GENEREL TOPOLOGI

Noter til Matematik 222

Matematisk Institut
Københavns Universitet
1975

Mat 222. Generel topologi. 1975.

Indholdsfortegnelse.

Forord.

Om noternes tilblivelse. De foreliggende noter i generel topologi har deres udspring i et seminar afholdt i efteråret 1974 med deltagelse af Claus Borregaard, Finn Derno, Svend Jørgen Hansen, Anne Harrit, Lars Hebjørn, Mogens Nørgaard Olesen, Nina Rasmussen og Leif Raavad. Teksten er udarbejdet af undertegnede på grundlag af oplæg fra deltagerne i seminaret; dog har Claus Borregaard og Mogens Nørgaard Olesen eneansvar for den historiske oversigt. Den smukke maskinskrivning skyldes Lisbeth Weinreich.

Om noternes form. Noterne er skrevet i en stram stil med en markant opdeling af teksten i små afsnit. Et afsnit kan have en af følgende overskrifter:

- DEFINITION. Afsnittet indeholder da alene en definition.
- SÆTNING. Afsnittet indeholder da en formuleret sætning (undertiden tillige en definition) og (med få undtagelser) et bevis for sætningen.
- BEMÆRKNING. Afsnittet indeholder da en kommentar til en forudgående definition eller sætning.
- EKSEMPEL. Afsnittet indeholder da et eksempel af systematisk interesse. (*Eksempel* skal altså ikke opfattes som synonym for *illustration*.)

Endvidere findes afsnit *uden overskrift*. Sådanne afsnit tjener som introduktion til en efterfølgende sætning.

Bemærkninger og *eksempler* kan indeholde ubeviste påstande. Sædvanligvis drejer det sig om simple udsagn, som det overlades til læseren selv at argumentere for.

Den stramme form er valgt ud fra ønsket om at opnå *overskuelighed*. Det er håbet, at den valgte form dels vil lette læseren struktureringen af teksten under første gennemlæsning, dels vil gøre det lettere sidenhen at foretage opslag. - Motiverende betragtninger og illustrerende eksempler tænkes henvist til forelæsningerne hhv. opgaverne.

Om noternes indhold. Formålet med kurset er et bibringe deltagerne en vis fortrolighed med grundlæggende begrebsdannelser i generel topologi. Generel topologi opfattes altså (i denne sammenhæng) mere som et begrebsapparat end som en matematisk disciplin. Dette synspunkt ligger bag den valgte afgrænsning af noternes indhold. Der forudsættes et elementært kendskab til metriske rum.

Der er valgt en "geometrisk" opbygning af teorien, idet en topologi opfattes som en "åben mængde struktur" snarere end som et "konvergensbegreb". Herved opnås, at abstraktionsniveauet er stigende gennem noterne(?).

I §§ 1 - 7 omtales *generelle begreber*. I §§ 8 - 12 omtales forskellige *specielle begreber*. I §14 omtales *konvergens*; der bygges her på *filter-begrebet*, som indføres i §13.

Arne Brøndsted

Tilføjelse 1976:

Et antal (tryk)fejl i 1975-udgaven af noterne er rettet i den foreliggende udgave; en * efter årstallet 1975 markerer, at der er rettet på den pågældende side. Opgavesamlingen er blevet renskrevet; her er ligeledes benyttet markeringen * efter 1975.

A.B.

Tilføjelse 1977:

Endnu et antal (tryk)fejl er rettet. Markeringen □ viser, at der er rettet på den pågældende side.

A.B.

§1. *Åbne mængder.*

1.1. DEFINITION. Ved en *topologi* på en mængde M forstås et system $\mathcal{T}$ af delmængder af M med følgende egenskaber:

(1) Enhver foreningsmængde af mængder fra $\mathcal{T}$ tilhører $\mathcal{T}$.

(2) Enhver fællesmængde af endelig mange mængder fra $\mathcal{T}$ tilhører $\mathcal{T}$.

(3) $\emptyset \in \mathcal{T}$ og $M \in \mathcal{T}$.

Er $\mathcal{T}$ en topologi på M, kaldes parret $(M,\mathcal{T})$ et *topologisk rum*, og mængderne i $\mathcal{T}$ kaldes de *åbne mængder* i $(M,\mathcal{T})$.

1.2. BEMÆRKNING. Bemærk, at (2) er opfyldt blot enhver fællesmængde af to mængder fra $\mathcal{T}$ tilhører $\mathcal{T}$.

1.3. BEMÆRKNING. Er $\mathcal{T}_1$ og $\mathcal{T}_2$ forskellige topologier på samme mængde M, så er $(M,\mathcal{T}_1)$ og $(M,\mathcal{T}_2)$ forskellige topologiske rum. Dog tillader man sig at sige, at M er et topologisk rum, dersom det af sammenhængen fremgår, hvilken topologi $\mathcal{T}$ på M talen er om. Er $(M,\mathcal{T})$ et topologisk rum, og er A en delmængde af M, tillades sprogbrugen, at A er en delmængde af $(M,\mathcal{T})$.

1.4. EKSEMPEL. Lad (M,d) være et metrisk rum. En delmængde A af M siges da som bekendt at være åben, dersom der for ethvert $x \in A$ findes et $r > 0$, således at den "åbne" kugle

$$K(x,r) := \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$$

er indeholdt i A. Mængden af de i denne forstand åbne delmængder af M er faktisk en topologi på M i betydningen af 1.1. Denne topologi på (M,d), som betegnes $\mathcal{T}_d$, siges at være *induceret* af d. - Bemærk i øvrigt, at de "åbne" kugler $K(x,r)$ faktisk er $\mathcal{T}_d$-åbne.

1.5. BEMÆRKNING. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være *metrisabelt*, dersom der findes en metrik d på M, således at

$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$. Ikke alle topologiske rum er metrisable. To forskellige metrikker på en mængde M kan inducere samme topologi.

1.6. EKSEMPLER. For en vilkårlig mængde M er $\mathcal{T} := \{\emptyset, M\}$ en topologi på M, kaldet den *trivielle* topologi. For en vilkårlig mængde M er $\mathcal{T} := \mathcal{P}(M)$ en topologi på M, kaldet den *diskrete* topologi.

§2. *Omegne og indre punkter.*

2.1. DEFINITION. En mængde A i et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være en *omegn* af et punkt x i M, dersom der findes en åben mængde O, således at $x \in O \subset A$. - Systemet af x's omegne betegnes $\mathcal{U}(x)$, og kaldes *omegnsfiltret* i x.

2.2. DEFINITION. Et punkt x i et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være et *indre punkt* i en mængde A i M, dersom der findes en åben mængde O, således at $x \in O \subset A$. - Mængden af indre punkter i A betegnes int$A$ (eller $\mathring{A}$), og kaldes A's *indre*.

2.3. BEMÆRKNING. Læg mærke til "dualiteten" mellem begreberne omegn og indre punkt: A er en omegn af x, hvis og kun hvis x er et indre punkt i A.

2.4. EKSEMPEL. Lad (M,d) være et metrisk rum. En mængde A i M siges da som bekendt at være en omegn af et punkt x i M, og x siges at være et indre punkt i A, dersom der findes et $r > 0$, således at $K(x,r)$ er indeholdt i A. De således definerede omegne af et punkt x i (M,d) er faktisk $\mathcal{T}_d$-omegnene af x, og de således definerede indre punkter i en mængde A i (M,d) er faktisk de $\mathcal{T}_d$-indre punkter. (jf. iøvrigt 1.4.)

2.5. SÆTNING. *For en mængde A i et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er* int$A$ *den største (m.h.t. $\subset$) åbne mængde indeholdt i A .*

□ Ifølge 2.2 er int$A$ foreningen af alle åbne mængder indeholdt i A. Denne forening er åben ifølge 1.1 (1), og er derfor den største åbne mængde indeholdt i A. □

2.6. SÆTNING. *For en mængde A i et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er følgende tre påstande ensbetydende*: (1) *A er åben.* (2) *A er omegn af alle sine punkter.* (3) *Ethvert punkt i A er indre punkt i A.*

□ Ækvivalensen af (2) og (3) er oplagt, jf. 2.3. Ækvivalensen af (1) og (3) følger af 2.5. □

2.7. Lad $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum. Man kan sige, at $\mathcal{T}$ giver anledning til en afbildning $\mathcal{U}\colon M \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$, nemlig afbildningen, som til $x \in M$ lader svare omegnsfiltret $\mathcal{U}(x)$. Lad nu omvendt M være en mængde, og lad $\mathcal{U}\colon M \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ være en afbildning; til hvert $x \in M$ er altså knyttet et system $\mathcal{U}(x)$ af delmængder af M. Man kunne da spørge, under hvilke omstændigheder der findes en topologi $\mathcal{T}$ på M, således at $\mathcal{U}(x)$ netop er $\mathcal{T}$-omegnsfiltret i x. Af 2.6 [(1) $\Leftrightarrow$ (2)] fremgår, at hvis en sådan topologi $\mathcal{T}$ eksisterer, så må $\mathcal{T}$ bestå af netop de mængder A for hvilke $A \in \mathcal{U}(x)$ for alle $x \in A$. Spørgsmålet er derfor, under hvilke omstændigheder der gælder både, at systemet af sådanne mængder A er en topologi, og at omegnsfiltrene i punkterne $x \in M$ netop er mængdesystemerne $\mathcal{U}(x)$. Svaret gives i 2.8. - Bemærk i øvrigt, at blot det om $\mathcal{U}$ vides, at $x \in U$ for alle $U \in \mathcal{U}(x)$, så findes mindst een topologi $\mathcal{T}$ på M (nemlig i hvert fald den diskrete, jf. 1.6), således at alle mængderne i $\mathcal{U}(x)$ er $\mathcal{T}$-omegne.

2.8. SÆTNING. (a) *Lad $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum. Omegnsfilterafbildningen $\mathcal{U}\colon M \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ har da følgende egenskaber:*

(1) $\forall x \in M : M \in \mathcal{U}(x)$.

(2) $\forall x \in M\ \forall U \in \mathcal{U}(x) : x \in U$.

(3) $\forall x \in M\ \forall U \in \mathcal{U}(x)\ \forall A \subset M : U \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{U}(x)$.

(4) $\forall x \in M\ \forall U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}(x) : U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{U}(x)$

(5) $\forall x \in M\ \forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists V \in \mathcal{U}(x)\ \forall y \in M : y \in V \Rightarrow U \in \mathcal{U}(y)$.

(b) *Lad omvendt M være en mængde, og lad $\mathcal{U}\colon M \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ være en afbildning med egenskaberne* (1)-(5). *Der findes da en og kun een topologi $\mathcal{T}$ på M, således at $\mathcal{T}$-omegnsfiltret i $x \in M$ netop er $\mathcal{U}(x)$* .

□ (a): Egenskaberne (2) og (3) er oplagte, (1) følger af 1.1.(3), og (4) følger af 1.1.(2). For at vise (5) betragtes $U \in \mathcal{U}(x)$. Der findes da $O \in \mathcal{T}$ med $x \in O \subset U$. Vi har da $O \in \mathcal{U}(x)$ og $U \in \mathcal{U}(y)$ for alle $y \in O$, - begge dele ifølge 2.1. Dette viser, at (5) er opfyldt med $V = O$.

(b): Som allerede bemærket i 2.7, er

$$(*) \qquad \mathcal{T} := \{O \subset M \mid \forall x \in O : O \in \mathcal{U}(x)\}$$

den eneste mulige topologi med den ønskede egenskab. - Vi viser først, at $\mathcal{T}$ faktisk er en topologi. Lad $\{O_i \mid i \in I\}$ være et system af mængder fra $\mathcal{T}$. For at vise, at $\cup O_i \in \mathcal{T}$, betragtes $x \in \cup O_i$. Der findes da $i_0 \in I$ med $x \in O_{i_0}$. Vi har da $O_{i_0} \in \mathcal{U}(x)$ ifølge (*). Ved brug af (3) sluttes dernæst, at $\cup O_i \in \mathcal{U}(x)$. Hermed er vist, at $\mathcal{T}$ har egenskaben 1.1.(1). Lad dernæst $O_1, \cdots, O_n \in \mathcal{T}$. For at vise, at $O_1 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{T}$ betragtes $x \in O_1 \cap \cdots \cap O_n$. Ifølge (*) har vi da $O_i \in \mathcal{U}(x)$, $i = 1, \cdots, n$. Ved brug af (4) sluttes dernæst, at $O_1 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{U}(x)$. Hermed er vist, at $\mathcal{T}$ har egenskaben 1.1.(2). Endelig er det trivielt, at $\emptyset \in \mathcal{T}$, og klart ifølge (1) at $M \in \mathcal{T}$. Hermed er også godtgjort, at 1.1.(3) er opfyldt, og $\mathcal{T}$ er altså en topologi. - Det skal herefter vises, at $\mathcal{T}$-omegnsfiltret i $x \in M$ netop er $\mathcal{U}(x)$. Lad først U være en $\mathcal{T}$-omegn af x; der findes altså en mængde $O \in \mathcal{T}$ med $x \in O \subset U$. Ifølge (*) har vi da $O \in \mathcal{U}(x)$. Ved brug af (3) sluttes dernæst, at $U \in \mathcal{U}(x)$. Lad omvendt $U \in \mathcal{U}(x)$. Sæt

$$(\dagger) \qquad O := \{y \in M \mid U \in \mathcal{U}(y)\}.$$

Bemærk, at $x \in O$. Endvidere har vi $O \subset U$; thi $U \in \mathcal{U}(y)$ giver $y \in U$ ifølge (2). Det påstås, at $O \in \mathcal{T}$; ifølge det lige sagte vil hermed være vist, at U er en $\mathcal{T}$-omegn af x. Lad derfor $z \in O$; det skal da vises, at $O \in \mathcal{U}(z)$, jf. (*). Ifølge (†) har vi $U \in \mathcal{U}(z)$, og ifølge (5) findes derfor $V \in \mathcal{U}(z)$, således at $U \in \mathcal{U}(y)$ for alle $y \in V$. Heraf fremgår, at $V \subset O$, jf. (†). Idet $V \in \mathcal{U}(z)$, fås det ønskede ved brug af (3). □

2.9. BEMÆRKNING. Sætning 2.8 anviser en alternativ definition af begrebet topologi: Ved en topologi på en mængde M forstås en afbildning $\mathcal{U}: M \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ med egenskaberne (1)-(5) i 2.8.

2.10. BEMÆRKNING. Bemærk, at (1) i 2.8 kan erstattes med

(6) $\forall x \in M : \mathcal{U}(x) \neq \emptyset$.

Thi (6) følger oplagt af (1), og (1) følger af (6) ved brug af (3).

2.11. BEMÆRKNING. Bemærk, at (1)-(4) alene udtaler sig om omegnsfiltret i hvert enkelt punkt, hvorimod (5) sammenknytter omegnsfiltrene i forskellige punkter. - I sproglig formulering lyder (5) således: Enhver omegn af x er tillige omegn af alle punkter y i en (passende) omegn af x.

2.12. DEFINITION. Lad $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum, og lad $x \in M$. Ved en *basis* for omegnsfiltret i x, eller en *omegnsbasis* i x, forstås et system $\mathcal{B}(x)$ af omegne af x med egenskaben, at enhver omegn af x indeholder en af omegnene i $\mathcal{B}(x)$.

2.13. DEFINITION. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at opfylde *1. numerabilitetsaksiom*, dersom der for ethvert punkt $x \in M$ findes en numerabel omegnsbasis i x.

2.14. EKSEMPEL. Lad (M,d) være et metrisk rum, og lad $x \in M$. Lad D være en delmængde af $\mathbb{R}_+$, og sæt

$$\mathcal{B}(x) := \{K(x,r) \mid r \in D\}.$$

Det er da klart, at $\mathcal{B}(x)$ er en basis for $\mathcal{T}_d$-omegnsfiltret i x, hvis $\inf D = 0$. Specielt noteres, at der findes numerable omegnsbaser, nemlig f.eks. systemet $\mathcal{B}(x)$ med $D = \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ethvert metrisabelt topologisk rum opfylder altså *1.* numerabilitetsaksiom.

2.15. Dualt til det i 2.7 sagte kan man sige, at en topologi $\mathcal{T}$ på en mængde M giver anledning til en afbildning int: $\mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$, nemlig afbildningen, som til en mængde A lader svare int$A$. Sætning 2.8 har følgende modstykke:

2.16. SÆTNING. (a) *Lad* $(M,\mathcal{T})$ *være et topologisk rum. Afbildningen* int: $\mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ *har da følgende egenskaber:*

(1) $\mathrm{int}M = M$.

(2) $\forall A \subset M : \mathrm{int}A \subset A$.

(3) $\forall A_1,\cdots,A_n \subset M : \mathrm{int}(A_1 \cap\cdots\cap A_n) = \mathrm{int}A_1 \cap\cdots\cap \mathrm{int}A_n$.

(4) $\forall A \subset M : \mathrm{int}(\mathrm{int}A) = \mathrm{int}A$.

(b) *Lad omvendt* M *være en mængde, og lad* int: $\mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ *være en afbildning med egenskaberne* (1)-(4). *Der findes da en og kun een topologi* $\mathcal{T}$ *på* M, *således at det* $\mathcal{T}$*-indre af en mængde* A *netop er* int$A$.

□ (a): Egenskaberne (1), (2) og (4) er helt oplagte konsekvenser af 2.5. Egenskaben (3) fås let ved anvendelse af (2), (4) og 2.5.

(b): Ifølge 2.6 [(1) ⇔ (3)] er

$$\mathcal{T} := \{A \subset M \mid \mathrm{int}A = A\}$$

den eneste mulige topologi med den ønskede egenskab. Det påstås, at $\mathcal{T}$ faktisk er en topologi. Først bemærkes, at der for vilkårlige delmængder A og B gælder

$$(*) \qquad A \subset B \Rightarrow \mathrm{int}A \subset \mathrm{int}B;$$

thi af $A \subset B$ følger $\mathrm{int}A = \mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$ ved brug af (3), hvormed $\mathrm{int}A \subset \mathrm{int}B$. Betragt nu et system $\{A_i \mid i \in I\}$ af mængder fra $\mathcal{T}$. For hvert $i_0 \in I$ har vi da $A_{i_0} \subset \bigcup A_i$, og dermed - ved anvendelse af (*) - $\mathrm{int}A_{i_0} \subset \mathrm{int}\bigcup A_i$. Heraf følger $\bigcup \mathrm{int}A_i \subset \mathrm{int}\bigcup A_i$. Men da $A_i \in \mathcal{T}$, fås $\bigcup A_i \subset \mathrm{int}\bigcup A_i$. Den modsatte inklusion fremgår af (2). Der gælder altså $\mathrm{int}\bigcup A_i = \bigcup A_i$, hvilket viser, at 1.1 (1) er opfyldt for $\mathcal{T}$.

Betingelsen 1.1 (2) fremgår af (3), og 1.1 (3) fremgår af (1) og (2). Hermed er vist, at $\mathcal{T}$ er en topologi. Lad endelig A være en vilkårlig delmængde af M. Af (2) og (4) fremgår, at int$A$ er en $\mathcal{T}$-åben delmængde af A. Er på den anden side B en vilkårlig $\mathcal{T}$-åben delmængde af A, så gælder int$B$ = $B \subset A$, og dermed - ved brug af (*) og (4) - $B \subset$ int$A$. Mængden int$A$ er altså den største $\mathcal{T}$-åbne delmængde af A, - og int$A$ er derfor det $\mathcal{T}$-indre af A, jf. 2.5. □

§3. *Afsluttede mængder.*

3.1. DEFINITION. En mængde A i et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være *afsluttet*, dersom $M \setminus A$ er åben.

3.2. SÆTNING. *I et topologisk rum* $(M,\mathcal{T})$ *gælder:*
(1) *Enhver fællesmængde af afsluttede mængder er afsluttet.*
(2) *Enhver foreningsmængde af endelig mange afsluttede mængder er afsluttet.* (3) M *og* $\emptyset$ *er afsluttede.*

□ Umiddelbar konsekvens af 1.1. □

3.3. DEFINITION. Et punkt x i et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være et *kontaktpunkt* for en mængde A i M, dersom enhver omegn af x har en ikke-tom fællesmængde med A. - Mængden af kontaktpunkter for A kaldes A's *afslutning*, og betegnes $\mathrm{cl}A$ (eller $\overline{A}$).

3.4. SÆTNING. *For en delmængde* A *i et topologisk rum* $(M,\mathcal{T})$ *er* $\mathrm{cl}A$ *den mindste (m.h.t.* $\subset$*) afsluttede mængde, som indeholder* A.

□ Ifølge 3.3 gælder $A \subset \mathrm{cl}A = M \setminus \mathrm{int}(M \setminus A)$. Heraf følger påstanden, idet $\mathrm{int}(M \setminus A)$ er den største åbne mængde disjunkt med A, jf. 2.5. □

3.5. DEFINITION. Et punkt x i et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være et *randpunkt* for en mængde A i M, dersom x er kontaktpunkt for både A og $M \setminus A$. - Mængden af randpunkter for A kaldes A's *rand*, og betegnes $\mathrm{bd}A$ (eller ∂A).

3.6. BEMÆRKNING. Der gælder altså $\mathrm{bd}A = \mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}(M \setminus A) = \mathrm{bd}(M \setminus A)$ for enhver mængde A.

3.7. DEFINITION. Er A og B delmængder af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$, siges A at være *tæt i* B, dersom $\mathrm{cl}A \supset B$. Er A tæt i M, siges A at være *(overalt) tæt*.

3.8. DEFINITION. En delmængde A af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være *intetsteds tæt*, dersom $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = \emptyset$.

3.9. DEFINITION. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være *separabelt*, dersom der findes en numerabel delmængde A af $(M,\mathcal{T})$, som er overalt tæt.

§4. *Sammenligning af topologier.*

4.1. DEFINITION. Lad $\mathcal{T}_1$ og $\mathcal{T}_2$ være topologier på samme mængde M. Topologien $\mathcal{T}_1$ siges da at være *grovere* end $\mathcal{T}_2$, og $\mathcal{T}_2$ siges at være *finere* end $\mathcal{T}_1$, dersom $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

4.2. SÆTNING. *Er* $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ *en familie af topologier på en mængde* M, *så er også* $\cap\mathcal{T}_i$ *en topologi på* M.

