underline{a}}_{i-} \cdot \underline{\underline{a}}_{j-} \quad .$$

For $L = \mathbb{R}$ følger heraf $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{E}}$, og for $L = \mathbb{C}$ følger $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{E}}$. Da ethvert ortonormalt sæt er lineært uafhængigt, sluttes endvidere, at $\underline{\underline{A}}$ har rækkerang n, og følgelig er regulær. Ialt giver dette, at $\underline{\underline{A}}$ er ortogonal hhv. unitær. Tilsvarende kan vises, at hvis sættet af søjler er ortonormalt, så er $\underline{\underline{A}}$ ortogonal hhv. unitær. □

Lad herefter (V,L) være et endelig-dimensionalt vektorrum med indre produkt. Er der givet en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ for V, så kan det indre produkt af to vektorer på simpel måde udtrykkes ved vektorernes koordinater. For $\underline{u} = u_1\underline{e}_1 + \ldots + u_n\underline{e}_n$ og $\underline{v} = v_1\underline{e}_1 + \ldots + v_n\underline{e}_n$ fås nemlig

$$\begin{aligned}
\underline{u}\cdot\underline{v} &= (u_1\underline{e}_1 + \ldots + u_n\underline{e}_n)\cdot(v_1\underline{e}_1 + \ldots + v_n\underline{e}_n) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} u_i\underline{e}_i \cdot v_j\underline{e}_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} u_i\overline{v}_j(\underline{e}_i\cdot\underline{e}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_i\overline{v}_i \ ,
\end{aligned}$$

altså

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = u_1\overline{v}_1 + \ldots + u_n\overline{v}_n .$$

Specielt fås

$$v_i = \underline{v}\cdot\underline{e}_i$$

og

$$\|\underline{v}\|^2 = |v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2$$

for enhver vektor $\underline{v} = v_1\underline{e}_1 + \ldots + v_n\underline{e}_n$. Sammenlignes med det første eksempel ovenfor ses, at et sæt $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ af vektorer fra V er ortonormalt, hvis og kun hvis sættet bestående af vektorernes koordinatsæt er et ortonormalt sæt af vektorer fra (L^n, L), - eller, ved sammenligning med det andet eksempel ovenfor, hvis og kun hvis sættet bestående af vektorernes koordinatrækker hhv. kokordinatsøjler er et ortonormalt sæt i $(\mathrm{M}_{1,n}(L), L)$ hhv. $(\mathrm{M}_{n,1}(L), L)$. Af det sidste fremgår ved sammenligning med et resultat i det andet eksempel, at koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$ hørende til overgangen fra en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ til en ortonormal basis $(\underline{\hat{e}}_1,\ldots,\underline{\hat{e}}_n)$ er ortogonal hhv. unitær; thi søjlerne i $\underline{\underline{S}}$ er koordinatsøjlerne for vektorerne i et ortonormalt sæt - nemlig $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ - m.h.t. en ortonormal basis - nemlig $(\underline{\hat{e}}_1,\ldots,\underline{\hat{e}}_n)$. Omvendt gælder, at er der givet baser $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\underline{\hat{e}}_1,\ldots,\underline{\hat{e}}_n)$, således at koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra den ene til den anden basis er ortogonal hhv. unitær, og den ene af de to baser er ortonormal, så vil også den anden basis være ortonormal.

En matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{M}_{n,n}(L)$ siges at være *ortogonal-ækvivalent* (for $L = \mathbb{R}$) hhv. *unitær-ækvivalent* (for $L = \mathbb{C}$) med en matrix $\underline{\underline{B}} \in \mathrm{M}_{n,n}(L)$, dersom der findes en ortogonal hhv. unitær matrix $\underline{\underline{S}} \in \mathrm{M}_{n,n}(L)$, således at $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ $(= \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}'$ hhv. $= \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^*)$. Det eftervises let, at der herved er defineret en ækvivalensrelation i $M_{n,n}(L)$. Af det foregående fremgår, at to matricer er ortogonal-ækvivalente hhv. unitær-ækvivalente, netop når de hører til de samme endomorfier af et n-dimensionalt vektorrum (V,L) med indre prodult m.h.t. forskellige valg af ortonormale baser. Heraf fremgår i øvrigt på ny, at den betragtede relation er en ækvivalensrelation. Det bemærkes, at ortogonal - hhv. unitær-ækvivalente matricer specielt er regulær-ækvivalente.

To ikke-tomme delmængder M_1 og M_2 af et vektorrum (V,L) med indre produkt siges at være (indbyrdes) *ortogonale*, dersom enhver vektor i M_1 er ortogonal til enhver vektor i M_2; vi skriver da $M_1 \perp M_2$. For en ikke-tom delmængde M af V defineres $M^\perp$ som mængden af vektorer i V, der er ortogonale til samtlige vektorer i M; mængden $M^\perp$ kaldes for M's *ortogonal*. For ikke-tomme delmængder M_1 og M_2 er $M_1 \perp M_2$ ensbetydende med $M_1 \subseteqq M_2{}^\perp$ og med $M_2 \subseteqq M_1{}^\perp$. Det eftervises let, at $M^\perp$ er et underrum, at der gælder $M \subseteqq M^{\perp\perp}$ (hvor $M^{\perp\perp}$ står for $(M^\perp)^\perp$), og at $M_1 \subseteqq M_2$ implicerer $M_2{}^\perp \subseteqq M_1{}^\perp$. Det noteres, at ethvert underrum U danner direkte sum med sit ortogonal $U^\perp$.

For ethvert endelig-dimensionalt underrum U af V gælder $U \oplus U^\perp = V$.

Bevis. For $\dim U = 0$ er der intet at vise. Antag derfor, at $\dim U = p \in \mathbb{N}$, og lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_r)$ være en ortonormal basis for U. For en vilkårlig vektor $\underline{v} \in V$ sætter vi

(5) $$pr(\underline{v}) = (\underline{v}\cdot\underline{e}_1)\underline{e}_1 +\ldots+ (\underline{v}\cdot\underline{e}_p)\underline{e}_p.$$

Vi har da $pr(\underline{v}) \in U$. Endvidere har vi for $i = 1,\ldots,p$

$$(\underline{v}-pr(\underline{v}))\cdot\underline{e}_i = \underline{v}\cdot\underline{e}_i - (\underline{v}\cdot\underline{e}_1)\underline{e}_1\cdot\underline{e}_1 -\ldots- (\underline{v}\cdot\underline{e}_p)\underline{e}_p\cdot\underline{e}_i$$

$$= \underline{v}\cdot\underline{e}_i - \underline{v}\cdot\underline{e}_i = 0,$$

hvoraf følger, at $\underline{v} - pr(\underline{v}) \in U^{\perp}$. Fremstillingen $\underline{v} = pr(\underline{v}) + (\underline{v}-pr(\underline{v}))$ er altså en fremstilling af $\underline{v}$ som sum af en vektor fra U og en vektor fra $U^{\perp}$. Heraf følger, at $U + U^{\perp} = V$. Og da som tidligere bemærket ethvert underrum danner direkte sum med sit ortogonal, følger påstanden. ▯

Af sætningen fremgår, at hvis U er et endelig-dimensionalt underrum, så er $U^{\perp}$ både ortogonalt og komplementært til U. Er omvendt U og U_1 underrum af V med $U \perp U_1$ og $U \oplus U_1 = V$, så gælder $U_1 = U^{\perp}$. Af $U \perp U_1$ følger nemlig $U_1 \subseteq U^{\perp}$. Og fremstilles en vektor $\underline{v} \in U^{\perp}$ på normen $\underline{v} = \underline{u} + \underline{u}_1$ med $\underline{u} \in U$ og $\underline{u}_1 \in U_1$, har vi både $\underline{v} - \underline{u}_1 = \underline{u}$ og $\underline{v} - \underline{u}_1 \perp \underline{u}$, og dermed $\underline{u} = \underline{o}$, altså $\underline{v} = \underline{u}_1 \in U_1$; dette viser, at $U^{\perp} \subseteq U_1$. Vi har altså: Til et underrum U af V findes højst et underrum, som er både ortogonalt og komplementært til U; findes et, må dette være $U^{\perp}$, som da også kaldes U's *ortogonale komplement*. Ethvert endelig-dimensionalt underrum har et ortogonalt komplement, hvorimod et uendelig-dimensionalt underrum ikke nødvendigvis har et ortogonalt komplement.

Er U et underrum af V, og har V endelig dimension, så er ifølge sætningen ovenfor både U og $U^{\perp\perp}$ ortogonalt komplement til $U^{\perp}$;

der gælder derfor $U = U^{\perp\perp}$. Heraf følger, at der for enhver ikke-tom delmængde M af V gælder $M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}$ (hvor $M^{\perp\perp\perp}$ står for $(M^{\perp\perp})^{\perp}$).

Er U et underrum af V, og har U et ortognalt komplement, kaldes projektionen af V på U langs $U^{\perp}$ også for *ortogonalprojektionen* af V på U. Af beviset for sætningen ovenfor fremgår, at hvis U har endelig dimension, og $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_p)$ er en ortonormal basis for U, så er ortogonalprojektionen af V på U netop den ved (5) definerede afbildning pr. (sml. i øvrigt (4) i beviset for ortonormaliseringssætningen: Sættes $\underline{e}_j = \|\underline{v}_j\|^{-1}\underline{v}_j$, fås $(\underline{u}_{r+1}\cdot\underline{v}_j)(\underline{v}_j\cdot\underline{v}_j)^{-1}\underline{v}_j =$ $(\underline{u}_{r+1}\cdot\underline{e}_j)\underline{e}_j$; sættes $U_k = \text{span}\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_k\}$, er vektoren $\underline{v}_{r+1}$ altså bestemt som $\underline{u}_{r+1}$'s komponent efter $U_r^{\perp}$ m.h.t. fremstillingen $U_r \oplus U_r^{\perp} = U_{r+1}$.)

Bemærkning. I vektorrummet af geometriske vektorer i planen hhv. rummet er "skalarproduktet" et indre produkt. (Sml. i øvrigt side 1.1.5.)

Eksempel. Lad (V,L) være et vektorrum af dimension $n \in \mathbb{N}$. For enhver basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ defineres da ved

$$(x_1\underline{e}_1 + \ldots + x_n\underline{e}_n)\cdot(y_n\underline{e}_1 + \ldots + y_n\underline{e}_n) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n$$

et indre produkt i V. Basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ bliver herved en ortonormal basis. (Sml. i øvrigt eksemplerne side 7.1.4-7.1.6.)

Eksempel. Mængden af følger $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^{\mathbb{N}}$ for hvilke rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ er konvergent udgør et underrum af $(L^{\mathbb{N}},L)$, som betegnes $\ell_2(L)$. For at indse dette bemærkes, at der for $x,y \in L$ gælder

(6) $$2|xy| = |x|^2+|y|^2-(|x|-|y|)^2 \leqq |x|^2+|y|^2,$$

og dermed

(7) $$|x+y|^2 \leqq |x|^2+|y|^2+2|xy| \leqq 2(|x|^2+|y|^2).$$

Af (7) sluttes, at vi for $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(L)$ og $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(L)$ har $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(L)$; endvidere har vi oplagt $\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(L)$ for $\lambda \in L$ og $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(L)$. Heraf fremgår, at $\ell_2(L)$ er et underrum. I $\ell_2(L)$ defineres et indre produkt ved

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\cdot(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y}_n,$$

idet man bemærker, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y}_n$ er absolut konvergent ifølge (6).

Eksempel. I vektorrummet af alle reelle eller komplekse kontinuerte funktioner på et interval $[a,b]$ defineres ved

$$\varphi\cdot\psi = \int_a^b \varphi(t)\overline{\psi(t)}\,dt$$

et indre produkt kaldet det *sædvanlige* indre produkt.

7.1. NORM.

Ved en norm i et vektorrum (V,L) forstås en afbildning $\underline{v} \mapsto \|\underline{v}\|$ af V ind i $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ med følgende egenskaber:

(a) $\forall\ \underline{u},\underline{v} \in V : \|\underline{u} + \underline{v}\| \leqq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$.

(b) $\forall\ \lambda \in L\ \forall\ \underline{v} \in V : \|\lambda\underline{v}\| = |\lambda|\ \|\underline{v}\|$.

(c) $\forall\ \underline{v} \in V : \underline{v} \neq \underline{0} \Rightarrow \|\underline{v}\| > 0$.

Betingelsen (a) kaldes *trekantsuligheden*. Et vektorrum, som er forsynet med en norm, kaldes et *normeret vektorrum*.

Sættes $\lambda = -1$ i (b) fås, at der for alle $\underline{v} \in V$ gælder $\|-\underline{v}\| = \|\underline{v}\|$. Sættes $\lambda = 0$ i (b) fås $\|\underline{o}\| = 0$.

Det eftervises let, at et normeret vektorrum bliver et metrisk rum ved afstandsfunktionen $\text{dist}(\underline{u},\underline{v}) = \|\underline{u}-\underline{v}\|$.

Lad herefter (V,L) være et vektorrum med indre produkt. Vi skal vise, at der da ved

$$\underline{v} \mapsto \|\underline{v}\| = \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}}$$

defineres en norm i (V,L); denne norm siges at være udsprunget af det indre produkt. Vi har allerede tidligere overvejet, at $\|\underline{o}\| = 0$, og at (b) og (c) er opfyldt, (sml. side 7.1.2). For at eftervise (a), viser vi først *Cauchy-Schwarz's ulighed*: For alle $\underline{u},\underline{v} \in V$ gælder

(1) $|\underline{u}\cdot\underline{v}| \leqq \sqrt{\underline{u}\cdot\underline{u}}\ \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}}$.

Bevis. For $\underline{u} = \underline{o}$ er uligheden øjensynlig opfyldt, endda med lighedstegn. Antag derfor, at $\underline{u} \neq \underline{o}$. For alle $\lambda \in L$ gælder nu

$$(2) \qquad (\lambda\underline{u}+\underline{v})\cdot(\lambda\underline{u}+\underline{v}) = \lambda\bar{\lambda}\underline{u}\cdot\underline{u} + \lambda\underline{u}\cdot\underline{v} + \bar{\lambda}\underline{v}\cdot\underline{u} + \underline{v}\cdot\underline{v} \geq 0.$$

Indsættes specielt $\lambda = -\dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{\underline{u}\cdot\underline{u}}$, fås

$$\frac{|\underline{u}\cdot\underline{v}|^2}{\underline{u}\cdot\underline{u}} - \frac{|\underline{u}\cdot\underline{v}|^2}{\underline{u}\cdot\underline{u}} - \frac{|\underline{u}\cdot\underline{v}|^2}{\underline{u}\cdot\underline{u}} + \underline{v}\cdot\underline{v} \geq 0,$$

altså

$$(3) \qquad \frac{1}{\underline{u}\cdot\underline{u}}\left(-|\underline{u}\cdot\underline{v}|^2 + (\underline{u}\cdot\underline{u})(\underline{v}\cdot\underline{v})\right) \geq 0,$$

hvoraf det ønskede fremgår. □

Det noteres, at der gælder lighedstegn i (1), hvis og kun hvis sættet $(\underline{u},\underline{v})$ er lineært afhængigt. Er nemlig sættet lineært afhængigt, ses ved indsættelse af $\underline{u} = \mu\underline{v}$ eller $\underline{v} = \mu\underline{u}$, at lighedstegnet gælder. Gælder omvendt lighedstegnet, så har vi enten $\underline{u} = \underline{o}$, eller $(\lambda\underline{u}+\underline{v})\cdot(\lambda\underline{u}+\underline{v}) = 0$, altså $\lambda\underline{u}+\underline{v} = \underline{o}$, med den anførte værdi af λ; i begge tilfælde er sættet lineært afhængigt.

Vi kan nu eftervise betingelsen (a) ovenfor. Vi har

$$\begin{aligned}
\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 &= (\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v}) \\
&= \underline{u}\cdot\underline{u} + \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{u} + \underline{v}\cdot\underline{v} \\
&= \underline{u}\cdot\underline{u} + 2\,\mathrm{Re}(\underline{u}\cdot\underline{v}) + \underline{v}\cdot\underline{v} \\
&\leq \underline{u}\cdot\underline{u} + 2|\underline{u}\cdot\underline{v}| + \underline{v}\cdot\underline{v} \\
&\leq \underline{u}\cdot\underline{u} + 2\sqrt{\underline{u}\cdot\underline{u}}\sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}} + \underline{v}\cdot\underline{v} \\
&= (\sqrt{\underline{u}\cdot\underline{u}} + \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}})^2 \\
&= (\|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|)^2,
\end{aligned}$$

hvor der ved den sidste vurdering er benyttet Cauchy-Schwarz's ulighed. Heraf følger (a). Det noteres, at det sidste ulighedstegn som ovenfor bemærket er et lighedstegn, hvis og kun hvis sættet $(\underline{u},\underline{v})$ er lineært afhængigt. Er dette opfyldt, har vi enten $\underline{u} = \mu\underline{v}$ eller $\underline{v} = \mu\underline{u}$ for en skalar $\mu \in L$. Antages, at $\underline{u} = \mu\underline{v}$, fås $Re(\underline{u}\cdot\underline{v}) = Re(\mu\underline{v}\cdot\underline{v}) = Re(\mu)(\underline{v}\cdot\underline{v})$ og $|\underline{u}\cdot\underline{v}| = |\mu|(\underline{v}\cdot\underline{v})$. Som betingelse for, at også det første ulighedstegn er et lighedstegn, får vi derfor, at der enten gælder $\underline{v} = \underline{u} = \underline{o}$, eller $Re(\mu) = |\mu|$, altså μ reel og ikke-negativ. Dette kan ialt sammenfattes i følgende: Lighedstegnet gælder i (a), hvis og kun hvis den ene af de to vektorer fremgår af den anden ved multiplikation med en reel ikke-negativ skalar. (Det anføres, at for en norm, som ikke udspringer af et indre produkt, kan der godt gælde lighedstegn i (a) uden at betingelsen er opfyldt.)

For to vilkårlige vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ i et vektorrum med indre produkt gælder *Pythagoras's sætning*:

$$\underline{u} \perp \underline{v} \Rightarrow \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 = \|\underline{u} + \underline{v}\|^2.$$

Dette fremgår af, at $\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = (\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v}) = \underline{u}\cdot\underline{u} + \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{u} + \underline{v}\cdot\underline{v} = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 + \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{u}$. Heraf ses tillige, at for $L = \mathbb{R}$ gælder også det omvendte. Ved induktion fås, at er $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_p)$ et ortogonalt sæt, så gælder

$$\|\underline{v}_1 +\ldots+ \underline{v}_p\|^2 = \|\underline{v}_1\|^2 +\ldots+ \|\underline{v}_p\|^2.$$

Lad (V,L) være et vektorrum med indre produkt, lad U være et underrum af V, som har et ortogonalt komplement, og lad pr betegne ortogonalprojektionen af V på U. Det påstås da, at der for enhver vektor $\underline{v} \in V$ og enhver vektor $\underline{u} \in U \setminus \{pr(\underline{v})\}$ gælder

$$\|\underline{v}-pr(\underline{v})\| < \|\underline{v}-\underline{u}\|;$$

ortogonalprojektionen af $\underline{v}$ kan altså karakteriseres som den vektor i U, der har mindst afstand fra $\underline{v}$. Der gælder nemlig $\underline{v} - pr(\underline{v}) \in U^{\perp}$, og $pr(\underline{v}) - \underline{u} \in U$, og dermed $\underline{v} - pr(\underline{v}) \perp pr(\underline{v}) - \underline{u}$. Ved brug af Pythagoras' sætning giver dette

$$\begin{aligned}\|\underline{v}-\underline{u}\|^2 &= \|(\underline{v}-pr(\underline{v})) + (pr(\underline{v})-\underline{u})\|^2 \\ &= \|\underline{v}-pr(\underline{v})\|^2 + \|pr(\underline{v})-\underline{u}\|^2,\end{aligned}$$

hvoraf påstanden fremgår. Endvidere gælder for enhver vektor $\underline{v} \in V$

$$\|pr(\underline{v})\| \leq \|\underline{v}\|$$

og

$$\|pr(\underline{v})\| = \|\underline{v}\| \Leftrightarrow \underline{v} \in U.$$

Idet $pr(\underline{v}) \perp \underline{v}-pr(\underline{v})$, får vi nemlig ved brug af Pythagoras' sætning

$$\begin{aligned}\|\underline{v}\|^2 &= \|pr(\underline{v}) + (\underline{v}-pr(\underline{v}))\|^2 \\ &= \|pr(\underline{v})\|^2 + \|\underline{v}-pr(\underline{v})\|^2,\end{aligned}$$

hvoraf påstandene følger.

Vi anfører til sidst, at man i et reelt vektorrum $(V,\mathbb{R})$ med indre produkt kan definere en *vinkel* θ, hvor $0 \leq \theta \leq \pi$, mellem to fra $\underline{0}$ forskellige vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ ved

$$\theta = \operatorname{Arccos} \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\|},$$

af Cauchy-Schwarz's ulighed følger, at θ er veldefineret.

Bemærkning. I vektorrummet af geometriske vektorer i rummet er afbildningen $\underline{v} \mapsto |\underline{v}|$ en norm. Idet $|\underline{v}| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}$, udspringer denne norm af skalarproduktet. (Sml. i øvrigt side 1.1.5.)

Eksempel. I (L^n, L) defineres normer ved

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto \|(x_1,\dots,x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|,$$
$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto \|(x_1,\dots,x_n)\|_2 = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto \|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}.$$

Af den første og den sidste af disse afbildninger faktisk er normer indses let. Den anden udspringer af det sædvanlige indre produkt, og er derfor også en norm.

Herefter er det klart, at der i et vilkårligt vektorrum (V,L) af dimension $n \in \mathbb{N}$ efter valg af basis $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ defineres normer ved

$$\underline{x} \mapsto \|\underline{x}\|_1 = \|(x_1,\dots,x_n)\|_1,$$
$$\underline{x} \mapsto \|\underline{x}\|_2 = \|(x_1,\dots,x_n)\|_2,$$

$$\underline{x} \mapsto \|\underline{x}\|_\infty = \|(x_1,\ldots,x_n)\|_\infty,$$

hvor $\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + \ldots + x_n\underline{e}_n$.

Eksempel. I vektorrummet af alle reelle eller komplekse kontinuerte funktioner på et interval $[a,b]$ defineres normer ved

$$\varphi \mapsto \|\varphi\|_1 = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt,$$

$$\varphi \mapsto \|\varphi\|_2 = \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi \mapsto \|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|.$$

Af den første og den sidste afbildning faktisk er normer indses let. Den anden udspringer af et tidligere defineret indre produkt (sml. side 7.1.11), og er derfor også en norm.

$$\underline{x} \mapsto \|\underline{x}\|_\infty = \|(x_1,\ldots,x_n)\|_\infty,$$

hvor $\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + \ldots + x_n\underline{e}_n$.

Eksempel. I vektorrummet af alle reelle eller komplekse kontinuerte funktioner på et interval $[a,b]$ defineres normer ved

$$\varphi \mapsto \|\varphi\|_1 = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt,$$

$$\varphi \mapsto \|\varphi\|_2 = \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi \mapsto \|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|.$$

Af den første og den sidste afbildning faktisk er normer indses let. Den anden udspringer af et tidligere defineret indre produkt (sml. side 7.1.11), og er derfor også en norm.

7.3. ADJUNGERET AFBILDNING.

Lad overalt i det følgende (V,L) være et vektorrum med indre produkt af dimension $n \in \mathbb{N}$. Vi skal vise:

For enhver endomorfi f af V findes en og kun en afbildning $f^*: V \to V$ med

(1) $$f(\underline{u})\cdot\underline{v} = \underline{u}\cdot f^*(\underline{v}), \qquad \underline{u},\underline{v} \in V,$$

og denne afbildning f^* er en endomorfi af V.

Afbildningen f^* kaldes den til f *adjungerede afbildning*.

Bevis. Først vises entydigheden. Antag, at både f_1^* og f_2^* opfylder (1). For enhver vektor $\underline{v} \in V$ har vi da $\underline{u}\cdot f_1^*(\underline{v}) = \underline{u}\cdot f_2^*(\underline{v})$, altså $\underline{u}\cdot(f_1^*(\underline{v})-f_2^*(\underline{v})) = 0$, for alle vektorer $\underline{u} \in V$, hvoraf følger, at $f_1^*(\underline{v}) = f_2^*(\underline{v})$. Der gælder derfor $f_1^* = f_2^*$. For at vise eksistensen vælges en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ for V. Vi sætter da

(2) $$f^*(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} (\underline{v}\cdot f(\underline{e}_i))\underline{e}_i$$

for $\underline{v} \in V$. Det er let at se, at den herved definerede afbildning $f^*: V \to V$ er lineær. Endvidere gælder for $\underline{u} = u_1\underline{e}_1 +\dots+ u_n\underline{e}_n$ og $\underline{v} = v_1\underline{e}_1 +\dots+ v_n\underline{e}_n$

$$\begin{aligned}\underline{u}\cdot f^*(\underline{v}) &= \underline{u}\cdot\sum_{i=1}^{n} (\underline{v}\cdot f(\underline{e}_i))\underline{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{(\underline{v}\cdot f(\underline{e}_i))}\,\underline{u}\cdot\underline{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(\underline{e}_i)\cdot\underline{v})u_i\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} u_i f(\underline{e}_i)\right) \cdot \underline{v}$$

$$= f(\underline{u}) \cdot \underline{v},$$

hvormed er vist, at f^* opfylder (1). □

Lad f være en endomorfi af V, og lad $\underline{\underline{A}}$ være den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$. Til den adjungerede afbildning f^* hører da den adjungerede matrix $\underline{\underline{A}}^*$ m.h.t. basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$.