□ Det skal vises, at hvis enhver af mængdesystemerne $\mathcal{T}_i$ har egenskaberne (1)-(3) i 1.1, så har også $\cap\mathcal{T}_i$ disse egenskaber. Dette er oplagt. □

4.3. SÆTNING. *Mængden af topologier på en mængde* M *er et fuldstændigt lattice under ordningen* $\subset$.

□ Det skal vises, at for en vilkårlig mængde $\{\mathcal{T}_i \mid i \in I\}$ af topologier $\mathcal{T}_i$ på M findes en fineste, som er grovere end dem alle, og en groveste, som er finere end dem alle. - Det er trivielt, at en topologi $\mathcal{T}$ på M er grovere end alle $\mathcal{T}_i$'erne hvis og kun hvis $\mathcal{T} \subset \cap\mathcal{T}_i$. Da imidlertid $\cap\mathcal{T}_i$ er en topologi ifølge 4.2, er $\cap\mathcal{T}_i$ den fineste blandt de topologier, som er grovere end alle $\mathcal{T}_i$'erne. - Der findes mindst een topologi, som er finere end alle $\mathcal{T}_i$'erne, nemlig den diskrete. Lad $\{\mathcal{S}_j \mid j \in J\}$ være mængden af de topologier, som er finere end alle $\mathcal{T}_i$'erne. Da er ifølge 4.2 $\cap\mathcal{S}_j$ en topologi på M, og den er åbenbart den groveste blandt de topologier, som er finere end alle $\mathcal{T}_i$'erne. □

4.4. SÆTNING. *Lad* $\mathcal{S}$ *være et vilkårligt system af delmængder af en mængde* M. *Der findes da en groveste topologi* $\mathcal{T}$ *på* M *med* $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. - Denne topologi $\mathcal{T}$ siges at være *frembragt* af $\mathcal{S}$, og $\mathcal{S}$ siges at være en *subbasis* for $\mathcal{T}$.

□ Der findes (mindst) en topologi på M, som indeholder $\mathcal{S}$, - nemlig i hvert fald den diskrete. Fællesmængden af alle sådanne topologier er en topologi ifølge 4.2; den er derfor den groveste, som indeholder $\mathcal{S}$. □

4.5. SÆTNING. *Lad $\mathcal{S}$ være et system af delmængder af M. Den af $\mathcal{S}$ frembragte topologi $\mathcal{T}$ på M består af $\emptyset$ og M samt de delmængder af M, som er foreningsmængde af fællesmængder af endelig mange mængder fra $\mathcal{S}$.*

□ Lad $\mathcal{S}'$ betegne systemet af de delmængder af M, som er fællesmængde af endelig mange mængder fra $\mathcal{S}$. Lad $\mathcal{S}''$ betegne systemet af de delmængder af M, som er foreningsmængde af mængder fra $\mathcal{S}'$. Påstanden er, at $\mathcal{S}'' \cup \{\emptyset, M\}$ er den groveste topologi på M, som indeholder $\mathcal{S}$. Det er klart ifølge 1.1, at enhver topologi på M, som indeholder $\mathcal{S}$, tillige må indeholde $\mathcal{S}'' \cup \{\emptyset, M\}$. Det skal derfor vises, at $\mathcal{S}'' \cup \{\emptyset, M\}$ er en topologi. Men dette verificeres let. □

4.6. DEFINITION. En subbasis $\mathcal{S}$ for en topologi $\mathcal{T}$ på en mængde M kaldes en *basis* for $\mathcal{T}$, dersom enhver ikke-tom mængde i $\mathcal{T}$ er forening af mængder fra $\mathcal{S}$.

4.7. EKSEMPEL. Systemet af alle kugler i et metrisk rum (M,d) er en basis for $\mathcal{T}_d$.

4.8. SÆTNING. *Et system $\mathcal{S}$ af delmængder af en mængde M er basis for en topologi på M, hvis og kun hvis $\mathcal{S}$ er en overdækning af M og der for alle S_1, $S_2 \in \mathcal{S}$ og alle $x \in S_1 \cap S_2$ findes $S_3 \in \mathcal{S}$, således at $x \in S_3 \subset S_1 \cap S_2$.*

□ Antag først, at $\mathcal{S}$ er basis for en topologi $\mathcal{T}$. Det er da for det første klart, at $\mathcal{S}$ er en overdækning; thi M er åben, og enhver åben mængde er forening af mængder fra $\mathcal{S}$. Betragt dernæst S_1, $S_2 \in \mathcal{S}$ og $x \in M$ med $x \in S_1 \cap S_2$. Da enhver åben mængde er forening af mængder fra $\mathcal{S}$, og $S_1 \cap S_2$ er åben, findes $S_3 \in \mathcal{S}$ med $x \in S_3 \subset S_1 \cap S_2$. Antag omvendt, at betingelserne er opfyldt, og lad $\mathcal{T}$ være den af $\mathcal{S}$ frembragte topologi, jf. 4.5. Det påstås, at $\mathcal{S}$ er en basis for $\mathcal{T}$. Betragt derfor $O \in \mathcal{T}$ og $x \in O$; det skal da vises, at der findes

$S \in \mathcal{S}$ med $x \in S \subset O$. Hvis $O = M$, findes S som ønsket på grund af, at $\mathcal{S}$ er en overdækning. Hvis $O \neq M$, så findes ifølge 4.5 endelig mange mængder $S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{S}$ med

(*) $$x \in S_1 \cap \cdots \cap S_n \subset O.$$

Hvis $n > 1$, så findes ifølge antagelsen $S'_{n-1} \in \mathcal{S}$ med $x \in S'_{n-1} \subset S_{n-1} \cap S_n$, hvormed

$$x \in S_1 \cap \cdots \cap S_{n-2} \cap S'_{n-1} \subset O.$$

Antallet af mængder S_j i (*) kan altså reduceres med 1, dersom $n > 1$. Heraf følger påstanden. □

4.9. SÆTNING. *Lad $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum. Et delsystem $\mathcal{S}$ af $\mathcal{T}$ er da en basis for $\mathcal{T}$, hvis og kun hvis for hvert $x \in M$ systemet*

$$\mathcal{B}(x) := \{S \in \mathcal{S} \mid x \in S\}$$

er en omegnsbasis i x.

□ Antag først, at $\mathcal{S}$ er en basis for $\mathcal{T}$, og lad $U \in \mathcal{U}(x)$. Der findes da $O \in \mathcal{T}$ med $x \in O \subset U$. Da $\mathcal{S}$ er en basis for $\mathcal{T}$, følger heraf, at der findes $S \in \mathcal{S}$ med $x \in S \subset O \subset U$, - hvilket viser, at $\mathcal{B}(x)$ er en omegnsbasis i x. Antag omvendt, at $\mathcal{B}(x)$ er en omegnsbasis i x for hvert $x \in M$. Lad $O \in \mathcal{T}$, og lad $x \in O$. Da er O en omegn af x, og der findes følgelig $S \in \mathcal{S}$ med $x \in S \subset O$. Heraf fremgår, at $\mathcal{S}$ er en basis for $\mathcal{T}$. □

4.10. DEFINITION. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at opfylde *2. numerabilitetsaksiom*, dersom der findes en numerabel basis for topologien $\mathcal{T}$.

4.11. BEMÆRKNING. Hvis et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ opfylder *2.* numerabilitetsaksiom, så opfylder det også *1.* numerabilitetsaksiom (jf. 2.13), og det er separabelt (jf. 3.9). Det første følger af 4.9. Det andet indses således:

Er $\mathcal{S} = \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en numerabel basis for $\mathcal{T}$, og er x_n et punkt i S_n, så er $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en numerabel overalt tæt delmængde.

4.12. BEMÆRKNING. Et metrisabelt rum opfylder *1*. numerabilitetsaksiom, jf. 2.14. Det opfylder *2*. numerabilitetsaksiom, hvis (og kun hvis, jf. 4.11) det er separabelt. Thi lad d være en metrik på M med $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$, og lad A være en numerabel tæt delmængde af $(M,\mathcal{T})$. Mængdesystemet

$$\mathcal{S} := \{K(x,\tfrac{1}{n}) \mid x \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$$

er da et numerabelt system af åbne mængder. Lad $x \in M$, og lad $U \in \mathcal{U}(x)$. Der findes da $n \in \mathbb{N}$, således at $K(x,\frac{2}{n}) \subset U$. Idet $K(x,\frac{1}{n})$ er åben, findes $y \in A$ med $y \in K(x,\frac{1}{n})$. Der gælder da $x \in K(y,\frac{1}{n}) \subset K(x,\frac{2}{n}) \subset U$. Heraf fremgår, at $\mathcal{S}$ er en basis for $\mathcal{T}$, jf. 4.9.

§5. *Delrum. Produktrum. Kvotientrum.*

5.1. SÆTNING. *Lad* $(M,\mathcal{T})$ *være et topologisk rum og lad* A *være en delmængde af* M. *Systemet*

$$\mathcal{T}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{T}\}$$

er da en topologi på A. *For* $x \in A$ *gælder*

$$\mathcal{U}_A(x) = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{U}(x)\},$$

hvor $\mathcal{U}$ *hhv.* $\mathcal{U}_A$ *betegner* $\mathcal{T}$*-omegnsfiltret hhv.* $\mathcal{T}_A$*-omegnsfiltret i* x. - Topologien $\mathcal{T}_A$ kaldes *delrumstopologien* på A (eller den af $\mathcal{T}$ *inducerede topologi* på A). Det topologiske rum $(A,\mathcal{T}_A)$ kaldes et *delrum* af $(M,\mathcal{T})$.

□ Oplagt. □

5.2. EKSEMPEL. Lad A være en delmængde af et metrisk rum (M,d). Restriktionen d' af d til $A \times A$ er da en metrik på A. Den af d' inducerede topologi på A (jf. 1.4) er netop delrumstopologien på A, induceret af $\mathcal{T}_d$. Med andre ord: $\mathcal{T}_{d'} = (\mathcal{T}_d)_A$.

5.3. BEMÆRKNING. De afsluttede mængder i et delrum $(A,\mathcal{T}_A)$ af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er netop mængderne af formen $A \cap F$, hvor F er afsluttet i $(M,\mathcal{T})$.

5.4. BEMÆRKNING. Lad $(A,\mathcal{T}_A)$ være et delrum af $(M,\mathcal{T})$. En delmængde B af A kan da både opfattes som en mængde i $(A,\mathcal{T}_A)$ og som en mængde i $(M,\mathcal{T})$. Når man udtaler sig om topologiske egenskaber ved B (f.eks. "B er åben"), må man derfor præcisere, om B opfattes som en mængde i $(A,\mathcal{T}_A)$ eller i $(M,\mathcal{T})$. Dette kan f.eks. ske ved benyttelse af vendinger som "B er åben relativt til A". - Bemærk i øvrigt, at den af $\mathcal{T}$ og den af $\mathcal{T}_A$ inducerede delrumstopologi på B er den samme (når $B \subset A \subset M$), altså $\mathcal{T}_B = (\mathcal{T}_A)_B$.

5.5. Lad $(M_i)_{i\in I}$ være en familie af mængder, og lad $\pi_{i_0} : \Pi M_i \to M_{i_0}$ betegne den i_0'te projektion, d.v.s. $\pi_{i_0}((x_i)_{i\in I}) = x_{i_0}$. Den følgende sætning beskriver en naturlig topologi på ΠM_i, når hver af mængderne M_i er forsynet med en topologi $\mathcal{T}_i$. (Den i 5.6 beskrevne topologi er ikke den eneste naturlige, men i en vis forstand den mest naturlige, jf. §7.)

5.6. SÆTNING. *Lad* $((M_i,\mathcal{T}_i))_{i\in I}$ *være en familie af topologiske rum, og lad* $\mathcal{S}$ *betegne systemet af delmængder af* ΠM_i *af formen*

$$(*) \qquad \pi_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(O_{i_n}) ,$$

hvor $\{i_1,\cdots,i_n\}$ *er en vilkårlig endelig delmængde af* I*, og* O_{i_k} *er en vilkårlig åben mængde i* $(M_{i_k},\mathcal{T}_{i_k})$*,* $k = 1,\cdots,n$*. Systemet* $\mathcal{S}$ *er da basis for en topologi* $\mathcal{T}$ *på* ΠM_i*. Omegnsfiltret i et punkt* $(x_i)_{i\in I}$ *har en basis bestående af mængderne af formen* (*) *med* $x_{i_k} \in O_{i_k}$*,* $k = 1,\cdots,n$.- Topologien $\mathcal{T}$ kaldes *produkttopologien* på ΠM_i; den betegnes lejlighedsvis $\Pi\mathcal{T}_i$. Det topologiske rum $(\Pi M_i, \Pi\mathcal{T}_i)$ kaldes *produktrummet* af *faktorrummene* $(M_i,\mathcal{T}_i)$.

□ Den første påstand følger umiddelbart af 4.8. (Bemærk at $\mathcal{S}$ er afsluttet under dannelse af endelige fællesmængder.) Den anden påstand er derefter en umiddelbar konsekvens af 4.9. □

5.7. BEMÆRKNING. Mængderne af formen (*) i 5.6 kan også beskrives som produktmængderne ΠO_i, hvor $O_i = M_i$ for $i \notin \{i_1,\cdots,i_n\}$. Hvis I er en endelig mængde, består basen for $\Pi\mathcal{T}_i$ altså af produktmængderne ΠO_i, hvor $O_i \in \mathcal{T}_i$.

5.8. Lad $\sim$ være en ækvivalensrelation i en mængde M, lad $M/_{\sim}$ betegne kvotientmængden, d.v.s. mængden af ækvivalensklasser, og lad $\kappa: M \to M/_{\sim}$ betegne afbildningen, som til $x \in M$ lader svare den ækvivalensklasse, som indeholder x. Den følgende sætning beskriver en naturlig topologi på $M/_{\sim}$, når M er forsynet med en topologi $\mathcal{T}$. (Jf. iøvrigt §7.)

5.9. SÆTNING. *Lad* $\sim$ *være en ækvivalensrelation i et topologisk rum* $(M,\mathcal{T})$. *Systemet*

$$\mathcal{T}_{\sim} := \{A \subset M/_{\sim} \mid \kappa^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$$

er da en topologi på $M/_{\sim}$. - Topologien $\mathcal{T}_{\sim}$ kaldes *kvotienttopologien*. Det topologiske rum $(M/_{\sim},\mathcal{T}_{\sim})$ kaldes *kvotientrummet* m.h.t. $\sim$.

□ Simpel verifikation. □

§6. *Kontinuerte og åbne afbildninger.*

6.1. DEFINITION. En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ siges at være *kontinuert*, dersom for enhver åben mængde O_2 i $(M_2, \mathcal{T}_2)$ originalmængden $f^{-1}(O_2)$ er åben i $(M_1, \mathcal{T}_1)$.

6.2. BEMÆRKNING. Betingelsen i 6.1 kan kort udtrykkes således: $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$. - Hvis $\mathcal{T}_1$ er den diskrete topologi, så er f kontinuert for enhver topologi $\mathcal{T}_2$ på M_2. Og hvis $\mathcal{T}_2$ er den trivielle topologi, så er f kontinuert for enhver topologi $\mathcal{T}_1$ på M_1. Afbildningen f har vanskeligere ved at blive kontinuert, des grovere $\mathcal{T}_1$ er og des finere $\mathcal{T}_2$ er.

6.3. BEMÆRKNING. Lad $\mathcal{T}_1$ og $\mathcal{T}_2$ være topologier på samme mængde M. Topologien $\mathcal{T}_1$ er da finere end $\mathcal{T}_2$ (jf. 4.1), hvis og kun hvis den identiske afbildning Id_M af M er kontinuert som afbildning af $(M, \mathcal{T}_1)$ på $(M, \mathcal{T}_2)$.

6.4. DEFINITION. En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ siges at være *kontinuert i et punkt* $x \in M_1$, dersom for enhver omegn U_2 af $f(x)$ i $(M_2, \mathcal{T}_2)$ originalmængden $f^{-1}(U_2)$ er en omegn af x i $(M_1, \mathcal{T}_1)$.

6.5. BEMÆRKNING. Idet $\mathcal{U}_1$ hhv. $\mathcal{U}_2$ betegner omegnsfilter-afbildningen i $(M_1, \mathcal{T}_1)$ hhv. $(M_2, \mathcal{T}_2)$, kan betingelsen i 6.4 kort udtrykkes således: $f^{-1}(\mathcal{U}_2(f(x))) \subset \mathcal{U}_1(x)$.

6.6. SÆTNING. *En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ er kontinuert, hvis og kun hvis den er kontinuert i ethvert punkt af M_1.*

□ Antag først, at f er kontinuert. Lad $x \in M_1$ og lad $U_2 \in \mathcal{U}_2(f(x))$. Der findes da $O_2 \in \mathcal{T}_2$ med $f(x) \in O_2 \subset U_2$, hvormed $x \in f^{-1}(O_2) \subset f^{-1}(U_2)$. Ifølge antagelsen er $f^{-1}(O_2)$

åben i $(M_1, \mathcal{T}_1)$, og $f^{-1}(U_2)$ er derfor en omegn af x. Antag omvendt, at f er kontinuert i ethvert punkt af M_1. Lad $O_2 \in \mathcal{T}_2$. For ethvert $x \in f^{-1}(O_2)$ er da O_2 en omegn af $f(x)$; thi $f(x) \in O_2$, og O_2 er åben. Ved brug af antagelsen følger heraf, at $f^{-1}(O_2)$ er omegn af alle sine punkter, hvormed $f^{-1}(O_2)$ er åben, jf. 2.6. □

6.7. DEFINITION. En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ siges at være *åben*, dersom for enhver åben mængde O_1 i $(M_1, \mathcal{T}_1)$ billed-billedmængden $f(O_1)$ er åben i $(M_2, \mathcal{T}_2)$.

6.8. BEMÆRKNING. Betingelsen i 6.7 kan kort udtrykkes således: $f(\mathcal{T}_1) \subset \mathcal{T}_2$. - Hvis $\mathcal{T}_1$ er den trivielle topologi og $f(M_1) = M_2$, eller $\mathcal{T}_2$ er den diskrete topologi, så er f åben, uanset hvilken topologi $\mathcal{T}_2$ hhv. $\mathcal{T}_1$, der betragtes. Afbildningen f har vanskeligere ved at blive åben, des finere $\mathcal{T}_1$ er og des grovere $\mathcal{T}_2$ er.

6.9. BEMÆRKNING. Lad $\mathcal{T}_1$ og $\mathcal{T}_2$ være topologier på samme mængde M. Topologien $\mathcal{T}_1$ er da grovere end $\mathcal{T}_2$, hvis og kun hvis $\mathrm{Id}_M\colon (M, \mathcal{T}_1) \to (M, \mathcal{T}_2)$ er åben.

6.10. DEFINITION. En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ siges at være *åben i et punkt* $x \in M_1$, dersom for enhver omegn U_1 af x i $(M_1, \mathcal{T}_1)$ billedmængden $f(U_1)$ er en omegn af $f(x)$ i $(M_2, \mathcal{T}_2)$.

6.11. SÆTNING. *En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ er åben, hvis og kun hvis den er åben i ethvert punkt af M_1.*

□ Antag først, at f er åben. Lad $x \in M_1$, og lad $U_1 \in \mathcal{U}_1(x)$. Der findes da $O_1 \in \mathcal{T}_1$ med $x \in O_1 \subset U_1$, hvormed $f(x) \in f(O_1) \subset f(U_1)$. Ifølge antagelsen er $f(O_1)$ åben i $(M_2, \mathcal{T}_2)$, og $f(U_1)$ er derfor en omegn af $f(x)$. Antag omvendt, at f er åben i ethvert punkt af M_1. Lad $O_1 \in \mathcal{T}_1$. For ethvert

$x \in O_1$ er da O_1 en omegn af x. Ved brug af antagelsen følger heraf, at $f(O_1)$ er en omegn af alle sine punkter, hvormed $f(O_1)$ er åben, jf. 2.6. □

6.12. DEFINITION. En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ siges at være *homeomorf* (eller en *homeomorfi*), dersom den er bijektiv, kontinuert og åben.

6.13. BEMÆRKNING. Betingelsen i 6.12 er ensbetydende med, at f er bijektiv, og f og f^{-1} begge er kontinuerte. Betingelsen kan kort udtrykkes således: f er bijektiv og $f(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_2$. (Eller således: f er bijektiv og $f^{-1}(\mathcal{T}_2) = \mathcal{T}_1$.)

6.14. BEMÆRKNING. Den inverse til en homeomorfi er en homeomorfi. Findes en homeomorfi af $(M_1, \mathcal{T}_1)$ på $(M_2, \mathcal{T}_2)$, så findes følgelig også en homeomorfi af $(M_2, \mathcal{T}_2)$ på $(M_1, \mathcal{T}_1)$. To rum med denne egenskab siges at være *homeomorfe*. •

6.15. SÆTNING. *Ved sammensætning af kontinuerte hhv. åbne hhv. homeomorfe afbildninger fås igen en kontinuert hhv. åben hhv. homeomorf afbildning.*

□ Lad $(M_1, \mathcal{T}_1)$, $(M_2, \mathcal{T}_2)$ og $(M_3, \mathcal{T}_3)$ være topologiske rum, lad f være en afbildning af $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i $(M_2, \mathcal{T}_2)$ og lad g være en afbildning af $(M_2, \mathcal{T}_2)$ ind i $(M_3, \mathcal{T}_3)$. Antag, at f og g begge er kontinuerte, og lad O være en åben mængde i $(M_3, \mathcal{T}_3)$. Da er $g^{-1}(O)$ åben i $(M_2, \mathcal{T}_2)$ på grund af g's kontinuitet, og $f^{-1}(g^{-1}(O))$ er derfor åben i $(M_1, \mathcal{T}_1)$ på grund af f's kontinuitet. Men $f^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ f)^{-1}(O)$, og følgelig er $g \circ f$ kontinuert. - Påstanden om åbenhed vises på tilsvarende måde. Påstanden om homeomorfi følger af de to første påstande. □

6.16. BEMÆRKNING. Lad f være en afbildning af en mængde M_1 ind i en mængde M_2. Afbildningen f kan da også opfattes som en afbildning af M_1 på $f(M_1)$. Lad videre $\mathcal{T}_1$ og $\mathcal{T}_2$ være topologier på M_1 hhv. M_2, og lad $\mathcal{T}_2'$ betegne delrumstopologien på $f(M_1)$ induceret af $\mathcal{T}_2$. Afbildningen f kan da opfattes både som en afbildning af $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i $(M_2, \mathcal{T}_2)$ og som en afbildning af $(M_1, \mathcal{T}_1)$ på $(f(M_1), \mathcal{T}_2')$. Ved undersøgelse af f's topologiske egenskaber må man i almindelighed skelne mellem de to situationer. Det er rigtigt, at f som afbildning ind i $(M_2, \mathcal{T}_2)$ er kontinuert, hvis og kun hvis den er kontinuert som afbildning på $(f(M_1), \mathcal{T}_2')$. Det er endvidere rigtigt, at hvis f som afbildning ind i $(M_2, \mathcal{T}_2)$ er åben, så er den også åben som afbildning på $(f(M_1), \mathcal{T}_2')$, - men det omvendte er i almindelighed ikke rigtigt.

§7. *Initial- og finaltopologi.*

7.1. Lad f være en afbildning af en mængde M_1 ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$. Som bemærket i 6.2 bliver f kontinuert, hvis M_1 tænkes forsynet med den diskrete topologi. Endvidere gælder, at f har vanskeligere ved at blive kontinuert des grovere topologi M_1 tænkes forsynet med. Af den følgende sætning vil fremgå, at der findes en groveste topologi $\mathcal{T}_1$ på M_1, som gør f kontinuert. Hermed vil samtidig være givet en eksplicit beskrivelse af samtlige de topologier på M_1, som gør f kontinuert.

7.2. SÆTNING. *Lad M være en mængde, lad $((M_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$ være en familie af topologiske rum, og lad der for hvert $i \in I$ være givet en afbildning $f_i : M \to M_i$. Der findes da en groveste topologi $\mathcal{T}$ på M med egenskaben, at alle afbildningerne $f_i : (M, \mathcal{T}) \to (M_i, \mathcal{T}_i)$ er kontinuerte. Mængderne i M af formen $f_i^{-1}(O_i)$, hvor $i \in I$ og $O_i \in \mathcal{T}_i$, udgør en subbasis for $\mathcal{T}$. Mængderne i M af formen*

$$(*) \qquad f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(O_{i_n}),$$

hvor $\{i_1, \cdots, i_n\}$ er en endelig delmængde af I og hvor $O_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$ for $k = 1, \cdots, n$, udgør en basis for $\mathcal{T}$. For hvert $x \in M$ udgør de mængder af formen $(*)$, som indeholder x, en $\mathcal{T}$-omegnsbasis i x. - Topologien $\mathcal{T}$ på M kaldes *initialtopologien* m.h.t. afbildningerne $f_i : M \to (M_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$.

□ Enhver topologi på M, som gør f_i kontinuert, må indeholde mængderne $f_i^{-1}(O_i)$, hvor $O_i \in \mathcal{T}_i$. Den af mængderne $f_i^{-1}(O_i)$, $i \in I$, $O_i \in \mathcal{T}_i$, frembragte topologi er derfor den groveste, som gør alle f_i'erne kontinuerte. Hermed er sætningens første og anden påstand eftervist. Idet $\emptyset$ og M begge er af formen $f_i^{-1}(O_i)$ - nemlig med $O_i = \emptyset$ hhv. $O_i = M_i$ for et vilkårligt $i \in I$ - følger sætningens tredie påstand af 4.5. Sidste påstand følger derefter af 4.9. □

7.3. EKSEMPEL. Lad A være en delmængde af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$, og lad $\mathrm{I}_A\colon A \to M$ betegne inklusionsafbildningen, d.v.s. $\mathrm{I}_A(x) = x$ for $x \in A$. Initialtopologien på A m.h.t. afbildningen $\mathrm{I}_A\colon A \to (M,\mathcal{T})$ er da delrumstopologien $\mathcal{T}_A$, jf. 5.1.

7.4. EKSEMPEL. Lad $((M_i,\mathcal{T}_i))_{i\in I}$ være en familie af topologiske rum, og lad M betegne produktmængden ΠM_i. Initialtopologien på M m.h.t. projektionerne $\pi_i : M \to (M_i,\mathcal{T}_i)$ er da produkttopologien $\Pi\mathcal{T}_i$, jf. 5.6. Produkttopologien er altså den groveste, som gør projektionerne kontinuerte. - Produkttopologien gør i øvrigt projektionerne til åbne afbildninger.

7.5. SÆTNING. *Lad M være en mængde, og lad $\mathcal{T}$ være initialtopologien på M m.h.t. afbildningerne $f_i : M \to (M_i,\mathcal{T}_i)$, $i \in I$. Lad g være en afbildning af et topologisk rum $(M_0,\mathcal{T}_0)$ ind i $(M,\mathcal{T})$. Afbildningen g er da kontinuert, hvis og kun hvis alle afbildningerne $f_i \circ g\colon (M_0,\mathcal{T}_0) \to (M_i,\mathcal{T}_i)$, $i \in I$, er kontinuerte.*

□ Hvis g er kontinuert, så er også alle $f_i \circ g$ kontinuerte, jf. 6.15. Antag omvendt, at alle $f_i \circ g$ er kontinuerte. Lad x være et punkt i M_0, og lad U være en $\mathcal{T}$-omegn af $g(x)$. Der findes da $\{i_1,\dots,i_n\} \subset I$ og $O_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$, $k = 1,\dots,n$, således at

$$g(x) \in f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap\dots\cap f_{i_n}^{-1}(O_{i_n}) \subset U,$$

jf. sidste påstand i 7.2. Heraf følger

$$(*)\qquad \begin{aligned} x &\in g^{-1}(f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap\dots\cap f_{i_n}^{-1}(O_{i_n})) \\ &= g^{-1}(f_{i_1}^{-1}(O_{i_1})) \cap\dots\cap g^{-1}(f_{i_n}^{-1}(O_{i_n})) \\ &= (f_{i_1}\circ g)^{-1}(O_{i_1}) \cap\dots\cap (f_{i_n}\circ g)^{-1}(O_{i_n}) \\ &\subset g^{-1}(U). \end{aligned}$$

Af kontinuiteten af afbildningerne $f_i \circ g$ følger, at mængderne

$$(f_{i_k} \circ g)^{-1}(O_{i_k}) \ , \ k = 1,\cdots,n,$$

er åbne i $(M_0, \mathcal{T}_0)$. Fællesmængden af disse mængder er følgelig også åben. Af (*) fremgår derfor, at $g^{-1}(U)$ er en $\mathcal{T}_0$-omegn af x. Dette viser, at g er kontinuert i x, og dermed kontinuert, jf. 6.6. □

7.6. BEMÆRKNING. Anvendelse af 7.5 på den i 7.3 beskrevne situation "beviser" en af påstandene i 6.16.

7.7. BEMÆRKNING. Ved anvendelse af 7.5 på den i 7.4 beskrevne situation fås følgende væsentlige resultat:
En afbildning g af et topologisk rum $(M_0, \mathcal{T}_0)$ ind i et produktrum $(\Pi M_i, \Pi \mathcal{T}_i)$ er kontinuert, hvis og kun hvis alle afbildningerne $\pi_i \circ g$: $(M_0, \mathcal{T}_0) \to (M_i, \mathcal{T}_i)$ er kontinuerte.

7.8. Vi skal dernæst betragte en situation, som i en vis forstand er dual til den i 7.1 beskrvne. Lad f være en afbildning af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i en mængde M_2. En topologi $\mathcal{T}_2$ på M_2 gør f kontinuert hvis og kun hvis $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$. Den trivielle topologi på M_2 har denne egenskab. Jo finere topologier på M_2 man betragter des vanskeligere har f ved at blive kontinuert. Af det følgende fremgår, at der findes en fineste topologi på M_2, som gør f kontinuert. Hermed vil samtidig mængden af de topologier på M_2, som gør f kontinuert, være bestemt.

7.9. SÆTNING. *Lad M være en mængde, lad $((M_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$ være en familie af topologiske rum, og lad der for hvert $i \in I$ være givet en afbildning $f_i : M_i \to M$. Der findes da en fineste topologi $\mathcal{T}$ på M med egenskaben, at alle afbildningerne $f_i : (M_i, \mathcal{T}_i) \to (M, \mathcal{T})$ er kontinuerte. De åbne mængder i $(M,\mathcal{T})$ er de delmængder A af M for hvilke $f_i^{-1}(A) \in \mathcal{T}_i$ for alle $i \in I$.* - Topologien $\mathcal{T}$ på M kaldes *finaltopologien* m.h.t. afbildningerne $f_i : (M_i, \mathcal{T}_i) \to M$, $i \in I$.

□ Det er let at eftervise, at systemet

$$\mathcal{T} := \{A \subset M \mid \forall i \in I:\ f_i^{-1}(A) \in \mathcal{T}_i\}$$

er en topologi på M, og det er derefter klart, at $\mathcal{T}$ gør alle f_i'erne kontinuerte. Men heraf fremgår det ønskede. Thi er $\mathcal{T}'$ en topologi på M, som gør alle f_i'erne kontinuerte, så må der for alle $O \in \mathcal{T}'$ gælde $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$, $i \in I$, - og dermed $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. □

7.10. EKSEMPEL. Lad $\sim$ være en ækvivalens-relation i en mængde M, og lad $\kappa: M \to M/\sim$ betegne afbildningen, som til $x \in M$ lader svare den ækvivalensklasse, som indeholder x. Lad yderligere $\mathcal{T}$ være en topologi på M. Finaltopologien på $M/\sim$ m.h.t. afbildningen $\kappa: (M,\mathcal{T}) \to M/\sim$ er da kvotienttopologien $\mathcal{T}_\sim$, jf. 5.9.

7.11. SÆTNING. *Lad M være en mængde, og lad $\mathcal{T}$ være finaltopologien på M m.h.t. afbildningerne $f_i : (M_i, \mathcal{T}_i) \to M$, $i \in I$. Lad g være en afbildning af $(M,\mathcal{T})$ ind i et topologisk rum $(M_0, \mathcal{T}_0)$. Afbildningen g er da kontinuert, hvis og kun hvis alle afbildningerne $g \circ f_i : (M_i, \mathcal{T}_i) \to (M_0, \mathcal{T}_0)$, $i \in I$, er kontinuerte.*

□ Hvis g er kontinuert, så er også alle $g \circ f_i$, $i \in I$, kontinuerte, jf. 6.15. Antag omvendt, at alle $g \circ f_i$, $i \in I$, er kontinuerte. Lad O være en åben mængde i $(M_0, \mathcal{T}_0)$. Af det givne følger da at $(g \circ f_i)^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$ for hvert $i \in I$. Men idet $(g \circ f_i)^{-1}(O) = f_i^{-1}(g^{-1}(O))$ ses, at $g^{-1}(O) \in \mathcal{T}$, jf. 7.9. Heraf fremgår, at g er kontinuert. □

§8. *Adskillelsesaksiomer.*

8.1. Det er velkendt, at der for to forskellige punkter x_1 og x_2 i et metrisk rum (M,d) findes disjunkte åbne mængder O_1 og O_2 med $x_1 \in O_1$ og $x_2 \in O_2$. Dette kan udtrykkes ved at sige, at der er "tilstrækkeligt mange" åbne mængder til at skille punkter. I det følgende skal denne og andre lignende skillende egenskaber ved de åbne mængder formuleres som såkaldte adskillelsesaksiomer. [T i 8.2-8.5 står for Trennung.]

8.2. DEFINITION. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være et T_1-*rum*, dersom følgende betingelse er opfyldt:

(T_1) For alle punkter x_1 og x_2 med $x_1 \neq x_2$ findes åbne mængder O_1 og O_2 med $x_1 \in O_1$, $x_2 \notin O_1$, $x_2 \in O_2$ og $x_1 \notin O_2$.

8.3. DEFINITION. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være et T_2-*rum*, dersom følgende betingelse er opfyldt:

(T_2) For alle punkter x_1 og x_2 med $x_1 \neq x_2$ findes disjunkte åbne mængder O_1 og O_2 med $x_1 \in O_1$ og $x_2 \in O_2$.

Et T_2-rum kaldes også et *Hausdorff*-rum.

8.4. DEFINITION. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være et T_3-*rum*, dersom følgende betingelse er opfyldt:

(T_3) For alle punkter x og alle ikke-tomme afsluttede mængder F med $x \notin F$ findes disjunkte åbne mængder O_1 og O_2 med $x \in O_1$ og $F \subset O_2$.

Et T_3-rum, som tillige er et T_1-rum, kaldes et *regulært* rum.

8.5. DEFINITION. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være et T_4-*rum*, dersom følgende betingelse er opfyldt:

(T_4) For alle ikke-tomme disjunkte afsluttede mængder F_1 og F_2 findes disjunkte åbne mængder O_1 og O_2 med $F_1 \subset O_1$ og $F_2 \subset O_2$.

Et T_4-rum, som tillige er et T_1-rum, kaldes et *normalt* rum.

8.6. BEMÆRKNING. Bemærk, at betingelsen (T_1) er ensbetydende med følgende: For alle punkter x_1 og x_2 med $x_1 \neq x_2$ findes en åben mængde O med $x_1 \in O$ og $x_2 \notin O$. Denne betingelse er stærkere end følgende (som betegnes (T_0)): For alle punkter x_1 og x_2 med $x_1 \neq x_2$ findes en åben mængde O, således at der enten gælder $x_1 \in O$ og $x_2 \notin O$, eller $x_2 \in O$ og $x_1 \notin O$.

8.7. BEMÆRKNING. Åbenbart gælder (T_2) $\Rightarrow$ (T_1). Ingen anden implikation mellem de fire betingelser er almengyldig. Men for et topologisk rum, hvori alle 1-punkts mængder vides at være afsluttede, gælder åbenbart, at (T_4) implicerer (T_3), og (T_3) implicerer (T_2). Af 8.8 fremgår, at 1-punkts mængderne i $(M,\mathcal{T})$ er afsluttede, hvis og kun hvis $(M,\mathcal{T})$ er et T_1-rum. Der gælder derfor $(T_4)\wedge(T_1) \Rightarrow (T_3)$ og $(T_3)\wedge(T_1) \Rightarrow (T_2)$. Ethvert normalt rum er altså regulært, og ethvert regulært rum er et Hausforff-rum. Heraf ses, at i definitionen af regulært og normalt rum kan betingelsen (T_1) erstattes med den stærkere betingelse (T_2).

8.8. SÆTNING. *Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er et T_1-rum, hvis og kun hvis enhver 1-punkts mængde i M er afsluttet.*

□ Beviset overlades til læseren. □

8.9. SÆTNING. *Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er et T_2-rum, hvis og kun hvis der for ethvert punkt $x \in M$ og ethvert punkt $y \in M \setminus \{x\}$ findes en afsluttet omegn U af x med $y \notin U$.*

□ Beviset overlades til læseren. □

8.10. SÆTNING. *Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er et T_3-rum, hvis og kun hvis der for ethvert punkt $x \in M$ og enhver åben mængde O_1 med $x \in O_1$ findes en åben mængde O_2 med $x \in O_2 \subset \mathrm{cl}O_2 \subset O_1$, - altså hvis og kun hvis ethvert punkt har en omegnsbasis bestående af afsluttede mængder.*

□ Beviset overlades til læseren. □

8.11. SÆTNING. *Et topologisk rum* $(M,\mathcal{T})$ *er et* T_4*-rum, hvis og kun hvis der for enhver afsluttet mængde* F *i* M *og enhver åben mængde* O_1 *med* $F \subset O_1$ *findes en åben mængde* O_2 *med* $F \subset O_2 \subset \mathrm{cl}O_2 \subset O_1$.

□ Beviset overlades til læseren. □

8.12. Spørgsmålet om gyldighed af et eller flere af adskillelsesaksiomerne for et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er tæt forbundet med spørgsmålet om eksistens af "mange" kontinuerte (reelle) funktioner på $(M,\mathcal{T})$. [Her og i det følgende forstås ved en kontinuert funktion en afbildning $f\colon (M,\mathcal{T}) \to \mathbb{R}$, hvor $\mathbb{R}$ tænkes forsynet med den sædvanlige topologi.] Hvis $(M,\mathcal{T})$ har egenskaben, at de kontinuerte funktioner på $(M,\mathcal{T})$ *skiller punkter*, - d.v.s. at der for alle punkter $x_1, x_2 \in M$ med $x_1 \neq x_2$ findes en kontinuert funktion f på $(M,\mathcal{T})$ med $f(x_1) \neq f(x_2)$, - så er $(M,\mathcal{T})$ et Hausdorff-rum. Thi af $f(x_1) \neq f(x_2)$ følger eksistensen af åbne mængder O_1 og O_2 i $\mathbb{R}$ med $f(x_1) \in O_1$, $f(x_2) \in O_2$ og $O_1 \cap O_2 = \emptyset$; mængderne $f^{-1}(O_1)$ og $f^{-1}(O_2)$ er da disjunkte åbne mængder i $(M,\mathcal{T})$ med $x_1 \in f^{-1}(O_1)$ og $x_2 \in f^{-1}(O_2)$. Et analogt argument viser, at hvis de kontinuerte funktioner på $(M,\mathcal{T})$ *skiller punkter og afsluttede mængder*, - d.v.s. at der for alle punkter x og alle ikke-tomme afsluttede mængder F med $x \notin F$ findes en kontinuert funktion f på $(M,\mathcal{T})$, som er konstant på F, således at $f(x)$ er forskellig fra f's værdi på F, - så har $(M,\mathcal{T})$ egenskaben (T_3). Og hvis de kontinuerte funktioner på $(M,\mathcal{T})$ *skiller afsluttede mængder*, - d.v.s. at der for alle ikke-tomme disjunkte afsluttede mængder F_1 og F_2 findes en kontinuert funktion f på $(M,\mathcal{T})$, som er konstant på F_1 og på F_2, således at værdien på F_1 er forskellig fra værdien på F_2, - så har $(M,\mathcal{T})$ egenskaben (T_4). Vi skal i den følgende sætning vise, at hvis omvendt $(M,\mathcal{T})$ er et T_4-rum, så skiller de kontinuerte funktioner afsluttede mængder. "Kun hvis" udsagnet kaldes *Urysohn's lemma*.

8.13. SÆTNING. *Et topologisk rum* $(M,\mathcal{T})$ *er et* T_4*-rum, hvis og kun hvis der for alle ikke-tomme disjunkte afsluttede mængder* F_0 *og* F_1 *findes en kontinuert funktion* f *på* $(M,\mathcal{T})$ *med* $f(F_0) = \{0\}$, $f(F_1) = \{1\}$ *og* $f(M) \subset [0,1]$

□ Som bemærket i 8.12 er "hvis" udsagnet oplagt. Antag derfor, at $(M,\mathcal{T})$ er et T_4-rum, og lad F_0 og F_1 være ikke-tomme disjunkte afsluttede mængder i $(M,\mathcal{T})$. Da er $O_1 := M \setminus F_1$ en åben mængde med $F_0 \subset O_1$, og ifølge 8.11 findes derfor en åben mængde O_0 med

$$F_0 \subset O_0 \subset \mathrm{cl}O_0 \subset O_1 = M \setminus F_1 .$$

Anvendes derefter 8.11 på $\mathrm{cl}O_0$ og O_1, fås en åben mængde $O_{1/2}$ med

$$\mathrm{cl}O_0 \subset O_{1/2} \subset \mathrm{cl}O_{1/2} \subset O_1 .$$

Anvendes derefter 8.11 på $\mathrm{cl}O_0$ og $O_{1/2}$, og på $\mathrm{cl}O_{1/2}$ og O_1, fås åbne mængder $O_{1/4}$ og $O_{3/4}$ med

$$\mathrm{cl}O_0 \subset O_{1/4} \subset \mathrm{cl}O_{1/4} \subset O_{1/2},$$

$$\mathrm{cl}O_{1/2} \subset O_{3/4} \subset \mathrm{cl}O_{3/4} \subset O_1 .$$

Ved induktion indses herefter, at der for hvert rationalt tal i $[0,1]$ af formen $k/2^n$ kan tilordnes en åben mængde $O_{k/2^n}$, således at der gælder $\mathrm{cl}O_r \subset O_s$ når $r < s$. Vi sætter nu

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{\, k/2^n \mid x \in O_{k/2^n} \,\} & \text{for } x \in M \setminus F_1 , \\ 1 \quad \text{for } x \in F_1 . \end{cases}$$

Vi har da $f(M) \subset [0,1]$, $f(F_0) = \{0\}$ og $f(F_1) = \{1\}$. Det påstås, at f er kontinuert. Betragt først et punkt $x \in M$ med $f(x) \in]0,1[$, og lad U være en omegn af $f(x)$ i $[0,1]$. Der findes da r,s af formen $k/2^n$ med $r < f(x) < s$ og $[r,s] \subset U$. Sæt $V := (M \setminus \mathrm{cl}O_r) \cap O_s$; da er V åben i $(M,\mathcal{T})$. Af $f(x) < s$ følger $x \in O_s$, og af $r < f(x)$ følger $x \notin \mathrm{cl}O_r$. Vi har altså $x \in V$, og V

er derfor en (åben) omegn af x. For et vilkårligt punkt $y \in V$ gælder $f(y) \in [r,s]$; thi $y \notin \mathrm{cl}\,O_r$ giver $r \leqq f(y)$, og $y \in O_s$ giver $f(y) \leqq s$. Vi har derfor $f(V) \subset U$, hvormed $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$. Dette viser, at f er kontinuert i x. På tilsvarende måde ses, at f også er kontinuert i ethvert punkt, hvor f tager værdien 0 eller 1. □

8.14. BEMÆRKNING. Det er værd at notere sig, at hvis der til givne ikke-tomme disjunkte mængder F_0 og F_1 i et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ findes en kontinuert funktion, som blot skiller F_0 og F_1 i den i 8.12 beskrevne betydning, så findes også én, som skiller på den i 8.13 beskrevne måde. Er nemlig f en kontinuert funktion på $(M,\mathcal{T})$ med $f(F_0) = \{a\}$, og $f(F_1) = \{b\}$, hvor $a \neq b$, så vil funktionen

$$g := \inf\{1, |(f-a)(b-a)^{-1}|\}$$

ligeledes være kontinuert, og der vil gælde $g(F_0) = \{0\}$, $g(F_1) = \{1\}$ og $g(M) \subset [0,1]$. Kernen i Urysohn's lemma er altså udsagnet, at de kontinuerte funktioner på et T_4-rum skiller de afsluttede mængder.