Bevis. Af det givne følger, at $a_{ij} = f(\underline{e}_j) \cdot \underline{e}_i$. Ved anvendelse af dette og af (2) fås

$$\begin{aligned} f^*(\underline{e}_j) &= \sum_{i=1}^{n} (\underline{e}_j \cdot f(\underline{e}_i))\underline{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{(f(\underline{e}_i) \cdot \underline{e}_j)}\,\underline{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ji}}\,\underline{e}_i \;, \end{aligned}$$

hvoraf påstanden fremgår. □

Lad f være en endomorfi af V, og lad U være et ved f invariant underrum af V. Det ortogonale komplement $U^{\perp}$ er da invariant ved den adjungerede afbildning f^*.

Bevis. Da $f(\underline{u}) \in U$ for enhver vektor $\underline{u} \in U$, har vi $f(\underline{u}) \cdot \underline{v} = 0$, og dermed $\underline{u} \cdot f^*(\underline{v}) = 0$, for alle $\underline{u} \in U$ og alle $\underline{v} \in U^{\perp}$. Heraf følger, at $f^*(\underline{v}) \in U^{\perp}$ for alle $\underline{v} \in U^{\perp}$, hvormed $f^*(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$. □

Idet vi betegner $(f^*)^*$ med f^{**} gælder

$$f^{**} = f.$$

For dannelse af adjungeret afbildning gælder endvidere

$$\begin{aligned}
(f+g)^* &= f^* + g^*,\\
(\lambda f)^* &= \bar{\lambda} f^*,\\
(g \circ f)^* &= f^* \circ g^*,\\
(f^n)^* &= (f^*)^n, \qquad n \in \mathbb{N},\\
e^* &= e,\\
(f^{-1})^* &= (f^*)^{-1},\\
o^* &= o,
\end{aligned}$$

hvor e er den identiske afbildning af V, og o er nulafbildningen af V; i den næstsidste påstand er indeholdt, at den adjungerede til en bijektiv endomorfi igen er bijektiv. - Beviserne, som overlades til læseren, kan enten føres på grundlag af selve definitionen af adjungeret afbildning, eller ved benyttelse af, at der til adjungeret afbildning hører adjungeret matrix m.h.t. en valgt ortonormal basis.

7.4. DUALITET.

Vi skal kort gøre rede for hvorledes begreberne ortogonalitet, adjungeret afbildning m.v. kan indordnes under et dualitetssynspunkt.

Det ses umiddelbart, at et reelt vektorrum $(V,\mathbb{R})$ med indre produkt er i dualitet med sig selv ved afbildningen $(\underline{u},\underline{v}) \mapsto \langle\underline{u},\underline{v}\rangle = \underline{u}\cdot\underline{v}$. To vektorer er ortogonale, hvis og kun hvis de annihilerer hinanden, og for enhver ikke-tom delmængde M af V gælder $M^\perp = M^o$. Resultaterne om ortogonal er derfor indeholdt i resultaterne om annihilator. En basis er ortonormal, hvis og kun hvis den har sig selv til dual basis.

Den adjungerede f^* til en endomorfi f af et endelig-dimensionalt reelt vektorrum $(V,\mathbb{R})$ med indre produkt er identisk med den duale afbildning f' (m.h.t. de duale par V,V og V,V). At der til adjungeret afbildning hører adjungeret matrix er indeholdt i, at der til dual afbildning hører transponeret matrix. Sætningen om, at det ortogonale komplement til et ved f invariant underrum er invariant ved f^* er indeholdt i den tilsvarende sætning om dual afbildning. Reglerne for dannelse af adjungeret afbildning er indeholdt i de tilsvarende regler for dannelse af dual afbildning.

Af sætningen om naturlig isomorfi følger, at der for enhver linearform ξ på et endelig-dimensionalt reelt vektorrum $(V,\mathbb{R})$ med indre produkt findes netop een vektor $\underline{u} \in V$, således at $\xi(\underline{v}) = \underline{v}\cdot\underline{u}$ for alle $\underline{v} \in V$.

For et komplekst vektorrum $(V,\mathbb{C})$ med indre produkt er afbildningen $(\underline{u},\underline{v}) \mapsto \underline{u}\cdot\underline{v}$ ikke en bilinearform på $V\times V$, idet $\underline{u}\cdot\lambda\underline{v} = \overline{\lambda}\underline{u}\cdot\underline{v}$; vektorrummet er derfor ikke i dualitet med sig selv på samme måde som i det reelle tilfælde. En dualitet, som er nært forbundet med det indre produkt, kan fås ved begrebet konjugering. Ved en *konjugering* i et komplekst vektorrum $(V,\mathbb{C})$ forstås en afbildning $k\colon V \mapsto V$ med følgende egenskaber:

$$\forall\ \underline{v} \in V : k^2(\underline{v}) = \underline{v}$$

$$\forall\ \underline{u},\underline{v} \in V : k(\underline{u}+\underline{v}) = k(\underline{u})+k(\underline{v})$$

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{C}\ \forall\ \underline{v} \in V : k(\lambda\underline{v}) = \overline{\lambda}k(\underline{v})$$

Bemærk, at den første betingelse sikrer, at k er bijektiv. Ethvert komplekst vektorrum har konjugeringer. For endelig-dimensionale vektorrum $(V,\mathbb{C})$ kan dette indses på følgende måde: Lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en basis for V; afbildningen

$$v_1\underline{e}_1 +\ldots+ v_n\underline{e}_n \mapsto k(v_1\underline{e}_1 +\ldots+ v_n\underline{e}_n) = \overline{v}_1\underline{e}_1 +\ldots+ \overline{v}_n\underline{e}_n$$

er da en konjugering i V.

Lad herefter k være en konjugering i et komplekst vektorrum $(V,\mathbb{C})$ med indre produkt. Vektorrummet er da i dualitet med sig selv ved afbildningen $(\underline{u},\underline{v}) \mapsto \langle\underline{u},\underline{v}\rangle = \underline{u}\cdot k(\underline{v})$. To vektorer $\underline{u},\underline{v} \in V$ er ortogonale, hvis og kun hvis $\underline{u}$ og $k(\underline{v})$ - og/eller $\underline{v}$ og $k(\underline{u})$ - annihilerer hinanden. For en ikke-tom delmængde M gælder $M^{\perp} = (k(M))^{\circ}$. Resultaterne om ortogonal er derfor ikke umiddelbart indeholdt i de tilsvarende resultater om annihilator.

En basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ er ortonormal, hvis og kun hvis den har $(k(\underline{e}_1),\ldots,k(\underline{e}_n))$ som dual basis.

Relationen $f(\underline{u})\cdot\underline{v} = \underline{u}\cdot f^*(\underline{v})$, som karakteriserer adjungeret afbildning, går over i relationen $\langle f(\underline{u}),k(\underline{v})\rangle = \langle\underline{u},k(f^*(\underline{v}))\rangle$, altså $\langle f(\underline{u}),\underline{v}\rangle = \langle\underline{u}, k(f^*(k(\underline{v})))\rangle$, hvoraf fremgår, at $f' = k\circ f^*\circ k$ og $f^* = k\circ f'\circ k$.

Af sætningen om naturlig isomorfi følger direkte, at der for enhver linearform ξ på et endelig-dimensionalt vektorrum $(V,\mathbb{C})$ med indre produkt findes netop een vektor $\underline{u}_1 \in V$, således at $\xi(\underline{v}) = \underline{v}\cdot k(\underline{u}_1)$ for alle $\underline{v} \in V$. Sættes $\underline{u} = k(\underline{u}_1)$ fås som i det reelle tilfælde, at der findes netop een vektor $\underline{u} \in V$, således at $\xi(\underline{v}) = \underline{v}\cdot\underline{u}$ for alle $\underline{v} \in V$.

7.5. NORMALE AFBILDNINGER.

Lad overalt i det følgende (V,L) være et vektorrum med indre produkt af dimension $n \in \mathbb{N}$.

En endomorfi f af V siges at være *normal*, dersom

$$f^* \circ f = f \circ f^*.$$

Er $\underline{\underline{A}}$ den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis, kommer dette ud på, at $\underline{\underline{A}}^*\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^*$. (En matrix med denne egenskab kaldes en *normal matrix*.)

I den følgende sætning opsummeres egenskaber ved normale endomorfier:

Lad f være en normal endomorfi af V. Da gælder:

(1) *f^* er normal.*

(2) $K_f = K_{f^*}$.

(3) *$K_f^\perp$ er invariant ved både f og f^*; afbildningen $f^* : K_f^\perp \to K_f^\perp$ er den adjungerede til afbildningen $f : K_f^\perp \to K_f^\perp$, og $f : K_f^\perp \to K_f^\perp$ er normal.*

(4) *For alle $\lambda \in L$ er $f+\lambda e$ normal.*

(5) *For alle $\lambda \in L$ gælder $K_{f-\lambda e} = K_{f^*-\bar{\lambda} e}$.*

(6) *For alle $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ med $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gælder $K_{f-\lambda_1 e} \perp K_{f-\lambda_2 e}$.*

Bevis. Påstanden (1) følger af, at $f^{**} = f$. For at vise (2) bemærkes, at vi for alle $\underline{u},\underline{v} \in V$ har

$$f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) = \underline{u}\cdot f^*(f(\underline{v})) = \underline{u}\cdot f(f^*(\underline{v})) = f^*(\underline{u})\cdot f^*(\underline{v});$$

sættes heri $\underline{u} = \underline{v}$, følger (2). Ifølge en tidligere sætning (side 7.3.2) er $K_f{}^{\perp}$ invariant ved f^* og $K_{f^*}{}^{\perp}$ invariant ved f^{**}; idet $f^{**} = f$, fås heraf den første påstand i (3) ved brug af (2). De to sidste påstande i (3) følger af den første. Af tidligere anførte regler for dannelse af adjungeret afbildning fremgår, at der for $\lambda \in L$ gælder $(f+\lambda e)^* = f^*+\bar{\lambda}e$. Ved brug heraf fås

$$(f+\lambda e)^*\circ(f+\lambda e) = f^*\circ f + \bar{\lambda}f + \lambda f^* + \bar{\lambda}\lambda e$$

og

$$(f+\lambda e)\circ(f+\lambda e)^* = f\circ f^* + \lambda f^* + \bar{\lambda}f + \lambda\bar{\lambda}e,$$

hvoraf (4) fremgår. Påstanden (5) følger af (2) og (4). Lad endelig $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ være vektorer med $f(\underline{v}_1) = \lambda_1\underline{v}_1$ og $f(\underline{v}_2) = \lambda_2\underline{v}_2$. Ved brug af (5) fås da

$$\lambda_1\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2 = f(\underline{v}_1)\cdot\underline{v}_2 = \underline{v}_1\cdot f^*(\underline{v}_2) = \underline{v}_1\cdot\bar{\lambda}_2\underline{v}_2 = \lambda_2\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2 .$$

For $\lambda_1 \neq \lambda_2$ følger heraf, at $\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2 = 0$. Heraf fås (6). []

Vi skal herefter vise følgende hovedsætning:

En endomorfi f af et unitært vektorrum $(V,\mathbb{C})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$ er normal, hvis og kun hvis der findes en ortonormal basis for V bestående af egenvektorer for f.

Bevis. Antag først, at der findes en basis af den omtalte art. Den til f hørende matrix $\underline{\underline{A}}$ m.h.t. en sådan basis er da en diagonalmatrix. Idet to vilkårlige diagonalmatricer er ombyttelige, gælder derfor $\underline{\underline{A}}^*\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^*$. Men heraf følger, at f er normal. Det omvendte vises ved induktion efter n. For $n = 1$ er der intet at vise. Lad derefter f være en normal endomorfi af et n-dimensionalt unitært vektorrum $(V,\mathbb{C})$, hvor $n \geqq 2$, og antag, at påstanden gælder for alle dimensionstal $\leqq n-1$. Da V er et komplekst vektorrum, har f mindst en egenværdi; lad λ være en sådan. Er $K_{f-\lambda e} = V$, har enhver ortonormal basis for V den ønskede egenskab. Ellers fremgår af (4), at $f-\lambda e$ er normal, og af (3) fremgår, at $K_{f-\lambda e}{}^{\perp}$ er invariant ved $f-\lambda e$ og at $f-\lambda e\colon K_{f-\lambda e}{}^{\perp} \to K_{f-\lambda e}{}^{\perp}$ er normal. Af (4) fremgår derefter, at $f\colon K_{f-\lambda e}{}^{\perp} \to K_{f-\lambda e}{}^{\perp}$ er normal. Idet $\dim K_{f-\lambda e}{}^{\perp} = n - \dim K_{f-\lambda} \leqq n-1$, giver induktionsantagelsen, at der findes en ortonormal basis for $K_{f-\lambda e}{}^{\perp}$ bestående af egenvektorer for f. Sammenstykkes denne basis med en ortonormal basis for $K_{f-\lambda e}$, fås ialt en basis for V af den ønskede art. []

En basis af den i sætningen omtalte art er det samme som en ortonormal basis m.h.t. hvilken den til f hørende matrix er en diagonalmatrix. Vi har derfor:

En matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ *er unitær-ækvivalent med en diagonalmatrix, hvis og kun hvis den er normal, dvs.* $\underline{\underline{A}}^*\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^*$.

Det anføres, at en normal endomorfi af et euklidisk vektorrum ikke nødvendigvis har egenværdier.

7.6. SELVADJUNGEREDE AFBILDNINGER.

Lad i det følgende (V,L) være et vektorrum med indre produkt af dimension $n \in \mathbb{N}$.

En endomorfi f af V siges at være *selvadjungeret*, dersom

$$f^* = f.$$

Er $\underline{\underline{A}}$ den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis, kommer dette ud på, at $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}$, altså at A er symmetrisk (for $L=\mathbb{R}$) hhv. Hermite'sk (for $L=\mathbb{C}$). Det er klart, at hvis f er selvadjungeret, så er f normal.

Vi skal vise:

En endomorfi f af et unitært vektorrum $(V,\mathbb{C})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$ er selvadjungeret, hvis og kun hvis der findes en ortonormal basis for V bestående af egenvektorer for f og alle egenværdier er reelle.

Bevis. Antag først, at der findes en basis af den omtalte art. Den til f hørende matrix $\underline{\underline{A}}$ m.h.t. en sådan basis er da en diagonalmatrix med reelle diagonalelementer. Der gælder derfor $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}$, hvoraf følger, at f er selvadjungeret. Antag omvendt, at f er selvadjungeret. Da er f specielt normal, og der findes derfor en ortonormal basis bestående af egenvektorer (sml. side 7.5.2). Den til f hørende matrix $\underline{\underline{A}}$ m.h.t. en sådan basis er en diagonalmatrix. Og da f er selvadjungeret, gælder $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}$. Men så er $\underline{\underline{A}}$'s diagonalelementer, altså egenværdierne, reelle. []

Sætningen kan formuleres som en sætning om matricer:

En matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ *er unitær-ækvivalent med en reel diagonalmatrix, hvis og kun hvis den er Hermite'sk, dvs.* $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}$.

Som en konsekvens heraf har vi:

De karakteristiske rødder og koefficienterne i det karakteristiske polynomium for en Hermite'sk matrix er reelle.

Vi skal dernæst vise:

En endomorfi f af et euklidisk vektorrum $(V, \mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$ er selvadjungeret, hvis og kun hvis der findes en ortonormal basis for V bestående af egenvektorer for f.

Bevis. Antag først, at der findes en basis af den omtalte art. Den til f hørende matrix $\underline{\underline{A}}$ m.h.t. en sådan basis er da en (reel) diagonalmatrix. Der gælder derfor $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}'$ $(= \underline{\underline{A}}^*)$, hvoraf følger, at f er selvadjungeret. Det omvendte vises ved induktion efter n. For $n = 1$ er der intet at vise. Lad derefter f være en selvadjungeret endomorfi af et n-dimensionalt euklidisk vektorrum, hvor $n \geq 2$, og antag, at påstanden gælder for alle dimensionstal $\leq n-1$. Den til f hørende matrix $\underline{\underline{A}}$ m.h.t. en (vilkårlig) ortonormal basis er en reel symmetrisk matrix. Den er derfor også Hermite'sk. Ifølge den sidste af sætningerne ovenfor er da alle $\underline{\underline{A}}$'s karakteristiske rødder reelle; afbildningen f har derfor mindst en egenværdi λ. For $K_{f-\lambda e} = V$ har enhver ortonormal basis for V den ønskede egenskab. Ellers bemærkes, at ${K_{f-\lambda e}}^{\perp}$ ifølge en tidligere sætning er invariant ved $(f-\lambda e)^*$, (sml. side 7.3.2). Idet $(f-\lambda e)^* = f^*-\overline{\lambda}e^* = f-\lambda e$, er ${K_{f-\lambda e}}^{\perp}$ altså invariant ved $f-\lambda e$, og dermed også ved f. Da $f^* = f$, følger, at $f\colon {K_{f-\lambda e}}^{\perp} \to {K_{f-\lambda e}}^{\perp}$ er selvadjungeret; thi er U et underrum, som er invariant ved en endomorfi g og dens adjungerede g^*, så er $g^*\colon U \to U$ den adjungerede til $g\colon U \to U$. Ifølge induktionsantagelsen findes nu en ortonormal basis for ${K_{f-\lambda e}}^{\perp}$ bestående af egenvektorer for f. Sammenstykkes en sådan basis med en vilkårlig ortonormal basis for $K_{f-\lambda e}$, fås ialt en ortonormal basis for V bestående af egenvektorer. []

Sætningen kan formuleres som en sætning om matricer:

En matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ er ortogonal-ækvivalent med en diagonalmatrix, hvis og kun hvis den er symmetrisk, dvs. $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{A}}$.

7.7. ORTOGONALE OG UNITÆRE AFBILDNINGER.

Lad i det følgende (V,L) være et vektorrum med indre produkt af dimension $n \in \mathbb{N}$.

En endomorfi f af V siges at være *ortogonal* (for $L=\mathbb{R}$) hhv. *unitær* (for $L=\mathbb{C}$), dersom den er bijektiv og

$$f^* = f^{-1}.$$

Er $\underline{\underline{A}}$ den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis, kommer dette ud på, at $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}^{-1}$, altså at $\underline{\underline{A}}$ er en ortogonal hhv. unitær matrix. Det er klart, at hvis f er ortogonal hhv. unitær, så er f normal.

For en endomorfi f af V er følgende tre betingelser ensbetydende:

(1) *f er ortogonal hhv. unitær.*

(2) *f er indre produkt bevarende, dvs. $f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) = \underline{u}\cdot\underline{v}$ for alle vektorer $\underline{u},\underline{v} \in V$.*

(3) *f er normbevarende, dvs. $\|f(\underline{v})\| = \|\underline{v}\|$ for alle vektorer $\underline{v} \in V$.*

Bevis. Antag, at (1) er opfyldt. For alle $\underline{u},\underline{v} \in V$ har vi da $f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) = \underline{u}\cdot f^*(f(\underline{v})) = \underline{u}\cdot f^{-1}(f(\underline{v})) = \underline{u}\cdot\underline{v}$; der gælder altså (1) $\Rightarrow$ (2). Antag dernæst, at (2) er opfyldt. For alle vektorer $\underline{v} \in V$ har vi da $\|f(\underline{v})\| = \sqrt{f(\underline{v})\cdot f(\underline{v})} = \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}} = \|\underline{v}\|$; vi har altså (2) $\Rightarrow$ (3). Antag endelig, at (3) er opfyldt. For alle $\underline{u},\underline{v} \in V$ gælder da $\|f(\underline{u})-f(\underline{v})\| = \|f(\underline{u}-\underline{v})\| = \|\underline{u}-\underline{v}\|$, og dermed $\mathrm{dist}(f(\underline{u}),f(\underline{v})) = \mathrm{dist}(\underline{u},\underline{v})$. Afbildningen f er altså afstandsbevarende, og dermed injektiv; den er derfor også surjektiv, altså bijektiv. Endvidere har vi for vilkårlige vektorer $\underline{u},\underline{v} \in V$

$$\begin{aligned}\|f(\underline{u}+\underline{v})\|^2 &= f(\underline{u}+\underline{v})\cdot f(\underline{u}+\underline{v})\\ &= (f(\underline{u}) + f(\underline{v}))\cdot(f(\underline{u}) + f(\underline{v}))\\ &= f(\underline{u})\cdot f(\underline{u}) + f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) + f(\underline{v})\cdot f(\underline{u}) + f(\underline{v})\cdot f(\underline{v})\\ &= \|f(\underline{u})\|^2 + f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) + f(\underline{v})\cdot f(\underline{u}) + \|f(\underline{v})\|^2\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 &= (\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v})\\ &= \underline{u}\cdot\underline{u} + \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{u} + \underline{v}\cdot\underline{v}\\ &= \|\underline{u}\|^2 + \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{u} + \|\underline{v}\|^2 .\end{aligned}$$

Ved benyttelse af det givne følger heraf

(4) $\quad f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) + f(\underline{v})\cdot f(\underline{u}) = \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{u}, \qquad \underline{u},\underline{v} \in V.$

Det påstås, at (4) implicerer

(5) $\qquad f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) = \underline{u}\cdot\underline{v}, \qquad \underline{u},\underline{v} \in V.$

For $L = \mathbb{R}$ er dette oplagt. For $L = C$ giver (4) direkte, at $\mathrm{Re}(f(\underline{u})\cdot f(\underline{v})) = \mathrm{Re}(\underline{u}\cdot\underline{v})$. Erstattes i (4) vektoren $\underline{v}$ med $i\underline{v}$, fås vektorer $\underline{v} \in V$ har vi da $\|f(\underline{v})\| = \sqrt{f(\underline{v})\cdot f(\underline{v})} = \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}} = \|\underline{v}\|$; vi har altså (2) $\Rightarrow$ (3). Antag endelig, at (3) er opfyldt. For alle $\underline{u},\underline{v} \in V$ gælder da $\|f(\underline{u})-f(\underline{v})\| = \|f(\underline{u}-\underline{v})\| = \|\underline{u}-\underline{v}\|$, og dermed $\text{dist}(f(\underline{u}),f(\underline{v})) = \text{dist}(\underline{u},\underline{v})$. Afbildningen f er altså afstandsbevarende, og dermed injektiv; den er derfor også surjektiv, altså bijektiv. Endvidere har vi for vilkårlige vektorer $\underline{u},\underline{v} \in V$

$$\begin{aligned}
\|f(\underline{u}+\underline{v})\|^2 &= f(\underline{u}+\underline{v})\cdot f(\underline{u}+\underline{v})\\
&= (f(\underline{u}) + f(\underline{v}))\cdot(f(\underline{u}) + f(\underline{v}))\\
&= f(\underline{u})\cdot f(\underline{u}) + f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) + f(\underline{v})\cdot f(\underline{u}) + f(\underline{v})\cdot f(\underline{v})\\
&= \|f(\underline{u})\|^2 + f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) + f(\underline{v})\cdot f(\underline{u}) + \|f(\underline{v})\|^2
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 &= (\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v})\\
&= \underline{u}\cdot\underline{u} + \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{u} + \underline{v}\cdot\underline{v}\\
&= \|\underline{u}\|^2 + \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{u} + \|\underline{v}\|^2 .
\end{aligned}$$

Ved benyttelse af det givne følger heraf

(4) $\quad f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) + f(\underline{v})\cdot f(\underline{u}) = \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{u}, \qquad \underline{u},\underline{v} \in V.$

Det påstås, at (4) implicerer

(5) $$f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) = \underline{u}\cdot\underline{v}, \qquad \underline{u},\underline{v} \in V.$$

For $L = \mathbb{R}$ er dette oplagt. For $L = C$ giver (4) direkte, at $\text{Re}(f(\underline{u})\cdot f(\underline{v})) = \text{Re}(\underline{u}\cdot\underline{v})$. Erstattes i (4) vektoren $\underline{v}$ med $i\underline{v}$, fås vektorer $\underline{v} \in V$ har vi da $\|f(\underline{v})\| = \sqrt{f(\underline{v})\cdot f(\underline{v})} = \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}} = \|\underline{v}\|$; vi har altså (2) $\Rightarrow$ (3). Antag endelig, at (3) er opfyldt. For alle $\underline{u},\underline{v} \in V$ gælder da $\|f(\underline{u})-f(\underline{v})\| = \|f(\underline{u}-\underline{v})\| = \|\underline{u}-\underline{v}\|$, og dermed $\mathrm{dist}(f(\underline{u}),f(\underline{v})) = \mathrm{dist}(\underline{u},\underline{v})$. Afbildningen f er altså afstandsbevarende, og dermed injektiv; den er derfor også surjektiv, altså bijektiv. Endvidere har vi for vilkårlige vektorer $\underline{u},\underline{v} \in V$

$$\begin{aligned}\|f(\underline{u}+\underline{v})\|^2 &= f(\underline{u}+\underline{v})\cdot f(\underline{u}+\underline{v})\\ &= (f(\underline{u}) + f(\underline{v}))\cdot(f(\underline{u}) + f(\underline{v}))\\ &= f(\underline{u})\cdot f(\underline{u}) + f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) + f(\underline{v})\cdot f(\underline{u}) + f(\underline{v})\cdot f(\underline{v})\\ &= \|f(\underline{u})\|^2 + f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) + f(\underline{v})\cdot f(\underline{u}) + \|f(\underline{v})\|^2\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 &= (\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v})\\ &= \underline{u}\cdot\underline{u} + \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{u} + \underline{v}\cdot\underline{v}\\ &= \|\underline{u}\|^2 + \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{u} + \|\underline{v}\|^2 .\end{aligned}$$

Ved benyttelse af det givne følger heraf

(4) $\quad f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) + f(\underline{v})\cdot f(\underline{u}) = \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{u}, \qquad \underline{u},\underline{v} \in V.$

Det påstås, at (4) implicerer

(5) $\qquad f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) = \underline{u}\cdot\underline{v}, \qquad \underline{u},\underline{v} \in V.$

For $L = \mathbb{R}$ er dette oplagt. For $L = C$ giver (4) direkte, at $\mathrm{Re}(f(\underline{u})\cdot f(\underline{v})) = \mathrm{Re}(\underline{u}\cdot\underline{v})$. Erstattes i (4) vektoren $\underline{v}$ med $i\underline{v}$, fås

$$-i(f(\underline{u})\cdot f(\underline{v})) + i(f(\underline{v})\cdot f(\underline{u})) = -i(\underline{u}\cdot\underline{v}) + i(\underline{v}\cdot\underline{u}).$$

Heraf følger, at

$$f(\underline{u})\cdot f(\underline{v}) - \overline{f(\underline{u})\cdot f(\underline{v})} = \underline{u}\cdot\underline{v} - \overline{\underline{u}\cdot\underline{v}},$$

hvoraf videre følger, at $Im(f(\underline{u})\cdot f(\underline{v})) = Im(\underline{u}\cdot\underline{v})$. Også for $L = \mathbb{C}$ gælder altså (5). Af (5) følger nu, at der for alle $\underline{u},\underline{v} \in V$ gælder $f(\underline{u})\cdot f(f^{-1}(\underline{v})) = \underline{u}\cdot f^{-1}(\underline{v})$, altså $f(\underline{u})\cdot\underline{v} = \underline{u}\cdot f^{-1}(\underline{v})$. Heraf fremgår, at $f^* = f^{-1}$, hvormed er vist, at (3) ⇒ (1). []

Vi skal derefter vise:

En endomorfi f af et unitært vektorrum $(V,\mathbb{C})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$ er unitær, hvis og kun hvis der findes en ortonormal basis for V bestående af egenvektorer for f og alle egenværdier har absolut værdi 1.