8.15. BEMÆRKNING. De til 8.13 analoge udsagn om T_2-rum og T_3-rum er ikke sande: Der findes T_2-rum hhv. T_3-rum uden egenskaben at de kontinuerte funktioner skiller punkter hhv. punkter og afsluttede mængder.

8.16. DEFINITION. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være et $T_{3.5}$-*rum*, dersom følgende betingelse er opfyldt

($T_{3.5}$) For alle punkter x og alle ikke-tomme afsluttede mængder F med $x \notin F$ findes en kontinuert funktion f på $(M,\mathcal{T})$ med $f(x) = 0$, $f(F) = \{1\}$ og $f(M) \subset [0,1]$.

Et $T_{3.5}$-rum, som tillige er et T_1-rum, kaldes et *fuldstændig regulært* rum.

8.17. BEMÆRKNING. Af det i 8.14 sagte fremgår, at et rum er et $T_{3.5}$-rum, hvis (og kun hvis) de kontinuerte funktioner skiller punkter og afsluttede mængder.

8.18. BEMÆRKNING. Af det i 8.12 sagte fremgår, at $(T_{3.5}) \Rightarrow (T_3)$, og følgelig er ethvert fuldstændig regulært rum regulært. Ingen andre implikationer mellem $(T_{3.5})$ og betingelserne (T_1), (T_2), (T_3), (T_4) er almengyldige. Men hvis *1*-punkts mængderne er afsluttede altså hvis rummet er et T_1-rum, jf. 8.8, så er ifølge 8.13 $(T_{3.5})$ en konsekvens af (T_4). Et normalt rum er altså fuldstændig regulært. I definitionen af fuldstændig regulært rum kan betingelsen (T_1) derfor erstattes med den stærkere betingelse (T_2).

8.19. BEMÆRKNING. Egenskaberne (T_1), (T_2), (T_3), $(T_{3.5})$, regularitet, og fuldstændig regularitet er *arvelige* i den forstand, at hvis $(M,\mathcal{T})$ har den pågældende egenskab, så vil også ethvert delrum $(A,\mathcal{T}_A)$ have egenskaben. Derimod er egenskaberne (T_4) og normalitet ikke arvelige.

8.20. EKSEMPEL. Af 8.1 fremgår, at ethvert metrisabelt topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er et Hausdorff-rum. Der gælder endda, at ethvert sådant rum er normalt. Lad nemlig d være en metrik på M, således at $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Lad F_0 og F_1 være ikke-tomme disjunkte afsluttede mængder i $(M,\mathcal{T}_d)$, og sæt

$$f := \frac{d(\cdot,F_0)}{d(\cdot,F_0)+d(\cdot,F_1)}$$

hvor

$$d(x,A) := \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$$

for $A \subset M$. Da er f en kontinuert funktion på $(M,\mathcal{T}_d)$ med $f(F_0) = \{0\}$, $f(F_1) = \{1\}$ og $f(M) \subset [0,1]$. (Funktionen

$d(\cdot,A)$ er kontinuert, uanset om A er afsluttet. Funktionen $d(\cdot,F_0) + d(\cdot,F_1)$ er overalt $\neq 0$. Thi $d(x,F_0) + d(x,F_1) = 0$ er ensbetydende med $d(x,F_0) = d(x,F_1) = 0$, altså med $x \in \mathrm{cl}F_0 \cap \mathrm{cl}F_1$; men ifølge antagelsen gælder $\mathrm{cl}F_0 \cap \mathrm{cl}F_1 = \emptyset$.)

§9. *Kompakthed.*

9.1. Et system $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$ af delmængder af en mængde M siges som bekendt at være en *overdækning* af M, dersom $M = \cup S_i$. En overdækning af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ kaldes en *åben overdækning*, dersom den består af åbne mængder.

9.2. DEFINITION. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være *quasi-kompakt*, dersom enhver åben overdækning af $(M,\mathcal{T})$ indeholder en overdækning bestående af kun endelig mange mængder. Et quasi-kompakt rum, som tillige er et Hausdorff-rum, kaldes et *kompakt* rum.

9.3. BEMÆRKNING. Ved overgang til komplementærmængder ses, at $(M,\mathcal{T})$ er quasi-kompakt, hvis og kun hvis der for ethvert system $\mathcal{S}$ af afsluttede delmængder af $(M,\mathcal{T})$ gælder, at hvis alle mængderne i $\mathcal{S}$ har en tom fællesmængde, så vil der findes endelig mange mængder fra $\mathcal{S}$ med tom fællesmængde.

9.4. DEFINITION. En delmængde A af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være *quasi-kompakt* hhv. *kompakt* (i $(M,\mathcal{T})$), dersom delrummet $(A, \mathcal{T}_A)$ er quasi-kompakt hhv. kompakt.

9.5. BEMÆRKNING. Bemærk, at en delmængde A af $(M,\mathcal{T})$ er quasi-kompakt, hvis og kun hvis der for ethvert system $\mathcal{S}$ af åbne delmængder af M, som overdækker A, findes et endeligt delsystem af $\mathcal{S}$, som overdækker A.

9.6. SÆTNING. *Lad A være en afsluttet delmængde af et quasi-kompakt hhv. kompakt topologisk rum $(M,\mathcal{T})$. Da er A quasi-kompakt hhv. kompakt.*

□ Lad $\mathcal{S}$ være et system af åbne mængder i $(M,\mathcal{T})$, som overdækker A, - jf. 9.5. Da A er afsluttet, er $M \setminus A$ åben, og $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \cup \{M \setminus A\}$ er derfor et system af åbne mængder i $(M,\mathcal{T})$, som overdækker M. Når $(M,\mathcal{T})$ er quasi-kompakt, vil der findes et endeligt delsystem $\mathcal{S}''$ af $\mathcal{S}'$, som overdækker M. Systemet $\mathcal{S}''' := \mathcal{S}'' \setminus \{M \setminus A\}$

er da et endeligt delsystem af $\mathcal{S}$, som overdækker A. Hermed er påstanden vedrørende quasi-kompakthed bevist. Påstanden vedrørende kompakthed følger heraf, idet ethvert delrum af et Hausdorff-rum er et Hausdorff-rum. □

9.7. SÆTNING. *Lad A være en kompakt delmængde af et Hausdorff-rum $(M,\mathcal{T})$. Da er A afsluttet.*

□ Lad $x \in M \setminus A$. For hvert $y \in A$ findes da på grund af Hausdorff-egenskaben disjunkte åbne mængder O'_y og O''_y med $x \in O'_y$ og $y \in O''_y$. Systemet af mængderne O''_y, $y \in A$, er åbenbart en overdækning af den kompakte mængde A, og der findes derfor $y_1,\dots,y_n \in A$ med $A \subset O''_{y_1} \cup \dots \cup O''_{y_n}$. Fællesmængden af de tilsvarende mængder $O'_{y_1},\dots,O'_{y_n}$ er en åben mængde, som er disjunkt med $O''_{y_1} \cup \dots \cup O''_{y_n}$, og derfor yderligere disjunkt med A. Hermed er vist, at der til hvert $x \in M \setminus A$ findes en åben mængde O med $x \in O \subset M \setminus A$. Dette viser, at A er afsluttet. □

9.8. BEMÆRKNING. Af 9.6 og 9.7 fremgår, at de kompakte mængder i et kompakt rum netop er de afsluttede mængder.

9.9. BEMÆRKNING. Lad $(M,\mathcal{T})$ være et Hausdorff-rum. Det er da klart, at foreningsmængden af endelig mange kompakte delmængder af $(M,\mathcal{T})$ igen er kompakt. Endvidere er det let at se ved anvendelse af 9.6, at fællesmængden af et system af afsluttede mængder er kompakt, når blot én af mængderne er kompakt; specielt er altså fællesmængden af kompakte mængder igen kompakt.

9.10. SÆTNING. *Lad $(M_1,\mathcal{T}_1)$ være quasi-kompakt, og lad f være en kontinuert afbildning af $(M_1,\mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2,\mathcal{T}_2)$. Da er $f(M_1)$ quasi-kompakt i $(M_2,\mathcal{T}_2)$.*

□ Lad $\mathcal{S}$ være et system af åbne mængder i $(M_2,\mathcal{T}_2)$, som overdækker $f(M_1)$. Systemet $f^{-1}(\mathcal{S})$ af originalmængder er da en overdækning af M_1, og mængderne i $f^{-1}(\mathcal{S})$ er åbne på grund af f's kontinuitet. Quasi-kompaktheden af $(M_1,\mathcal{T}_1)$ sikrer, at der findes et endeligt delsystem $\mathcal{S}'$ af $\mathcal{S}$, således at $f^{-1}(\mathcal{S}')$

overdækker M_1. Men så vil $\mathcal{S}'$ være et endeligt delsystem af $\mathcal{S}$, som overdækker $f(M_1)$. □

9.11. SÆTNING. *Lad* $(M_1, \mathcal{T}_1)$ *være kompakt, lad* $(M_2, \mathcal{T}_2)$ *være et Hausdorff-rum, og lad* f *være en kontinuert bijektiv afbildning af* $(M_1, \mathcal{T}_1)$ *på* $(M_2, \mathcal{T}_2)$. *Da er* f *en homeomorfi.*

□ Vi viser, at f er åben. Hertil betragtes en åben mængde O i $(M_1, \mathcal{T}_1)$. Vi har da $f(O) = M_2 \setminus f(M_1 \setminus O)$ på grund af, at f er bijektiv. Af 9.6 følger, at $M_1 \setminus O$ er kompakt. Af 9.10 følger dernæst, at $f(M_1 \setminus O)$ er kompakt. Derefter giver 9.7, at $f(M_1 \setminus O)$ er afsluttet. Følgelig er komplementærmængden $f(O)$ åben. □

9.12. BEMÆRKNING. Af 9.11 følger, at en kompakt topologi på en mængde M er en minimal Hausdorff-topologi. Specielt gælder, at to sammenlignelige kompakte topologier på en mængde er identiske.

9.13. SÆTNING. *Ethvert kompakt topologisk rum* $(M,\mathcal{T})$ *er normalt.*

□ Lad F_1 og F_2 være ikke-tomme disjunkte afsluttede mængder i $(M,\mathcal{T})$. Ifølge 9.6 er da F_1 og F_2 kompakte. Af F_1's kompakthed følger, at der for hvert $x \in F_2$ findes disjunkte åbne mængder O_x' og O_x'' med $x \in O_x'$ og $F_1 \subset O_x''$; dette indses som i beviset for 9.7. Af F_2's kompakthed følger dernæst, at der findes endelig mange punkter $x_1, \cdots, x_n \in F_2$, således at mængderne $O_{x_1}', \cdots, O_{x_n}'$ overdækker F_2. Mængderne

$$O_1 := O_{x_1}'' \cap \cdots \cap O_{x_n}''$$
$$O_2 := O_{x_1}' \cup \cdots \cup O_{x_n}'$$

er disjunkte åbne mængder med $F_1 \subset O_1$ og $F_2 \subset O_2$. Rummet er altså et T_4-rum. Da det tillige er et Hausdorff-rum, er det altså normalt. □

§10. *Lokalkompakthed.*

10.1. DEFINITION. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være *lokalkompakt*, dersom det er et Hausdorff-rum, og ethvert punkt har en omegnsbasis bestående af kompakte mængder.

10.2. SÆTNING. *Lad $(M,\mathcal{T})$ være et Hausdorff-rum med egenskaben, at ethvert punkt har en kompakt omegn. Da er $(M,\mathcal{T})$ lokalkompakt.*

□ Lad x være et punkt i M, og lad A være en kompakt omegn af x. Da $(A,\mathcal{T}_A)$ er normalt (jf. 9.13), og dermed et T_3-rum (jf. 8.7), har x en $\mathcal{T}_A$-omegnsbasis $\mathcal{B}_A(x)$ bestående af $\mathcal{T}_A$-afsluttede mængder. Idet A er en $\mathcal{T}$-omegn af x, er systemet $\mathcal{B}_A(x)$ faktisk en $\mathcal{T}$-omegnsbasis i x, og af 9.6 fremgår, at omegnene i $\mathcal{B}_A(x)$ er kompakte. □

10.3. BEMÆRKNING. Af 10.2 fremgår, at ethvert kompakt rum $(M,\mathcal{T})$ er lokalkompakt; thi M er en omegn af ethvert $x \in M$.

10.4. DEFINITION. Ved en *kompaktifikation* af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ forstås et par $((\hat{M},\hat{\mathcal{T}}),\varphi)$, hvor $(\hat{M},\hat{\mathcal{T}})$ er et kompakt topologisk rum, og φ er en homeomorfi af $(M,\mathcal{T})$ på en tæt delmængde af $(\hat{M},\hat{\mathcal{T}})$.

10.5. SÆTNING. *Ethvert lokalkompakt topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ har en kompaktifikation.*

□ Hvis $(M,\mathcal{T})$ endda er kompakt (jf. 10.3), så er parret $((M,\mathcal{T}), \mathrm{Id}_M)$ en kompaktifikation af $(M,\mathcal{T})$. Antag derfor, at $(M,\mathcal{T})$ ikke er kompakt. Vi sætter $\hat{M} := M \cup \{\omega\}$, hvor ω er et punkt, som ikke tilhører M. Sæt

$$\mathcal{S} := \{O \subset \hat{M} \mid \omega \in O \text{ og } M \setminus O \text{ kompakt}\},$$

og sæt $\hat{\mathcal{T}} := \mathcal{T} \cup \mathcal{S}$. Da er $\hat{\mathcal{T}}$ en topologi på $\hat{M}$; dette eftervises let ved brug af, at $\mathcal{S}$ er afsluttet under dannelse af vilkårlige foreningsmængder og endelige fællesmængder (jf. 9.9). Det påstås, at det topologiske rum $(\hat{M},\hat{\mathcal{T}})$ er kompakt. Betragt først et system $\mathcal{R}$ af åbne mængder i $(\hat{M},\hat{\mathcal{T}})$, som overdækker $\hat{M}$. Mindst een af mængderne i $\mathcal{R}$ må da indeholde punktet ω; for den pågældende mængde O må derfor gælde, at $M \setminus O$ er kompakt. Da nu $\mathcal{R} \setminus \{O\}$ overdækker $M \setminus O$, findes endelig mange mængder $O_1,\cdots,O_n \in \mathcal{R} \setminus \{O\}$, som overdækker $M \setminus O$. Ialt fås derfor, at $O,O_1,\cdots,O_n$ overdækker $\hat{M}$. Hermed er vist, at $(\hat{M},\hat{\mathcal{T}})$ er quasikompakt. Betragt dernæst to forskellige punkter x og y i $\hat{M}$. Hvis begge punkter ligger i M, så findes disjunkte mængder $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ med $x \in O_1$ og $y \in O_2$, thi $(M,\mathcal{T})$ er et Hausdorff-rum. Da $\mathcal{T} \subset \hat{\mathcal{T}}$, findes altså åbne mængder i $(\hat{M},\hat{\mathcal{T}})$, som skiller de to punkter. Dernæst betragtes det tilfælde, hvor det ene af de to punkter er punktet ω, lad os sige, at $y = \omega$. Da $(M,\mathcal{T})$ er lokalkompakt, findes en kompakt mængde A i $(M,\mathcal{T})$ med $x \in \operatorname{int}A$. Der gælder da $x \in \operatorname{int}A \in \hat{\mathcal{T}}$ og $y \in \hat{M} \setminus A \in \hat{\mathcal{T}}$; mængderne $\operatorname{int}A$ og $M \setminus A$ er derfor åbne mængder i $(\hat{M},\hat{\mathcal{T}})$, som skiller de to punkter. Hermed er ialt vist, at $(\hat{M},\hat{\mathcal{T}})$ er kompakt. Dernæst bemærkes, at da $(M,\mathcal{T})$ ikke er kompakt, er $\{\omega\}$ ikke en åben mængde i $(\hat{M},\hat{\mathcal{T}})$. Heraf fremgår, at M er tæt i $(\hat{M},\hat{\mathcal{T}})$. Det bemærkes endelig, at for enhver mængde $O \in \mathcal{S}$ gælder $M \cap O \in \mathcal{T}$, jf. 9.7. Dette viser, at den af $\hat{\mathcal{T}}$ på M inducerede delrumstopologi $\hat{\mathcal{T}}_M$ er identisk med den givne topologi $\mathcal{T}$. Anderledes formuleret: Afbildningen $x \to x$ af M ind i $\hat{M}$ er en homeomorfi af $(M,\mathcal{T})$ på delrummet $(M, \hat{\mathcal{T}}_M)$ af $(\hat{M},\hat{\mathcal{T}})$. Hermed er sætningen bevist. □

10.6. BEMÆRKNING. Den i beviset for 10.5 angivne kompaktifikation af et lokalkompakt rum $(M,\mathcal{T})$ kaldes *1-punkts kompaktifikationen* eller *Alexandroff kompaktifikationen*.

10.7. BEMÆRKNING. Sætning 10.5 viser specielt, at ethvert lokalkompakt rum er fuldstændig regulært; thi et kompakt rum er normalt (jf. 9.13), et normalt rum er fuldstændig regulært (jf. 8.18), og et delrum af et fuldstændig regulært rum er fuldstændig regulært (jf. 8.19)

§11. *Parakompakthed.*

11.1. DEFINITION. Et system $\mathcal{S}$ af delmængder af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være *lokalt endeligt*, dersom der for ethvert $x \in M$ findes en omegn $U \in \mathcal{U}(x)$, således at der kun gælder $U \cap S \neq \emptyset$ for endelig mange mængder $S \in \mathcal{S}$.

11.2. DEFINITION. Lad $\mathcal{R}$ og $\mathcal{S}$ være systemer af delmængder af en mængde M. Systemet $\mathcal{R}$ siges da at være en *forfining* af $\mathcal{S}$, dersom der for enhver mængde $R \in \mathcal{R}$ findes en mængde $S \in \mathcal{S}$, således at $R \subset S$.

11.3. DEFINITION. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være *parakompakt*, dersom det er et Hausdorff-rum, og der for enhver åben overdækning $\mathcal{S}$ af $(M,\mathcal{T})$ findes en lokalt endelig åben overdækning $\mathcal{R}$, således at $\mathcal{R}$ er en forfining af $\mathcal{S}$.

11.4. BEMÆRKNING. Ethvert endeligt system af delmængder er lokalt endeligt. Er $\mathcal{R}$ og $\mathcal{S}$ systemer af delmængder med $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, så er $\mathcal{R}$ en forfining af $\mathcal{S}$. Følgelig er ethvert kompakt rum parakompakt.

11.5. SÆTNING. *Lad $\mathcal{S}$ være et lokalt endeligt system af delmængder af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$. Da er også systemet $\bar{\mathcal{S}} := \{\mathrm{cl}S \mid S \in \mathcal{S}\}$ lokalt endeligt, og for ethvert delsystem $\mathcal{S}'$ af $\mathcal{S}$ gælder*

$$\mathrm{cl}\Big(\bigcup_{S\in\mathcal{S}'} S\Big) = \bigcup_{S\in\mathcal{S}'} \mathrm{cl}S.$$

□ Lad $x \in M$. Der findes da en åben omegn U af x og endelig mange mængder $S_1,\dots,S_n \in \mathcal{S}$, således at $U \cap S = \emptyset$ for alle $S \in \mathcal{S} \setminus \{S_1,\dots,S_n\}$. For de samme mængder S gælder da også $U \cap \mathrm{cl}S = \emptyset$; thi $M \setminus U$ er en afsluttet mængde, som indeholder S, og dermed $\mathrm{cl}S$. Dette viser, at $\bar{\mathcal{S}}$ er lokalt endeligt. Lad dernæst $\mathcal{S}'$ være et delsystem af $\mathcal{S}$, og lad x være et punkt i $\mathrm{cl}(\bigcup S)$, hvor foreningsmængden tages over $S \in \mathcal{S}'$. Lad U være en åben omegn af x med den ovenfor angivne egenskab. Der må da gælde $x \in \mathrm{cl}(S'_1 \cup \cdots \cup S'_m)$, hvor $S'_1, \cdots, S'_m$ betegner de af mængderne $S_1, \cdots, S_n$, som tilhører $\mathcal{S}'$. Men $\mathrm{cl}(S'_1 \cup \cdots \cup S'_m) = \mathrm{cl}S'_1 \cup \cdots \cup \mathrm{cl}S'_m$, og vi får derfor $x \in \bigcup \mathrm{cl}S$, hvor foreningsmængden tages over $S \in \mathcal{S}'$. Hermed er den ene inklusion vist. Den anden er almengyldig. ▫

11.6. SÆTNING. *Ethvert parakompakt topologisk rum* $(M,\mathcal{T})$ *er normalt.*

▫ Det vises først, at $(M,\mathcal{T})$ er regulært. Lad x være et punkt i M, og lad F være en afsluttet mængde, således at $x \notin F$. For ethvert punkt $y \in F$ findes da en åben omegn U_y af y med $x \notin \mathrm{cl}U_y$; dette følger af 8.9. Systemet

$$\mathcal{S} := \{U_y \mid y \in F\} \cup \{M \setminus F\}$$

er nu en åben overdækning af M. Lad $\mathcal{R}$ være en lokalt endelig åben overdækning, som er en forfining, og sæt

$$\mathcal{R}' := \{R \in \mathcal{R} \mid R \cap F \neq \emptyset\},$$

$$A := \bigcup_{R \in \mathcal{R}'} \mathrm{cl}R,$$

$$O_1 := M \setminus A, \qquad O_2 := \bigcup_{R \in \mathcal{R}'} R.$$

Af 11.5 fremgår, at A er afsluttet; O_1 og O_2 er altså åbne. Endvidere er det klart, at O_1 og O_2 er disjunkte, og let at se, at $x \in O_1$ og $F \subset O_2$. Hermed er vist, at rummet er regulært. - Dernæst betragtes to ikke-tomme disjunkte afsluttede mængder F_0 og F. For ethvert punkt $y \in F$ findes da en åben omegn U_y af y med $F_0 \cap \mathrm{cl}U_y = \emptyset$; dette følger af 8.10. Lad derefter $\mathcal{S}, \mathcal{R}, \mathcal{R}', A, O_1$ og O_2 være som ovenfor. Da er O_1 og O_2 disjunkte åbne mængder med $F_0 \subset O_1$ og $F \subset O_2$. ▫

§12. *Sammenhæng.*

12.1. DEFINITION. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være *sammenhængende*, dersom der ikke findes ikke-tomme disjunkte åbne mængder O_1 og O_2 i $(M,\mathcal{T})$ med $O_1 \cup O_2 = M$. Et topologisk rum, som ikke er sammenhængende, kaldes *usammenhængende*.

12.2. SÆTNING. *For et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er følgende tre påstande ensbetydende:* (1) $(M,\mathcal{T})$ *er sammenhængende.*
(2) *Der findes ikke ikke-tomme disjunkte afsluttede mængder F_1 og F_2 i $(M,\mathcal{T})$ med $F_1 \cup F_2 = M$.* (3) *$\emptyset$ og M er de eneste delmængder af $(M,\mathcal{T})$, som både er åbne og afsluttede.*

□ Oplagt. □

12.3. DEFINITION. En delmængde A af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være *sammenhængende*, dersom delrummet $(A, \mathcal{T}_A)$ er sammenhængende.

12.4. SÆTNING. *En delmængde A af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er sammenhængende, hvis og kun hvis der for alle åbne delmængder O_1 og O_2 i $(M,\mathcal{T})$ med $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$ og $A \subset O_1 \cup O_2$ gælder $A \subset O_1$ og $A \cap O_2 = \emptyset$, eller $A \subset O_2$ og $A \cap O_1 = \emptyset$.*

□ Ifølge 12.3 og 5.1 er A sammenhængende, hvis og kun hvis der for alle åbne mængder O_1 og O_2 i $(M,\mathcal{T})$ med

$$(*) \qquad (A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = \emptyset$$

$$(\dagger) \qquad (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2) = A$$

gælder enten $A \cap O_1 = \emptyset$ og $A \cap O_2 = A$, eller $A \cap O_1 = A$ og $A \cap O_2 = \emptyset$. Heraf følger påstanden, idet (*) er ensbetydende med $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$ og (†) er ensbetydende med $A \subset O_1 \cup O_2$. □

12.5. SÆTNING. *Lad $\{A_i \mid i \in I\}$ være et system af sammenhængende delmængder af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$. Hvis der for alle $i_1, i_2 \in I$ gælder $A_{i_1} \cap A_{i_2} \neq \emptyset$, så er også $\cup A_i$ sammenhængende.*

□ Sæt $A := \cup A_i$. Lad O_1 og O_2 være åbne mængder i $(M,\mathcal{T})$ med $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$ og $A \subset O_1 \cup O_2$, jf. 12.4. For hvert $i \in I$ gælder da $A_i \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$ og $A_i \subset O_1 \cup O_2$. Idet A_i er sammenhængende, giver 12.4, at der for hvert $i \in I$ gælder enten

(*) $$A_i \subset O_1, \quad A_i \cap O_2 = \emptyset$$

eller

(†) $$A_i \subset O_2, \quad A_i \cap O_1 = \emptyset.$$

Lad nu $i_0 \in I$, og antag, at (*) er opfyldt for A_{i_0}. Da er (*) opfyldt for samtlige $i \in I$, thi $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$ for alle $i \in I$. Heraf følger, at der gælder $A \subset O_1$ og $A \cap O_2 = \emptyset$. Påstanden følger derefter af 12.4. □

12.6. SÆTNING. *Lad A være en sammenhængende delmængde af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$. Da er også A's afslutning* cl$A$ *sammenhængende.*

□ Lad O_1 og O_2 være åbne mængder i $(M,\mathcal{T})$ med

(*) $$\mathrm{cl}A \subset O_1 \cup O_2,$$

og

$$\mathrm{cl}A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset,$$

jf. 12.4. Der gælder da også $A \subset O_1 \cup O_2$ og $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Da A er sammenhængende, giver 12.4, at der enten gælder $A \subset O_1$ og $A \cap O_2 = \emptyset$, eller $A \subset O_2$ og $A \cap O_1 = \emptyset$; antag det første. Af $A \cap O_2 = \emptyset$ følger $A \subset M \setminus O_2$. Da $M \setminus O_2$ er afsluttet, ses, at cl$A \subset M \setminus O_2$, altså cl$A \cap O_2 = \emptyset$. Af (*) følger dernæst, at cl$A \subset O_1$. Ifølge 12.4. er da cl$A$ sammenhængende. □

12.7. Ved brug af det foregående skal vi beskrive en opdeling af et topologisk rum i naturlige sammenhængende dele, nemlig de såkaldte komponenter:

12.8. DEFINITION. Ved en (*sammenhængs*)-*komponent* i et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ forstås en (m.h.t. $\subset$) maksimal sammenhængende delmængde.

12.9. SÆTNING. *For et vilkårligt topologisk rum* $(M,\mathcal{T})$ *gælder*

(1) *Enhver ikke-tom sammenhængende delmængde af* $(M,\mathcal{T})$, *specielt ethvert punkt i* M, *er indeholdt i netop een komponent.*

(2) *Mængden af komponenter i* $(M,\mathcal{T})$ *udgør en klassedeling af* M.

(3) *To punkter i* M *tilhører samme komponent, hvis og kun hvis der findes en sammenhængende delmængde af* $(M,\mathcal{T})$, *som indeholder dem begge.*

(4) $(M,\mathcal{T})$ *er sammenhængende, hvis og kun hvis der kun er een komponent i* $(M,\mathcal{T})$.

(5) *Enhver komponent er afsluttet.*

□ (1): Lad B være en ikke-tom sammenhængende delmængde af $(M,\mathcal{T})$, og lad $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in I\}$ være mængden af sammenhængende delmængder af $(M,\mathcal{T})$, som indeholder B; bemærk, at $B \in \mathcal{A}$. Ved anvendelse af 12.5 ses, at $\cup A_i$ er sammenhængende. Dette viser, at B er indeholdt i netop een maksimal sammenhængende delmængde, nemlig $\cup A_i$.

(2): Det er klart, at komponenterne er ikke-tomme. Ifølge (1) er ethvert punkt i M indeholdt i netop een komponent. Dette viser, at komponenterne udgør en klassedeling.

(3): Lad x og y være to forskellige punkter i M. Hvis der findes en sammenhængende mængde A med $x,y \in A$, så tilhører x og y samme komponent, - nemlig den komponent, som indeholder A, jf. (1). Det omvendte er klart, idet komponenterne er sammenhængende.

(4): Det er klart, at hvis $(M,\mathcal{T})$ er sammenhængende, så er M eneste komponent. Antag omvendt, at der kun er een komponent K. Ifølge (2) har vi da $K = M$, og M er derfor sammenhængende.

(5): Oplagt konsekvens af 12.6. □

12.10. SÆTNING. *Lad f være en kontinuert surjektiv afbildning af et sammenhængende topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ på et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$. Da er også $(M_2, \mathcal{T}_2)$ sammenhængende.*

□ Antag, at $(M_2, \mathcal{T}_2)$ er usammenhængende. Der findes da ikke-tomme disjunkte åbne mængder O_1 og O_2 i $(M_2, \mathcal{T}_2)$ med $O_1 \cup O_2 = M_2$. Om mængderne $f^{-1}(O_1)$ og $f^{-1}(O_2)$ gælder da, at de er ikke-tomme, disjunkte, har M_1 som foreningsmængde, og er åbne i $(M_1, \mathcal{T}_1)$, - det sidste på grund af f's kontinuitet. Men så er $(M_1, \mathcal{T}_1)$ usammenhængende. □

12.11. BEMÆRKNING. Af 12.10 følger, at billedet ved en kontinuert afbildning af en sammenhængende mængde igen er sammenhængende.

12.12. DEFINITION. Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være *lokalt sammenhængende,* dersom ethvert punkt har en omegnsbasis bestående af sammenhængende mængder.

12.13. SÆTNING. *Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er lokalt sammenhængende, hvis og kun hvis der for enhver åben delmængde A af $(M,\mathcal{T})$ gælder, at komponenterne i $(A, \mathcal{T}_A)$ er åbne i $(M,\mathcal{T})$*

□ Antag, at $(M,\mathcal{T})$ er lokalt sammenhængende, lad A være en åben delmængde af $(M,\mathcal{T})$, og lad K være en komponent i $(A, \mathcal{T}_A)$. Betragt et punkt $x \in K$. Specielt gælder da $x \in A$, og da A er åben i $(M,\mathcal{T})$, er A en omegn af x i $(M,\mathcal{T})$. Der findes derfor en sammenhængende omegn U af x i $(M,\mathcal{T})$ med $U \subset A$. Idet U også er sammenhængende som delmængde af $(A, \mathcal{T}_A)$, giver 12.9 (1) - anvendt på $(A, \mathcal{T}_A)$ - at $U \subset K$. Hermed er vist, at K er $\mathcal{T}$-omegn af ethvert punkt $x \in K$, - og dermed $\mathcal{T}$-åben.

Antag omvendt, at komponenterne i de $\mathcal{T}$-åbne delmængder er $\mathcal{T}$-åbne. Betragt $x \in M$, og lad A være en åben omegn af x i $(M,\mathcal{T})$. Lad V være den komponent i $(A, \mathcal{T}_A)$, som indeholder x. Ifølge antagelsen er V åben i $(M,\mathcal{T})$. Følgelig er V en sammenhængende (åben) omegn af x i $(M,\mathcal{T})$ med $V \subset A$. Heraf følger påstanden. □

§13. *Filtre.*

13.1. DEFINITION. Ved et *filter* på en mængde M forstås et system $\mathcal{F}$ af delmængder af M med følgende egenskaber:

(1) $M \in \mathcal{F}$.

(2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(3) $\forall F \in \mathcal{F}\ \forall A \subset M\colon F \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.

(4) $\forall F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}\colon F_1 \cap \dots \cap F_n \in \mathcal{F}$.

13.2. BEMÆRKNINGER. Af (1) og (2) fremgår, at der ikke findes filtre på $\emptyset$. - Betingelsen (1) kan erstattes med betingelsen

(5) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Thi (5) følger af (1), og (1) følger af (5) ved brug af (3). - Bemærk, at (4) er opfyldt, blot $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ for alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$.

13.3. EKSEMPEL. Lad $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum. For hvert $x \in M$ er da omegnsfiltret $\mathcal{U}(x)$ et filter på M, jf. 2.8.

13.4. EKSEMPEL. Lad A være en ikke-tom delmængde af en mængde M. Systemet af de delmængder af M, som indeholder A, er da et filter på M, - kaldet det af A *frembragte* filter. Specielt noteres, at systemet af delmængder af M, som indeholder et givet punkt $x \in M$, er et filter på M.

13.5. EKSEMPEL. Lad M være en uendelig mængde. Systemet af delmængder af M med endelig komplementærmængde er et filter på M. For $M = \mathbb{N}$ kaldes filtret *Fréchet-filtret*.

13.6. EKSEMPEL. Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en punktfølge i en mængde M, og sæt

$$A_n := \{x_k \mid k \geq n\}$$

for $n \in \mathbb{N}$. Systemet af delmængder af M, som indeholder en af mængderne A_n, er da et filter på M. Filtret kaldes det til følgen hørende *elementarfilter*.

13.7. DEFINITION. Lad $\mathcal{F}$ og $\mathcal{G}$ være filtre på samme mængde M . Filtret $\mathcal{F}$ siges da at være *finere* hhv. *strengt finere* end $\mathcal{G}$, dersom der gælder $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ hhv. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ og $\mathcal{G} \neq \mathcal{F}$. Er $\mathcal{F}$ (strengt) finere end $\mathcal{G}$, siges $\mathcal{G}$ at være (*strengt*) *grovere* end $\mathcal{F}$.

13.8. EKSEMPEL. Lad $\mathcal{F}$ være elementarfiltret hørende til en følge (jf. 13.6), og lad $\mathcal{G}$ være elementarfiltret hørende til en delfølge. Da er $\mathcal{G}$ finere end $\mathcal{F}$.

13.9. EKSEMPEL. Lad x være et punkt i et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$. Det af $\{x\}$ frembragte filter (jf. 13.4) er finere end omegnsfiltret i x.

13.10. BEMÆRKNING. Lad $\mathcal{F}(M)$ betegne mængden af filtre på M. Mængden $\mathcal{F}(M)$ er da partielt ordnet ved relationen "grovere end", - altså relationen $\subset$. Filtret $\{M\}$ bestående af den ene mængde M er det groveste filter på M, altså første element i $(\mathcal{F}(M), \subset)$. Hvis M har mere end eet punkt, findes ikke noget fineste filter på M, altså sidste element i $(\mathcal{F}(M), \subset)$. Men der findes maksimale elementer i $(\mathcal{F}(M), \subset)$, altså filtre, som ikke er strengt grovere end noget filter:

13.11. DEFINITION. Ved et *ultrafilter* på en mængde M forstås et (m.h.t. $\subset$) maksimalt filter på M.

13.12. EKSEMPEL. Lad M være en ikke-tom mængde, og lad x være et punkt i M. Det af $\{x\}$ frembragte filter, jf. 13.4, er et ultrafilter. Hvis M er en endelig mængde, så er disse filtre de eneste ultrafiltre på M.

13.13. SÆTNING. *Lad $\mathcal{F}$ være et filter på en mængde M. Der findes da et ultrafilter $\mathcal{F}'$ på M, som er finere end $\mathcal{F}$.*

□ Lad $\mathfrak{G}$ betegne mængden af filtre $\mathcal{G}$ på M, som er finere end $\mathcal{F}$; bemærk, at $\mathcal{F} \in \mathfrak{G}$. Mængden $\mathfrak{G}$ er partielt ordnet ved $\subset$. Det påstås, at $(\mathfrak{G},\subset)$ er induktivt ordnet. Lad $\{\mathcal{G}_i \mid i \in I\}$ være en totalt ordnet delmængde af $\mathfrak{G}$. Sæt $\mathcal{G} := \cup \mathcal{G}_i$. Det påstås, at $\mathcal{G}$ er et filter. Lad F_1, $F_2 \in \mathcal{G}$. Der findes da i_1, $i_2 \in I$ med $F_1 \in \mathcal{G}_{i_1}$ og $F_2 \in \mathcal{G}_{i_2}$. Idet $\{\mathcal{G}_i \mid i \in I\}$ er totalt ordnet ved $\subset$, har vi enten $\mathcal{G}_{i_2} \subset \mathcal{G}_{i_1}$ eller $\mathcal{G}_{i_1} \subset \mathcal{G}_{i_2}$; antag det første. Der gælder da F_1, $F_2 \in \mathcal{G}_{i_1}$, og dermed $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{G}_{i_1} \subset \mathcal{G}$, thi $\mathcal{G}_{i_1}$ er et filter. Heraf følger, at 13.1 (4) er opfyldt for $\mathcal{G}$. Betingelserne 13.1 (1)-(3) er oplagte, og $\mathcal{G}$ er altså et filter. Det er herefter klart, at $\mathcal{G}$ er en majorant for $\{\mathcal{G}_i \mid i \in I\}$ i $(\mathfrak{G},\subset)$, og $(\mathfrak{G},\subset)$ er følgelig induktivt ordnet. Zorn's lemma giver derefter, at der findes (mindst) et maksimalt element $\mathcal{F}'$ i $(\mathfrak{G},\subset)$. Filtret $\mathcal{F}'$ er da et ultrafilter med $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. □

13.14. EKSEMPEL. Lad M være en uendelig mængde, og lad $\mathcal{F}$ være det i 13.5 omtalte filter på M. Ifølge 13.13 findes et ultrafilter $\mathcal{F}'$ på M med $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Da intet punkt i M tilhører alle mængder i $\mathcal{F}$, gælder det samme om $\mathcal{F}'$. Følgelig er $\mathcal{F}'$ ikke det af en 1-punkts mængde frembragte filter, jf. 13.4 og 13.12. Der findes altså andre ultrafiltre på M end de i 13.12 omtalte. De i 13.12 omtalte ultrafiltre er de eneste, som kan beskrives eksplicit.

13.15. SÆTNING. *Et filter $\mathcal{F}$ på en mængde M er et ultrafilter, hvis og kun hvis der for enhver delmængde A af M gælder $A \in \mathcal{F}$ eller $M \setminus A \in \mathcal{F}$.*

□ Antag, at $\mathcal{F}$ er et ultrafilter, og lad A være en de delmængde af M med $A \notin \mathcal{F}$; det skal da vises, at $M \setminus A \in \mathcal{F}$. Sæt

$$\mathcal{G} := \{B \subset M \mid A \cup B \in \mathcal{F}\}.$$

Det eftervises let, at $\mathcal{G}$ er et filter; antagelsen $A \notin \mathcal{F}$ sikrer, at $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Det er klart, at $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$; da $\mathcal{F}$ er et ultrafilter, gælder altså $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Idet $M = A \cup (M \setminus A) \in \mathcal{F}$, fås $M \setminus A \in \mathcal{G} = \mathcal{F}$, som ønsket. - Antag omvendt, at der for alle $A \subset M$ gælder enten $A \in \mathcal{F}$ eller $M \setminus A \in \mathcal{F}$, og lad $\mathcal{G}$ være et filter med $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$; det skal da vises, at $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Men af $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$ ville følge eksistens af en mængde A med $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Ifølge det givne ville vi da have $M \setminus A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, og dermed $A \cap (M \setminus A) \in \mathcal{G}$, jf. 13.1 (4), i strid med 13.1 (2). □

13.16. SÆTNING. *Lad $\mathcal{A}$ være et ikke-tomt system af delmængder af en mængde M. Der findes da et filter på M, som indeholder $\mathcal{A}$, hvis og kun hvis der for alle $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ gælder $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$. Er denne betingelse opfyldt, findes et groveste filter $\mathcal{F}$ med $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Filtret $\mathcal{F}$ består af de delmængder F af M for hvilke der findes $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ med* $A_1 \cap \cdots \cap A_n \subset F$. - Filtret $\mathcal{F}$ siges at være *frembragt* af $\mathcal{A}$, og $\mathcal{A}$ kaldes en *filtersubbasis* for $\mathcal{F}$.

□ Af 13.1 (4) fremgår, at hvis der findes et filter $\mathcal{F}$ med $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, så gælder $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ for alle $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$. Antag omvendt, at dette er opfyldt, og lad $\mathcal{F}$ betegne systemet af delmængder F af M, som indeholder en mængde af formen $A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Det er nu let at se, at $\mathcal{F}$ er et filter med $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Det er herefter klart, at $\mathcal{F}$ er det groveste filter, som indeholder $\mathcal{A}$. □

13.17. DEFINITION. En filtersubbasis $\mathcal{A}$ for et filter $\mathcal{F}$ kaldes en *filterbasis* for $\mathcal{F}$, dersom enhver mængde fra $\mathcal{F}$ indeholder en mængde fra $\mathcal{A}$. En filterbasis for et ultrafilter kaldes en *ultrafilterbasis*.

13.18. BEMÆRKNING. En filterbasis for et filter $\mathcal{F}$ på M er altså et system af delmængder af M med egenskaben, at $\mathcal{F}$ består at netop de mængder, som indeholder en mængde fra $\mathcal{A}$.

13.19. EKSEMPEL. Lad x være et punkt i et topologisk rum $(M, \mathcal{T})$. Et delsystem $\mathcal{B}(x)$ af omegnsfiltret $\mathcal{U}(x)$ er da en filterbasis for filtret $\mathcal{U}(x)$, hvis og kun hvis $\mathcal{B}(x)$ er en omegnsbasis, jf. 2.12.

13.20. SÆTNING. *Et ikke-tomt system* $\mathcal{A}$ *af delmængder af en mængde* M *er filterbasis for et filter på* M*, hvis og kun hvis* $\emptyset \notin \mathcal{A}$ *og der for alle* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ *findes* $A_3 \in \mathcal{A}$ *med* $A_3 \subset A_1 \cap A_2$.

□ Antag først, at $\mathcal{A}$ er en filterbasis for et filter $\mathcal{F}$. Af 13.1 (2) fremgår, at $\emptyset \notin \mathcal{A}$. Af 13.1 (4) fremgår, at $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$ for alle $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, og der findes derfor $A_3 \in \mathcal{A}$ med $A_3 \subset A_1 \cap A_2$. - Antag omvendt, at betingelsen er opfyldt. Det er da let at se, at der for alle $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ findes $A_{n+1} \in \mathcal{A}$ med $A_{n+1} \subset A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Idet $A_{n+1} \neq \emptyset$ ifølge antagelsen, ses for det første, at $\mathcal{A}$ er en filtersubbasis for et filter $\mathcal{F}$, jf. 13.16, og dernæst, at $\mathcal{A}$ faktisk er en filterbasis for $\mathcal{F}$.

13.21. BEMÆRKNING. Lad A være en ikke-tom delmængde af en mængde M. Af 13.20 fremgår, at et filter (eller en filterbasis) på A kan opfattes som en filterbasis på M. Lad omvendt $\mathcal{F}$ være et filter eller en filterbasis på M, og sæt $\mathcal{F}_A := \{A \cap F \mid F \in \mathcal{F}\}$. Ved hjælp af 13.20 indses let, at $\mathcal{F}_A$ er et filter hhv. en filterbasis på A, hvis (og kun hvis) $\emptyset \notin \mathcal{F}_A$, altså hvis og kun hvis alle $F \in \mathcal{F}$ skærer A. Er denne betingelse opfyldt, kaldes $\mathcal{F}_A$ det hhv. den af $\mathcal{F}$ på A *inducerede* filter hhv. filterbasis. - Bemærk, at hvis $\mathcal{F}$ er et filter på M , som inducerer et filter $\mathcal{F}_A$ på A, så er det af $\mathcal{F}_A$ (opfattet som filterbasis på M) frembragte filter på M finere end $\mathcal{F}$. - Et ultrafilter $\mathcal{F}$ på M inducerer et filter på A, hvis og kun hvis $A \in \mathcal{F}$, jf. 13.15. Filtret $\mathcal{F}_A$ er da et ultrafilter på A. - Er $(M,\mathcal{T})$ et topologisk rum, så inducerer omegnsfiltret i et punkt $x \in M$ et filter på A, hvis og kun hvis $x \in \mathrm{cl}A$. For $x \in A$ er det af $\mathcal{U}(x)$ på A inducerede filter netop filtret $\mathcal{U}_A(x)$, jf. 5.1.