Bevis. Antag først, at der findes en basis af den omtalte art. Den til f hørende matrix $\underline{\underline{A}}$ m.h.t. en sådan basis er da en diagonalmatrix, hvori alle diagonalelementer har absolut værdi 1. Der gælder derfor $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{E}}$, og dermed $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}^{-1}$, hvoraf følger, at f er unitær. Antag omvendt, at f er unitær. Da er f specielt normal, og der findes derfor en ortonormal basis bestående af egenvektorer, (sml. side 7.5.2). Og da f er normbevarende (sml. side 7.7.1), må der for enhver egenværdi λ og tilhørende egenvektor $\underline{v}$ gælde $\|\underline{v}\| = \|f(\underline{v})\| = \|\lambda\underline{v}\| = |\lambda|\ \|\underline{v}\|$, hvormed $|\lambda| = 1$. []

Idet en diagonalmatrix, hvori alle diagonalelementer har absolut værdi 1, er det samme som en unitær diagonalmatrix, giver den foregående sætning følgende sætning om matricer:

En matrix $\underline{\underline{A}} \in M_{n,n}(C)$ *er unitær-ækvivalent med en unitær diagonalmatrix, hvis og kun hvis den er unitær, dvs.* $\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}^{-1}$.

Vi skal dernæst betragte en ortogonal endomorfi f af et euklidisk vektorrum $(V,\mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$. Da den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis er ortogonal, og da determinanten af en ortogonal matrix er 1 eller -1, (sml. side 5.2.4), har f determinanten 1 eller -1, (sml. øv. 5.10). Hvis $\det f = 1$, siges f at være *egentlig ortogonal*, og hvis $\det f = -1$, siges f at være *uegentlig ortogonal*. Der gælder nu:

Lad f være en ortogonal endomorfi af et euklidisk vektorrum $(V,\mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$. De eneste tal, som kan være egenværdier for f, er 1 og -1. Hvis f er egentlig ortogonal, og n er ulige, er 1 egenværdi. Hvis f er uegentlig ortogonal, er -1 egenværdi. I alle tilfælde gælder $\mathrm{em}1 = \mathrm{rm}1$ *og* $\mathrm{em}(-1) = \mathrm{rm}(-1)$.

Bevis. Da f er normbevarende, (sml. side 7.7.1), har vi $\|\underline{v}\| = \|f(\underline{v})\| = \|\lambda\underline{v}\| = |\lambda|\ \|\underline{v}\|$ for enhver egenværdi λ og tilhørende egenvektor $\underline{v}$, hvoraf den første påstand fremgår. Lad derefter $\underline{\underline{A}}$ være den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis. Da $\underline{\underline{A}}$ er ortogonal, kan den opfattes som en unitær matrix; ifølge den foregående sætning har derfor alle $\underline{\underline{A}}$'s karakteristiske rødder absolut værdi 1. Følgelig gælder $\alpha\bar{\alpha} = 1$ for enhver ikke-reel karakteristisk rod α. Og da det karakteristiske polynomium for $\underline{\underline{A}}$ har lutter reelle koefficienter, sluttes, at hvis α er en ikke-reel karakteristisk rod, så er også $\bar{\alpha}$ en karakteristisk rod. Ialt følger heraf, at antallet af ikke-reelle karakteristiske rødder, regnet med multiplicitet, er lige, og at produktet af dem er 1. Da produktet af samtlige karakteristiske rødder, regnet med multiplicitet, er lig med $\det\underline{\underline{A}}$, altså 1 eller -1 efter som f er egentlig eller uegentlig ortogonal, sluttes, at hvis f er egentlig ortogonal, så er $\mathrm{rm}(-1)$ lige, og hvis f er uegentlig ortogonal, så er $\mathrm{rm}(-1)$ ulige. Heraf følger sætningens anden og tredie påstand. Antag endelig, at $\mathrm{em}1 \geqq 1$ og $\mathrm{em}(-1) \geqq 1$. Det er klart, at $f(K_1 \oplus K_{-1}) = K_1 \oplus K_{-1}$. Ved benyttelse af, at f er indre produkt bevarende, sluttes heraf, at der også gælder $f((K_1 \oplus K_{-1})^{\perp}) = (K_1 \oplus K_{-1})^{\perp}$. Vælges derfor en basis for hvert af underrummene K_1, K_{-1} og $(K_1 \oplus K_{-1})^{\perp}$, fås ved sammenstykning en basis for V, og den til f hørende matrix m.h.t. en sådan basis får formen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{E}}$ er den til $f : K_1 \to K_1$, $-\underline{\underline{E}}$ den til $f : K_{-1} \to K_{-1}$, og $\underline{\underline{B}}$ den til $f : (K_1 \oplus K_{-1})^{\perp} \to (K_1 \oplus K_{-1})^{\perp}$ hørende matrix. (Af f's normalitet følger, at $K_1 \perp K_{-1}$, (sml. side 7.5.1.). Vælges derfor en ortonormal basis for hvert af underrummene K_1, K_{-1} og $(K_1 \oplus K_{-1})^{\perp}$, fås en ortonormal basis for V.) Dette giver

$$\det(\underline{\underline{A}} - t\underline{\underline{E}}) = (-1-t)^{\mathrm{em}1}(1-t)^{\mathrm{em}(-1)}\det(\underline{\underline{B}} - t\underline{\underline{E}}).$$

Da $(K_1 \oplus K_{-1})^{\perp} \cap K_1 = (K_1 \oplus K_{-1})^{\perp} \cap K_{-1} = \{o\}$, kan hverken 1 eller -1 være egenværdi for $f : (K_1 \oplus K_{-1})^{\perp} \to (K_1 \oplus K_{-1})^{\perp}$; heraf følger, at hverken 1 eller -1 er rod i $\det(\underline{\underline{B}} - t\underline{\underline{E}})$, hvoraf videre følger, at $\mathrm{em}1 = \mathrm{rm}1$ og $\mathrm{em}(-1) = \mathrm{rm}(-1)$. Hermed er den sidste påstand vist for $\mathrm{em}1 \geqq 1$ og $\mathrm{em}(-1) \geqq 1$. For $\mathrm{em}1 = 0$ hhv. $\mathrm{em}(-1) = 0$ har vi $\mathrm{rm}1 = 0$ hhv. $\mathrm{rm}(-1) = 0$. Er begge egenværdimultipliciteter lig med 0, er der derfor intet at vise. Og er kun den ene egenværdimultiplicitet lig med 0, vises ved et bevis analogt til det ovenstående, at også den anden egenværdimultiplicitet er lig med rodmultipliciteten. []

Vi skal til sidst skaffe os et overblik over de ortogonale endomorfier af 2-dimensionale og 3-dimensionale euklidiske vektorrum.

Lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ være en ortogonal matrix; der gælder da

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1,$$
$$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1,$$
$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

Af den første af disse ligninger ses, at der findes netop eet $\alpha \in [0, 2\pi[$, således at

$$a_{11} = \cos\alpha, \quad a_{21} = \sin\alpha.$$

Af de to næste ligninger sluttes dernæst, at $\underline{\underline{A}}$ enten har formen

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

eller formen

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

I det første tilfælde har vi $\det\underline{\underline{A}} = 1$, i det andet $\det\underline{\underline{A}} = -1$. Omvendt er det oplagt, at enhver matrix af formen (6) hhv. (7) er en ortogonal matrix med determinanten 1 hhv. -1. En simpel udregning viser, at vi for alle $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$ har

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}.$$

Endvidere noteres, at enhver matrix af formen

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

har det karakteristiske polynomium $t^2-1 = (t-1)(t+1)$. Ialt har vi derfor (sml. øv. 5.1):

Lad f være en egentlig ortogonal endomorfi af et 2-dimensionalt euklidisk vektorrum $(V,\mathbb{R})$, *og lad* $(\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ *være en ortonormal basis for V. Der findes da et (og kun eet)* $\alpha \in [0,2\pi[$, *således at der til f m.h.t. basen* $(\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ *hører matricen*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Er $(\hat{\underline{e}}_1,\hat{\underline{e}}_2)$ *en vilkårlig anden ortonormal basis for V, så vil der til f m.h.t. denne basis høre matricen*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

eller matricen

$$\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix},$$

alt efter som $(\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ *og* $(\hat{\underline{e}}_1,\hat{\underline{e}}_2)$ *er ens eller modsat orienterede.*

Lad f være en uegentlig ortogonal endomorfi af et 2-dimensionalt euklidisk vektorrum $(V,\mathbb{R})$. *Der findes da en ortonormal basis for V m.h.t. hvilken der til f hører matricen*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi skal herefter betragte en ortogonal endomorfi f af et 3-dimensionalt euklidisk vektorrum $(V,\mathbb{R})$. Af en sætning ovenfor fremgår, at hvis f er egentlig hhv. uegentlig ortogonal, så har f egenværdien 1 hhv. -1. Lad U være et 1-dimensionalt underrum af V, som er frembragt af en normeret egenvektor $\underline{e}_1$ hørende til 1 hhv. -1. Underrummet $U^\perp$ er da invariant ved f, og $f : U^\perp \to U^\perp$ er en ortogonal endomorfi. Vælges en ortonormal basis $(\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ for $U^\perp$, så vil den til f hørende matrix m.h.t. den ortonormale basis $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ have formen

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

hvor der skal benyttes + hhv. - efter som f er egentlig hhv. uegentlig ortogonal. Idet determinanten er 1 hhv. -1, sluttes, at $f : U^\perp \to U^\perp$ i begge tilfælde er egentlig ortogonal. Ved anvendelse af en sætning ovenfor får vi derfor:

Lad f være en egentlig hhv. uegentlig ortogonal endomorfi af et 3-dimensionalt euklidisk vektorrum $(V,\mathbb{R})$. Der findes da en ortonormal basis for V m.h.t. hvilken den til f hørende matrix har formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ hhv. } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

1. Undersøg, om der i $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ defineres et indre produkt ved, at man til $((x_1,x_2), (y_1,y_2))$ lader svare hhv.

$$x_1y_2 + x_2y_1,$$
$$x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2,$$
$$2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

2. Lad $a_1,\ldots,a_n$ være (ikke nødvendigvis forskellige) reelle tal. Angiv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at der ved

$$((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) \mapsto a_1x_1\overline{y}_1 + \ldots + a_nx_n\overline{y}_n$$

defineres et indre produkt i (L^n, L).

3. Vis, at der for vilkårlige vektorer $\underline{u},\underline{v}$ i et reelt vektorrum med indre produkt gælder

$$\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow \|\underline{u}+\underline{v}\| = \|\underline{u}-\underline{v}\|.$$

Hvilken elementærgeometrisk sætning udtrykkes herved, når $(\underline{u},\underline{v})$ er et lineært uafhængigt sæt af geometriske vektorer?

4. Vis, at der for vilkårlige vektorer $\underline{u},\underline{v}$ i et komplekst vektorrum med indre produkt gælder

$$\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow \forall\, \lambda,\mu \in \mathbb{C} : \|\lambda\underline{u}+\mu\underline{v}\|^2 = \|\lambda\underline{u}\|^2 + \|\mu\underline{v}\|^2.$$

5. Vis, at der for vilkårlige vektorer $\underline{u}, \underline{v}$ i et vektorrum med indre produkt gælder

$$\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 + \|\underline{u}-\underline{v}\|^2 = 2\|\underline{u}\|^2 + 2\|\underline{v}\|^2.$$

Hvilken elementærgeometrisk sætning udtrykkes herved, når $(\underline{u}, \underline{v})$ er et lineært uafhængigt sæt af geometriske vektorer?

6. I et 3-dimensionalt vektorrum (V, L) er valgt en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Angiv en ortonormal basis for $U^\perp$, hvor $U = \operatorname{span}\{\underline{e}_1+\underline{e}_2+\underline{e}_3\}$.

7. Vektorrummet $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ tænkes forsynet med det sædvanlige indre produkt. Bestem ved ortonormalisering en ortonormal basis for det af vektorerne $(9,12,0,-20)$, $(-1,-18,0,20)$, $(7,-24,3,20)$ frembragte underrum U. Bestem en ortonormal basis for $U^\perp$.

8. Lad $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ være vektorer i et vektorrum med indre produkt, og antag, at $(\underline{a}, \underline{b})$ er et lineært uafhængigt sæt. Find ortogonalprojektionen af $\underline{c}$ på $\operatorname{span}\{\underline{a}, \underline{b}\}$.

9. Vektorrummet $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R})$ tænkes forsynet med det sædvanlige indre produkt. Find ortogonalprojektionen af vektoren $(1,1,1,1,1)$ på det af vektorerne $(2,0,2,1,0)$ og $(6,1,0,-3,-1)$ frembragte underrum.

10. Lad $\underline{a}$ og $\underline{b}$ være fra $\underline{o}$ forskellige vektorer i et reelt vektorrum med indre produkt. Bestem $t \in \mathbb{R}$ således, at $\|\underline{a}+t\underline{b}\|$ bliver mindst mulig.

11. Lad (V,L) være et (ikke nødvendigvis endelig-dimensionalt) vektorrum med indre produkt, og lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_p)$ være et ortonormalt sæt af vektorer fra V. Vis, at for en vilkårlig vektor $\underline{v} \in V$ gælder *Bessel's ulighed*:

$$|\underline{v}\cdot\underline{e}_1|^2 +\ldots+ |\underline{v}\cdot\underline{e}_p|^2 \leqq \|\underline{v}\|^2.$$

Vis, at *Parseval's ligning*

$$|\underline{v}\cdot\underline{e}_1|^2 +\ldots+ |\underline{v}\cdot\underline{e}_p|^2 = \|\underline{v}\|^2$$

er opfyldt, hvis og kun hvis $\underline{v} \in \mathrm{span}\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_p\}$.

12. Lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en ortonormal basis for et vektorrum $(V,\mathbb{R})$ med indre produkt. Vinklerne θ_i mellem en vektor $\underline{v} \in V$ og vektorerne $\underline{e}_i$ kaldes $\underline{v}$'s *retningsvinkler*. Vis, at vi for $\underline{v} = v_1\underline{e}_1 +\ldots+ v_n\underline{e}_n$ har $v_i = \|\underline{v}\|\cos\theta_i$, og at der gælder $\cos^2\theta_1 +\ldots.+ \cos^2\theta_n = 1$.

13. Lad $(V,\mathbb{R})$ være vektorrummet af alle kontinuerte reelle funktioner på $[0,1]$ forsynet med det sædvanlige indre produkt

$$\varphi\cdot\psi = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)\,dt,$$

og lad V_1 være underrummet af de funktioner $\varphi \in V$ for hvilke

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt = 0.$$

Bestem $V_1^{\perp}$. Lad dernæst $(W,\mathbb{R})$ være vektorrummet af alle kontinuerte funktioner på $[-1,1]$ forsynet med det sædvanlige indre produkt

$$\varphi\cdot\psi = \int_{-1}^1 \varphi(t)\psi(t)\,dt,$$

og lad W_1 være underrummet af de funktioner $\varphi \in W$ for hvilke

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt = 0.$$

Vis, at $W_1^{\perp} = \{\underline{o}\}$, og begrund herved, at W_1 ikke har noget ortogonalt komplement.

14. Lad $(W,\mathbb{R})$ være som i øv. 13, og lad U være underrummet af alle lige funktioner tilhørende W. Vis, at U har et ortogonalt komplement, og angiv dette.

15. Vis, at der for vilkårlige underrum U_1 og U_2 af et vektorrum (V,L) med indre produkt gælder

$$(U_1+U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}.$$

Vis, at hvis V har endelig dimension, så gælder også

$$(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}.$$

Vis, at hvis V har uendelig dimension, så gælder det sidste ikke for alle underrum U_1 og U_2. (Udnyt øv. 13 og 14.)

16. En følge $(\underline{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af vektorer fra et vektorrum (V,L) med indre produkt siges at være en *ortonormalfølge*, dersom alle vektorerne i følgen er normerede, og $\underline{v}_{n_1}\cdot\underline{v}_{n_2} = 0$ for $n_1 \neq n_2$. Vis, at man ved normering af vektorerne i følgen

(1) $(1,\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t,\ldots)$, $t \in [-\pi,\pi]$,

får en ortonormalfølge såvel i vektorrummet $(V,\mathbb{R})$ af alle kontinuerte reelle funktioner på $[-\pi,\pi]$ som i vektorrummet $(W,\mathbb{C})$ af alle kontinuerte komplekse funktioner på $[-\pi,\pi]$, idet både $(V,\mathbb{R})$ og $(W,\mathbb{C})$ tænkes forsynet med det sædvanlige indre produkt. Dan den til (1) hørende ortonormalfølge. Vis, at man ved normering af funktionerne i følgen

(2) $(1,e^{-it},e^{it},e^{-2it},e^{2it},\ldots)$, $t \in [-\pi,\pi]$,

ligeledes får en ortonormalfølge i $(W,\mathbb{C})$, og dan den tilhørende ortonormalfølge. Frembringer funktionerne i (2) det samme underrum af W som funktionerne i (1)?

17. Beskriv enhedskuglerne $\{\underline{v} \mid \|\underline{v}\|_p \leqq 1\}$ for $p = 1, 2, \infty$ i vektorrummene $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ og $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

18. Vis, at afbildningen

$$(x_1, x_2) \mapsto (|x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}})^2$$

ikke er en norm i $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

19. Bestem samtlige normer i (L, L).

20. Vis, at der for enhver vektor $\underline{x}$ i $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gælder

$$\|\underline{x}\|_\infty \leqq \|\underline{x}\|_2 \leqq \|\underline{x}\|_1$$

og

$$n^{-\frac{1}{2}}\|\underline{x}\|_1 \leqq \|\underline{x}\|_2 \leqq n^{\frac{1}{2}}\|\underline{x}\|_\infty.$$

Undersøg, hvilke lignende uligheder der gælder mellem $\|\varphi\|_1$, $\|\varphi\|_2$ og $\|\varphi\|_\infty$ i vektorrummet af alle kontinuerte reelle funktioner på et interval $[a, b]$.

21. For vilkårlige vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ i et normeret vektorrum gælder som bekendt

$$\|\underline{u}+\underline{v}\| \leqq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|.$$

Vis, at hvis sættet $(\underline{u}, \underline{v})$ er lineært afhængigt, så gælder lighedstegnet, hvis og kun hvis den ene af vektorerne fremgår af den anden ved multiplikation med en reel skalar $\lambda \geqq 0$. Vis ved et eksempel, at der kan gælde lighedstegn for et lineært uafhængigt sæt $(\underline{u},\underline{v})$.

22. Lad (V,L) være et normeret vektorrum. Vis, at afbildningen $\underline{v} \mapsto \|\underline{v}\|$ er en uniformt kontinuert afbildning af V ind i $\mathbb{R}$, idet V forsynes med metrikken $dist(\underline{u},\underline{v}) = \|\underline{u}-\underline{v}\|$ og $\mathbb{R}$ forsynes med den sædvanlige metrik.

23. Lad (U,L) og (V,L) være normerede vektorrum; normen af en vektor $\underline{u} \in U$ hhv. $\underline{v} \in V$ betegnes $\|\underline{u}\|_U$ hhv. $\|\underline{v}\|_V$.

1° En lineær afbildning $f: U \to V$ siges at være begrænset, dersom der findes et positivt reelt tal M, således at $\|f(\underline{u})\|_V \leqq M\|\underline{u}\|_U$ for alle $\underline{u} \in U$. Vis, at f er begrænset, hvis og kun hvis afbildningen $\underline{u} \mapsto \|f(\underline{u})\|_V$ af U ind i $\mathbb{R}$ er begrænset på enhedskuglen $\{\underline{u} \in U \mid \|\underline{u}\|_U \leqq 1\}$ med M som majorant.

2° Vis, at hvis en lineær afbildning $f: U \to V$ er kontinuert i $\underline{o}$, hvor $\underline{o}$ er nulvektoren i U, så er den uniformt kontinuert på hele U, idet U og V tænkes forsynet med de ved normerne definerede metrikker. Vis dernæst, at en lineær afbildning $f: U \to V$ er kontinuert, hvis og kun hvis den er begrænset.

3^o Antag, at U har endelig dimension $n \in \mathbb{N}$, og lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en basis for U. Ved

$$\|u_1\underline{e}_1 +\ldots+ u_n\underline{e}_n\|_1 = |u_1| +\ldots+ |u_n|$$

defineres da en norm $\underline{u} \mapsto \|\underline{u}\|_1$ i U. Vis, at der findes $k,K \in \mathbb{R}_+$, således at $k\|\underline{u}\|_1 \leqq \|\underline{u}\|_U \leqq K\|\underline{u}\|_1$ for alle $\underline{u} \in U$. (Udnyt bl.a., at $\{(u_1,\ldots,u_n) \mid |u_1| +\ldots+ |u_n| \leqq 1\}$ er en kompakt delmængde af L^n.)

4^o Vis, at hvis U har endelig dimension $n \in \mathbb{N}$, så er enhver lineær afbildning $f: U \to V$ begrænset, og derved kontinuert.

24. Vektorrummet $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ tænkes forsynet med det sædvanlige indre produkt. Lad f være den ved

$$(x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = (x_1,x_1)$$

definerede endomorfi af $\mathbb{R}^2$. Bestem f^*. Sæt

$$U = \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \}.$$

Overvej, at U er invariant ved f, men ikke ved f^*. Bestem den adjungerede til endomorfien $f: U \to U$.

25. Lad $(V,\mathbb{R})$ være et 2-dimensionalt euklidisk vektorrum, lad f være en endomorfi af V, og lad

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

være den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis. Vis, at f er normal, hvis og kun hvis $b = c$, eller $b = -c$ og $a = d$.

26. Lad (V,L) være et endelig-dimensionalt vektorrum med indre produkt, lad λ tilhøre L, og lad f_1, f_2, f_3 være endomorfier af V, hvor f_3 er bijektiv. Undersøg, om λf_1, $f_1 + f_2$, $f_1 \circ f_2$ og f_3^{-1} er hhv. normale, selvadjungerede, ortogonale/unitære, dersom f_1, f_2 og f_3 er hhv. normale, selvadjungerede, ortogonale/unitære.

27. Lad $(V,\mathbb{R})$ være et euklidisk vektorrum af dimension $n \in \mathbb{N}$. Vis, at der for enhver ortogonal endomorfi f af V gælder $|\mathrm{tr} f| \leqq n$, og undersøg, for hvilke f der gælder lighedstegn.

28. Lad f være en normal endomorfi af et endelig-dimensionalt vektorrum (V,L) med indre produkt. Vis, at $f(V) = K_f^{\perp}$. Vis, at for ethvert $n \in \mathbb{N}$ har f^n samme rang som f.

29. Lad f være en idempotent normal endomorfi af et endelig-dimensionalt vektorrum (V,L) med indre produkt. Vis, at f er ortogonalprojektionen på $f(V)$.

30. Lad (V,L) være et vektorrum med indre produkt af dimension $n \in \mathbb{N}$. Vis, at mængden af ortogonale hhv. unitære endomorfier af V er en undergruppe af vektorrummets automorfigruppe; gruppen kaldes vektorrummets ortogonale hhv. unitære gruppe.

Angiv en gruppe af matricer, som er isomorf med V's ortogonale hhv. unitære gruppe.

31. Lad $(V,\mathbb{R})$ være et euklidisk vektorrum med dimension $n \in \mathbb{N}$. Lad $f_1,\ldots,f_p$ være selvadjungerede endomorfier af V med $\dim f_i(V) \geqq 1$ for $i = 1,\ldots,p$. Endvidere forudsættes, at der gælder

(1) $\dim f_i(V) +\ldots+ \dim f_p(V) = n,$

(2) $f_1 +\ldots+ f_p = e.$

1^0 Begrund, at der findes en ortonormal basis $(\underline{e}_{i1},\ldots,\underline{e}_{ir_i})$ for $f_i(V)$, således at hver af vektorerne $\underline{e}_{ij}$ er egenvektor for f_i hørende til en egenværdi $\lambda_{ij} \neq 0$. Gør rede for, at sættet

(*) $(\underline{e}_{11},\ldots,\underline{e}_{1r_1},\underline{e}_{21},\ldots,\underline{e}_{2r_2},\ldots,\underline{e}_{p1},\ldots,\underline{e}_{pr_p})$

består af n vektorer. Vis, at sættet frembringer V. Begrund, at sættet er en basis for V.

2^0 Vis, at $f_i(\underline{e}_{ij}) = \underline{e}_{ij}$, og at $f_k(\underline{e}_{ij}) = \underline{0}$ for $k \neq i$. (Bevis og udnyt f.eks., at $f_i(\underline{e}_{ij}) = \lambda_{ij}f_1(\underline{e}_{ij}) +\ldots+ \lambda_{ij}f_p(\underline{e}_{ij})$.)

3^0 Vis, at sættet (*) er en ortonormal basis for V.

Lad $\underline{\underline{A}}_1,\ldots,\underline{\underline{A}}_p$ være reelle symmetriske $(n\times n)$-matricer, alle forskellige fra $\underline{\underline{0}}_{n,n}$, med $rg\underline{\underline{A}}_1 +\ldots+ rg\underline{\underline{A}}_p = n$ og $\underline{\underline{A}}_1 +\ldots+ \underline{\underline{A}}_p = \underline{\underline{E}}$.

4^o Gør rede for (ved udnyttelse af det foregående), at der findes en ortogonal $(n\times n)$-matrix $\underline{\underline{S}}$, således at matricerne $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}_1\underline{\underline{S}}^{-1},\ldots,\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}_p\underline{\underline{S}}^{-1}$ alle er diagonalmatricer med kun 1'er og 0'er i diagonalen.

32. Lad $(V,\mathbb{R})$ være et 3-dimensionalt euklidisk vektorrum, og lad Φ være en ikke-triviel alternerende 3-linearform på V. Lad $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ være vektorer i V, og lad f være den ved

$$\underline{v} \mapsto f(\underline{v}) = \Phi(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v})$$

definerede endomorfi af V. Gør rede for, at der findes en og kun een vektor $\underline{w} \in V$, således at

$$f(\underline{v}) = \underline{w}\cdot\underline{v}$$

for alle $\underline{v} \in V$. Vektoren $\underline{w}$ kaldes *vektorproduktet* (eller *krydsproduktet*) af $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ (m.h.t. Φ), og betegnes $\underline{v}_1\times\underline{v}_2$. For alle vektorer $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3 \in V$ har vi altså

$$\underline{v}_1\times\underline{v}_2\cdot\underline{v}_3 = \Phi(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3).$$

Eftervis følgende:

$$(\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2)\times\underline{v}_3 = \lambda_1(\underline{v}_1\times\underline{v}_3) + \lambda_2(\underline{v}_2\times\underline{v}_3),$$
$$\underline{v}_3\times(\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_1\underline{v}_2) = \lambda_1(\underline{v}_3\times\underline{v}_1) + \lambda_2(\underline{v}_3\times\underline{v}_2),$$
$$\underline{v}_1\times\underline{v}_2 = -\underline{v}_2\times\underline{v}_1,$$
$$\underline{v}_1\times\underline{v}_2\cdot\underline{v}_1 = \underline{v}_1\times\underline{v}_2\cdot\underline{v}_2 = 0,$$
$$(\underline{u}_1\times\underline{u}_2)\cdot(\underline{v}_1\times\underline{v}_2) = (\underline{u}_1\cdot\underline{v}_1)(\underline{u}_2\cdot\underline{v}_2) - (\underline{u}_1\cdot\underline{v}_2)(\underline{u}_2\cdot\underline{v}_1),$$
$$\|\underline{v}_1\times\underline{v}_2\|^2 = \|\underline{v}_1\|^2\,\|\underline{v}_2\|^2 - (\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2)^2,$$
$$\|\underline{v}_1\times\underline{v}_2\| = \|\underline{v}_1\|\,\|\underline{v}_2\|\,\sin\theta,$$

hvor i den sidste linie $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ er forskellige fra $\underline{o}$, og θ betegner vinklen mellem $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$. Vis, at $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 \neq \underline{o}$, hvis og kun hvis sættet $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ er lineært uafhængigt. Vis, at hvis $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ er lineært uafhængigt, så er sættet $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_1 \times \underline{v}_2)$ en basis, og at hvis sættet $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ er (lineært uafhængigt og) ortogonalt, så er sættet $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_1 \times \underline{v}_2)$ (lineært uafhængigt og) ortogonalt. Vis, at hvis V giver den ved Φ bestemte orientering (sml. 5. øv. 1), og $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ er en positiv ortonormal basis, så gælder

$$\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3, \quad \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1, \quad \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2 .$$

Bestem endelig $(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3) \times (y_1\underline{e}_1 + y_2\underline{e}_2 + y_3\underline{e}_3)$, når $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ er en positiv ortonormal basis.

33. En endomorfi f af et euklidisk vektorrum $(V, \mathbb{R})$ siges at være *antisymmetrisk*, dersom $f^* = -f$. Vis, at en endomorfi f er antisymmetrisk, hvis og kun hvis $\underline{v} \cdot f(\underline{v}) = 0$ for alle vektorer $\underline{v} \in V$.

34. Vis, at hvis f er en antisymmetrisk endomorfi af et 3-dimensionalt euklidisk vektorrum V (sml. øv. 33), og Φ er en ikke-triviel alternerende 3-linearform på V, så findes en og kun een vektor $\underline{w} \in V$, således at der for alle $\underline{v} \in V$ gælder $f(\underline{v}) = \underline{w} \times \underline{v}$, hvor vektorproduktet er det ved Φ bestemte (sml. øv. 32).

KAPITEL 8. KVADRATISKE FORMER.

8.1. SYMMETRISKE BILINEARFORMER.

Ved en bilinearform på et vektorrum (V,L) forstås som bekendt en afbildning $(\underline{u},\underline{v}) \mapsto B(\underline{u},\underline{v})$ af $V \times V$ ind i L, således at afbildningen $\underline{u} \mapsto B(\underline{u},\underline{v})$ for ethvert $\underline{v} \in V$ er en linearform på V, og afbildningen $\underline{v} \mapsto B(\underline{u},\underline{v})$ for ethvert $\underline{u} \in V$ er en linearform på V. Vi skal i det følgende indskrænke os til at betragte bilinearformer på reelle vektorrum $(V,\mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$.

Summen af to bilinearformer på V og produktet af en skalar fra $\mathbb{R}$ og en bilinearform på V defineres på oplagt måde. Mængden af bilinearformer på V bliver herved organiseret som et vektorrum over $\mathbb{R}$. Nulvektoren er nulformen, dvs. afbildningen $(\underline{u},\underline{v}) \mapsto 0$.

En bilinearform B på V siges at være *symmetrisk* hhv. *antisymmetrisk*, dersom der gælder $B(\underline{u},\underline{v}) = B(\underline{v},\underline{u})$ hhv. $B(\underline{u},\underline{v}) = -B(\underline{v},\underline{u})$ for alle $\underline{u},\underline{v} \in V$. For en antisymmetrisk bilinearform B har vi specielt $B(\underline{v},\underline{v}) = 0$ for alle $\underline{v} \in V$. Nulformen er både symmetrisk og antisymmetrisk; ingen anden bilinearform har begge disse egenskaber.

For en vilkårlig bilinearform B på V er afbildningen

$$(\underline{u},\underline{v}) \mapsto B_s(\underline{u},\underline{v}) = \tfrac{1}{2}(B(\underline{u},\underline{v}) + B(\underline{v},\underline{u}))$$

en symmetrisk bilinearform på V, og afbildningen

$$(\underline{u},\underline{v}) \mapsto B_a(\underline{u},\underline{v}) = \tfrac{1}{2}(B(\underline{u},\underline{v}) - B(\underline{v},\underline{u}))$$

en antisymmetrisk bilinearform på V. Idet $B = B_s + B_a$, kan B altså spaltes i en sum af en symmetrisk og en antisymmetrisk bilinearform. Denne opspaltning er entydig. Thi er B_s', B_s'' hhv. B_a', B_a'' symmetriske hhv. antisymmetriske bilinearformer med $B_s' + B_a' = B_s'' + B_a'' = B$, har vi $B_s' - B_s'' = B_a'' - B_a'$; idet $B_s' - B_s''$ er symmetrisk og $B_a'' - B_a'$ er antisymmetrisk, sluttes, at de begge er nulformen, hvoraf følger, at $B_s' = B_s''$ og $B_a' = B_a''$. - Bilinearformerne B_s hhv. B_a kaldes den *symmetriske* hhv. *antisymmetriske del* af B. To bilinearformer siges at være *ækvivalente*, hvis de har samme symmetriske del. Herved defineres en ækvivalensrelation i mængden af bilinearformer på V. Hver ækvivalensklasse indeholder netop een symmetrisk bilinearform; de øvrige bilinearformer i klassen fås ved til den symmetriske at addere en vilkårlig antisymmetrisk.

Lad B være en vilkårlig bilinearform på V, og lad der i V være valgt en basis $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$. For vilkårlige vektorer $\underline{u} = u_1\underline{e}_1 +\dots+ u_n\underline{e}_n$ og $\underline{v} = v_1\underline{e}_1 +\dots+ v_n\underline{e}_n$ i V fås da ved brug af lineariteten

(1) $$B(\underline{u},\underline{v}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j B(\underline{e}_i,\underline{e}_j) \ .$$

Sættes $b_{ij} = B(\underline{e}_i,\underline{e}_j)$ for $i,j = 1,\dots,n$, og $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})_{n,n}$, kan (1) skrives

(2) $$B(\underline{u},\underline{v}) = \underline{\underline{u}}_{-}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{v}}_{|} \ ,$$

hvor $\underline{\underline{u}}_{-}$ hhv. $\underline{\underline{v}}_{|}$ er koordinatrækken hhv. koordinatsøjlen for

$\underline{u}$ hhv. $\underline{v}$, og hvor $B(\underline{u},\underline{v})$ opfattes som en (1×1)-matrix. Det er let at se, at der efter valg af basis kun findes een matrix $\underline{\underline{B}}$, således at (2) er opfyldt for alle $\underline{u},\underline{v} \in V$. Ligningen (2) kaldes *matrixligningen* for B m.h.t. den valgte basis, og $\underline{\underline{B}}$ kaldes den til B hørende matrix m.h.t. den valgte basis.

Det påstås, at en bilinearform B er symmetrisk, hvis og kun hvis den til B hørende matrix $\underline{\underline{B}}$ m.h.t. en valgt basis er symmetrisk. Da enhver (1×1)-matrix er symmetrisk, giver (2), at der for alle $\underline{u},\underline{v} \in V$ gælder $\underline{\underline{u}}_{-}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{v}}_{|} = \underline{\underline{v}}_{-}\underline{\underline{B}}'\underline{\underline{u}}_{|}$. Symmetri af B er derfor ensbetydende med, at $\underline{\underline{v}}_{-}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{u}}_{|} = \underline{\underline{v}}_{-}\underline{\underline{B}}'\underline{\underline{u}}_{|}$ for alle $\underline{u},\underline{v} \in V$. Men dette ses let at være opfyldt, hvis og kun hvis $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}'$. - På tilsvarende måde vises, at B er antisymmetrisk, hvis og kun hvis $\underline{\underline{B}}$ er antisymmetrisk.

Vi skal dernæst undersøge, hvorledes den til en bilinearform hørende matrix ændres ved basisskift. Lad $\underline{\underline{B}}$ være den til B hørende matrix m.h.t. en basis $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$, lad $(\hat{\underline{e}}_1,\dots,\hat{\underline{e}}_n)$ være en ny basis, og lad $\underline{\underline{S}}$ være koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ til $(\hat{\underline{e}}_1,\dots,\hat{\underline{e}}_n)$. Sammenhængen mellem koordinatsøjlerne $\underline{\underline{u}}_{|}$ og $\hat{\underline{\underline{u}}}_{|}$ for en vektor $\underline{u}$ m.h.t. $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ hhv. $(\hat{\underline{e}}_1,\dots,\hat{\underline{e}}_n)$ er da givet ved $\hat{\underline{\underline{u}}}_{|} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{u}}_{|}$. Ved benyttelse af dette fås for vilkårlige vektorer $\underline{u},\underline{v} \in V$

$$\begin{aligned} B(\underline{u},\underline{v}) &= \underline{\underline{u}}_{-}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{v}}_{|} \\ &= (\underline{\underline{S}}^{-1}\hat{\underline{\underline{u}}}_{|})'\,\underline{\underline{B}}\,(\underline{\underline{S}}^{-1}\hat{\underline{\underline{v}}}_{|}) \\ &= \hat{\underline{\underline{u}}}_{-}(\underline{\underline{S}}^{-1})'\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}\hat{\underline{\underline{v}}}_{|} \end{aligned}$$

Den til $\underline{\underline{B}}$ hørende matrix $\hat{\underline{\underline{B}}}$ m.h.t. basen $(\hat{\underline{e}}_1, \ldots, \hat{\underline{e}}_n)$ er således bestemt ved

$$\hat{\underline{\underline{B}}} = (\underline{\underline{S}}^{-1})' \, \underline{\underline{B}} \, \underline{\underline{S}}^{-1}.$$

Af det sidste resultat fremgår, at matricer hørende til samme bilinearform m.h.t. forskellige baser har samme rang. Det har derfor god mening at definere *rangen* rg$B$ af en bilinearform B som rangen af de til B hørende matricer.

For en symmetrisk bilinearform B defineres *nulrummet* N_B som mængden af vektorer $\underline{v} \in V$ for hvilke $B(\underline{u},\underline{v}) = 0$ for alle vektorer $\underline{u} \in V$. Lad $\underline{\underline{B}}$ være den til B hørende matrix m.h.t. en valgt basis. Nulrummet består da af de vektorer, hvis koordinatsøjler $\underline{\underline{v}}_|$ opfylder $\underline{\underline{u}}_- \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{v}}_| = 0$ for alle koordinatrækker $\underline{\underline{u}}_-$, altså de vektorer, hvis koordinatsøjler $\underline{\underline{v}}_|$ opfylder $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{v}}_| = \underline{\underline{0}}_|$. Nulrummet N_B er følgelig et underrum af V med $\dim N_B = n - \mathrm{rg}\underline{\underline{B}} = n - \mathrm{rg}B$.

8.2. KVADRATISKE FORMER.

Lad B være en bilinearform på V, hvor som før V er et reelt vektorrum af dimension $n \in \mathbb{N}$. Ved

$$\underline{v} \mapsto K_B(\underline{v}) = B(\underline{v},\underline{v})$$

defineres da en afbildning K_B: $V \to \mathbb{R}$; den kaldes den til B hørende *kvadratiske form*.

Idet den til en antisymmetrisk bilinearform hørende kvadratiske form er nulformen, dvs. afbildningen $\underline{v} \mapsto 0$, hører der til ækvivalente bilinearformer samme kvadratiske form. Omvendt hører der til ikke-ækvivalente bilinearformer forskellige kvadratiske former; thi for en vilkårlig bilinearform B gælder

$$\begin{aligned} B_s(\underline{u},\underline{v}) &= \tfrac{1}{4}(B_s(\underline{u} + \underline{v}, \underline{u} + \underline{v}) - B_s(\underline{u} - \underline{v}, \underline{u} - \underline{v})) \\ &= \tfrac{1}{4}(K_B(\underline{u} + \underline{v}) - K_B(\underline{u} - \underline{v})), \end{aligned}$$

hvilket viser, at B_s er bestemt ved K_B. Vi har altså: Afbildningen $B \mapsto K_B$ er en bijektiv afbildning af mængden af symmetriske bilinearformer på V på mængden af kvadratiske former på V. Ved undersøgelse af kvadratiske former K_B kan det derfor antages, at B er symmetrisk; B vil da være entydigt bestemt.

En kvadratisk form K_B på V siges at være *positiv definit* på et underrum U af V, dersom $K_B(\underline{u}) > 0$ for alle vektorer $\underline{u} \in U \setminus \{\underline{0}\}$ (idet der naturligvis gælder $K_B(\underline{0}) = 0$), og *positiv semidefinit* på U, dersom $K_B(\underline{u}) \geq 0$ for alle $\underline{u} \in U$. Tilsvarende defineres begreberne *negativ definit* og *negativ semidefinit*. Antager K_B både positive og negative værdier på U, siges K_B at være *indefinit* på U. Et underrum U siges at være et *positivitets-underrum* hhv. *negativitetsunderrum* for K_B, dersom K_B er positiv hhv. negativ definit på U. Ved K_B's *positivitetsindex* ind_+K_B forstås det største dimensionstal for noget positivitets-underrum. Ved K_B's *negativitetsindex* ind_-K_B forstås tilsvarende det største dimensionstal for noget negativitetsunderrum.

Lad der i V være valgt en basis, og lad $B(\underline{u},\underline{v}) = \underline{\underline{u}}_-\underline{\underline{B}}\underline{\underline{v}}_|$ være matrixligningen for en symmetrisk bilinearform B på V. For den tilhørende kvadratiske form får vi da (med oplagte betegnelser)

$$K_B(\underline{v}) = \underline{\underline{v}}_-\underline{\underline{B}}\underline{\underline{v}}_| = \sum_{i=1}^{n} v_i\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}v_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}v_iv_j .$$

$K_B(\underline{v})$ er altså et homogent andengrads polynomium i koordinaterne $v_1,\ldots,v_n$. Omvendt kan ethvert sådant polynomium på entydig måde skrives på formen $\underline{\underline{v}}_-\underline{\underline{B}}\underline{\underline{v}}_|$, hvor $\underline{\underline{B}}$ er symmetrisk. Vi har dermed: Efter valg af basis for V kan de kvadratiske former $K_B(\underline{v})$ på V identificeres med de homogene andengrads polynomier i koordinaterne for $\underline{v}$.

8.3. NORMALFORMER FOR KVADRATISKE FORMER.

Vi skal vise, at der for enhver kvadratisk form K_B på V, hvor V er et reelt vektorrum af dimension $n \in \mathbb{N}$, findes en basis for V m.h.t. hvilken det til K_B hørende homogene andengrads polynomium ikke indeholder blandede led; den kvadratiske form siges da at antage *normalform* for den pågældende basis, eller at være *reduceret*. Betingelsen for, at K_B antager normalform for en given basis er åbenbart, at den tilhørende matrix er en diagonalmatrix. Idet ethvert endelig-dimensionalt vektorrum kan forsynes med et indre produkt, endda således, at en vilkårlig given basis bliver ortonormal (sml. side 7.1.11), er det ønskede resultat indeholdt i den følgende sætning; sætningen giver desuden yderligere oplysning om koefficienterne i polynomiet.

Lad B være en symmetrisk bilinearform på et euklidisk vektorrum $(V,\mathbb{R})$, lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en ortonormal basis for V, og lad $\underline{\underline{B}}$ være den til B hørende matrix m.h.t. basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$. Der findes da en ortonormal basis $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$, således at den til B hørende matrix $\hat{\underline{\underline{B}}}$ m.h.t. basen $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ er en diagonalmatrix. For enhver sådan basis $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ er diagonalelementerne i $\hat{\underline{\underline{B}}}$ de karakteristiske rødder for $\underline{\underline{B}}$, idet hver karakteristisk rod forekommer så mange gange som rodmultipliciteten angiver. Antallet af diagonalelementer, som er hhv. positive, negative og 0 er lig med hhv. ind_+K_B , ind_-K_B *og* $\dim N_B$.

Bevis. Først bemærkes, at matricerne, som hører til B m.h.t. de forskellige ortonormale baser, netop er matricerne af formen $(\underline{\underline{S}}^{-1})'\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$, hvor $\underline{\underline{S}}$ er en ortogonal matrix, (sml. side 8.1.4). For en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$ gælder imidlertid $\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}'$, og dermed $(\underline{\underline{S}}^{-1})' = \underline{\underline{S}}$. Den omtalte mængde af matricer er altså mængden af matricer, som er ortogonalækvivalente med $\underline{\underline{B}}$. Da nu $\underline{\underline{B}}$ er reel og symmetrisk, er $\underline{\underline{B}}$ ortogonal-ækvivalent med netop de diagonalmatricer, hvis diagonalelementer er de karakteristiske rødder for $\underline{\underline{B}}$, idet hver rod λ forekommer rmλ gange, (sml. side 7.6.3 og side 6.2.4). Hermed er sætningens to første påstande bevist. Lad herefter $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ være en ortonormal basis m.h.t. hvilken matricen $\hat{\underline{\underline{B}}}$ er en diagonalmatrix. Lad p hhv. q betegne antallet af positive hhv. negative diagonalelementer. Da gælder $\mathrm{rg}\hat{\underline{\underline{B}}} = p+q$, og antallet af 0'er i diagonalen bliver derfor $n-(p+q) = n - \mathrm{rg}\hat{\underline{\underline{B}}} = n - \mathrm{rg}B = \dim N_B$, (sml. side 8.1.4). Uden indskrænkning kan antages, at de første p diagonalelementer er positive, de næste q negative, og resten 0. Lad V_1, V_2, V_3 betegne underrummene udspændt af hhv. $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_p)$, $(\hat{\underline{e}}_{p+1},\ldots,\hat{\underline{e}}_{p+q})$ og $(\hat{\underline{e}}_{p+q+1},\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$. Vi har da oplagt $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = V$, og dermed $\dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 = \dim V$, altså

(1) $$p + q + \dim N_B = n.$$

Er nu U et vilkårligt positivitetsunderrum, gælder $U \cap (V_2 \oplus V_3) = \{\underline{o}\}$; thi $K_B(\underline{u}) > 0$ for alle $\underline{u} \in U \smallsetminus \{\underline{o}\}$, og $K_B(\underline{v}) \leq 0$ for alle

$\underline{v} \in V_2 \oplus V_3$. Heraf følger, at U danner direkte sum med $V_2 \oplus V_3$, hvoraf videre følger, at summen af U, U_2 og U_3 er direkte; vi har dermed $U \oplus U_2 \oplus U_3 \subseteq V$, og følgelig $\dim U + \dim V_2 + \dim V_3 \leq \dim V$, altså

(2) $$\dim U + q + \dim N_B \leq n.$$

Sammenholdes (1) og (2) fås $\dim U \leq p$; ethvert positivitetsunderrum har således dimension $\leq p$. Men V_1 er et positivitetsunderrum med dimension p, hvormed er vist, at $\operatorname{ind}_+ K_B = p$. På tilsvarende måde indses, at $\operatorname{ind}_- K_B = q$. []

Vedrørende den praktiske bestemmelse af en basis for hvilken en given kvadratisk form K_B antager normalform bemærkes følgende. Er $(V,\mathbb{R})$ et euklidisk vektorrum og er $\underline{B}$ den til den symmetriske bilinearform B hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$, bestemmes $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ som en ortonormal basis bestående af egenvektorer for den (selvadjungerede) endomorfi f af V, hvis tilhørende matrix m.h.t. basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ er $\underline{B}$. Er $(V,\mathbb{R})$ uden indre produkt og er $\underline{B}$ den til B hørende matrix m.h.t. en basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$, indføres det indre produkt $(u_1\underline{e}_1 +\ldots+ u_n\underline{e}_n)\cdot(v_1\underline{e}_1 +\ldots+ v_n\underline{e}_n) = u_1v_1 +\ldots+ u_nv_n$, hvorved $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ bliver en ortonormal basis. Herefter gås frem som ovenfor beskrevet.

Af sætningen ovenfor følger umiddelbart:

Lad B være en symmetrisk bilinearform på et vektorrum $(V,\mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$, og lad $\underline{\underline{B}}$ være den til B hørende matrix m.h.t. en valgt basis. Da er K_B positiv definit på V, hvis og kun hvis alle $\underline{\underline{B}}$'s karakteristiske rødder er positive.

Ved brug af dette resultat skal vi dernæst vise:

Lad B være en symmetrisk bilinearform på et vektorrum $(V,\mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$, og lad $\underline{\underline{B}}$ være den til B hørende matrix m.h.t. en basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$. Da er K_B positiv definit på V, hvis og kun hvis alle delmatricerne

$$\underline{\underline{B}}_k = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix}$$

hvor $k = 1,\ldots,n$, har positiv determinant.

Bevis. For $k = 1,\ldots,n$ sættes $V_k = \mathrm{span}\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_k\}$. Restriktionen B_k af B til $V_k \times V_k$ er da en symmetrisk bilinearform på V_k, og den til B_k hørende matrix m.h.t. basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_k)$ er netop $\underline{\underline{B}}_k$.

Antag først, at K_B er positiv definit på V. Da er K_B positiv definit på hvert af underrummene V_k, og $\underline{\underline{B}}_k$ har derfor ifølge den foregående sætning lutter positive karakteristiske rødder. Nu gælder imidlertid for enhver kvadratisk matrix, at dens determinant er lig med produktet af de karakteristiske rødder, regnet med multiplicitet. Følgelig har vi $\det \underline{\underline{B}}_k > 0$.