13.22. SÆTNING. *Lad* f *være en afbildning af en mængde* M_1 *ind i en mængde* M_2. *For enhver filterbasis hhv. ultrafilterbasis* $\mathcal{A}$ *på* M_1 *er billedet* $f(\mathcal{A})$ *en filterbasis hhv. ultrafilterbasis på* M_2.

□ Er $\mathfrak{A}$ en filterbasis på M_1, så har $\mathfrak{A}$ egenskaberne i 13.20. Billedsystemet $f(\mathfrak{A})$ vil da også have egenskaberne, og er derfor ifølge 13.20 en filterbasis på M_2. - Antag dernæst, at $\mathfrak{A}$ er ultrafilterbasis, og lad B være en vilkårlig delmængde af M_2. Antag, at B ikke tilhører det af filterbasen $f(\mathfrak{A})$ frembragte filter $\mathcal{F}_2$, altså at B ikke indeholder nogen mængde af formen $f(A)$ med $A \in \mathfrak{A}$. Mængden $f^{-1}(B)$ vil da ikke indeholde nogen mængde fra $\mathfrak{A}$. Følgelig tilhører $f^{-1}(B)$ ikke det af $\mathfrak{A}$ frembragte ultrafilter $\mathcal{F}_1$. Ifølge 13.15 har vi da $M_1 \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$, og der findes derfor $A \in \mathfrak{A}$ med $A \subset M_1 \setminus f^{-1}(B)$. Heraf fås $f(A) \subset M_2 \setminus B$, og dermed $M_2 \setminus B \in \mathcal{F}_2$. Ifølge 13.15 er da $\mathcal{F}_2$ et ultrafilter. □

13.23. BEMÆRKNING. Af 13.22 fremgår specielt, at billedet $f(\mathcal{F})$ af et filter $\mathcal{F}$ på M_1 er en filterbasis på M_2. Betegnes det af $f(\mathcal{F})$ frembragte filter med $f^*(\mathcal{F})$, viser 13.22, at en afbildning $f\colon M_1 \to M_2$ på naturlig måde inducerer en afbildning $f^* : \mathcal{F}(M_1) \to \mathcal{F}(M_2)$ - jf. 13.10 - som iøvrigt afbilder ultrafilter på ultrafilter. Bemærk, at f^* er ordenstro: Af $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ følger $f^*(\mathcal{F}) \subset f^*(\mathcal{G})$.

13.24. EKSEMPEL. Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en punktfølge i en mængde M, - altså en afbildning $f\colon \mathbb{N} \to M$, hvor $x_n = f(n)$. Betegner $\mathcal{F}$ Fréchet-filtret på $\mathbb{N}$, jf. 13.5, så er $f^*(\mathcal{F})$ det til følgen hørende elementarfilter, jf. 13.6.

13.25. Hvis $f\colon M_1 \to M_2$ ikke er surjektiv, så er $f(\mathcal{F})$ ikke et filter for noget filter $\mathcal{F}$ på M_1; thi M_2 tilhører ikke $f(\mathcal{F})$. Det omvendte gælder også:

13.26. SÆTNING. *Lad f være en surjektiv afbildning af en mængde M_1 på en mængde M_2. For ethvert filter hhv. ultrafilter $\mathcal{F}$ på M_1 er billedet $f(\mathcal{F})$ et filter hhv. ultrafilter på M_2.*

□ Lad $\mathcal{F}$ være et filter på M_1. Da er ifølge 13.22 $f(\mathcal{F})$ en filterbasis på M_2. Lad A være en mængde fra det af $f(\mathcal{F})$ frembragte filter $\mathcal{G}$. Der findes da $F \in \mathcal{F}$ med $f(F) \subset A$. Vi har da $F \subset f^{-1}(A)$, og dermed $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Og da f er surjektiv, fås $f(f^{-1}(A)) = A$, og dermed $A \in f(\mathcal{F})$. Hermed er vist, at $f(\mathcal{F})$ er et filter. - Er $\mathcal{F}$ et ultrafilter på M_1, så er $f(\mathcal{F})$ et filter ifølge det netop viste, og en ultrafilterbasis ifølge 13.22. Heraf fremgår, at $f(\mathcal{F})$ er et ultrafilter. □

§14. *Konvergens.*

14.1. DEFINITION. Et filter $\mathcal{F}$ på et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at have et punkt x i M som *grænsepunkt*, dersom $\mathcal{F}$ er finere end omegnsfiltret i x. En filterbasis $\mathcal{A}$ siges at have x som *grænsepunkt*, dersom det af $\mathcal{A}$ frembragte filter har x som grænsepunkt. Er x grænsepunkt for et filter $\mathcal{F}$ hhv. en filterbasis $\mathcal{A}$, siges $\mathcal{F}$ hhv. $\mathcal{A}$ at *konvergere* mod x. Man skriver da $\mathcal{F} \to x$ hhv. $\mathcal{A} \to x$, eventuelt $\lim \mathcal{F} = x$ hhv. $\lim \mathcal{A} = x$.

14.2. BEMÆRKNING. At et filter $\mathcal{F}$ konvergerer mod et punkt x betyder altså, at $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$. At en filterbasis $\mathcal{A}$ konvergerer mod et punkt x betyder, at der til enhver omegn U af x findes $A \in \mathcal{A}$ med $A \subset U$.

14.3. BEMÆRKNING. Et filter (en filterbasis) kan have ingen, eet elle flere grænsepunkter. Specielt kan der altså gælde $\lim \mathcal{F} = x$ og $\lim \mathcal{F} = y$ med $x \neq y$. Skrivemåden $\lim \mathcal{F} = x$ bør derfor forbeholdes situationer, hvor x er eneste grænsepunkt.

14.4. EKSEMPEL. Lad $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en punktfølge i et metrisk rum (M,d). Der gælder da, at følgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergerer mod et punkt $x \in M$, hvis og kun hvis det til følgen hørende elementarfilter konvergerer mod x i det topologiske rum $(M, \mathcal{T}_d)$.

14.5. Det foregående eksempel antyder, at begrebet filter kan opfattes som en generalisation af begrebet følge. Behovet for en sådan generalisation kan siges at være opstået således: - Det er velkendt, at en delmængde A af et metrisk rum (M,d) er $\mathcal{T}_d$-afsluttet, hvis og kun hvis A indeholder alle grænsepunkter for følger i A, som er konvergente i (M,d). Imidlertid findes topologiske rum $(M,\mathcal{T})$, for hvilke det analoge udsagn ikke er korrekt (idet begrebet "grænsepunkt for en følge" defineres på oplagt måde). Men erstattes "følgen" med "filter", er udsagnet korrekt:

14.6. SÆTNING. *En ikke-tom delmængde A af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er afsluttet, hvis og kun hvis ethvert punkt i M, som er grænsepunkt for et filter på A, tilhører A.*

□ Antag først, at A er afsluttet, og lad $x \in M$ være grænsepunkt for et filter $\mathcal{F}$ på A. Enhver omegn af x indeholder da en mængde fra $\mathcal{F}$. Idet mængderne i filtret $\mathcal{F}$ er delmængder af A, følger, at x er kontaktpunkt for A. Da A er afsluttet, fås, at x tilhører A. - Antag omvendt, at A ikke er afsluttet; der findes altså et punkt $x \in \mathrm{cl}A \setminus A$. Omegnsfiltret $\mathcal{U}(x)$ inducerer da et filter på A, som (opfattet som filterbasis på M) konvergerer mod x (jf. i øvrigt 13.21). □

14.7. Det er velkendt, at en afbildning f af et metrisk rum (M_1, d_1) ind i et metrisk rum (M_2, d_2) er kontinuert i et punkt x i M, hvis og kun hvis der for enhver følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i M_1, som konvergerer mod x, gælder, at følgen $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ af billedpunkter konvergerer mod billedpunktet $f(x)$. Også det hertil analoge udsagn (med "følge" erstattet med "filter") er korrekt, jf. 14.8 [(1) ⇔ (3)]

14.8. SÆTNING. *Lad f være en afbildning af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$, og lad x være et punkt i M_1. Følgende tre udsagn er da ensbetydende:*

(1) *f er kontinuert i x.*

(2) *$f(\mathcal{U}_1(x)) \to f(x)$, - d.v.s. $\mathcal{U}_2(f(x)) \subset f^*(\mathcal{U}_1(x))$.*

(3) *For ethvert filter $\mathcal{F}$ på M_1 med $\mathcal{F} \to x$ gælder $f(\mathcal{F}) \to f(x)$, - d.v.s. af $\mathcal{U}_1(x) \subset \mathcal{F}$ følger $\mathcal{U}_2(f(x)) \subset f^*(\mathcal{F})$.*

□ (1) ⇔ (2): At f er kontinuert i x betyder, at $f^{-1}(U_2)$ er en omegn af x for enhver omegn U_2 af $f(x)$. Men dette kommer ud på, at der for enhver omegn U_2 af $f(x)$ findes en omegn U_1 af x med $f(U_1) \subset U_2$. Dette er igen ensbetydende med, at filterbasen $f(\mathcal{U}_1(x))$ konvergerer mod $f(x)$, jf. 14.2.

(2) ⇒ (3): Af $\mathcal{U}_2(f(x)) \subset f^*(\mathcal{U}_1(x))$ og $\mathcal{U}_1(x) \subset \mathcal{F}$ følger $\mathcal{U}_2(f(x)) \subset f^*(\mathcal{F})$, thi f^* er ordenstro.

(3) ⇒ (2): Oplagt, thi $\mathcal{U}_1(x) \to x$. □

14.9. Den følgende sætning kan opfattes som et argument for, at topologiske rum, som ikke er Hausdorff-rum, er "unaturlige":

14.10. SÆTNING. *Et topologisk rum* $(M,\mathcal{T})$ *er et Hausdorff-rum, hvis og kun hvis ethvert filter på* M *har højst eet grænsepunkt.*

□ Antag først, at $(M,\mathcal{T})$ er et Hausdorff-rum, og lad x og y være to forskellige punkter i M. Hvis der fandtes et filter $\mathcal{F}$ på M med $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$ og $\mathcal{U}(y) \subset \mathcal{F}$, så måtte der specielt gælde $U \cap V \neq \emptyset$ for alle $U \in \mathcal{U}(x)$ og alle $V \in \mathcal{U}(y)$. Men dette strider mod (T_2). - Antag omvendt, at $(M,\mathcal{T})$ ikke er et Hausdorff-rum. Der findes da to forskellige punkter x og y i M, således at $U \cap V \neq \emptyset$ for alle $U \in \mathcal{U}(x)$ og alle $V \in \mathcal{U}(y)$. Det er nu let at se, at systemet af alle sådanne mængder $U \cap V$ er et filter på M, og det er klart, at dette filter konvergerer mod både x og y. □

14.11. DEFINITION. Et filter $\mathcal{F}$ på et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at have et punkt x i M som *kontaktpunkt*, dersom x er kontaktpunkt for enhver mængde i $\mathcal{F}$. En filterbasis $\mathcal{A}$ siges at have x som *kontaktpunkt*, dersom det af $\mathcal{A}$ frembragte filter har x som kontaktpunkt.

14.12. BEMÆRKNING. Mængden af kontaktpunkter for et filter $\mathcal{F}$ hhv. en filterbasis $\mathcal{A}$ er altså mængden $\bigcap \mathrm{cl} F$, hvor fællesmængden tages over alle $F \in \mathcal{F}$ hhv. $F \in \mathcal{A}$. Specielt gælder altså, at mængden af kontaktpunkter er afsluttet.

14.13. EKSEMPEL. Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i et metrisk rum (M,d), og lad x være et fortætningspunkt for følgen. Da er x kontaktpunkt for det til følgen hørende elementarfilter på $(M,\mathcal{T}_d)$.

14.14. SÆTNING. *Hvis et filter $\mathcal{F}$ på et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ har et punkt $x \in M$ som grænsepunkt, så er x kontaktpunkt for $\mathcal{F}$.*

□ Af $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$ følger $U \cap F \neq \emptyset$ for alle $U \in \mathcal{U}(x)$ og alle $F \in \mathcal{F}$, jf. 13.1 (4). □

14.15. SÆTNING. *Et filter $\mathcal{F}$ på et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ har et punkt $x \in M$ som kontaktpunkt, hvis og kun hvis der findes et filter $\mathcal{G}$ på M, som er finere end $\mathcal{F}$ og som konvergerer mod x.*

□ Hvis $\mathcal{F}$ har x som kontaktpunkt, så er systemet af delmængder af M af formen $U \cap F$, hvor $U \in \mathcal{U}(x)$ og $F \in \mathcal{F}$, et filter på M, som er finere end $\mathcal{F}$ og som konvergerer mod x. - Er omvendt $\mathcal{G}$ et sådant filter, har vi $U \cap F \neq \emptyset$ for alle $U \in \mathcal{U}(x)$ og alle $F \in \mathcal{F}$; thi både $\mathcal{U}(x)$ og $\mathcal{F}$ er indeholdt i filtret $\mathcal{G}$. Heraf følger, at x er kontaktpunkt for $\mathcal{F}$. □

14.16. SÆTNING. *Hvis et filter $\mathcal{F}$ på et Hausdorff-rum $(M,\mathcal{T})$ har et punkt $x \in M$ som grænsepunkt, så er x eneste kontaktpunkt for $\mathcal{F}$.*

□ Er x grænsepunkt for $\mathcal{F}$, så er x kontaktpunkt ifølge 14.14. Lad derefter $y \in M$ være et vilkårligt kontaktpunkt for $\mathcal{F}$. Ifølge 14.15 findes da et filter $\mathcal{G}$ på M med $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ og $\mathcal{G} \to y$. Men af $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ og $\mathcal{F} \to x$ følger $\mathcal{G} \to x$. Sætning 14.10 giver derefter, at $x = y$. □

14.17. SÆTNING. *Et ultrafilter $\mathcal{F}$ på et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ har et punkt $x \in M$ som grænsepunkt, hvis (og kun hvis) x er kontaktpunkt for $\mathcal{F}$.*

□ Hvis x er kontaktpunkt for $\mathcal{F}$, så konvergerer $\mathcal{F}$ mod x ifølge 14.15. (Det omvendte gælder for ethvert filter, jf. 14.14.) □

14.18. Det er velkendt, at for et metrisk rum (M,d) er følgende to udsagn ensbetydende: (a) $(M,\mathcal{T}_d)$ er kompakt. (b) Enhver følge i M har (mindst) et fortætningspunkt. - Svarende hertil gælder (hvor 14.19 [(1) $\Leftrightarrow$ (2)] modsvarer (a) $\Leftrightarrow$ (b)):

14.19. SÆTNING. *For et topologisk rum* $(M,\mathcal{T})$ *er følgende tre udsagn ensbetydende:*

(1) $(M,\mathcal{T})$ *er quasi-kompakt.*

(2) *Ethvert filter på* M *har (mindst) et kontaktpunkt.*

(3) *Ethvert ultrafilter på* M *er konvergent.*

□ (1) ⇒ (2): Lad $\mathcal{F}$ være et filter på M, og antag, at intet punkt i M er kontaktpunkt for $\mathcal{F}$. Der findes da for hvert $x \in M$ en åben omegn $U_x \in \mathcal{U}(x)$ og en mængde $F_x \in \mathcal{F}$ med $U_x \cap F_x = \emptyset$. Mængderne U_x, $x \in M$, udgør en åben overdækning af M, og der findes derfor på grund af quasi-kompaktheden endelig mange punkter $x_1, \cdots, x_n$, således at $U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} = M$. På den anden side har vi

$$(U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}) \cap (F_{x_1} \cap \cdots \cap F_{x_n}) = \emptyset,$$

thi $U_x \cap F_x = \emptyset$ for alle $x \in M$. Sammenholdes med det foregående fås $M \cap (F_{x_1} \cap \cdots \cap F_{x_n}) = \emptyset$, altså $F_{x_1} \cap \cdots \cap F_{x_n} = \emptyset$. Men dette strider mod definitionen af filter, jf. 13.1 (2), (4).

(2) ⇒ (3): Umiddelbar konsekvens af 14.17.

(3) ⇒ (1): Lad $\mathcal{S}$ være en åben overdækning af M, og antag, at intet endeligt delsystem af $\mathcal{S}$ overdækker M. For alle $S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{S}$ gælder altså $S_1 \cup \cdots \cup S_n \neq M$, og dermed

$$(M \setminus S_1) \cap \cdots \cap (M \setminus S_n) \neq \emptyset.$$

Dette viser, at systemet $\mathcal{S}'$ af komplementærmængder til mængderne i $\mathcal{S}$ er en filtersubbasis, jf. 13.16. Lad $\mathcal{F}$ være et ultrafilter på M, som er finere end det af $\mathcal{S}'$ frembragte filter, jf. 13.13. Ifølge antagelse har $\mathcal{F}$ (mindst) et grænsepunkt x; vi har altså $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$. For alle $U \in \mathcal{U}(x)$ og alle $S \in \mathcal{S}$ har vi derfor $U \in \mathcal{F}$ og $M \setminus S \in \mathcal{F}$, og dermed $U \cap (M \setminus S) \neq \emptyset$. Dette viser, at $x \in \mathrm{cl}(M \setminus S) = M \setminus S$ for alle $S \in \mathcal{S}$, - i strid med, at $\mathcal{S}$ er en overdækning af M. □

14.20. SÆTNING. *Et filter $\mathcal{F}$ på et kompakt topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ er konvergent, hvis og kun hvis det har netop eet kontaktpunkt.*

□ Hvis $\mathcal{F} \to x$, så er x eneste kontaktpunkt ifølge 14.16. (Her benyttes altså kun Hausdorff egenskaben.) Antag omvendt, at x er eneste kontaktpunkt for $\mathcal{F}$. Hvis x ikke er grænsepunkt for $\mathcal{F}$, så findes en åben omegn U af x, således at $(M \setminus U) \cap F \neq \emptyset$ for alle $F \in \mathcal{F}$. Systemet af delmængder af M af formen $(M \setminus U) \cap F$ ses let at være en filterbasis på M. Lad $\mathcal{G}$ være det af denne filterbasis frembragte filter på M. Ifølge 14.19 har $\mathcal{G}$ (mindst) et kontaktpunkt y. Dette punkt y må tilhøre $M \setminus U$; thi U er åben, så af $y \in U$ ville følge eksistens af en omegn af y (nemlig U), som var disjunkt med mængder fra $\mathcal{G}$ (nemlig mængderne $(M \setminus U) \cap F$, hvor $F \in \mathcal{F}$). Specielt har vi altså $y \neq x$. Men af $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ følger, at y også er kontaktpunkt for $\mathcal{F}$, i strid med, at x er eneste kontaktpunkt for $\mathcal{F}$. □

14.21. Vi skal til sidst vise *Tychonoff's sætning:* Et produkt af (quasi)-kompakte rum er igen (quasi)-kompakt. Beviset bygger på 14.19 [(1) $\Leftrightarrow$ (3)], samt på følgende:

14.22. SÆTNING. *Lad M være en mængde, og lad $\mathcal{T}$ være initialtopologien på M m.h.t. en familie af afbildninger $f_i : M \to (M_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$. For et filter $\mathcal{F}$ på M og et punkt x i M gælder da $\mathcal{F} \to x$, hvis og kun hvis der for hvert $i \in I$ gælder $f_i(\mathcal{F}) \to f_i(x)$.*

□ Af $\mathcal{F} \to x$, altså $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$, følger $f_i(\mathcal{U}(x)) \subset f_i(\mathcal{F})$, og dermed $f_i^*(\mathcal{U}(x)) \subset f_i^*(\mathcal{F})$. Af f_i's kontinuitet følger $\mathcal{U}_i(f_i(x)) \subset f_i^*(\mathcal{U}(x))$. Ialt fås $\mathcal{U}_i(f_i(x)) \subset f_i^*(\mathcal{F})$, altså $f_i(\mathcal{F}) \to f_i(x)$. - Antag omvendt, at $f_i(\mathcal{F}) \to f_i(x)$ for alle $i \in I$. Lad U være en omegn af x. Der findes da $i_1, \dots, i_n \in I$ og $O_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$, $k = 1, \dots, n$, således at

$$x \in f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_n}^{-1}(O_{i_n}) \subset U,$$

jf. 7.2. Da hver af mængderne O_{i_k} er en omegn af $f_{i_k}(x)$, og $f_{i_k}(\mathcal{F}) \to f_{i_k}(x)$, findes $F_{i_k} \in \mathcal{F}$ med $f_{i_k}(F_{i_k}) \subset O_{i_k}$. Heraf fås

$$F_{i_k} \subset f_{i_k}^{-1}(f_{i_k}(F_{i_k})) \subset f_{i_k}^{-1}(O_{i_k}).$$

Mængden $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n}$ tilhører $\mathcal{F}$, og vil ifølge det foregående være indeholdt i U. Heraf fremgår, at $\mathcal{F} \to x$. □

14.23. SÆTNING. *Lad* $((M_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$ *være en familie af (quasi)-kompakt topologiske rum. Da er også produktrummet* $(\Pi M_i, \Pi \mathcal{T}_i)$ *(quasi)-kompakt.*

□ Det er klart, at et produkt af Hausdorff-rum igen er et Hausdorff-rum. Det er derfor nok at vise påstanden om quasi-kompakte rum. Lad $\mathcal{F}$ være et ultrafilter på ΠM_i. Da er $\pi_i(\mathcal{F})$ et ultrafilter på M_i for hvert $i \in I$, jf. 13.26. Af quasi-kompaktheden af hvert af rummene $(M_i, \mathcal{T}_i)$ følger, at alle ultrafiltrene $\pi_i(\mathcal{F})$ er konvergente, jf. 14.19 [(1) $\Rightarrow$ (3)]. Lad x_i være grænsepunkt for $\pi_i(\mathcal{F})$, $i \in I$. Da er $x := (x_i)_{i \in I}$ grænsepunkt for $\mathcal{F}$; dette følger af 14.22, idet produkttopologien er initialtopologien m.h.t. afbildningerne $\pi_j : \Pi M_i \to (M_j, \mathcal{T}_j)$, $j \in I$, jf. 7.4. □

14.24. BEMÆRKNING. Er omvendt $((M_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$ en familie af ikke-tomme topologiske rum med egenskaben, at produktrummet $(\Pi M_i, \Pi \mathcal{T}_i)$ er (quasi)-kompakt, så er hvert af rummene $(M_i, \mathcal{T}_i)$ (quasi)-kompakt, jf. 7.4 og 9.10.