Antag dernæst, at $\det \underline{\underline{B}}_k > 0$ for $k = 1,\ldots,n$. Vi skal vise ved induktion efter k, at K_B er positiv definit på V_k, og dermed specielt på $V_n = V$. Af $B(\underline{e}_1,\underline{e}_1) = b_{11} = \det \underline{\underline{B}}_1 > 0$ følger, at K_B er positiv definit på V_1. Antag, at K_B er positiv definit på V_k, hvor $1 \leqq k < n$. Der gælder da $\mathrm{ind}_+ K_{B_{k+1}} \geqq k$, thi V_k er et k-dimensionalt positivitetsunderrum for $K_{B_{k+1}}$. Af $\det \underline{\underline{B}}_{k+1} > 0$ følger, at 0 ikke er karakteristisk rod for $\underline{\underline{B}}_{k+1}$, og at antallet af negative karakteristiske rødder for $\underline{\underline{B}}_{k+1}$, regnet med multiplicitet, er lige; thi produktet af samtlige karakteristiske rødder, regnet med multiplicitet, er lig med $\det \underline{\underline{B}}_{k+1}$. Heraf fremgår, at $\dim N_{B_{k+1}} = 0$ og at $\mathrm{ind}_- K_{B_{k+1}}$ er lige (sml. side 8.3.1). Da vi samtidig har $\mathrm{ind}_+ K_{B_{k+1}} + \mathrm{ind}_- K_{B_{k+1}} + \dim N_{B_{k+1}} = k+1$ (sml. side 8.3.1), følger, at $\mathrm{ind}_+ K_{B_{k+1}} = k+1$. Hermed er vist, at K_B er positiv definit på V_{k+1}, hvormed induktionsbeviset er fuldført. []

1. Lad B være en symmetrisk bilinearform på et vektorrum $(V,\mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$, og lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en basis m.h.t. hvilken K_B antager normalform, $K_B(\underline{v}) = \mu_1 v_1^2 + \ldots + \mu_n v_n^2$. Vis, at antallet af koefficienter μ_i, som er hhv. positive, negative og 0, er lig med hhv. $\mathrm{ind}_+ K_B$, $\mathrm{ind}_- K_B$ og $\dim N_B$. Vis, at der findes en basis m.h.t. hvilken K_B antager en normalform, hvori enhver af koefficienterne μ_i er enten 1, -1 eller 0.

2. Lad $(V,\mathbb{R})$ være et 3-dimensionalt euklidisk vektorrum. En kvadratisk form K_B på V er m.h.t. en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ givet ved

$$K_B(\underline{v}) = 2v_1^2 + 2v_2^2 + 2v_3^2 - 2v_1v_2.$$

Bestem matricen $\underline{\underline{B}}$ for den tilhørende symmetriske bilinearform B. Bestem $\mathrm{rg}B$, $\mathrm{ind}_+ K_B$ og $\mathrm{ind}_- K_B$. Bestem en ortonormal basis $(\hat{\underline{e}}_1,\hat{\underline{e}}_2,\hat{\underline{e}}_3)$ m.h.t. hvilken K_B antager normalform. Lad $\underline{\underline{S}}$ betegne koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ til $(\hat{\underline{e}}_1,\hat{\underline{e}}_2,\hat{\underline{e}}_3)$. Bestem $\underline{\underline{S}}$ og $\underline{\underline{S}}^{-1}$. Verificer ved udregning, at $(\underline{\underline{S}}^{-1})'\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix med $\underline{\underline{B}}$'s karakteristiske rødder som diagonalelementer.

3. Lad $(V,\mathbb{R})$ være et vektorrum af endelig dimension $n \geq 2$, og lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en basis for V. En kvadratisk form K_B på V er m.h.t. den valgte basis givet ved

$$K_B(\underline{v}) = 2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} v_i v_j .$$

Bestem matricen $\underline{\underline{B}}$ for den tilhørende symmetriske bilinearform B. Bestem ind$_+K_B$, ind$_-K_B$ og rg$B$. (Betragt f.eks. det $(n-1)$-dimensionale underrum

$$U = \{ v_1\underline{e}_1 + \ldots + v_n\underline{e}_n \mid v_1 + \ldots + v_n = 0 \},$$

og udnyt, at

$$(v_1 + \ldots + v_n)^2 = v_1^2 + \ldots + v_n^2 + 2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} v_i v_j .)$$

KAPITEL 9. AFFIN GEOMETRI.

9.1. AFFINE RUM.

Lad A være en ikke-tom mængde, hvis elementer kaldes *punkter* og betegnes $P,Q,\ldots$, lad $(V,\mathbb{R})$ være et endelig-dimensionalt reelt vektorrum og lad $(P,Q) \mapsto \varphi(P,Q)$ være en afbildning af $A \times A$ på V. Vi siger da, at A er et *affint rum med V som vektorrum og φ som vektorafbildning*, dersom følgende to betingelser er opfyldt:

(a) *For ethvert punkt $P \in A$ og enhver vektor $\underline{v} \in V$ findes et og kun eet punkt $Q \in A$, således at* $\varphi(P,Q) = \underline{v}$.

(b) *For vilkårlige punkter $P,Q,R \in A$ gælder* $\varphi(P,Q) + \varphi(Q,R) = \varphi(P,R)$.

Er A et affint rum med V som vektorrum og φ som vektorafbildning, vil vi ofte skrive PQ i stedet for $\varphi(P,Q)$. Betingelserne (a) og (b) får da følgende form:

(a) *For ethvert punkt $P \in A$ og enhver vektor $\underline{v} \in V$ findes et og kun eet punkt $Q \in A$, således at $PQ = \underline{v}$.*

(b) *For vilkårlige punkter $P,Q,R \in A$ gælder $PQ + QR = PR$.*

Som betegnelse for et affint rum A med vektorrum V og vektorafbildning φ bruges (A,V,φ), (A,V) eller blot A.

Betingelsen (b) kaldes *indskudsreglen*. Betingelsen (a) er åbenbart ensbetydende med følgende: For ethvert punkt $P \in A$ er afbildningen $Q \mapsto \varphi(P,Q) = PQ$ en bijektiv afbildning af A på V.

Lad P være et punkt i et affint rum A, og lad $\underline{v}$ være en vektor i det tilhørende vektorrum V. Ifølge (a) findes da netop eet punkt $Q \in A$, således at $PQ = \underline{v}$. Om dette punkt Q siges,

- at det fremkommer ved *afsætning* af $\underline{v}$ fra P;
- at det er *endepunkt* for $\underline{v}$, når $\underline{v}$ afsættes fra P;
- at det har $\underline{v}$ som *stedvektor* ud fra P.

Vi skal vise følgende simple konsekvenser af (a)-(b):

For vilkårlige punkter i et affint rum gælder:

(1) $P = Q \Leftrightarrow PQ = \underline{o}$.

(2) $PQ = -QP$.

(3) $P_1Q_1 = P_2Q_2 \Leftrightarrow P_1P_2 = Q_1Q_2$.

(Udsagnet (3) kaldes *Parallelogramsætningen*.)

Bevis. Ifølge (b) har vi $PP + PR = PR$, hvormed $PP = \underline{o}$. Heraf og af (a) følger dernæst, at $P \neq Q$ implicerer $PQ \neq \underline{o}$. Hermed er (1) bevist. Ved anvendelse af (b) og (1) får vi $PQ + QP = PP = \underline{o}$, hvoraf (2) fremgår. Ved anvendelse af (b) fås endelig $P_1Q_1 - P_2Q_2 = (P_1P_2 + P_2Q_1) - (P_2Q_1 + Q_1Q_2) = P_1P_2 - Q_1Q_2$, hvoraf (3) fremgår. []

Ved *dimensionen* dim$A$ af et affint rum (A,V) forstås dimensionen af vektorrummet V. Et affint rum af dimension 1 hhv. 2 kaldes en *linie* hhv. *plan*.

Et affint rum, hvis vektorrum er et euklidisk vektorrum, kaldes et *euklidisk affint rum*. Ved brug af norm-egenskaber samt (1) og (2) vises let, at der i et euklidisk affint rum defineres en *metrik* ved $\mathrm{dist}(P,Q) = \|PQ\| = \sqrt{PQ \cdot PQ}$.

Lad (A,V) være et affint rum af dimension $n \geq 1$. Ved et *(affint) koordinatsystem* i A forstås et sæt $(O;\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$, hvor O er et punkt i A, og $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ er en basis for V. Punktet O kaldes koordinatsystemets *begyndelsespunkt*, vektorerne $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ kaldes koordinatsystemets *grundvektorer*. Er A specielt et euklidisk affint rum, og $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ en ortogonal hhv. ortonormal basis for V, kaldes koordinatsystemet et *ortogonalt* eller *retvinklet koordinatsystem* hhv. *ortonormalt* eller *sædvanligt retvinklet koordinatsystem*.

Er $(O;\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ et affint koordinatsystem i et affint rum (A,V), så har for hvert punkt $P \in A$ stedvektoren OP for P ud fra O en og kun een fremstilling som linearkombination af vektorerne i basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$,

$$OP = x_1\underline{e}_1+\ldots+x_n\underline{e}_n \ .$$

Talsættet $(x_1,\ldots,x_n)$ kaldes for punktet P's *(affine) koordinatsæt* m.h.t. det betragtede koordinatsystem. Tallet x_i kaldes for P's *i'te koordinat*. Det noteres, at koordinatsættet for et punkt er identisk med koordinatsættet for punktets stedvektor ud fra begyndelsespunktet.

Lad $(O;\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\hat{O};\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ være to affine koordinatsystemer i et affint rum (A,V). Lad P være et punkt i A, som m.h.t. de to koordinatsystemer har koordinatsøjlerne $\underline{\underline{x}}_|$ hhv. $\hat{\underline{\underline{x}}}_|$. Idet punktet O's koordinatsøjle m.h.t. koordinatsystemet $(\hat{O};\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ betegnes $\hat{\underline{\underline{a}}}_|$, og koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ til basen $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ i V betegnes $\underline{\underline{S}}$, søges et udtryk for forbindelsen mellem $\underline{\underline{x}}_|$ og $\hat{\underline{\underline{x}}}_|$. Først bemærkes, at der gælder

(4) $$\hat{O}P = \hat{O}O + OP.$$

Om vektorerne $\hat{O}P$ og $\hat{O}O$ vides, at de m.h.t. basen $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ har koordinatsøjlerne $\hat{\underline{\underline{x}}}_|$ hhv. $\hat{\underline{\underline{a}}}_|$. Om vektoren OP vides, at den m.h.t. basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ har koordinatsøjlen $\underline{\underline{x}}_|$; dens koordinatsøjle m.h.t. basen $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ er derfor $\underline{\underline{S}}\underline{\underline{x}}_|$, (sml. side 4.3.1). Følgelig får vi ved indsættelse i (4)

$$\hat{\underline{\underline{x}}}_| = \hat{\underline{\underline{a}}}_| + \underline{\underline{S}}\underline{\underline{x}}_|,$$

hvormed den ønskede relation er etableret. Det noteres, at $\hat{\underline{\underline{a}}}_|$ og $\underline{\underline{S}}$ er entydigt bestemt.

Bemærkning. I den her givne definition af begrebet affint rum er forlangt om vektorrummet, at det er endelig-dimensionalt og reelt. Frafaldes disse to krav fås "endelig- eller uendelig-dimensionale, reelle eller komplekse affine rum". Store dele af teorien kan umiddelbart udvides til også at omfatte sådanne affine rum.

Eksempel. Ethvert (endelig-dimensionalt reelt) vektorrum V kan på naturlig måde organiseres som et affint rum med sig selv som vektorrum, nemlig ved vektorafbildningen $(\underline{u},\underline{v}) \mapsto \underline{v} - \underline{u}$.

9.2. AFFINE UNDERRUM.

En ikke-tom delmængde A_0 af et affint rum (A,V,φ) siges at være et *affint underrum*, dersom for det første $\varphi(A_0 \times A_0)$ er et underrum af V, og for det andet A_0 er et affint rum med $\varphi(A_0 \times A_0)$ som vektorrum og $\varphi : A_0 \times A_0 \to \varphi(A_0 \times A_0)$ som vektorafbildning. Vektorrummet $V_0 = \varphi(A_0 \times A_0)$ kaldes da for A_0's *retning*.

Lad (A,V,φ) være et affint rum og lad (A_0,V_0) være et affint underrum. Der gælder da

$$A_0 = \{Q \in A \mid \varphi(P_0,Q) \in V_0\}$$

for ethvert punkt $P_0 \in A_0$.

Bevis. Lad først Q være et punkt i A_0. Vi har da $(P_0,Q) \in A_0 \times A_0$, og dermed $\varphi(P_0,Q) \in \varphi(A_0 \times A_0) = V_0$. Hermed er den ene inklusion vist. Lad dernæst Q være et punkt i A med $\varphi(P_0,Q) \in V_0$. Da (a) er opfyldt for (A_0,V_0), findes et (og kun eet) punkt $R \in A_0$ med $\varphi(P_0,R) = \varphi(P_0,Q)$. Men ved anvendelse af (a) - på (A,V) - sluttes heraf, at $R = Q$, og dermed, at $Q \in A_0$. Hermed er den anden inklusion vist. []

Lad (A,V,φ) være et affint rum, lad P_0 være et punkt i A, og lad V_0 være et underrum af V. Mængden

$$A_0 = \{Q \in A \mid \varphi(P_0,Q) \in V_0\}$$

er da et affint underrum med retningen V_0, som indeholder P_0.

Bevis. Af $\underline{o} \in V_0$ følger, at $P_0 \in A_0$. Dernæst vises, at $\varphi(A_0 \times A_0) = V_0$. Lad $\underline{v}$ være en vektor i V_0, og lad Q være bestemt ved $\varphi(P_0,Q) = \underline{v}$. Vi har da $Q \in A_0$, og $\underline{v} = \varphi(P_0,Q) \in \varphi(A_0 \times A_0)$. Hermed er den ene inklusion vist. Lad omvendt Q_1 og Q_2 være punkter i A_0. Idet $\varphi(Q_1,Q_2) = \varphi(Q_1,P_0) + \varphi(P_0,Q_2) = -\varphi(P_0,Q_1) + \varphi(P_0,Q_2)$, ses, at $\varphi(Q_1,Q_2)$ er sum af to vektorer fra V_0, og derfor selv en vektor fra V_0. Heraf følger den anden inklusion. Vi skal endelig vise, at A_0 er et affint underrum med retningen V_0. Hertil skal vises, at (a) og (b) side 9.1.1 er opfyldt for A_0, V_0. Det er trivielt, at (b) er opfyldt. Lad derfor P være et punkt i A_0, og $\underline{v}$ en vektor i V_0; det skal da vises, at der findes netop eet punkt $Q \in A_0$ med $\varphi(P,Q) = \underline{v}$. Idet (a) er opfyldt for (A,V) findes netop eet punkt $Q \in A$ med $\varphi(P,Q) = \underline{v}$; det skal vises, at $Q \in A_0$. Hertil bemærkes, at $\varphi(P_0,P) \in V_0$, idet $P \in A_0$, og at $\varphi(P,Q) \in V_0$, idet $\varphi(P,Q) = \underline{v}$. Da nu $\varphi(P_0,Q) = \varphi(P_0,P) + \varphi(P,Q)$, ses, at $\varphi(P_0,Q)$ er sum af to vektorer fra V_0, og derfor selv en vektor fra V_0. Men heraf følger, at $Q \in A_0$. □

Ved anvendelse af disse to sætninger skal vi herefter vise:

Er (A_i,V_i), $i \in I$, *affine underrum af et affint rum* (A,V) *og er* $\cap A_i$ *ikke-tom, så er* $\cap A_i$ *er affint underrum med retningen* $\cap V_i$.

Bevis. Lad P_0 være et punkt i $\cap A_i$. For hvert af de affine underrum A_i gælder da, at punkterne i A_i fremkommer ved afsætning af vektorerne i V_i fra P_0. Punkterne i $\cap A_i$ fremkommer derfor ved afsætning af vektorerne i $\cap V_i$ fra P_0. Heraf følger påstanden, idet $\cap V_i$ er et underrum af V. []

Af den foregående sætning fremgår umiddelbart, at for enhver ikke-tom delmængde M af et affint rum er fællesmængden af alle affine underrum, som indeholder M, et affint underrum, som indeholder M. Det kaldes det af M *udspændte* eller *frembragte* affine underrum, og betegnes aff$M$.

Lad (A_0, V_0) være et affint underrum af et affint rum (A,V), lad O være et punkt i A, og lad $(P_0; \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_r)$ være et affint koordinatsystem i A_0. Idet punkterne i A_0 fremkommer ved afsætning af vektorerne i V_0 fra P_0, har vi

$$\begin{aligned} A_0 &= \{P \in A \mid P_0P = t_1\underline{e}_1 + \ldots + t_r\underline{e}_r, \quad t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{R}\} \\ &= \{P \in A \mid OP = OP_0 + t_1\underline{e}_1 + \ldots + t_r\underline{e}_r, \quad t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

hvor der ved den sidste omskrivning er benyttet indskudsreglen. Vi siger, at der ved

$$OP = OP_0 + t_1\underline{e}_1 + \ldots + t_r\underline{e}_r, \qquad t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{R},$$

er givet en *parameterfremstilling* af (A_0, V_0).

Et affint underrum (A_0, V_0) af et affint rum (A,V) kaldes en *hyperplan* i A, dersom $\dim A_0 = \dim A - 1$.

Lad (A_1, V_1) og (A_2, V_2) være affine underrum at et affint rum (A, V). Vi siger da, at A_1 og A_2 er *parallelle*, dersom enten $V_1 \subseteq V_2$ eller $V_2 \subseteq V_1$. Vi siger, at A_1 og A_2 er *komplementære*, dersom $V_1 \oplus V_2 = V$. Og er (A, V) et euklidisk affint rum, siger vi, at A_1 og A_2 er *ortogonale*, dersom $V_1 \perp V_2$.

Er (A_0, V_0) en hyperplan i et euklidisk affint rum (A, V), forstås ved en *normal* til A_0 et til A_0 ortogonalt 1-dimensionalt affint underrum, altså et affint underrum med retningen $V_0^{\perp}$. En vektor $\underline{v} \in V_0^{\perp} \setminus \{\underline{o}\}$ kaldes en *normalvektor* til A_0.

Er (A_1, V_1) og (A_2, V_2) linier (d.v.s. 1-dimensionale affine underrum) i et euklidisk affint rum (A, V), defineres *vinklen* θ mellem dem ved

$$\theta = \text{Arc cos}\left|\frac{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2}{\|\underline{v}_1\| \; \|\underline{v}_2\|}\right| ,$$

hvor $\underline{v}_1 \in V_1 \setminus \{\underline{o}\}$ og $\underline{v}_2 \in V_2 \setminus \{\underline{o}\}$.

Eksempel. De affine underrum af et vektorrum, som på naturlig måde er organiseret som et afint rum med sig selv som vektorrum (sml. side 9.1.4), er netop sideunderrummene i vektorrummet.

9.3. AFFIN AFHÆNGIGHED OG UAFHÆNGIGHED.

Lad (A,V) være et affint rum. Er $P_0,\ldots,P_r \in A$ og $\lambda_0,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$, bestemmes for hvert punkt $O \in A$ en vektor $\underline{v} \in V$ ved

$$\underline{v} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i .$$

For $\lambda_0+\ldots+\lambda_r = 0$ bliver $\underline{v}$ uafhængig af O, idet vi da for et vilkårligt punkt $\hat{O} \in A$ har

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \hat{O}P_i = \left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i\right)\hat{O}O + \sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i$$
$$= \sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i .$$

Det følgende har derfor god mening: Et sæt $(P_0,\ldots,P_r)$ af punkter fra A siges at være *affint afhængigt*, dersom der findes $\lambda_0,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$ med $(\lambda_0,\ldots,\lambda_r) \neq (0,\ldots,0)$ og $\lambda_0+\ldots+\lambda_r = 0$, således at

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i = \underline{o}$$

for et (og dermed ethvert) punkt $O \in A$. Er sættet $(P_0,\ldots,P_r)$ ikke affint afhængigt, siges det at være *affint uafhængigt*. Dette kommer altså ud på, at $(0,\ldots,0)$ er det eneste sæt $(\lambda_0,\ldots,\lambda_r)$ med $\lambda_0+\ldots+\lambda_r = 0$ for hvilket (1) er opfyldt. Det bemærkes, at et sæt bestående af eet punkt altid er affint uafhængigt.

Et sæt $(P_0,\ldots,P_r)$ bestående af mindst to punkter fra et affint rum er affint afhængige, hvis og kun hvis vektorsættet $(P_0P_1,\ldots,P_0P_r)$ er lineært afhængigt.

Bevis. Hvis punktsættet er affint afhængigt, findes $\lambda_0,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$, som ikke alle er 0, og som har sum 0, således at

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_0P_i = \underline{o},$$

og dermed

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_0P_i = \underline{o}.$$

Da mindst eet af tallene $\lambda_0,\ldots,\lambda_r$ er forskelligt fra 0, og summen er lig med 0, kan $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ ikke alle være 0; af (2) fremgår derfor, at vektorsættet er lineært afhængigt. Hvis omvendt vektorsættet er lineært afhængigt, findes $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$, således at (2) er opfyldt. Sættes $\lambda_0 = \div(\lambda_1+\ldots+\lambda_r)$, fås $\lambda_0+\ldots+\lambda_r = 0$ og

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_0P_i &= \lambda_0 P_0P_0 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_0P_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_0P_i \\ &= \underline{o},\end{aligned}$$

hvoraf fremgår, at punktsættet er affint afhængigt. []

Af sætningen ovenfor fremgår umiddelbart:

Et affint rum A har dimension n, hvis og kun hvis $n+1$ er det maksimale antal punkter i noget affint uafhængigt sæt af punkter fra A.

Er $P_0, \ldots, P_r$ punkter fra et affint rum A og er $\lambda_0, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, bestemmes for hvert punkt $O \in A$ et punkt $P \in A$ ved

$$(3) \qquad OP = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i \; .$$

For $\lambda_0 + \ldots + \lambda_r = 1$ bliver P uafhængigt af O; thi af

$$\hat{O}\hat{P} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \hat{O}P_i$$

følger

$$\hat{O}\hat{P} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i (\hat{O}O + OP_i)$$

$$= (\sum_{i=0}^{r} \lambda_i)\hat{O}O + \sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i$$

$$= \hat{O}O + OP = \hat{O}P,$$

hvormed $\hat{P} = P$. Dette leder til følgende definition: Et punkt $P \in A$ siges at være en *affin kombination* af punkterne $P_0, \ldots, P_r$ med koefficienterne $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$, dersom $\lambda_0 + \ldots + \lambda_r = 1$ og (3) er opfyldt for et (og dermed ethvert) punkt O. Vi vil da også skrive

$$P = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i \; .$$

Antag, at et punkt P i et affint rum er en affin kombination af punkter $P_0, \ldots, P_r$. Koefficienterne i fremstillingen er da entydigt bestemt, hvis og kun hvis sættet $(P_0, \ldots, P_r)$ er affint uafhængigt.

Bevis. Lad O være et punkt i det affine rum, og lad

(4) $$OP = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i$$

være en fremstilling af P som affin kombination af $P_0,\ldots,P_r$. Er sættet $(P_0,\ldots,P_r)$ affint afhængigt, findes $\mu_0,\ldots,\mu_r \in \mathbb{R}$, som ikke alle er 0, således at $\mu_0+\ldots+\mu_r = 0$ og

$$\sum_{i=0}^{r} \mu_i OP_i = \underline{o}.$$

Ved

$$OP = \sum_{i=0}^{r} (\lambda_i + \mu_i) OP_i$$

er da bestemt en fra (4) forskellig fremstilling af P som affin kombination af $P_0,\ldots,P_r$. Er omvendt

$$OP = \sum_{i=0}^{r} \nu_i OP_i$$

en fra (4) forskellig fremstilling, så har vi

$$\sum_{i=0}^{r} (\lambda_i - \nu_i) OP_i = \underline{o},$$

hvor koefficienterne $\lambda_0-\nu_0,\ldots,\lambda_r-\nu_r$ ikke alle er 0, men har sum 0; sættet $(P_0,\ldots,P_r)$ er da affint afhængigt. □

Et sæt $(P_0,\ldots,P_r)$ bestående af mindst to punkter fra et affint rum er affint afhængigt, hvis og kun hvis mindst eet af punkterne i sættet er en affin kombination af de øvrige.

Bevis. Lad O være et punkt i det affine rum. Hvis sættet er affint afhængigt, findes $\lambda_0,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$, som ikke alle er 0, og som har sum 0, således at

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i = \underline{o}.$$

Antag f.eks., at $\lambda_0 \neq 0$; da gælder

$$\sum_{i=1}^{r} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\right) = 1$$

og

$$\sum_{i=1}^{r} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\right) OP_i = OP_0 .$$

Punktet P_0 er altså en affin kombination af $P_1,\ldots,P_r$. Hvis omvendt P_0 er en affin kombination af $P_1,\ldots,P_r$, så findes $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$ med sum 1, således at

$$OP_0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i OP_i .$$

Sættes $\lambda_0 = -1$, fås $\lambda_0+\ldots+\lambda_r = 0$ og

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i = \underline{o};$$

sættet $(P_0,\ldots,P_r)$ er altså affint afhængigt. □

For enhver ikke-tom delmængde M af et affint rum (A,V) *er* aff$M$ *identisk med mængden af punkter i A, som er affine kombinationer af punkter i M.*

Bevis. Lad V_0 være aff$M$'s retning, og lad P_0 være et punkt i M. Sæt

$$K = \{P_0P \in V \mid P \in M\}.$$

Det er klart, at $K \subseteq V_0$, og dermed, at span$K \subseteq V_0$. På den anden side fås ved afsætning af vektorerne i span$K$ fra P_0 et affint underrum af A, som indeholder M, og dermed også aff$M$; der gælder derfor også $V_0 \subseteq$ span$K$, og altså $V_0 =$ span$K$. Er nu $P \in A$ en affin kombination af punkter i M, findes $P_1,\ldots,P_r \in M$, og $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$ med sum 1, således at

$$P_0P = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_0P_i \ .$$

Da vektorerne $P_0P_1,\ldots,P_0P_r$ tilhører K, sluttes at P_0P tilhører V_0, hvormed $P \in$ aff$M$. Lad omvendt P være et punkt i aff$M$. Vi har da $P_0P \in V_0$, og der findes følgelig $P_1,\ldots,P_r \in M$ og $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$, således at

$$P_0P = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_0P_i \ .$$

Sættes $\lambda_0 = 1 - (\lambda_1+\ldots+\lambda_1)$, fås $\lambda_0+\ldots+\lambda_r = 1$ og

$$P_0P = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_0P_i \ ,$$

hvoraf fremgår, at P er en affin kombination af punkterne $P_0,\ldots,P_r \in M$. []

9.4. AFFINE AFBILDNINGER.

En afbildning f af et affint rum (A,U) ind i et affint rum (B,V) siges at være en *affin afbildning*, dersom der findes en lineær afbildning $\hat{f}$ af U ind i V, således at

(1) $$\hat{f}(PQ) = f(P)f(Q)$$

for alle $P,Q \in A$. Det er klart, at $\hat{f}$ da er entydigt bestemt; den kaldes den til f hørende lineære afbildning.

Bemærk, at der for en given vilkårlig afbildning $f : A \to B$ findes en (og da kun een) ikke nødvendigvis lineær afbildning $\hat{f} : U \to V$ med egenskaben (1), hvis og kun hvis

$$PQ = RS \Rightarrow f(P)f(Q) = f(R)f(S)$$

for alle $P,Q,R,S \in A$.

Lad (A,U) og (B,V) være affine rum, og lad $g : U \to V$ være en lineær afbildning. For hvert $O_1 \in A$ og hvert $O_2 \in B$ findes da en og kun een affin afbildning $f : A \to B$ med $f(O_1) = O_2$ og $\hat{f} = g$.

Bevis. For at indse entydigheden bemærkes, at er f en affin afbildning med de angivne egenskaber, må der for alle $P \in A$ gælde $O_2f(P) = f(O_1)f(P) = \hat{f}(O_1P) = g(O_1P)$. Billedpunktet $f(P)$ er således bestemt som det punkt i B, der fremkommer ved afsætning af vektoren $g(O_1P)$ fra O_2. For at vise eksistensen betragtes den afbildning f, som fører et punkt $P \in A$ over i det punkt i B, som fremkommer ved afsætning af vektoren $g(O_1P)$ fra O_2; vi har altså $O_2f(P) = g(O_1P)$ for alle $P \in A$. Om denne afbildning f gælder da for det første $f(O_1) = O_2$, thi $O_2f(O_1) = g(O_1O_1) = g(\underline{o}) = \underline{o}$. Endvidere gælder

$$\begin{aligned} g(PQ) &= g(PO_1 + O_1Q) = g(PO_1) + g(O_1Q) \\ &= -g(O_1P) + g(O_1Q) = -O_2f(P) + O_2f(Q) \\ &= f(P)O_2 + O_2f(Q) = f(P)f(Q) \end{aligned}$$

for alle $P,Q \in A$, hvoraf fremgår, at f er en affin afbildning med $\hat{f} = g$. []

Lad (A,U) og (B,V) være affine rum, hvor $\dim A = n \geq 1$. *For hvert affint uafhængigt sæt $(P_0,\ldots,P_n)$ af $n+1$ punkter fra A og ethvert sæt $(Q_0,\ldots,Q_n)$ af $n+1$ punkter fra B findes da en og kun een affin afbildning $f : A \to B$ med $f(P_i) = Q_i$ for $i = 0,\ldots,n$.*

Bevis. Først bemærkes, at en affin afbildning med de i sætningen angivne egenskaber er det samme som en affin afbildning f med $f(P_0) = Q_0$ og $\hat{f}(P_0P_i) = Q_0Q_i$ for $i = 1,\ldots,n$. Da sættet $(P_0P_i,\ldots,P_0P_n)$ er en basis for U (sml. side 9.3.1), findes netop een lineær afbildning $g : U \to V$ med $g(P_0P_i) = Q_0Q_i$ for $i = 1,\ldots,n$ (sml. side 2.1.2). Ifølge den foregående sætning findes derfor netop een affin afbildning $f : A \to B$ med $f(P_0) = Q_0$ og $\hat{f}(P_0P_i) = Q_0Q_i$ for $i = 1,\ldots,n$. Hermed er sætningen bevist. []

Lad f være en afbildning af et affint rum (A,U) ind i et affint rum (B,V). Følgende tre betingelser er da ensbetydende:

(2) *f er en affin afbildning.*

(3) *f bevarer affine kombinationer, d.v.s. $P = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i$ implicerer $f(P) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i f(P_i)$.*

(4) *$PQ = \lambda RS$ implicerer $f(P)f(Q) = \lambda f(R)f(S)$.*

Bevis. Antag, at (2) er opfyldt, lad $P_0,\ldots,P_r$ være punkter i A, og lad $\lambda_0,\ldots,\lambda_r$ være reelle tal med sum 1. Punktet $P = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i$ er da bestemt ved, at $OP = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i$ for et vilkårligt punkt $O \in A$. Ved brug af (2) får vi da

$$f(O)f(P) = \hat{f}(OP) = \hat{f}\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \hat{f}(OP_i) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i f(O)f(P_i),$$

altså $f(P) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i f(P_i)$. Hermed er vist, at (2) medfører (3). Antag dernæst, at (3) er opfyldt, lad P,Q,R,S være punkter i A, og lad λ være et reelt tal, således at $PQ = \lambda RS$. Vi har da

$$PP = \underline{o} = PQ - \lambda RS = PQ - \lambda RP - \lambda PS$$

$$= PQ + \lambda PR - \lambda PS;$$

punktet P er altså en affin kombination af punkterne Q,R og S med koefficienterne $1,\lambda$ og $-\lambda$. Ved brug af (3) får vi derfor

$$\underline{o} = f(P)f(P)$$
$$= f(P)f(Q) + \lambda f(P)f(R) - \lambda f(P)f(S),$$

og dermed

$$f(P)f(Q) = -\lambda f(P)f(R) + \lambda f(P)f(S)$$
$$= \lambda(-f(P)f(R) + f(P)f(S))$$
$$= \lambda f(R)f(S).$$

Hermed er vist, at (3) medfører (4). Antag endelig, at (4) er opfyldt. Vi har da specielt $PQ = RS$ implicerer $f(P)f(Q) = f(R)f(S)$, hvoraf fremgår, at der ved $\hat{f}(PQ) = f(P)f(Q)$ defineres en afbildning $\hat{f} : U \to V$. Det skal vises, at $\hat{f}$ er lineær. Først vises, at $\hat{f}(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = \hat{f}(\underline{u}_1) + \hat{f}(\underline{u}_2)$ for alle $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$. Er P,Q og R punkter i A med $\underline{u}_1 = PQ$ og $\underline{u}_2 = QR$, har vi

$$\hat{f}(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = \hat{f}(PQ + QR) = \hat{f}(PR)$$
$$= f(P)f(R) = f(P)f(Q) + f(Q)f(R)$$
$$= \hat{f}(PQ) + \hat{f}(QR)$$
$$= \hat{f}(\underline{u}_1) + \hat{f}(\underline{u}_2).$$

Dernæst vises, at $\hat{f}(\lambda\underline{u}) = \lambda\hat{f}(\underline{u})$ for alle $\underline{u} \in U$ og $\lambda \in \mathbb{R}$. Er P,Q,R og S punkter i A med $\underline{u} = RS$ og $\lambda\underline{u} = PQ$, og dermed $PQ = \lambda RS$, fås ved brug af (3)

$$\hat{f}(\lambda\underline{u}) = \hat{f}(PQ) = f(P)f(Q)$$
$$= \lambda f(R)f(S) = \lambda\hat{f}(RS) = \lambda\hat{f}(\underline{u}),$$

hvormed er vist, at (4) medfører (2). []

Man efterviser let følgende:

Lad (A,U) og (B,V) være affine rum, og lad $f : A \to B$ være en affin afbildning. For hvert affint underrum (B_0,V_0) af B med $f^{-1}(B_0) \neq \emptyset$ er $f^{-1}(B_0)$ et affint underrum af A med retningen $\hat{f}^{-1}(V_0)$, og for hvert affint underrum (A_0,U_0) af A er $f(A_0)$ et affint underrum af B med retningen $\hat{f}(U_0)$.

Man efterviser ligeledes let følgende:

Er $f : A \to B$ og $g : B \to C$ affine afbildninger, så er den sammensatte afbildning $g \circ f : A \to C$ ligeledes affin, og $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$.

En affin afbildning $f : A \to B$ er bijektiv, hvis og kun hvis den tilhørende lineære afbildning $\hat{f}$ er bijektiv. Hvis f er bijektiv, så er den omvendte afbildning $f^{-1} : B \to A$ ligeledes affin, og $\widehat{f^{-1}} = \hat{f}^{-1}$.

Lad (A,U) og (B,V) være affine rum, og lad $(O_1;\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ hhv. $(O_2;\underline{f}_1,\dots,\underline{f}_m)$ være et affint koordinatsystem i A hhv. B. Lad videre $f : A \to B$ være en affin afbildning. For et vilkårligt punkt $P \in A$ har vi

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{O_2 f(P)} &= \overrightarrow{O_2 f(O_1)} + \overrightarrow{f(O_1) f(P)} \\
&= \overrightarrow{O_2 f(O_1)} + \hat{f}(\overrightarrow{O_1 P}).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Betegnes nu med $\underline{\underline{A}}$ den til $\hat{f}$ hørende matrix m.h.t. baserne $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ hhv. $(\underline{f}_1,\dots,\underline{f}_m)$, med $\underline{\underline{u}}_|$ punktet P's koordinatsøjle m.h.t. koordinatsystemet $(O_1;\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$, og med $\underline{\underline{a}}_|$ punktet

$f(O_1)$'s koordinatsøjle m.h.t. koordinatsystemet $(O_2;\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_m)$, så er punktet $f(P)$'s koordinatsøjle $\underline{\underline{v}}_|$ m.h.t. koordinatsystemet $(O_2;\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_m)$ ifølge (5) bestemt ved

$$\underline{\underline{v}}_| = \underline{\underline{a}}_| + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{u}}_| \;.$$

Denne relation kaldes den affine afbildnings *matrixligning* m.h.t. de betragtede koordinatsystemer.

En bijektiv affin afbildning af et affint rum A på sig selv kaldes en *affin transformation* af A. Mængden af affine transformationer af A er en gruppe med sammensætning som komposition; gruppen kaldes A's *affine gruppe*.

En affin transformation af et affint rum A kaldes en *translation*, hvis den tilhørende lineære afbildning er den identiske afbildning. Ved hjælp af parallellogramsætningen indses let, at en affin transformation f af A er en translation, hvis og kun hvis $Pf(P) = Qf(Q)$ for alle $P,Q \in A$. Vektoren $Pf(P)$ kaldes da *translationsvektoren*. Mængden af translationer af A er en kommutativ undergruppe af A's affine gruppe.

En afstandsbevarende affin transformation af et euklidisk affint rum kaldes en *kongruens*. Mængden af kongruenser af et euklidisk affint rum er en undergruppe af rummmets affine gruppe.

En affin transformation f af et euklidisk affint rum (A,V) er en kongruens, hvis og kun hvis $\hat{f}$ er en ortogonal endomorfi af V.

Bevis. Ifølge definitionen af metrikken i et euklidisk affint rum (side 9.1.3) er f en kongruens, hvis og kun hvis $\|PQ\| = \|f(P)f(Q)\|$ for alle $P,Q \in A$. Idet $f(P)f(Q) = \hat{f}(PQ)$ ses, at f er en kongruens, hvis og kun hvis $\hat{f}$ er en normbevarende endomorfi af V. Dette sidste vides imidlertid at være ensbetydende med, at $\hat{f}$ er ortogonal (sml. side 7.7.1). []

En kongruens f af et euklidisk affint rum (A,V) siges herefter at være *egentlig* hhv. *uegentlig* efter som den tilhørende lineære afbildning f er en egentlig hhv. uegentlig ortogonal endomorfi af V (sml. side 7.7.4). Det ses, at den identiske afbildning af A er en egentlig kongruens, at den inverse til en egentlig hhv. uegentlig kongruens er egentlig hhv. uegentlig, at den sammensatte af to kongruenser af samme art er egentlig, og at den sammensatte af to kongruenser af forskellig art er uegentlig. Specielt noteres, at mængden af egentlige kongruenser af et euklidisk affint rum er en undergruppe af rummets affine gruppe.

Vi skal endelig vise følgende sætning (hvoraf fremgår, at kongruenserne af et euklidisk affint rum netop er de afstandsbevarende afbildninger af rummet ind i sig selv):

Enhver afstandsbevarende afbildning f af et euklidisk affint rum (A,V) ind i sig selv er en affin transformation af A, – og dermed en kongruens.

Bevis. Først bemærkes, at der for vilkårlige vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ i et reelt vektorrum med indre produkt gælder

$$\begin{aligned}\|\underline{u}-\underline{v}\|^2 &= (\underline{u}-\underline{v})\cdot(\underline{u}-\underline{v})\\ &= \|\underline{u}\|^2+\|\underline{v}\|^2-2\underline{u}\cdot\underline{v},\end{aligned}$$

og dermed

(6) $$\underline{u}\cdot\underline{v} = \tfrac{1}{2}(\|\underline{u}\|^2+\|\underline{v}\|^2-\|\underline{u}-\underline{v}\|^2).$$

Lad O,P og Q være punkter i A. Anvendes (6) med $\underline{u} = OP$ og $\underline{v} = OQ$, fås

$$OP\cdot OQ = \tfrac{1}{2}(\mathrm{dist}(O,P)^2+\mathrm{dist}(O,Q)^2-\mathrm{dist}(P,Q)^2),$$

og anvendes (6) med $\underline{u} = f(O)f(P)$ og $\underline{v} = f(O)f(Q)$, fås

$$f(O)f(P)\cdot f(O)f(Q) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{dist}(f(O),f(P))^2+\mathrm{dist}(f(O),f(Q))^2-\mathrm{dist}(f(P),f(Q))^2).$$

Da f er afstandsbevarende, har vi således

(7) $$OP\cdot OQ = f(O)f(P)\cdot f(O)f(Q)$$

for alle $O,P,Q \in A$. Lad nu $(O;\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i A, og lad punkterne $P_1,\ldots,P_n \in A$ være bestemt ved, at $OP_1 = \underline{e}_1,\ldots,OP_n = \underline{e}_n$. Endvidere sættes $\hat{O} = f(O)$ og $\hat{\underline{e}}_1 = \hat{O}f(P_1),\ldots,\hat{\underline{e}}_n = \hat{O}f(P_n)$. Af (7) fremgår da, at også $(\hat{O};\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ er et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i A. Ved anvendelse af (7) fås endvidere, at for ethvert punkt $P \in A$ er punktet $f(P)$'s koordinatsøjle $\hat{\underline{u}}_1$ m.h.t.

det sidste koordinatsystem identisk med P's koordinatsøjle $\underline{\underline{u}}_|$ m.h.t. det første koordinatsystem; vi har nemlig (sml. side 7.1.7)

$$\begin{aligned} u_i &= OP \cdot \underline{e}_i = OP \cdot OP_i \\ &= f(O)f(P) \cdot f(O)f(P_i) \\ &= \hat{O}f(P) \cdot \hat{\underline{e}}_i \\ &= \hat{u}_i\ , \qquad i = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Lad herefter g være den entydigt bestemte affine afbildning af A ind i A med $g(O) = \hat{O}$ $(= f(O))$, hvis tilhørende lineære afbildning $\hat{g} : V \to V$ er den, hvortil der hører matricen $\underline{\underline{E}}_{n,n}$, idet originalvektorer henføres til basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og billedvektorer henføres til basen $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$. Da $\underline{\underline{E}}_{n,n}$ er regulær, er $\hat{g}$ bijektiv (sml. side 4.2.5), og g dermed en affin transformation af A (sml. side 9.4.5). Henføres originalpunkter til koordinatsystemet $(O;\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og billedpunkter til koordinatsystemet $(\hat{O};\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$, får g matrixligningen

$$\underline{\underline{v}}_| = \underline{\underline{o}}_| + \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{u}}_| \ .$$

Sammenholdes dette med det ovenfor beviste fremgår, at $f = g$, hvormed sætningen er bevist. []

Til sidst anføres, at man naturligt kan definere en *isomorfi* af et affint rum på et andet som en bijektiv affin afbildning af det ene rum på det andet. Findes en sådan, siges de to rum at være *isomorfe*. Er talen om to euklidiske affine rum, forlanges yderligere, at den tilhørende lineære afbildning bevarer det indre produkt. I begge tilfælde gælder, at eksistensen af en isomorfi er ensbetydende med, at de to rum har samme dimension.

Bemærkning. I elementære fremstillinger af plan- og rumgeometri er det grundlag, hvorpå teorien udvikles, ofte meget ufuldstændigt. Et tilfredsstillende grundlag *) fås ved at sige, at plan- hhv. rumgeometri er studiet af euklidiske affine rum af dimension 2 hhv. 3. Det skal hertil bemærkes,

- at "planen" hhv. "rummet" (med de egenskaber, som disse begreber tillægges) er euklidiske affine rum af dimension 2 hhv. 3,

- at alle den elementære geometris begreber kan indpasses i den euklidiske affine geometri, og at alle sætninger i den euklidiske affine geometri, som er modstykker til (gyldige) elementærgeometriske sætninger, herved bliver gyldige,

- samt at euklidiske affine rum (som ovenfor anført) er isomorfe, hvis og kun hvis de har samme dimension.

Det pointeres, at det ovenfor angivne grundlag for plan- og rumgeometri ikke er det eneste acceptable. Det er muligt - men omstændeligt - at bringe det i elementære fremstillinger antydede grundlag i orden, hvorefter teorien kan udvikles efter kendte retningslinier.

*) Dog mangler endnu bevis for eksistens af $\mathbb{R}$, og en af den elementære geometri uafhængig indførelse af de trigonometriske funktioner.

9.5. AFFINE FUNKTIONER OG HYPERPLANER.

Legemet $\mathbb{R}$ kan som bekendt opfattes som et 1-dimensionalt reelt vektorrum, og dermed som et affint rum med sig selv som vektorrum og vektorafbildningen $(a,b) \mapsto \vec{ab} = b-a$. Ved en *affin funktion* på et affint rum (A,V) forstås herefter en affin afbildning af (A,V) ind i $\mathbb{R}$, idet $\mathbb{R}$ opfattes som et affint rum således som beskrevet; den tilhørende lineære afbildning er da en linearform på V.

Mængden af affine funktioner på et affint rum (A,V) *er et underrum i vektorrummet* $\mathsf{F}(A,\mathbb{R})$ *af alle afbildninger af* A *ind i* $\mathbb{R}$.

Bevis. Det skal vises, at er f og g affine funktioner på A, og er λ et reelt tal, så er også λf og $f+g$ affine funktioner på A. Lad P og Q være vilkårlige punkter i A; vi har da

$$(1) \qquad \begin{aligned} (\widehat{\lambda f})(\vec{PQ}) &= \lambda\hat{f}(\vec{PQ}) = \lambda \vec{f(P)f(Q)} \\ &= \lambda(f(Q) - f(P)) = \lambda f(Q) - \lambda f(P) \\ &= (\lambda f)(Q) - (\lambda f)(P) \\ &= \vec{(\lambda f)(P)(\lambda f)(Q)} \end{aligned}$$

og

$$(2) \qquad \begin{aligned} (\hat{f}+\hat{g})(\vec{PQ}) &= \hat{f}(\vec{PQ}) + \hat{g}(\vec{PQ}) = \vec{f(P)f(Q)} + \vec{g(P)g(Q)} \\ &= (f(Q) - f(P)) + (g(Q) - g(P)) \end{aligned}$$

$$= (f(Q) + g(Q)) - (f(P) + g(P))$$
$$= (f+g)(Q) - (f+g)(P)$$
$$= (f+g)(P)(f+g)(Q).$$

Af (1) fremgår, at λf er en affin afbildning med $\widehat{\lambda f} = \lambda\hat{f}$, og af (2) fremgår, at $f+g$ er en affin afbildning med $\widehat{f+g} = \hat{f}+\hat{g}$. []

Enhver konstant reel funktion på et affint rum (A,V) er en affin funktion; den tilhørende lineære afbildning er nulformen på V. Omvendt er enhver affin funktion, hvis tilhørende lineære afbildning er nulformen, konstant. For en sådan affin funktion f har vi $f^{-1}(\alpha) = A$ for eet $\alpha \in \mathbb{R}$ og $f^{-1}(\alpha) = \emptyset$ for ethvert andet $\alpha \in \mathbb{R}$. For ikke-konstante affine funktioner har vi:

Lad (A,V) være et affint rum, lad f være en ikke-konstant affin funktion på A, og lad α være et reelt tal. Vi har da:

(3) *Originalmængden $f^{-1}(\alpha)$ er en hyperplan i A.*

(4) *For ethvert $\mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ og ethvert $c \in \mathbb{R}$ gælder $f^{-1}(\alpha) = (\mu f+c)^{-1}(\mu\alpha+c)$.*

(5) *Er g en (ikke-konstant) affin funktion på A og β et reelt tal, således at $f^{-1}(\alpha) = g^{-1}(\beta)$, så findes entydigt bestemte $\mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ og $c \in \mathbb{R}$, således at $g = \mu f + c$ og $\beta = \mu\alpha + c$.*

Bevis. Da f ikke er konstant, er $\hat{f}$ ikke nulformen. Vi har derfor $\hat{f}(V) = \mathbb{R}$, og dermed $f(A) = \mathbb{R}$. Originalmængden $f^{-1}(\alpha)$ er følgelig ikke-tom. Lad P_0 være et punkt i $f^{-1}(\alpha)$; for ethvert punkt $P \in A$ har vi da $\hat{f}(P_0P) = f(P_0)f(P) = f(P) - f(P_0) = f(P) - \alpha$, hvilket viser, at

$$(6) \qquad f^{-1}(\alpha) = \{P \in A \mid P_0P \in K_{\hat{f}}\}.$$

Idet $\dim K_{\hat{f}} = \dim V - \dim \hat{f}(V) = \dim V - 1 = \dim A - 1$, fremgår heraf, at $f^{-1}(\alpha)$ er en hyperplan, – og (3) er bevist. Påstanden (4) er oplagt. Antag herefter, at $f^{-1}(\alpha) = g^{-1}(\beta)$. Lad P_0 være et punkt i $f^{-1}(\alpha)$, og dermed også i $g^{-1}(\beta)$. Vi har da (sml. (6))

$$f^{-1}(\alpha) = \{P \in A \mid P_0P \in K_{\hat{f}}\}$$

og

$$g^{-1}(\beta) = \{P \in A \mid P_0P \in K_{\hat{g}}\}.$$

Heraf fremgår, at $K_{\hat{f}} = K_{\hat{g}}$. Lad U være et til $K_{\hat{f}}$ $(= K_{\hat{g}})$ komplementært (1-dimensionalt) underrum af V, og lad $\underline{u}_0$ være en vektor i $U \setminus \{0\}$. Enhver vektor $\underline{v} \in V$ har da en entydig fremstilling af formen $\underline{v} = \underline{k} + t\underline{u}_0$, hvor $\underline{k} \in K_{\hat{f}} = K_{\hat{g}}$ og $t \in \mathbb{R}$. Dette giver $\hat{f}(\underline{v}) = \hat{f}(\underline{k}) + t\hat{f}(\underline{u}_0) = t\hat{f}(\underline{u}_0)$ og $\hat{g}(\underline{v}) = \hat{g}(\underline{k}) + t\hat{g}(\underline{u}_0) = t\hat{g}(\underline{u}_0)$. Vi sætter nu

$$\mu = \frac{\hat{g}(\underline{u}_0)}{\hat{f}(\underline{u}_0)} \quad ;$$

idet $\underline{u}_0 \notin K_{\hat{f}} = K_{\hat{g}}$, er μ veldefineret og forskellig fra 0. Herefter får vi $\hat{g}(\underline{v}) = t\hat{g}(\underline{u}_0) = t\mu\hat{f}(\underline{u}_0) = \mu(t\hat{f}(\underline{u}_0)) = \mu\hat{f}(\underline{v})$, hvoraf fremgår, at $\hat{g} = \mu\hat{f}$. For et vilkårligt punkt $P \in A$ har vi nu

$$\begin{aligned}\hat{g}(P_0P) &= g(P_0)g(P) = g(P) - g(P_0)\\ &= g(P) - \beta\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}(\mu\hat{f})(P_0P) &= (\mu f)(P_0)(\mu f)(P)\\ &= (\mu f)(P) - (\mu f)(P_0)\\ &= (\mu f)(P) - \mu f(P_0)\\ &= (\mu f)(P) - \mu\alpha,\end{aligned}$$

og dermed, idet vi udnytter, at $\hat{g} = \mu\hat{f}$,

$$(g-\mu f)(P) = \beta - \mu\alpha.$$

Som det søgte μ og c kan herefter bruges det fundne μ og $c = \beta - \mu\alpha$. For at vise entydigheden bemærkes, at $\mu_1 f + c_1 = \mu_1 f + c_2$ implicerer $(\mu_1-\mu_2)f = c_2 - c_1$. Da f er ikke-konstant, følger, at $\mu_1 = \mu_2$, og dermed også, at $c_1 = c_2$. []

Vi skal dernæst vise:

For enhver hyperplan (A_0,V_0) i et affint rum (A,V) findes en (ikke-konstant) affin funktion f på A og et $\alpha \in \mathbb{R}$, således at $A_0 = f^{-1}(\alpha)$.