Oversigt over nogle vigtige typer af topologiske rum.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{Metrisabelt} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{Kompakt} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Parakompakt} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Normalt} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & T_4 \\
\text{Lokalkompakt} \arrow[rr, Rightarrow] & & \text{Fuldstændig regulært} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & T_{3.5} \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & \text{Regulært} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & T_3 \\
 & & \text{Hausdorff, } T_2 \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & & T_1 &
\end{tikzcd}
$$

Lidt om den generelle topologis udvikling.

I den græske matematik fra oldtiden møder man infinitesimal teknik i form af proportionslæren og ekshaustionsbeviset. Ved hjælp heraf foretog Archimedes (287-212 f.Kr.) sine berømte overflade- og rumfangsbestemmelser.

Som grundlæggere af teorien for infinitesimalregning betragtes Isaac Newton (1642-1727) (fluxionslære) og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Dens grundlag var matematisk set yderst løst. Man brugte forklaringer som "det sluttelige forhold mellem to forsvindende størrelser". Imidlertid var teorien dog ganske effektiv til sit formål, mekaniske og geometriske undersøgelser, og man må jo f.eks. sige, at begrebet tangent (til kurve i et punkt) giver sig selv intuitivt i de tilfælde, man almindeligvis har lejlighed til at betragte.

Det 18. århundrede igennem var der to principper, som man alt efter indstilling forsøgte at basere denne såkaldte "analyse" på: geometrisk betragtning hhv. aritmetisk formel-manipulation. Sidstnævnte metode må siges at være positivt forkert, men den første var naturligvis heller ikke matematisk tilfredsstillende. Det må dog understreges, at utallige værdifulde resultater opnåedes.

Den fantasirige og produktive Leonhard Euler (1707-1783) var stærkt tiltrukket af analysen og har ydet væsentlige bidrag til dens forskellige grene. Han havde som bekendt en ganske særlig sans for formler, mens han ikke beskæftigede sig noget videre med præcision af grundlaget eller tog problemet om konvergens af de rækker, han regnede med, særlig tungt. Selv om han således i hvert fald ikke direkte kan siges at have medvirket til den generelle topologisk opståen, kan han opfattes som grundlægger af den algebraiske topologi med løsningen af problemet om broerne i Königsberg samt polyedersætningen.

Med Carl Friedrich Gauss (1777-1855) er vi fremme i en tid, hvor betydningen af at sikre sig konvergens af uendelige rækker var åbenbar for alle. Han selv foretog grundige undersøgelser over konvergens af den såkaldte hypergeometriske række. Et andet emne, som i et par århundreder nu har spillet en betydelig rolle i matematikken, er den harmoniske analyse, hvor man bl.a. interesserer sig for muligheden af en given funktions fremstilling ved en trigonometrisk række. (Til dette spørgsmål er Joseph Fourier's (1768-1830) navn uløseligt knyttet). Det var i forbindelse med undersøgelser af dette problem, at Bernhard Riemann (1826-1866) foranledigedes til at give en for sin tid ret abstrakt definition af integrabilitet. Og han kunne hertil f.eks. angive en integrabel funktion, for hvilken diskontinuitetspunkterne ligger tæt. Hans topologiske behandling af funktionsrum tillægges også betydning.

Hidtil havde man nøjedes med en intuitiv forståelse af, hvad det reelle talsystem var (f.eks. svarende til en linie med nulpunkt, enhedslængde og orientering), men med Karl Weierstrass (1815-1897) (sumdannelser), Georg Cantor (1845-1918) og Eduard Heine (1821-1881) (fundamentalfølger) og Richard Dedekind (1831-1916) (snit) fik det ordnede legeme $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ en præcis indførelse ud fra $(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$. Beskæftigelsen med trigonometriske rækker var medvirkende til Cantors opfindelse af mængdelæren (der nok også skal ses som et svar på skolastiske problemer, der interesserede ham meget). Mange af de elementære topologiske begreber og sætninger skyldes ham, idet han dog kun beskæftigede sig med de sædvanlige talrum. Velkendt er Cantors mængde.

Selv om der hermed var udviklet en topologisk punktmængdeteori, betragter man i almindelighed året 1906 som tidspunktet for den generelle topologis fremkomst, idet Maurice Fréchet (1878-1973) da i sin disputats "Sur quelques points du calcul fonctionnel" abstrakt indførte metriske rum og andre aksiomatisk fastlagte topologiske systemer. I tiden derefter specificeredes mangfoldige former for topologiske strukturer, også af Fréchet selv.

I 1914 blev "Grundzüge der Mengenlehre" af Felix Hausdorff (1868-1842) udgivet, hvori har ved hjælp af omegne definerer, hvad man nu efter ham kalder et Hausdorff-rum. Metriske rum behandles også, og han "fuldstændiggør" dem efter Cantors metode. Også numerabilitetsaksiomerne formuleres her.

Omkring 1920 indførte Kazimierz Kuratowski aksiomatisk begrebet afslutningsfunktion på mængden af delmængder af en mængde. Dette var ækvivalent med betingelserne til hvad vi nu kalder et topologisk rum, givet ved systemet af åbne mængder. Denne nu gængse fremgangsmåde blev benyttet i 1923 af Heinrich Tietze (1880-1964), der også formulerede definitionen af normali normalitet. I øvrigt var adskillelsesaksiomerne T_1 (1907) og T_3 (1921) også specificeret på dette tidspunkt.

Camille Jordan (1838-1922), der gav et forholdsvis simpelt bevis for Eulers polyedersætning og beskæftigede sig med kurveteori, definerede sammenhæng af et rum, og Hausdorff påbegyndte det systematiske studium af sådanne rum i sin Mengenlehre. Russeren Paul Urysohn (1898-1924) beskæftigede sig også med sammenhæng, men har i det hele taget ydet bidrag til mangfoldige områder af topologien, til tider i samarbejde med sin ven Paul Alexandroff. Skrifter som "Lösung des allgemeinen Dimensionsproblems" og "Zum Metrisationsproblem" (heri indgår Urysohns Lemma) fortjener at fremhæves.

I 1929 publiceredes et skrift af Alexandroff og Urysohn, hvori den nu brugte definition af kompakte rum gives. Man havde naturligvis også tidligere interesseret sig for den slags rum. I øvrigt opererer man somme tider også med andre former for kompakthed.

Siden midten af 1920'erne har man interesseret sig meget for at anvende topologi inden for andre matematiske discipliner. I 1926 indførte O. Schreier (1901-1929) begrebet topologisk gruppe, hvilket er en gruppe med en topologisk struktur så gruppekompositionen og inversdannelsen er kontinuerte. Især har man studeret de lokalkompakte topologiske grupper nøje. Russeren Pontriagin har ydet væsentlige bidrag til denne teori. I 1940 kom, med udgivelsen af "L'intégration dans les groupes topologiques" af André Weil, den første fremstilling af harmonisk analyse på lokalkompakte abelske grupper. En anden betydelig anvendelse af topologi finder man i teorien for topologiske vektorrum, hvilket er et vektorrum forsynet med en topologi så addition af vektorer og multiplikation af vektorer med skalarer bliver kontinuerte operationer. Kim til denne teori ser man allerede i forrige århundrede, da tyskeren David Hilbert (1862-1943) studerede følgerummet l_2. Senere kom den generelle teori for Hilbertrum og Banachrum, til hvilken bl.a. polakken Stefan Banach (1892-1945) ydede afgørende bidrag. I tiden omkring 1940 begyndte studiet af Banachalgebraer og i forbindelse hermed særligt C*-algebraer.

I 1917 viste russeren M. Souslin (1894-1919), at et kontinuert billede af en Borel mængde ikke nødvendigvis bliver en Borel mængde. Dette førte ham til definitionen og studiet af en mere omfattende klasse af mængder, som nu benævnes Souslin mængder. Efter Souslins død blev arbejdet fortsat af russeren Lusin (1883-1950) og forskellige polske matematikere. Souslin mængder har fået betydning for den moderne integrationsteori og fra midten af 1950'erne for potentialteori, hvor bl.a. G. Choquet har ydet væsentlige bidrag.

I 1944 generaliserede J. Dieudonné kompakthedsbegrebet ved indførelsen af parakompakte rum, som har fundet stor anvendelse inden for funktionalanalyse og differentialgeometri.

1. Angiv samtlige topologier på $\{1,2\}$ og $\{1,2,3\}$.

2. Giv et forslag til en naturlig topologi på $\mathbb{R}^* := [-\infty,+\infty]$.

3. Lad $(M_1,\mathcal{T}_1)$ og $(M_2,\mathcal{T}_2)$ være topologiske rum med $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Giv et forslag til en naturlig topologi på $M_1 \cup M_2$.

4. Lad $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum, lad ω være et punkt med $\omega \notin M$, og sæt $\hat{M} := M \cup \{\omega\}$. Giv nogle forslag til naturlige topologier på $\hat{M}$.

5. Lad $\mathcal{S}$ betegne systemet af intervaller i $\mathbb{R}$ af formen $]-\infty,k[$, hvor $k \in \mathbb{R}$. Sæt $\mathcal{T} := \mathcal{S} \cup \{\emptyset,\mathbb{R}\}$. Undersøg, om $\mathcal{T}$ er en topologi på $\mathbb{R}$.

6. Lad $(M,\preceq)$ være en partielt ordnet mængde, og sæt

$$V(x) := \{y \in M \mid y \prec x\}$$

for $x \in M$. Lad $\mathcal{S}$ betegne systemet af delmængder af M af formen $V(x)$, hvor $x \in M$. Sæt $\mathcal{T} := \mathcal{S} \cup \{\emptyset,M\}$. Diskutér nødvendige og/eller tilstrækkelige betingelser (på $\preceq$) for, at $\mathcal{S}$ og/eller $\mathcal{T}$ opfylder en eller flere af betingelserne (1)-(3) i 1.1.

7. Lad x være et punkt i et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$. Antag, at der findes en numerabel omegnsbasis i x. Vis, at der da findes en numerabel omegnsbasis $\mathcal{B}(x) = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ i x med $U_{n+1} \subset U_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

8. Lad A være en ikke-tom mængde, og lad $\mathcal{F}$ betegne mængden af alle reelle funktioner på A. For alle $f \in \mathcal{F}$, alle endelige delmængder $\{a_1,\cdots,a_n\}$ af A, og alle $\varepsilon > 0$ sættes

$$U(f;\, a_1,\cdots,a_n;\, \varepsilon) := \{g \in \mathcal{F} \mid |g(a_i) - f(a_i)| < \varepsilon,\ i = 1,\cdots,n\}$$

Gør rede for, at der findes netop een topologi $\mathcal{T}$ på $\mathcal{F}$, således at mængderne af formen $U(f;\, a_1,\cdots,a_n;\, \varepsilon)$ udgør en $\mathcal{T}$-omegnsbasis i f. [Topologien $\mathcal{T}$ kaldes topologien for *punktvis konvergens* på $\mathcal{F}$.]

9. Lad x_0 være et punkt i en mængde M, og lad $\mathcal{U}(x_0)$ være et system af delmængder af M, som opfylder betingelserne (1)-(4) i 2.8 for $x = x_0$. For $x \in M \setminus \{x_0\}$ betegnes med $\mathcal{U}(x)$ mængden af delmængder af M, som indeholder x. Gør rede for, at der findes netop een topologi $\mathcal{T}$ på M, således at $\mathcal{T}$-omegnsfiltret i x er $\mathcal{U}(x)$ for alle $x \in M$.

10. Lad $\mathcal{T}$ være den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$, og lad $\mathcal{V}(x)$ være $\mathcal{T}$-omegnsfiltret i $x \in \mathbb{R}$. Lad $\mathcal{W}$ betegne mængden af delmængder af $\mathbb{R}$, som indeholder en mængde af formen $V \cap \mathbb{Q}$, hvor $V \in \mathcal{V}(0)$. Sæt

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} \mathcal{V}(x) & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \mathcal{W} & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Gør rede for, at (1)-(5) i 2.8 er opfyldt med $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Gør rede for, at (1)-(4), men ikke (5), er opfyldt med $M = \mathbb{R}$. Konklusion?

11. Lad $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum. En følge $(x_n)_{n\in N}$ i M siges at *konvergere* mod et punkt $x \in M$, dersom enhver omegn af x indeholder alle følgens elementer fra et vist trin, d.v.s.

$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n \geqq N \Rightarrow x_n \in U.$$

Man skriver da $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ eller blot $x_n \to x$.

(1) Begrund, at den i opgave 8 indførte topologi kaldes topologien for punktvis konvergens.

(2) Lad $\mathcal{K}(x)$, $x \in M$, betegne mængden af følger i M, som konvergerer mod x. Angiv nogle simple egenskaber ved $\mathcal{K}(x)$.

(3) Vis, at hvis $(M,\mathcal{T})$ opfylder *1.* numerabilitetsaksiom, så kan $\mathcal{U}(x)$ på naturlig måde "rekonstrueres" ud fra $\mathcal{K}(x)$.

12. Ved en *dobbeltfølge* i en mængde M forstås en afbildning $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M$. Skrives $x_{\mu\nu}$ i stedet for $f(\mu,\nu)$, kan dobbeltfølgen f også skrives som $(x_{\mu\nu})_{\mu,\nu\in N}$. - Et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at opfylde *diagonalprincippet for dobbeltfølger*, dersom nedenstående er opfyldt for enhver dobbeltfølge $(x_{\mu\nu})_{\mu,\nu\in N}$ i M:

(*) Af $x_{\mu\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} x_\mu$ og $x_\mu \xrightarrow[\mu\to\infty]{} x_0$ følger eksistensen af en voksende afbildning $\mu \to n_\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, således at $x_{\mu n_\mu} \xrightarrow[\mu\to\infty]{} x_0$.

(1) Bevis, at hvis $(M,\mathcal{T})$ opfylder 1. numerabilitetsaksiom, så gælder (*) for $(M,\mathcal{T})$.

(2) Anvend (1) til at give en ny begrundelse for, at den i opgave 10 indførte afbildning $\mathcal{U}: \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ikke er omegnsfilterafbildning for nogen topologi på $\mathbb{R}$.

13. Gør i detalje rede for relationer mellem betingelserne i 2.8 og betingelserne i 2.16. Overvej, om 2.16 kunne være bevist snildere ved anvendelse af 2.8.

14. Formulér og bevis en til sætning 2.16 analog sætning for afbildningen $A \to \mathrm{cl}A: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$.

15. Lav en oversigt, som viser samtlige almengyldige inklusioner mellem mængderne $A \cap B$, $\mathrm{int}(A \cap B)$, $\mathrm{cl}(A \cap B)$, $\mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$, $\mathrm{int}A \cap B$, $\mathrm{int}A \cap \mathrm{cl}B$, $A \cap \mathrm{cl}B$, $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B$. Angiv modeksempler til de ikke-almengyldige inklusioner.

16. Sæt $\alpha(A) := \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$ og $\beta(A) := \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$. Vis, at $A \subset B$ implicerer $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ og $\beta(A) \subset \beta(B)$. Vis, at $A \subset \alpha(A)$, når A er åben, og at $\beta(A) \subset A$, når A er afsluttet. Vis, at $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$, og at $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$. Vis, at hvis O_1 og O_2 er åbne mængder med $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, så gælder også $\alpha(O_1) \cap \alpha(O_2) = \emptyset$. Opstil samtlige almengyldige inklusioner mellem mængderne A, $\mathrm{int}A$, $\mathrm{cl}A$, $\alpha(\mathrm{int}A)$, $\alpha(A)$, $\beta(\mathrm{cl}A)$, $\beta(A)$.

17. Vis, at $\mathrm{bd}(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{bd}A$, og at $\mathrm{bd}(\mathrm{int}A) \subset \mathrm{bd}A$ for enhver mængde A. Angiv et eksempel til illustration af, at de tre mængder kan være forskellige.

18. Vis, at en delmængde A af en topologisk rum har en ikke-tom fællesmængde med enhver overalt tæt mængde, hvis og kun hvis $\mathrm{int}A \neq \emptyset$.

19. Vis, at der alment gælder $\mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B \subset \mathrm{int}(A \cup B)$. Begrund, at inklusionen "sædvanligvis" er ægte.

20. Vis, at foreningen af endelig mange intetsteds tætte mængder i et topologisk rum er intetsteds tæt.

21. En delmængde A af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ siges at være *mager*, dersom A er foreningsmængde af numerabelt mange intetsteds tætte delmængder af $(M,\mathcal{T})$. Vis, at følgende fire betingelser er ensbetydende:

(a) $\emptyset$ er den eneste åbne mængde, som er mager.

(b) Komplementet til en mager mængde er overalt tæt.

(c) Fællesmængden af numerabelt mange åbne overalt tætte mængder er overalt tæt.

(d) Når foreningsmængden af numerabelt mange afsluttede mængder har et indre punkt, så har allerede en af de pågældende mængder et indre punkt.

Et topologisk rum med egenskaberne (a)-(d) kaldes et *Baire-rum*.

22. Lad (M,d) være et fuldstændigt metrisk rum. Vis, at $(M,\mathcal{T}_d)$ er et Baire-rum.

23. Lad $(M,\preceq)$ være en partielt ordnet mængde. For $a \in M$ sættes $[a,\rightarrow[\ := \{y \in M \mid a \preceq y\}$; $]\leftarrow,a]$ defineres analogt. Vis, at mængden af "intervaller" af formen $[a,\rightarrow[$ hhv. $]\leftarrow,a]$ er basis for en topologi $\mathcal{T}^H$ hhv. $\mathcal{T}^V$ på M, kaldet *højretopologien* hhv. *venstretopologien*. Vis, at enhver fællesmængde af $\mathcal{T}^H$-åbne ($\mathcal{T}^V$-åbne) mængder igen er $\mathcal{T}^H$-åben ($\mathcal{T}^V$-åben). Angiv $\mathcal{T}^H$-afslutningen af en 1-punktsmængde $\{x\}$. Bestem $\mathcal{T}^V \vee \mathcal{T}^H$ (hvor $\vee$ står for supremum, jf. 4.3). Beskriv de åbne mængder i $\mathcal{T}^V \wedge \mathcal{T}^H$ (hvor $\wedge$ står for infimum). Bestem $\mathcal{T}^V \wedge \mathcal{T}^H$ under den antagelse, at $\preceq$ er opad (eller nedad) filtrerende.

24. Lad A og B være delmængder af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$ med $B \subset A$. Lad $\mathrm{int}B$ betegne det indre af B i $(M,\mathcal{T})$, og lad $\mathrm{int}_A B$ betegne det indre af B i $(A,\mathcal{T}_A)$. Vis, at den ene inklusion mellem $\mathrm{int}B$ og $\mathrm{int}_A B$ er almengyldig. Giv et eksempel, som viser, at den anden ikke er det.

25. Lad A og B være delmængder af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$. Vis, at den ene, men ikke den anden, inklusion mellem mængderne $A \cap \mathrm{int}B$ og $\mathrm{int}_A(A \cap B)$ er almengyldig; som i opgave 24 betegner int_A det indre i $(A,\mathcal{T}_A)$. Udfør det tilsvarende for afslutning.

26. Lad $(M, \mathcal{T}_0)$ være et topologisk rum, og lad A være en delmængde af M, som er overalt tæt. Lad $\mathbb{T}$ betegne mængden af topologier $\mathcal{T}$ på M, som er finere end $\mathcal{T}_0$, og som inducerer samme topologi på A som $\mathcal{T}_0$. Vis, at den partielt ordnede mængde $(\mathbb{T}, \subset)$ har (mindst) et maksimalt element.

27. Beskriv produkttopologien på et produkt $\mathbb{R}^A$, hvor A er en vilkårlig ikke-tom mængde, og $\mathbb{R}$ tænkes forsynet med den sædvanlige topologi. Se også opgave 8.

28. Lad $((M_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$ være en familie af topologiske rum. Lad $\mathcal{S}$ betegne systemet af delmængder af ΠM_i af formen ΠO_i, hvor $O_i \in \mathcal{T}_i$ for alle $i \in I$. Gør rede for, at $\mathcal{S}$ er basis for en topologi $\mathcal{T}$ på ΠM, som er finere end $\Pi \mathcal{T}_i$.

29. Lad $(M_1, \mathcal{T}_1)$ og $(M_2, \mathcal{T}_2)$ være topologiske rum. Vis, at der for $A_1 \subset M_1$ og $A_2 \subset M_2$ gælder $\mathrm{cl}(A_1 \times A_2) = \mathrm{cl}A_1 \times \mathrm{cl}A_2$, hvor $\mathrm{cl}(A_1 \times A_2)$ betegner afslutningen af $A_1 \times A_2$ i $(M_1 \times M_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$.

30. Gør rede for, at den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}^n$ er produkttopologien; begynd med at få afklaret, hvad der menes med udsagnet.

31. Lad f være en afbildning af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$. Vis, at følgende udsagn er ensbetydende:

(a) f er kontinuert.

(b) Der findes en subbasis $\mathcal{S}_2$ for $\mathcal{T}_2$ med $f^{-1}(\mathcal{S}_2) \subset \mathcal{T}_1$.

(c) For enhver afsluttet delmængde F af $(M_2, \mathcal{T}_2)$ er $f^{-1}(F)$ afsluttet i $(M_1, \mathcal{T}_1)$.

(d) For enhver delmængde A_1 af M_1 gælder $f(\mathrm{cl}A_1) \subset \mathrm{cl}f(A_1)$.

(e) For enhver delmængde A_2 af M_2 gælder $\mathrm{cl}(f^{-1}(A_2)) \subset f^{-1}(\mathrm{cl}A_2)$.