Bevis. Lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_{n-1})$ være en basis for V_0, og lad $\underline{e}_n$ være en vektor i V, således at sættet $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_{n-1},\underline{e}_n)$ er en basis for V. Lad g være den ved

$$x_1\underline{e}_1+\ldots+x_n\underline{e}_n \mapsto x_n$$

definerede afbildning af V ind i $\mathbb{R}$. Det ses umiddelbart, at g er en linearform på V med V_0 som kerne. Lad P_0 være et punkt i A_0, og lad α være et reelt tal. Der findes da (sml. side 9.4.1) netop een affin funktion f på A med $f(P_0) = \alpha$ og $\hat{f} = g$. Det påstås, at $f^{-1}(\alpha) = A_0$. Er P et punkt i $f^{-1}(\alpha)$, har vi $g(P_0P) = \hat{f}(P_0P) = f(P_0)f(P) = f(P) - f(P_0) = \alpha - \alpha = 0$, altså $P_0P \in V_0$, og dermed $P \in A_0$. Og er P et punkt i A_0, har vi $P_0P \in V_0$, og dermed $0 = g(P_0P) = \hat{f}(P_0P) = f(P_0)f(P) = f(P) - f(P_0) = f(P) - \alpha$, altså $f(P) = \alpha$. []

Ved brug af de to foregående sætninger skal vi herefter vise:

Lad (A,V) være et affint rum, og lad der i A være valgt et affint koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$. Da gælder:

(7) *Mængden af punkter i A, hvis koordinatsæt $(x_1,\ldots,x_n)$ tilfredsstiller en ligning af formen*

(*) $\quad a_1x_1+\ldots+a_nx_n = a_0$,

hvor $(a_1,\ldots,a_n) \neq (0,\ldots,0)$, er en hyperplan i A. (Vi siger, at (*) er en *ligning* for hyperplanen.)

(8) *Er (*) en ligning for en hyperplan A_0 i A, så er også enhver ligning, som fås ved at multiplicere $a_0,a_1,\ldots,a_n$ med samme tal $\mu \neq 0$, en ligning for A_0, og enhver ligning for A_0 kan fås på denne måde.*

(9) *Enhver hyperplan i A har en ligning af formen (*) med* $(a_1,\dots,a_n) \neq (0,\dots,0)$.

Bevis. Betegnes med f den ikke-konstante affine funktion på A, som har matrixligningen

$$(v_1) = (0) + (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix},$$

så er mængden af punkter i A, hvis koordinatsæt tilfredsstiller (*), identisk med $f^{-1}(a_0)$; (7) følger derfor af (3). Den første påstand i (8) er oplagt (men følger i øvrigt også af (4)). Har A_0 foruden (*) også ligningen

$$b_1x_1+\dots+b_nx_n = b_0,$$

og betegnes med g den affine funktion på A, som har matrixligningen

$$(v_1) = (0) + (b_1 \dots b_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix},$$

så har vi $f^{-1}(a_0) = g^{-1}(b_0)$ $(= A_0)$. Af (5) følger derfor, at der findes reelle tal $\mu \neq 0$ og c, således at $g = \mu f + c$ og $b_0 = \mu a_0 + c$. Idet $f(0) = g(0) = 0$, har vi $c = 0$, og dermed $g = \mu f$ og $b_0 = \mu a_0$. Idet $g = \mu f$ implicerer $(b_1,\dots,b_n) = \mu(a_1,\dots,a_n)$, følger den anden påstand i (8) heraf. Endelig bemærkes, at ifølge den foregående sætning er enhver hyperplan A_0 af formen $f^{-1}(\alpha)$, hvor f er en ikke-konstant affin funktion. Har f matrixligningen

$$(v_1) = (c_1) + (c_{11}\dots c_{1n})\begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix},$$

så er $c_{11}x_1+\dots+c_{1n}x_n = \alpha - c_1$ en ligning for A_0. []

Vi skal til sidst vise:

Lad (A,V) være et euklidisk affint rum, lad $(O;\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ være et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i A, og lad (A_0,V_0) være en hyperplan i A med ligningen

(9) $$a_1x_1+\dots+a_nx_n = a_0 .$$

Vektoren $\underline{v} \in V$ med koordinatsættet $(a_1,\dots,a_n)$ m.h.t. basen $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ er da en normalvektor for A_0.

Bevis. Det skal vises, at $\underline{v}\cdot\underline{u} = 0$ for enhver vektor $\underline{u} \in V_0$. Lad $\underline{u}$ være en vektor i V_0, lad P og Q være punkter i A_0 med $\underline{u} = PQ$, og lad $(y_1,\dots,y_n)$ hhv. $(z_1,\dots,z_n)$ være koordinatsættet for P hhv. Q. Idet $PQ = PO + OQ = OQ - OP$, har PQ koordinatsættet $(z_1-y_1,\dots,z_n-y_n)$, og vi får følgelig

$$\underline{v}\cdot\underline{u} = a_1(z_1-y_1)+\dots+a_n(z_n-y_n).$$

Påstanden følger da af, at både $(y_1,\dots,y_n)$ og $(z_1,\dots,z_n)$ tilfredsstiller (9). []

9.6. KONVEKSE MÆNGDER.

Lad P_0 og P_1 være to forskellige punkter i et affint rum (A,V). Det af $\{P_0,P_1\}$ frembragte affine underrum er da 1-dimensionalt, altså en linie (sml. side 9.3.2). Denne linie er identisk med mængden af punkter i A, som er affine kombinationer af P_0 og P_1 (sml. side 9.3.5), altså med mængden af punkter P af formen $P = (1-t)P_0 + tP_1$, $t \in \mathbb{R}$. Vi sætter nu

$$[P_0,P_1] = \{P \in A \mid \exists t \in [0,1] : P = (1-t)P_0+tP_1\}.$$

Mængden $[P_0,P_1]$ kaldes et *liniestykke*, og punkterne P_0 og P_1 kaldes liniestykkets *endepunkter*. Endvidere sætter vi $[P_0,P_0] = \{P_0\}$. En delmængde K af A siges herefter at være *konveks*, dersom det for vilkårlige punkter $P_0,P_1 \in K$ gælder, at $[P_0,P_1] \subseteq K$. Det noteres, at den tomme mængde, enhver mængde bestående af eet punkt og ethvert affint underrum (herunder A) er en konveks mængde. Af definitionen fremgår umiddelbart:

Er K_i, $i \in I$, konvekse delmængder af et affint rum (A,V), så er også fællesmængden $\cap K_i$ konveks.

Af sætningen følger specielt, at for enhver delmængde M af A er fællesmængden af alle konvekse mængder, som indeholder M, en konveks mængde, som indeholder M. Denne konvekse mængde kaldes M's *konvekse hylster* (eller den af M *udspændte* eller *frembragte* konvekse mængde), og betegnes conv$M$.

Et punkt P i et affint rum (A,V) siges at være en *konveks kombination* af punkterne $P_0,\dots,P_r \in A$ med koefficienterne $\lambda_0,\dots,\lambda_r \in \mathbb{R}$, dersom P er en affin kombination af $P_0,\dots,P_r$ med koefficienterne $\lambda_0,\dots,\lambda_r$, og alle koefficienterne $\lambda_0,\dots,\lambda_r$ er $\geqq 0$.

Lad K være en konveks delmængde af et affint rum (A,V). Ethvert punkt $P \in A$, som er konveks kombination af punkter $P_0,\dots,P_r \in K$, tilhører da K.

Bevis. Beviset føres ved induktion efter r. For $r = 0$ er påstanden triviel, for $r = 1$ følger den af definitionen af konveksitet. Lad der for r være $\geqq 2$, antag, at ethvert punkt, som er konveks kombination af højst r punkter fra K, tilhører K, og lad

(1) $$P = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i$$

være en konveks kombination af punkter $P_0,\dots,P_r \in K$. Sæt

$$\mu = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i \ .$$

Vi har da $\mu \geqq 0$ og $\mu + \lambda_r = 1$. For $\mu = 0$ reduceres (1) til $P = 1P_r$, og der er intet at vise. For $\mu > 0$ har vi

$$\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_i}{\mu} = 1$$

og

$$\frac{\lambda_i}{\mu} \geqq 0, \qquad i = 0,\dots,r-1.$$

Sæt

$$Q = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_i}{\mu} P_i \ .$$

Ifølge induktionsantagelsen har vi da $Q \in K$. Da K er konveks, følger, at vi også har $\mu Q + (1-\mu)P_r \in K$. Men for et vilkårligt punkt $O \in A$ har vi

$$\begin{aligned}\mu OQ + (1-\mu)OP_r &= \mu OQ + \lambda_r OP_r \\ &= \mu \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_i}{\mu} OP_i + \lambda_r OP_r \\ &= \sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i \\ &= OP,\end{aligned}$$

altså $\mu Q + (1-\mu)P_r = P$, hvormed $P \in K$. []

For enhver delmængde M af et affint rum (A,V) er conv$M$ *identisk med mængden af punkter i A, som er konvekse kombinationer af punkter i M.*

Bevis. Lad M' være mængden af punkter i A, som er konvekse kombinationer af punkter i M. Vi skal da vise, at $M' =$ conv$M$. Idet conv$M$ er en konveks mængde, som indeholder M, fremgår af den foregående sætning, at $M' \subseteq$ conv$M$. For at vise den modsatte inklusion vises, at M' indeholder M og er konveks. Det første er oplagt. Lad derfor

$$P = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i \ , \qquad Q = \sum_{j=0}^{s} \mu_j Q_j$$

være punkter i M', - hvor altså punkterne P_i og Q_j alle tilhører M, tallene λ_i og μ_j alle er ≥ 0, og såvel λ_i'erne som

μ_j'erne har sum 1. Det skal da vises, at $(1-t)P + tQ \in M'$ for ethvert $t \in [0,1]$. For et vilkårligt punkt $O \in A$ har vi

$$(1-t)OP + tOQ = (1-t)\sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i + t\sum_{j=0}^{s} \mu_j OQ_j$$
$$= \sum_{i=0}^{r} (1-t)\lambda_i OP_i + \sum_{j=0}^{s} t\mu_j OQ_j .$$

Idet tallene $(1-t)\lambda_i$ og $t\mu_j$ alle er ≥ 0 og har sum 1, ses, at punktet $(1-t)P + tQ$ er en konveks kombination af punkterne $P_0,\ldots,P_r, Q_0,\ldots,Q_j \in M$ med koefficienterne $(1-t)\lambda_0,\ldots,(1-t)\lambda_r, t\mu_0,\ldots,t\mu_s$, og dermed er et punkt i M'. []

Vi skal skærpe den foregående sætning til *Carathéodory's sætning*

For enhver delmængde M af et affint rum (A,V) er conv$M$ *identisk med mængden af punkter i A, som er konvekse kombinationer af punkter i affint uafhængige sæt af punkter i M.*

Bevis. Det er tilstrækkeligt at vise, at hvis et punkt $P \in A$ er en konveks kombination af $r+1$ punkter $P_0,\ldots,P_r \in M$ med koefficienter $\lambda_0,\ldots,\lambda_r$, således at sættet $(P_0,\ldots,P_r)$ er affint afhængigt, så kan P fremstilles som konveks kombination af r af punkterne $P_0,\ldots,P_r$. Når sættet $(P_0,\ldots,P_r)$ er affint afhængigt, findes $\mu_0,\ldots,\mu_r \in \mathbb{R}$, som ikke alle er 0, men som har sum 0, således at der for et vilkårligt punkt $O \in A$ gælder

$$\sum_{i=0}^{r} \mu_i OP_i = \underline{o}.$$

Mindst een af koefficienterne μ_i er > 0, og mængden

$$B = \left\{\frac{\lambda_i}{\mu_i} \;\middle|\; \mu_i > 0\right\}$$

er derfor ikke-tom. Uden indskrænkning kan antages, at $\frac{\lambda_r}{\mu_r} \in B$ og at $\frac{\lambda_r}{\mu_r} \leqq \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ for ethvert $\frac{\lambda_i}{\mu_i} \in B$. Vi har da

$$\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r}\mu_i \geqq 0, \qquad i = 0,\ldots,r-1.$$

Endvidere har vi

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{r-1}\left(\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r}\mu_i\right) &= \sum_{i=0}^{r-1}\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r}\sum_{i=0}^{r-1}\mu_i \\ &= (1-\lambda_r) - \frac{\lambda_r}{\mu_r}(-\mu_r) \\ &= 1\end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{r-1}\left(\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r}\mu_i\right)OP_i &= \sum_{i=0}^{r-1}\lambda_i OP_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r}\sum_{i=0}^{r-1}\mu_i OP_i \\ &= (OP-\lambda_r OP_r) - \frac{\lambda_r}{\mu_r}(-\mu_r OP_r) \\ &= OP.\end{aligned}$$

Punktet P er altså en konveks kombination af $P_0,\ldots,P_{r-1}$ med koefficienterne $\lambda_0 - \frac{\lambda_r}{\mu_r}\mu_0,\ldots,\lambda_{r-1} - \frac{\lambda_r}{\mu_r}\mu_{r-1}$. Hermed er sætningen bevist. []

Som bekendt har et affint rum (A,V) dimension n, hvis og kun hvis $n+1$ er det maksimale antal punkter i noget affint uafhængigt sæt af punkter i A (sml. side 9.3.2). Af det foregående fremgår derfor:

For enhver delmængde M af et n-dimensionalt affint rum (A,V) er conv$M$ *identisk med mængden af punkter i A, som er konvekse kombinationer af højst $n+1$ punkter i M.*

Ved et *simpleks* i et affint rum (A,V) forstås en mængde af formen conv$\{P_0,\ldots,P_r\}$, hvor $(P_0,\ldots,P_r)$ er et affint uafhængigt sæt. Punkterne $P_0,\ldots,P_r$ kaldes da for simpleksets *hjørner*. Et simpleks med $r+1$ hjørner kaldes også et *r-simpleks* eller et *r-dimensionalt simpleks*. Et 0-simpleks er en mængde indeholdende eet punkt, et 1-simpleks er et liniestykke. Et 2-simpleks kaldes en *trekant*, et 3-simpleks kaldes et *tetraeder*.

Ethvert punkt P i et simpleks med hjørner $P_0,\ldots,P_r$ har en og kun een fremstilling som konveks kombination af simpleksets hjørner (sml. side 9.6.3 og 9.3.3). Det tilhørende koefficientsæt $(\lambda_0,\ldots,\lambda_r)$ kaldes punktets P's *barycentriske koordinatsæt* (m.h.t. sættet $(P_0,\ldots,P_r)$ af hjørner).

Efter indførelse af begrebet simpleks kan Carathéodory's sætning også formuleres således:

For enhver delmængde M af et affint rum (A,V) er conv$M$ *identisk med foreningsmængden af alle simplekser, hvis hjørner tilhører M.*

Med henblik på en anvendelse nedenfor viser vi dernæst:

Lad $(P_0,\ldots,P_r)$ *være et sæt bestående af mindst* $n+2$ *punkter i et n-dimensionalt affint rum* (A,V). *Der findes da komplementære delmængder* I_1 *og* I_2 *af* $I = \{0,\ldots,r\}$, *således at mængderne* $\text{conv}\{P_i \mid i \in I_1\}$ *og* $\text{conv}\{P_i \mid i \in I_2\}$ *har mindst et punkt fælles.*

Bevis. Af det givne følger, at sættet $(P_0,\ldots,P_r)$ er affint afhængigt. Der findes derfor $\lambda_0,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$, som ikke alle er 0, men som har sum 0, således at

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i OP_i = \underline{o}$$

for et vilkårligt punkt $O \in A$. Sæt $I_1 = \{i \in I \mid \lambda_i \geqq 0\}$ og $I_2 = \{i \in I \mid \lambda_i < 0\}$. Vi har da

$$\sum_{i\in I_1} \lambda_i OP_i = \sum_{i\in I_2} (-\lambda_i) OP_i,$$

hvor såvel alle koefficienter λ_i på venstre side som alle koefficienter $-\lambda_i$ på højre side er $\geqq 0$. Sættes

$$\sum_{i\in I_1} \lambda_i = \mu,$$

har vi også

$$\sum_{i\in I_2} (-\lambda_i) = \mu$$

og $\mu > 0$. Vi får da

$$\sum_{i\in I_1} \frac{\lambda_i}{\mu} OP_i = \sum_{i\in I_2} \frac{-\lambda_i}{\mu} OP_i ,$$

altså

$$\sum_{i\in I_1} \frac{\lambda_i}{\mu} P_i = \sum_{i\in I_2} \frac{-\lambda_i}{\mu} P_i .$$

Dette punkt vil da tilhøre både $\mathrm{conv}\{P_i | i \in I_1\}$ og $\mathrm{conv}\{P_i | i \in I_2\}$. []

Vi kan nu vise *Helly's sætning*:

Lad der i et n-dimensionalt affint rum (A,V) være givet mindst $n+1$ konvekse mængder $K_0,\dots,K_r$. Hvis vilkårlige $n+1$ af mængderne K_i har en ikke-tom fællesmængde, så har de alle en ikke-tom fællesmængde.

Bevis. Beviset føres ved induktion efter r. For $r = n$ er påstanden triviel. Antag derfor, at $r > n$, og at sætningen gælder for r eller færre konvekse mængder. Lad $K_0,\dots,K_r$ være $r+1$ konvekse mængder, hvoraf vilkårlige $n+1$ har en ikke-tom fællesmængde. For hvert $i \in \{0,\dots,r\}$ har da specielt vilkårlige $n+1$ af mængderne $K_0,\dots,K_{i-1}, K_{i+1},\dots,K_r$ en ikke-tom fællesmængde. Ved brug af induktionsantagelsen sluttes da, at $K_0 \cap \dots \cap K_{i-1} \cap K_{i+1} \cap \dots \cap K_r$ er ikke-tom; lad P_i være et punkt i mængden. Ifølge den foregående sætning findes herefter komplementære delmængder I_1 og I_2 af $\{0,\dots,r\}$, således at mængderne $\mathrm{conv}\{P_i | i \in I_1\}$ og $\mathrm{conv}\{P_i | i \in I_2\}$ har (mindst) et punkt Q fælles. For ethvert $i \in \{0,\dots,r\}$ har vi nu $P_0,\dots,P_{i-1}, P_{i+1},\dots,P_r \in K_i$, og dermed enten $\mathrm{conv}\{P_i | i \in I_1\} \subseteq K_i$ eller $\mathrm{conv}\{P_i | i \in I_2\} \subseteq K_i$. Heraf følger, at $Q \in K_i$. Punktet Q tilhører altså alle mængderne $K_0,\dots,K_r$, og fællesmængden $K_0 \cap \dots \cap K_r$ er følgelig ikke-tom. []

9.7. KVADRIKKER.

Lad (A,V) være et euklidisk affint rum af dimension $n \geqq 2$. Lad der videre være givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ i A samt et reelt anden grads polynomium i n variable,

(1) $$F(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leqq i\leqq j\leqq n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} c_ix_i + d.$$

Vi skal betragte mængden K af punkter i A, hvis koordinatsæt $(x_1,\dots,x_n)$ m.h.t. det givne koordinatsystem tilfredsstiller ligningen

(2) $$F(x_1,\dots,x_n) = 0.$$

En sådan mængde K kaldes en *kvadrik* i A; den siges at have ligningen (2) i det givne koordinatsystem.

Ved overgang til et nyt sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(\hat{O};\hat{\underline{e}}_1,\dots,\hat{\underline{e}}_n)$ kan de gamle koordinater $x_1,\dots,x_n$ til et punkt P udtrykkes som første grads polynomier i de nye koordinater $\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n$ for P, (sml. side 9.1.4). Indsættes disse udtryk for $x_1,\dots,x_n$ i $F(x_1,\dots,x_n)$, fås et polynomium $\hat{F}_1(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n)$ af højst anden grad. Lad K_1 betegne mængden af punkter i A, hvis nye koordinater $\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n$ tilfredsstiller ligningen

$$F_1(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n) = 0.$$

Det er da klart, at $K \subseteq K_1$. Det påstås, at $K = K_1$. For at indse dette bemærkes, at det også er muligt at udtrykke de nye koordinater $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n$ som første grads polynomier i de gamle koordinater $x_1,\ldots,x_n$, og at man ved indsættelse af disse udtryk for $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n$ i $F_1(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n)$ får $F(x_1,\ldots,x_n)$. Heraf følger, at $K_1 \subseteq K$, hvormed påstanden er bevist. Vi sammenfatter:

Lad der i et euklidisk affint rum (A,V) af dimension $n \geqq 2$ være givet to sædvanlige retvinklede koordinatsystemer, kaldet det gamle og det nye. Lad K være en kvadrik i A med ligningen $F(x_1,\ldots,x_n) = 0$ i det gamle koordinatsystem. Indsættes i denne ligning de gamle koordinater $x_1,\ldots,x_n$ udtrykt som første grads polynomier i de nye koordinater $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n$, fås en ligning for K i det nye koordinatsystem.

Ved udnyttelse af teorien for kvadratiske former skal vi herefter vise følgende:

Lad K være en kvadrik i et euklidisk affint rum (A,V) af dimension $n \geqq 2$. Der findes da et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i A m.h.t. hvilket K har en ligning af en af følgende tre normalformer, hvor $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, γ og δ alle er $\neq 0$:

(C) $$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 + \delta = 0.$$

(P) $$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 + \gamma x_{r+1} = 0.$$

(K) $$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 = 0.$$

Bevis. Lad K have ligningen (2) m.h.t. et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$. Ved

$$x_1\underline{e}_1+\dots+x_n\underline{e}_n \mapsto \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij}x_ix_j$$

er da bestemt en kvadratisk form K_B på V. (Matricen $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})$ for den tilhørende symmetriske bilinearform B er bestemt ved, at $b_{ii} = a_{ii}$ for $i = 1,\dots,n$ og $b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}a_{ij}$ for $1 \leq i < j \leq n$.) Ifølge en tidligere sætning (side 8.3.1) findes da en ortonormal basis $(\hat{\underline{e}}_1,\dots,\hat{\underline{e}}_n)$ i V m.h.t. hvilken K_B antager normalform,

$$K_B(x_1\hat{\underline{e}}_1+\dots+x_n\hat{\underline{e}}_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2,$$

(hvor koefficienterne α_i er de karakteristiske rødder for $\underline{\underline{B}}$.) Uden indskrænkning kan antages, at $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ er de fra 0 forskellige koefficienter. M.h.t. koordinatsystemet $(O;\hat{\underline{e}}_1,\dots,\hat{\underline{e}}_n)$ har K da en ligning af formen

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i x_i + \hat{d} = 0,$$

hvilket kan omskrives til

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\left(x_i + \frac{\hat{c}_i}{2\alpha_i}\right)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} \hat{c}_i x_i + \hat{d}_1 = 0,$$

hvor $\hat{d}_1 = \hat{d} - \sum_{i=1}^{r} \hat{c}_i^{\,2}(4\alpha_i)^{-1}$.

Er nu $r = n$, eller $r < n$ og $\hat{c}_{r+1} = \dots = \hat{c}_n = 0$, betegnes med $\hat{O}$ det punkt, som m.h.t. koordinatsystemet $(O;\hat{\underline{e}}_1,\dots,\hat{\underline{e}}_n)$ har koordinatsættet

$$\left(-\frac{\hat{c}_1}{2\alpha_1},\ldots,-\frac{\hat{c}_r}{2\alpha_r},\ 0,\ldots,0\right).$$

M.h.t. koordinatsystemet $(\hat{O};\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_n)$ vil K da have ligningen

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i^2 + \hat{d}_1 = 0,$$

altså en ligning af formen (C) eller (K).

Er derimod $r < n$ og $\hat{c}_i \neq 0$ for mindst eet $i \geq r+1$, vælges et nyt sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(\hat{O};\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_r,\ \tilde{\underline{e}}_{r+1},\ldots,\tilde{\underline{e}}_n)$ på følgende måde. Vi sætter

$$c = \left(\sum_{i=r+1}^{n}\hat{c}_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

og

$$\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\hat{c}_i}{c}\,\hat{\underline{e}}_i = \tilde{\underline{e}}_{r+1}\ .$$

Sættet $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_r,\tilde{\underline{e}}_{r+1})$ er da ortonormalt, og kan derfor suppleres til en ortonormal basis $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_r,\ \tilde{\underline{e}}_{r+1},\ldots,\tilde{\underline{e}}_n)$ for V. Koordinattransfomrationsmatricen $\underline{\underline{S}}$ hørende til overgangen fra basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ til basen $(\hat{\underline{e}}_1,\ldots,\hat{\underline{e}}_r,\ \tilde{\underline{e}}_{r+1},\ldots,\tilde{\underline{e}}_n)$ er ortogonal, og den j'te søjle i $\underline{\underline{S}}^{-1}$ er koordinatsøjlen for den nye j'te basisvektor m.h.t. den gamle basis. Af det første følger, at $\underline{\underline{S}} = (\underline{\underline{S}}^{-1})'$, og ved brug af det andet følger derefter, at $\underline{\underline{S}}$ har formen

$$\begin{pmatrix}\underline{\underline{E}}_{r,r} & \underline{\underline{O}}_{r,n-r}\\ \underline{\underline{O}}_{n-r,r} & \underline{\underline{T}}_{n-r,n-r}\end{pmatrix},$$

hvor den første række i $\underline{\underline{T}}_{n-r,n-r}$ er

$$\left(\frac{\hat{c}_{r+1}}{c} \;\cdots\; \frac{\hat{c}_n}{c}\right).$$

Heraf fremgår, at K i koordinatsystemet $(O;\underline{\hat{e}}_1,\ldots,\underline{\hat{e}}_r,\underline{\tilde{e}}_{r+1},\ldots,\underline{\tilde{e}}_n)$ har ligningen

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\left(x_i+\frac{\hat{c}_i}{2\alpha_i}\right)^2 + cx_{r+1} + \hat{d}_1 = 0,$$

hvilket kan omskrives til

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\left(x_i+\frac{\hat{c}_i}{2\alpha_i}\right)^2 + c\left(x_{r+1} + \frac{\hat{d}_1}{c}\right) = 0.$$

Betegnes derfor med $\hat{O}$ det punkt, som m.h.t. koordinatsystemet $(O;\underline{\hat{e}}_1,\ldots,\underline{\hat{e}}_r,\underline{\tilde{e}}_{r+1},\ldots,\underline{\tilde{e}}_n)$ har koordinatsættet

$$\left(-\frac{\hat{c}_1}{2\alpha_1},\ldots,-\frac{\hat{c}_r}{2\alpha_r},\ -\frac{\hat{d}_1}{c},\ 0,\ldots,0\right),$$

har K i koordinatsystemet $(\hat{O};\underline{\hat{e}}_1,\ldots,\underline{\hat{e}}_r,\underline{\tilde{e}}_{r+1},\ldots,\underline{\tilde{e}}_n)$ ligningen

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i^2 + cx_{r+1} = 0,$$

altså en ligning af formen (p). []

Et punkt P siges at være et *centrum* for en kvadrik K, dersom det for ethvert punkt $Q_1 \in K$ gælder, at også det ved $\vec{PQ_2} = -\vec{PQ_1}$ bestemte punkt Q_2 tilhører K.

En kvadrik K kan ikke både have et centrum, som tilhører K, og et centrum, som ikke tilhører K.

Bevis. Lad K have ligningen (2) m.h.t. et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Antag, at punkterne $P_0 \in K$ og $P_1 \notin K$ med koordinatsættene $(y_1,\ldots,y_n)$ hhv. $(y_1+z_1,\ldots,y_n+z_n)$ begge er centrer for K. Punktet P_2 med koordinatsættet $(y_1+2z_1,\ldots,y_n+2z_n)$ vil da tilhøre K, idet $P_0 \in K$ og P_1 er et centrum. Da P_0 er et centrum, sluttes dernæst, at også punktet P_{-2} med koordinatsættet $(y_1-2z_1,\ldots,y_n-2z_n)$ tilhører K. Heraf fås ialt, at polynomiet

$$p(t) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \alpha_{ij}(y_i+tz_i)(y_j+tz_j) + \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i+tz_i) + d$$

har tre rødder, nemlig $-2,0$ og 2, og følgelig er nulpolynomiet. Men heraf følger videre, at hele linien bestemt ved P_0 og P_1 er indeholdt i K, i strid med, at $P_1 \notin K$. []

En kvadrik K, som har en ligning af normalformen (P), *har intet centrum.*

Bevis. Antag, at punktet P med koordinatsættet $(y_1,\ldots,y_n)$ er et centrum. Lad z_r være et vilkårligt reelt tal. Det er da oplagt muligt at bestemme et reelt tal z_{r+1}, således at punktet Q_1 med koordinatsættet $(y_1,\ldots,y_{r-1},y_r+z_r,y_{r+1}+z_{r+1},y_{r+2},\ldots,y_n)$ tilhører K. Da P er et centrum, vil også punktet Q_2 med koordinatsættet $(y_1,\ldots,y_{r-1},y_r-z_r,y_{r+1}-z_{r+1},y_{r+2},\ldots,y_n)$ tilhører K. Vi har derfor

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i^2 + \alpha_r z_r^2 + 2\alpha_r y_r z_r + \gamma(y_{r+1} + z_{r+1}) = 0$$

og

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i^2 + \alpha_r z_r^2 - 2\alpha_r y_r z_r + \gamma(y_{r+1} - z_{r+1}) = 0.$$

Heraf følger, at

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i^2 + \alpha_r z_r^2 + \gamma y_{r+1} = 0.$$

Idet z_r er valgt vilkårligt, og $\alpha_r \neq 0$, giver dette en modstrid. □

Det bemærkes nu, at hvis en kvadrik har en ligning af formen (K) hhv. (C), så har den et centrum, som tilhører hhv. ikke tilhører kvadrikken, nemlig begyndelsespunktet. Af de to foregående sætninger fremgår derfor følgende:

En kvadrik har en ligning af formen (C), hvis og kun hvis den har mindst et centrum og intet centrum tilhører kvadrikken. - Sådanne kvadrikker kaldes (egentlige) *centrumskvadrikker.*

En kvadrik har en ligning af formen (P), hvis og kun hvis den intet centrum har. - Sådanne kvadrikker kaldes *parabolske kvadrikker.*

En kvadrik har en ligning af formen (K), hvis og kun hvis den har mindst et centrum og ethvert centrum tilhører kvadrikken. - Sådanne kvadrikker kaldes *keglekvadrikker.*

Vi skal til sidst give en skematisk oversigt over kvadrikkerne i euklidisk affine rum af dimension 2 ("keglesnit") og dimension 3 ("keglesnitsflader"). Vi skal her omskrive ligningerne til de gængse former.

KEGLESNIT.

Centrumskvadrikker:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Ellipse
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Hyperbel
$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\emptyset$
$\frac{x^2}{a^2}=1$	To parallelle linier
$-\frac{x^2}{a^2}=1$	$\emptyset$

Parabolske kvadrikker:

$x^2=py$	Parabel

Keglekvadrikker:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Punkt
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	To skærende linier
$\frac{x^2}{a^2}=0$	Linie

KEGLESNITSFLADER.

Centrumskvadrikker:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Ellipsoide
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Hyperboloide med *1* net
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Hyperboloide med *2* net
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Elliptisk cylinder
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hyperbolsk cylinder
$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\emptyset$
$\frac{x^2}{a^2} = 1$	To parallelle planer
$-\frac{x^2}{a^2} = 1$	$\emptyset$

Parabolske kvadrikker:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$	Elliptisk paraboloide
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$	Hyperbolsk paraboloide
$x^2 = py$	Parabolsk cylinder

Keglekvadrikker:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Punkt
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Keglesnitskegle
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Linie
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	To skærende planer
$\frac{x^2}{a^2} = 0$	Plan

1. Vis, at hvis to parallelle affine underrum af et affint rum har en ikke-tom fællesmængde, så er det ene indeholdt i det andet.

2. Vis, at to komplementære affine underrum af et affint rum har netop eet punkt fælles.

3. Lad M være en ikke-tom delmængde af et affint rum (A,V). Vis, at M er et affint underrum, hvis og kun hvis enhver linie i A, hvis fællesmængde med M indeholder mindst to punkter, er indeholdt i M.

4. Lad (A_1,V_1) og (A_2,V_2) være affine underrum af et affint rum (A,V). Vis, at hvis A_1 og A_2 har en ikke-tom fællesmængde, så gælder

   (*) $\dim \operatorname{aff}(A_1 \cup A_2) = \dim A_1 + \dim A_2 - \dim(A_1 \cap A_2)$.

   Vis dernæst, at hvis A_1 og A_2 er disjunkte, så gælder

   $$\dim \operatorname{aff}(A_1 \cup A_2) = \dim A_1 + \dim A_2 - \dim(V_1 \cap V_2) + 1.$$

   (Vink: Anvend (*) på A_1 og $\operatorname{aff}(\{P\} \cup A_2)$, hvor $P \in A_1$.)

5. Lad $(P_0,\ldots,P_r)$ være et sæt af $r+1$ punkter fra et affint rum. Vis, at $\dim \operatorname{aff}\{P_0,\ldots,P_r\} \leq r$, og at der gælder lighedstegn, hvis og kun hvis sættet er affint uafhængigt.

6. Lad (A,V) være et affint rum af dimension 4, og lad der i A være valgt et affint koordinatsystem. Lad $P_0 : (0,1,0,0)$, $P_1 : (2,1,0,-1)$, $P_2 : (1,1,1,1)$, $P_3 : (1,1,-3,-5)$, $P_4 : (-1,1,9,14)$ være punkter i A med de angivne koordinatsæt. Vis, at $\mathrm{aff}\{P_0,\ldots,P_4\}$ er en plan. Bestem et affint uafhængigt delsæt (P_0',P_1',P_2'), og fremstil de øvrige punkter i sættet som affine kombinationer af punkterne P_0',P_1' og P_2'.

7. Lad (A,V) være et affint rum af dimension $n \geqq 1$. Er der valgt en orientering i V (sml. 5 øv. 1), siges (A,V) at være *orienteret*. Er (A,V) orienteret, siges et affint uafhængigt sæt $(P_0,\ldots,P_n)$ af $n+1$ punkter fra A at være positivt eller negativt efter som basen $(P_0P_1,\ldots,P_0P_n)$ er positiv eller negativ.
Uafhængigt af valg af orientering siges to affint uafhængige $(n+1)$-sæt $(P_0,\ldots,P_n)$ og $(Q_0,\ldots,Q_n)$ af punkter fra A at være ens eller modsat orienterede efter som baserne $(P_0P_1,\ldots,P_0P_n)$ og $(Q_0Q_1,\ldots,Q_0Q_2)$ er ens eller modsat orienterede (sml. 5 øv. 1). Vis, at hvis $(P_0,\ldots,P_n)$ er et affint uafhængigt sæt, og $p \in S_{n+1}$, så er sættene $(P_0,\ldots,P_n)$ og $(P_{p(0)},\ldots,P_{p(n)})$ ens eller modsat orienterede efter som p er en lige eller ulige permutation.

8. Lad V være et (endelig-dimensionalt reelt) vektorrum, som på den naturlige måde er organiseret som affint rum. For vektorer $\underline{v}_0,\ldots,\underline{v}_r$ og skalarer $\lambda_0,\ldots,\lambda_r$ med sum 1 kan $\lambda_0\underline{v}_0+\ldots+\lambda_r\underline{v}_r$ på to måder fortolkes som et punkt i V. Overvej, at der ved de to fortolkninger bestemmes samme punkt.

9. Bevis sætningerne side 9.4.5.

10. Vis, at hvis mængden af fixpunkter for en affin afbildning af et affint rum (A,V) ind i sig selv er ikke-tom, så er den et affint underrum af A.

11. Lad (A,V) være et 3-dimensionalt affint rum, og lad der i A være valgt et affint koordinatsystem. Lad P_i og Q_i, $i = 0,1,2,3,4$, være punkter i A med koordinatsæt som følger: P_0 : $(1,0,0)$, P_1 : $(1,1,0)$, P_2 : $(1,0,1)$, P_3 : $(0,1,1)$, P_4 : $(1,1,1)$, Q_0 : $(0,0,1)$, Q_1 : $(2,0,1)$, Q_2 : $(2,0,1)$, Q_3 : $(0,0,3)$, Q_4 : $(4,0,1)$. Vis, at der findes en og kun een affin afbildning $f : A \to A$ med $f(P_i) = Q_i$ for $i = 0,1,2,3,4$. Angiv matrixligningen for f. Angiv en parameterfremstilling for $f(A)$. Bestem mængden af fixpunkter.

12. Lad (A,V) være et 2-dimensionalt affint rum, lad (A_1,V_1) være et 1-dimensionalt affint underrum af A, og lad P_0 og Q_0 være forskellige punkter i $A \setminus A_1$. Vis, at der findes en og kun een affin afbildning $f : A \to A$ med $f(P) = P$ for alle $P \in A_1$, og $f(P_0) = Q_0$. Afbildningen kaldes en *affinitet* med linien A_1 som akse. Tegn en figur, og konstruer for et vilkårligt punkt billedpunktet $f(P)$.

13. Lad (A_1,V_1) være et affint underrum af et affint rum (A,V), og lad V_2 være et til V_1 komplementært underrum af V. Vis, at der for ethvert punkt $P \in A$ findes et og kun eet punkt $P_1 \in A_1$, således at $PP_1 \in V_2$. Vis, at afbildningen $P \mapsto P_1$ er en affin afbildning af A ind i A; den kaldes *projektionen* på A_1 med retningen V_2. Lad videre P_2 være det punkt, som fremkommer ved afsætning af PP_1 fra P_1. Vis, at afbildningen $P \mapsto P_2$ er en affin afbildning af A på A; den kaldes *spejlingen* i A_1 med retningen V_2.

14. Lad (A,V) være et 2-dimensionalt euklidisk affint rum, og lad f være en egentlig kongruens af A med mindst eet fixpunkt. Begrund, at der findes et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ i A m.h.t. hvilket f's matrixligning får formen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

hvor $\alpha \in [0,2\pi[$. Vis, at hvis f er forskellig fra den identiske afbildning, så er O eneste fixpunkt. Udregn for et vilkårligt punkt $P \neq O$ vinklen mellem OP og $Of(P)$. Lad P_1 og P_2 være bestemt ved $OP_1 = \underline{e}_1$ og $OP_2 = \underline{e}_2$, og lad der i A være valgt den orientering, hvorved (O,P_1,P_2) bliver et positivt sæt (sml. øv. 7). Begrund, at f kan kaldes *drejningen* α om punktet O i positiv retning, og drejningen $-\alpha$ om punktet O i negativ retning.

15. Vis, at enhver egentlig kongruens af et 2-dimensionalt euklidisk affint rum er en drejning om et punkt (sml. øv. 14) eller en translation. (Den identiske afbildning er både en drejning og en translation.)

16. Lad f være en uegentlig kongruens med mindst et fixpunkt af et 2-dimensionalt euklidisk affint rum (A,V). Begrund, at der findes et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ m.h.t. hvilket f's matrixligning får formen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Bestem mængden af fixpunkter. Vis, at f er spejlingen i en linie (A_1,V_1) med retningen $V_1^{\perp}$ (sml. øv. 13).

17. Vis, at enhver uegentlig kongruens af et 2-dimensionalt euklidisk affint rum (A,V) er en spejling i en linie (A_1,V_1) med retningen $V_1^{\perp}$ efterfulgt af en translation med translationsvektor $\underline{t} \in V_1$. (For $\underline{t} = \underline{o}$ fås specielt en spejling; for $\underline{t} \neq \underline{o}$ kaldes afbildningen en *glidespejling*.)

18. Lad (A,V) være et 3-dimensionalt euklidisk affint rum, og lad f være en (egentlig eller uegentlig) kongruens af A med mindst et fixpunkt. Begrund, at der findes et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ i A m.h.t. hvilket f's matrixligning får formen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

med $\alpha \in [0,2\pi[$, dersom f er egentlig, og formen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

med $\alpha \in [0,2\pi[$, dersom f er uegentlig. Bestem i begge tilfælde mængden af fixpunkter. Lad P_1,P_2 og P_3 være bestemt ved $OP_1 = \underline{e}_1$, $OP_2 = \underline{e}_2$ og $OP_3 = \underline{e}_3$, og lad der i A være valgt den orientering, hvorved (O,P_1,P_2,P_3) bliver et positivt sæt (sml. øv. 7). Begrund, at hvis f er egentlig, så kan den kaldes *drejningen* α om linien bestemt ved O og P_1 i positiv retning, og drejningen $-\alpha$ om linien bestemt ved O og P_1 i negativ retning. Overvej, at hvis f er uegentlig, så kan f sammensættes af spejlingen i planen bestemt ved O, P_2 og P_3 med retningen normal (sml. øv. 13), efterfulgt af drejningen α om linien bestemt ved O og P_1 i positiv retning; en sådan afbildning kaldes en *drejespejling*.

19. Vis, at enhver egentlig kongruens af et 3-dimensionalt euklidisk affint rum (A,V) er en drejning om en linie (A_1,V_1) (sml. øv. 18), efterfulgt af en translation med translationsvektor $\underline{t} \in V_1$. (Er drejningen hhv. translationen specielt den identiske afbildning, fås en translation hhv. drejning; hvis hverken drejningen eller translationen er den identiske afbildning, kaldes afbildningen en *skruning* langs linien (A_1,V_1).)

20. Vis, at enhver uegentlig kongruens af et 3-dimensionalt euklidisk affint rum (A,V) er en spejling i en plan (A_1,V_1) med retningen $V_1^{\perp}$, efterfulgt af enten en translation med translationsvektor $\underline{t} \in V_1$ eller en drejning om en linie med retningen $V_1^{\perp}$.

21. Lad (A,V) være et affint rum af dimension $n \geq 1$, lad $f_1,\dots,f_m$ være ikke-konstante affine funktioner på A, og lad $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ være skalarer. Vis, at

$$\dim \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\alpha_i) = n - \mathrm{rg}(\hat{f}_1,\dots,\hat{f}_m)$$

hvis

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\alpha_i) \neq \emptyset .$$

22. Lad M være en ikke-tom delmængde af et affint rum (A,V), og sæt

$$K = \{P \in M \mid \forall Q \in M : [P,Q] \subseteq M\}.$$

Vis, at K er konveks. (Mængden K kaldes M's *konvekse kerne*.)

23. Lad V være et (endelig-dimensionalt reelt) normeret vektorrum. Vis, at såvel den åbne som den afsluttede enhedskugle er konvekse mængder.

24. Lad $f : A \to B$ være en affin afbildning. Vis, at for enhver konveks mængde $K \subseteq A$ er $f(K)$ en konveks delmængde af B, og at for enhver konveks mængde $K \subseteq B$ er $f^{-1}(K)$ en konveks delmængde af A.

25. Lad K være en ikke-tom konveks delmængde af et affint rum (A,V), og lad P være et punkt i A. Vis, at $\mathrm{conv}(\{P\} \cup K) = \bigcup_{Q \in K} [P,Q]$.

26. Lad K_1 og K_2 være konvekse delmængder af et (endelig-dimensionalt reelt) vektorrum . Vis, at $K_1 + K_2$ er konveks.

27. Bevis følgende skærpelse af Carathéodory's sætning: Lad M være en delmængde af et affint rum, og lad P_0 være et punkt i M. Det konvekse hylster af M er da identisk med foreningsmængden af alle simplekser, der har P_0 som hjørne, og hvis hjørner alle tilhører M.

28. Lad $M = \{P_0, \ldots, P_r\}$ være en endelig delmængde af et affint rum. Ved en *massefordeling* på M med masse m forstås en afbildning $f : M \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ med $f(P_0)+\ldots+f(P_r) = m > 0$. Ved *tyngdepunktet* for en massefordeling f på M med masse m forstås punktet

$$P = \sum_{i=0}^{r} \frac{f(P_i)}{m} P_i .$$

Bestem mængden af tyngdepunkter for massefordelinger på M. Angiv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at to forskellige massefordelinger på M med samme masse altid har forskellige tyngdepunkter.

29. Lad $a_1, \ldots, a_k$ være indbyrdes forskellige reelle tal, lad $b_1, \ldots, b_k$ være vilkårlige reelle tal, og lad $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ være positive reelle tal. Vis, at hvis der for vilkårlige $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \ldots, k\}$ findes en affin funktion f på $\mathbb{R}$, således at $|f(a_i)-b_i| < \varepsilon_i$ for $i = i_1, i_2, i_3$, så findes en affin funktion f på $\mathbb{R}$, således at $|f(a_i)-b_i| < \varepsilon_i$ for $i = 1, \ldots, k$. (Vink: Udnyt Helly's sætning.)

30. Lad K være en konveks delmængde af et affint rum (A, V) af dimension $n \geq 1$, lad $f_1, \ldots, f_k$ være affine funktioner på A, og lad $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ være reelle tal. Vis, at hvis

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} f_i^{-1}(]-\infty, \alpha_i[)$$

og $k > n+1$, så findes $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \{1, \ldots, k\}$ med

$$K \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{n+1} f_{i_\nu}^{-1}(]-\infty, \alpha_{i_\nu}[).$$

(Vink: Udnyt Helly's sætning.)

31. Skitsér keglesnitsfladerne.

32. I et euklidisk affint rum af dimension 2 er tre kvadrikker givet ved deres ligninger m.h.t. et sædvanligt retvinklet koordinatsystem som følger:

$$5x_1^2 + 7x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - 32 = 0,$$
$$x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 3x_2 - 1 = 0,$$
$$x_1^2 + 3x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - 2x_1 = 0.$$

Bestem for hver af de tre kvadrikker arten og en ligning på normalform.

33. I et euklidisk affint rum af dimension 3 er to kvadrikker givet ved deres ligninger m.h.t. et sædvanligt retvinklet koordinatsystem som følger:

$$2x_1^1 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + x_1 + x_2 + x_3 - \frac{3}{8} = 0,$$
$$x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_1 - 2x_2 = 0.$$

Bestem for hver af de to kvadrikker arten og en ligning på normalform.

34. Lad $(P_0,\dots,P_r)$ være et affint uafhængigt sæt af punkter fra et affint rum (A,V). Ved $(P_0;P_0P_1,\dots,P_0P_r)$ er da bestemt et affint koordinatsystem i $A_1 = \mathrm{aff}\{P_0,\dots,P_r\}$. Mængden af punkter i A_1, hvis koordinater $x_1,\dots,x_r$ m.h.t. dette koordinatsystem alle tilhører $[0,1]$, kaldes det af sættet $(P_0,\dots,P_r)$ udspændte *parallellotop*, og betegnes $[P_0,\dots,P_r]$. (For $r = 1$ er parallellotopet $[P_0,P_1]$ det samme som liniestykket $[P_0,P_1]$. For $r = 2$ hhv. $r = 3$ kaldes parallellotopet også et *rektangel* hhv. *parallellepipedum*.) Vis, at $[P_0,\dots,P_r] = [P_{p(0)},\dots,P_{p(1)}]$ for alle permutationer $p \in S_{r+1}$. Vis, at $[P_0,\dots,P_r]$ er det konvekse hylster af en mængde bestående af 2^r punkter, hvoriblandt $P_0,\dots,P_r$.

Lad Φ være en ikke-triviel alternerende n-linearform på V, hvor $n = \dim V$. Ved *volumenet* $\mathrm{vol}[P_0,\dots,P_n]$ af et parallellotop $[P_0,\dots,P_n]$ i A forstås da tallet $\Phi(P_0P_1,\dots,P_0P_n)$. (Bemærk, at $\mathrm{vol}[P_0,\dots,P_n]$ ikke alene afhænger af Φ, men også af den rækkefølge, punkterne $P_0,\dots,P_n$ indtager.) Gør rede for, at $\mathrm{vol}[P_0,\dots,P_n] \neq 0$. Gør rede for, at volumenforholdet

$$\frac{\mathrm{vol}[P_0,\dots,P_n]}{\mathrm{vol}[Q_0,\dots,Q_n]}$$

for to parallellotoper er uafhængigt af Φ. Gør rede for, at hvis f er en affin transformation af A, og $[P_0,\dots,P_n]$ er et parallellotop i A, så bestemmer også sættet

$(f(P_0),\dots,f(P_n))$ et parallellotop $[f(P_0),\dots,f(P_n)]$ i A. Bestem volumenforholdet

$$\frac{\mathrm{vol}[f(P_0),\dots,f(P_n)]}{\mathrm{vol}[P_0,\dots,P_n]},$$

og gør rede for, at det ikke alene er uafhængigt af Φ, men også af det betragtede parallellotop $[P_0,\dots,P_n]$; tallet kaldes f's *volumenforhold*.

SÆTNING OM REGULÆRÆKVIVALENTE REELLE MATRICER

Sætning. Hvis to reelle $n \times n$ matricer $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er regulærækvivalente over $\mathbb{C}$, så også over $\mathbb{R}$.

Altså: Hvis der findes en kompleks regulær $n \times n$ matrix $\underline{\underline{S}}$ så at $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{B}}$, så findes der også en reel regulær $n \times n$ matrix $\underline{\underline{T}}$ så at $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{B}}$.

Bevis: Vi har $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}$. Ved konjugering (sml. side 4.1.8) fås heraf, da $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er reelle:

$$\overline{\underline{\underline{S}}}\,\underline{\underline{A}} = \overline{\underline{\underline{S}}}\,\overline{\underline{\underline{A}}} = \overline{\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}} = \overline{\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}} = \overline{\underline{\underline{B}}}\,\overline{\underline{\underline{S}}} = \underline{\underline{B}}\,\overline{\underline{\underline{S}}} \;.$$

Indføres de reelle matricer

$$\underline{\underline{S}}_1 = \operatorname{Re}\underline{\underline{S}} = \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{S}}+\overline{\underline{\underline{S}}}) \;,\quad \underline{\underline{S}}_2 = \operatorname{Im}\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2i}(\underline{\underline{S}}-\overline{\underline{\underline{S}}}) \;,$$

fås

$$\underline{\underline{S}}_1\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}_1 \;,\quad \underline{\underline{S}}_2\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}_2 \;,$$

og derfor

$$(\underline{\underline{S}}_1+t\underline{\underline{S}}_2)\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{S}}_1+t\underline{\underline{S}}_2)$$

for ethvert $t \in \mathbb{C}$. Nu er $p(t) := \det(\underline{\underline{S}}_1+t\underline{\underline{S}}_2)$ et polynomium i t, og da $\underline{\underline{S}}_1 + i\underline{\underline{S}}_2 = \underline{\underline{S}}$ er regulær, er $p(i) \neq 0$, hvorfor p ikke er mulpolynomiet. Vælges derfor $t \in \mathbb{R}$ som et reelt tal som ikke er rod i p, bliver $\underline{\underline{T}} := \underline{\underline{S}}_1 + t\underline{\underline{S}}_2$ regulær og reel, og af $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{T}}$ sluttes derfor

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{B}} \;.$$