32. Lad f være en afbildning af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$, og lad x_0 være et punkt i M_1. Vis, at følgende udsagn er ensbetydende:

(a) f er kontinuert i x_0.

(b) For enhver omegn U_2 af $f(x_0)$ findes en omegn U_1 af x_0, således at $f(U_1) \subset U_2$.

(c) Der findes en omegnsbasis $\mathcal{B}_2(f(x_0))$ i $f(x_0)$, således at $f^{-1}(U_2) \in \mathcal{U}_1(x_0)$ for alle $U_2 \in \mathcal{B}_2(f(x_0))$.

33. Angiv en kontinuert afbildning af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$, som ikke er åben.

34. Lad $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \geqq 0, \\ |x|+1 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

Vis, at f er åben, men ikke kontinuert.

35. En afbildning $f : (M,\mathcal{T}) \to [-\infty,+\infty]$ siges at være *nedad halvkontinuert*, dersom mængden $\{x \in M \mid f(x) \leqq a\}$ er afsluttet for ethvert $a \in \mathbb{R}$.

(1) Vis, at følgende er ensbetydende:

(a) f er nedad halvkontinuert.

(b) $\{x \in M \mid f(x) > a\}$ er åben for hvert $a \in \mathbb{R}$.

(c) f's *epigraf*, d.v.s. mængden

$$\text{epi}f := \{(x,r) \in M \times \mathbb{R} \mid r \geqq f(x)\}$$

er afsluttet, idet $M \times \mathbb{R}$ tænkes forsynet med produkttopologien.

(2) Angiv en topologi $\overline{\mathcal{T}}$ på $[-\infty,+\infty]$, således at $f : (M,\mathcal{T}) \to [-\infty,+\infty]$ er nedad halvkontinuert, hvis og kun hvis $f : (M,\mathcal{T}) \to ([-\infty,+\infty],\overline{\mathcal{T}})$ er kontinuert.

36. Lad M være en mængde, lad $(f_i)_{i\in I}$ være en familie af reelle funktioner på M, og lad $\mathcal{T}$ være initialtopologien på M m.h.t. funktionerne $f_i : M \to \mathbb{R}$ (hvor $\mathbb{R}$ tænkes forsynet med den sædvanlige topologi). Lad x og y være to punkter i M med $f_i(x) = f_i(y)$ for alle $i \in I$. Vis, at der for enhver kontinuert reel funktion f på $(M,\mathcal{T})$ gælder $f(x) = f(y)$.

37. Lad $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum, og lad $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$ være produkttopologien på $M \times M$. Vis, at $(M,\mathcal{T})$ er et Hausdorff-rum, hvis og kun hvis "diagonalen"

$$\Delta := \{(x,y) \in M \times M \mid x = y\}$$

er $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$-afsluttet.

38. Lad f være en kontinuert afbildning af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et Hausdorff-rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$. Vis, at f's graf er en afsluttet delmængde af $M_1 \times M_2$, idet $M_1 \times M_2$ tænkes forsynet med produkttopologien.

39. Vis, at $(T_3) \wedge (T_0) \Rightarrow (T_2)$.

40. Forsøg at bevise påstandene i 8.19.

41. Lad $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum med mindst to punkter, og lad $x_0 \in M$ være et punkt med $\mathcal{U}(x_0) = \{M\}$. Undersøg, om $(M,\mathcal{T})$ er quasi-kompakt/kompakt.

42. Lad $(M,\mathcal{T})$ være quasi-kompakt, og lad f: $(M,\mathcal{T}) \to]-\infty,+\infty]$ være nedad halvkontinuert (jf. opgave 35) og nedad begrænset. Vis, at $\inf f(M)$ antages.

43. Lad $\mathcal{K} := \{K_i \mid i \in I\}$ være en mængde af konvekse mængder i $\mathbb{R}^n$, som alle er afsluttede og hvoraf (mindst) een er kompakt. Vis, at hvis vilkårlige $n+1$ af mængderne K_i har en ikke-tom fællesmængde, så har de alle en ikke-tom fællesmængde.

44. Vis, at ethvert topologisk rum har en "1-punkts quasi-kompaktifikation". (Udnyt f.eks. opgave 41.)

45. Lad $(M,\mathcal{T})$ være et lokalkompakt rum, lad K være en ikke-tom kompakt delmængde, og lad F være en ikke-tom afsluttet delmængde disjunkt med K. Vis, at der findes en kontinuert funktion $f\colon (M,\mathcal{T}) \to [0,1]$ med $f(K) = \{1\}$ og $f(F) = \{0\}$, således at f's *støtte* $\mathrm{cl}\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}$ er kompakt.

46. Lad $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum. Vis, at enhver funktion $f\colon M \to]-\infty,+\infty]$, som er supremum af kontinuerte reelle funktioner på $(M,\mathcal{T})$, er nedad halvkontinuert. Vis, at hvis $(M,\mathcal{T})$ er et $T_{3.5}$*-rum*, og f er nedad begrænset, så gælder også det omvendte.

47. Lad $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum, og lad $\mathcal{F}$ være en mængde af kontinuerte reelle funktioner på $(M,\mathcal{T})$. Sæt $\mathcal{G} := \mathbb{R}^{\mathcal{F}} = \Pi_{f\in\mathcal{F}}\mathbb{R}_f$, hvor $\mathbb{R}_f = \mathbb{R}$ for alle $f \in \mathcal{F}$, og lad $\mathcal{S}$ betegne produkttopologien på $\mathcal{G}$. Vis, at afbildningen

$$x \to \Phi(x) := (f(x))_{f\in\mathcal{F}} : (M,\mathcal{T}) \to (\mathcal{G},\mathcal{S})$$

er kontinuert. Vis, at hvis $(M,\mathcal{T})$ er kompakt, og $\mathcal{F}$ skiller punkter, så er Φ en homeomorfi af $(M,\mathcal{T})$ på $(\Phi(M),\mathcal{S}_{\Phi(M)})$.

48. Et topologisk rum siges at være *totalt usammenhængende*, dersom alle komponenter kun indeholde eet punkt. Vis, at $\mathbb{Q}$ (med sædvanlig topologi) er totalt usammenhængende. Vis, at ethvert numerabelt metrisk rum er totalt usammenhængende.

49. Lad $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum med egenskaben, at afslutningen af enhver åben mængde er åben. Vis, at hvis rummet er T_2, så er det totalt usammenhængende.

50. Vis, at hvis $(M,\mathcal{T})$ kun har endelig mange komponenter, så er enhver komponent åben.

51. Vis, at $(M,\mathcal{T})$ er lokalt sammenhængende, hvis og kun hvis $\mathcal{T}$ har en basis bestående af sammenhængende mængder.

52. Undersøg bevarelsen af sammenhæng og lokal sammenhæng ved produktrumsdannelse.

53. Sæt $I_n :=]n,n+\frac{1}{2}[$ og $A_n := \cup_{k\geq n} I_k$ for $n \in \mathbb{N}$. Gør rede for, at $\mathcal{A} := \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er en filterbasis på $\mathbb{R}$. Lad $\mathcal{F}$ betegne det af $\mathcal{A}$ frembragte filter. Lad, for $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{U}(x)$ betegne omegnsfiltret i x i den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$. Sæt $\mathcal{U}'(x) := \mathcal{U}(x)$ for $x \neq 0$, og sæt

$$\mathcal{U}'(0) := \{U \cup F \mid U \in \mathcal{U}(0) \wedge F \in \mathcal{F}\}.$$

Gør rede for, at $\mathcal{U}'$ er en topologi på $\mathbb{R}$ (bestemt ved omegnsfiltrene). Gør rede for, at $(\mathbb{R},\mathcal{U}')$ er sammenhængende. Vis, at $(\mathbb{R},\mathcal{U}')$ ikke er lokalt sammehængende.

54. Lad A og B være afsluttede delmængder af et topologisk rum $(M,\mathcal{T})$. Vis, at hvis både $A \cup B$ og $A \cap B$ er sammenhængende, så er A og B sammenhængende.

55. Angiv de systemer $\mathcal{F}$ af delmængder af en mængde M, som opfylder betingelserne (1), (3) og (4) i 13.1.

56. Lad $\mathcal{F}$ være et filter på en uendelig mængde M, og antag, at $\cap_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$. Vis, at $\mathcal{F}$ er finere end filtret bestående af mængderne med endelig komplementærmængde.

57. Lad $\mathcal{F}$ være et ultrafilter. Vis, at $\cap_{F\in\mathcal{F}} F$ højst indeholder eet punkt.

58. Vis, at et filter $\mathcal{F}$ på en mængde M er et ultrafilter, hvis og kun hvis der for alle $A_1,\cdots,A_n$ med $A_1 \cup\cdots\cup A_n = M$ findes $i \in \{1,\cdots,n\}$, således at $A_i \in \mathcal{F}$.

59. Lad $\mathcal{F}$ være et filter på en mængde M. Vis, at $\mathcal{F}$ er fællesmængden af alle de ultrafiltre på M, som er finere end $\mathcal{F}$.

60. Lad $\mathcal{F}$ være et filter, som har en numerabel basis. Vis, at $\mathcal{F}$ er fællesmængde af alle elementarfiltre, som er finere end $\mathcal{F}$.

61. Lad $\mathcal{F}$ og $\mathcal{G}$ være filtre på en mængde M. Vis, at $A \in \mathcal{F}\cap\mathcal{G}$, hvis og kun hvis der findes $F \in \mathcal{F}$ og $G \in \mathcal{G}$, således at $A = F \cup G$.

62. Vis, at ethvert lokalkompakt rum er et Baire-rum (jf. opgave 21).

63. Lad $(M,\mathcal{T})$ være et Hausdorff-rum.

(1) $(M,\mathcal{T})$ siges at være $\aleph_0$*-kompakt*, dersom enhver numerabel åben overdækning indeholder en overdækning bestående af endelig mange mængder. Vis, at følgende tre betingelser er ensbetydende:

(a) $(M,\mathcal{T})$ er $\aleph_0$-kompakt.

(b) Ethvert filter på $(M,\mathcal{T})$ med en numerabel basis har (mindst) et kontaktpunkt.

(c) Enhver følge i $(M,\mathcal{T})$ har (mindst) et fortætningspunkt.

(2) $(M,\mathcal{T})$ siges at være *følgekompakt*, dersom enhver følge i $(M,\mathcal{T})$ har (mindst) en konvergent delfølge. Vis, at følgekompakthed medfører $\aleph_0$-kompakthed.

(3) Vis, at hvis $(M,\mathcal{T})$ er $\aleph_0$-kompakt og opfylder *1*-numerabilitetsaksiom, så er det følgekompakt.

(4) Vis, at hvis $(M,\mathcal{T})$ er $\aleph_0$-kompakt og opfylder *2*-numerabilitetsaksiom, så er det kompakt.

(5) Vis, at hvis $(M,\mathcal{T})$ er metrisabelt, så er kompakthed, $\aleph_0$-kompakthed og følgekompakthed ensbetydende.

64. Lad M være en mængde, og lad der for hvert $x \in M$ være givet en mængde $\mathcal{F}_x$ af filtre på M. Gør rede for, at der findes højst een topologi $\mathcal{T}$ på M, således at mængden af filtre på $(M,\mathcal{T})$, som konvergerer mod x, netop er $\mathcal{F}_x$.

65. Lad A_1 hhv. A_2 være en quasi-kompakt delmængde af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ hhv. $(M_2, \mathcal{T}_2)$. Vis, at der for enhver åben mængde O i produktrummet $(M_1 \times M_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ med $A_1 \times A_2 \subset O$ findes en åben mængde O_1 hhv. O_2 i $(M_1, \mathcal{T}_1)$ hhv. $(M_2, \mathcal{T}_2)$ med $A_1 \times A_2 \subset O_1 \times O_2 \subset O$.

66. Ved et *net* på en mængde M forstås et sæt $(I, \preceq, M, \varphi)$, hvor I er en mængde, $\preceq$ er en præorden på I, som er opad filtrerende, d.v.s.

$$\forall \alpha, \beta \in I \; \exists \gamma \in I : \alpha \preceq \gamma \wedge \beta \preceq \gamma,$$

og φ er en afbildning af I ind i M. Som kort skrivemåde for et net $(I, \preceq, M, \varphi)$ benyttes også $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$. (Benyttes denne skrivemåde, er det altså underforstået, hvilken præorden $\preceq$ på I, der tænkes på.) Mængden I kaldes nettets indeksmængde. (Igen er $\preceq$ underforstået.)

Ved et *afsnit* i et net $(I, \preceq, M, \varphi)$ forstås en mængde af formen $A_\alpha := \{x_\beta \mid \alpha \preceq \beta\}$, hvor $\alpha \in I$. Et net $(x_\kappa)_{\kappa \in I}$ siges at være i en mængde $N \subset M$ *fra et vist trin*, dersom N indeholder et afsnit A_α; vi skriver da $x_\alpha \in N$ *f.v.t.*

(1) Lad $(x_\kappa)_{\kappa \in I}$ være et net på M. Sæt

$$\mathcal{F} := \{F \subset M \mid x_\alpha \in F \text{ } f.v.t.\}.$$

Vis, at $\mathcal{F}$ er et filter på M, kaldet nettets *afsnitsfilter*. Afsnittene A_α, $\alpha \in I$, udgør en basis for $\mathcal{F}$.

(2) Lad $\mathcal{F}$ være et filter på M. Lad I betegne mængden af par (x,F), hvor $x \in F \in \mathcal{F}$. Lad $\preceq$ på I være defineret ved

$$(x_1,F_1) \preceq (x_2,F_2) \ :\Leftrightarrow F_1 \supset F_2 .$$

Vis, at $\preceq$ er en opad filtrerende præorden på I. Afbildningen $(x,F) \to x$ bestemmer altså et net på M, nemlig $(x_{(x,F)})_{(x,F)\in I}$. Vis, at dette nets afsnitsfilter er $\mathcal{F}$.

Et net $(I', \preceq', M, \varphi')$ på M siges at være et delnet af $(I, \preceq, M, \varphi)$, dersom der findes en afbildning $\psi\colon I' \to I$, således at

$$\varphi' = \varphi \circ \psi$$

og

$$\forall \alpha \in I \ \exists \alpha' \in I' \ \forall \beta' \in I' : \alpha' \preceq \beta' \Rightarrow \alpha \preceq \psi(\beta').$$

(3) Lad $(x_{\alpha'})_{\alpha' \in I'}$ være et delnet af $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$. Lad $\mathcal{F}'$ hhv. $\mathcal{F}$ være det tilhørende afsnitsfilter. Vis, at $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

Et net $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ kaldes et *universalnet*, dersom der for enhver delmængde N af M gælder, at $x_\alpha \in N$ *f.v.t.* eller $x_\alpha \in M \setminus N$ *f.v.t.*

(4) Lad $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ være et universalnet på M. Vis, at det til nettet hørende afsnitsfilter $\mathcal{F}$ er et ultrafilter.

(5) Vis, at det til et ultrafilter hørende net (jf. (2)) er et universalnet.

Lad herefter $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum. Et net $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ på M siges da at have et punkt $x \in M$ som *grænsepunkt* hhv. *kontaktpunkt*, dersom der for enhver omegn U af x gælder

$$\exists\alpha \in I\ \forall\beta \in I : \alpha \preceq \beta \Rightarrow x_\beta \in U$$

(altså $x_\alpha \in U$ *f.v.t.*) hhv.

$$\forall\alpha \in I\ \exists\beta \in I : \alpha \preceq \beta \wedge x_\beta \in U$$

Hermed kan konvergensteorien (§14) formuleres ved net i stedet for ved filtre. Gør det!

Ordensrelationer, - en oversigt.

1. Ved en relation i en mængde M forstås som bekendt en delmængde R af $M \times M$.

En relation R i en mængde M siges at være

refleksiv, dersom $(x,x) \in R$ for alle $x \in M$;

irrefleksiv, dersom $(x,x) \notin R$ for alle $x \in M$;

symmetrisk, dersom $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ for alle $x,y \in M$;

asymmetrisk (antisymmetrisk), dersom $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$ for alle $x,y \in M$;

transitiv, dersom $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ for alle $x,y,z \in M$.

En relation R i en mængde M kaldes en

ækvivalensrelation, dersom den er refleksiv, symmetrisk og transitiv;

præorden (præordning), dersom den er refleksiv og transitiv;

orden (ordning, partiel orden, partiel ordning), dersom den er refleksiv, asymmetrisk og transitiv.

Er R en relation i M, og er A en delmængde af M, så er $R_A := R \cap (A \times A)$ en relation i A, kaldet den af R inducerede relation. Er R en ækvivalensrelation, en præorden, eller en orden, så gælder det samme om R_A.

2. Er R en (præ)orden i M, skrives ofte $x \leq y$ i stedet for $(x,y) \in R$. En mængde M forsynet med en (præ)orden $\leq$ kaldes en <u>(præ)ordnet mængde</u>.

Er $\leq$ en (præ)orden på en mængde M, skrives $<$ for den tilhørende irrefleksive relation, d.v.s.

$$x < y :\Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y \,.$$

Er x og y to elementer i en (præ)ordnet mængde $(M,\leq)$, så siges x og y at være <u>sammenlignelige</u>, dersom der gælder enten $x \leq y$ eller $y \leq x$. Gælder $x \leq y$, siges x at <u>gå forud for</u> y, og y siges at <u>følge efter</u> x. Endvidere benyttes sprogbrugen, at x er en <u>forgænger</u> til y, og y er en <u>efterfølger</u> til x. Gælder $x < y$, siges x at gå <u>strengt</u> forud for y, etc.

3. Er R en ækvivalensrelation i en mængde M, skrives ofte $x \sim y$ i stedet for $(x,y) \in R$. Er $\sim$ en ækvivalensrelation i M, sættes for hvert $x \in M$

$$\mathrm{kl}(x) := \{y \in M \mid x \sim y\} \,.$$

Mængderne $\mathrm{kl}(x)$, $x \in M$, kaldes <u>ækvivalensklasser</u>. Mængden af ækvivalensklasser betegnes $M/\sim$.

Ved en <u>klassedeling</u> af en mængde M forstås en familie $(K_i)_{i\in I}$ af ikke-tomme delmængder af M med følgende to egenskaber:

$$\bigcup_{i \in I} K_i = M .$$

$$\forall i,j \in I : i \neq j \Rightarrow K_i \cap K_j = \emptyset.$$

Det er velkendt, at hvis $\sim$ er en ækvivalensrelation i en ikke-tom mængde M, så udgør ækvivalensklasserne en klassedeling af M. Det er ligeledes velkendt, at hvis $(K_i)_{i \in I}$ er en klassedeling af M, så bestemmes en ækvivalensrelation $\sim$ i M ved

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists i \in I : x,y \in K_i ;$$

ækvivalensklasserne bliver da netop mængderne K_i.

Lad nu $\leq$ være en præorden på en ikke-tom mængde M. Det er let at se, at den ved

$$x \sim y :\Leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq x$$

definerede relation $\sim$ i M er en ækvivalensrelation. Det er herefter ligeledes let at se, at der ved

$$\mathrm{kl}(x) \leq' \mathrm{kl}(y) :\Leftrightarrow x \leq y$$

faktisk defineres en relation $\leq'$ i mængden $M/\sim$ af ækvivalensklasser, og at $\leq'$ er en orden.

4. Lad $(M,\leq)$ være en ordnet mængde. Et element $x \in M$ siges at være et

<u>første element</u> i M, dersom $x \leq y$ for ethvert $y \in M$;

<u>sidste element</u> i M, dersom $y \leq x$ for ethvert $y \in M$;

<u>minimalt element</u> i M, dersom der ikke gælder $y < x$ for noget $y \in M$;

<u>maksimalt element</u> i M, dersom der ikke gælder $x < y$ for noget $y \in M$.

En ordnet mængde $(M,\leq)$ har højst eet første og højst eet sidste element; men der behøver ikke at være hverken et første eller et sidste element. Der kan være ingen, eet eller flere minimale hhv. maksimale elementer. Hvis der er et første hhv. sidste element, så er dette tillige eneste minimale hhv. maksimale element.

5. Lad A være en delmængde af en ordnet mængde $(M,\leq)$. Et element $x \in M$ siges at være en

<u>minorant</u> for A, dersom $x \leq y$ for alle $y \in A$;

<u>majorant</u> for A, dersom $y \leq x$ for alle $y \in A$.

En delmængde A kan have ingen, een eller flere minoranter hhv. majoranter. En minorant (majorant) kan ligge i A, - eller i $M \setminus A$. Hvis en minorant (majorant) x for A ligger i A, så er x første (sidste) element i $(A,\leq)$.

6. Lad A være en delmængde af en ordnet mængde $(M,\leq)$. Et element $x \in M$ siges at være

<u>infimum</u> for A, dersom x er sidste element i mængden af minoranter for A;

<u>supremum</u> for A, dersom x er første element i mængden af majoranter for A.

En delmængde A behøver ikke at have hverken infimum eller supremum. Hvis A har infimum hhv. supremum, så er infimum hhv. supremum entydigt bestemt. For A's infimum hhv. supremum benyttes betegnelserne

$$\inf A, \ \inf_{x \in A} x, \ \bigwedge A, \ \bigwedge_{x \in A} x,$$

hhv.

$$\sup A, \ \sup_{x \in A} x, \ \bigvee A, \ \bigvee_{x \in A} x,$$

(Symbolerne $\bigwedge$ og $\bigvee$ kan udtales "tak" og "hak".) Er A en endelig mængde, $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, kan også benyttes betegnelserne

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$$

$$x_1 \vee \cdots \vee x_n \quad .$$

Hvis $\inf A$ hhv. $\sup A$ eksisterer, så kan det ligge i A, - eller i $M \setminus A$. Der gælder $\inf A \in A$ hhv. $\sup A \in A$, hvis og kun hvis A har et første hhv. sidste element (som da må være $\inf A$ hhv. $\sup A$).

7. En ordnet mængde $(M, \leq)$ kaldes et

<u>lattice</u>, dersom $\inf A$ og $\sup A$ eksisterer for enhver ikke-tom endelig delmængde A of M;

<u>fuldstændigt lattice</u>, dersom inf A og sup A eksisterer for enhver delmængde A af M ;

Ethvert fuldstændigt lattice har et første og et sidste element.

Hvis sup A eksisterer for enhver delmængde A af en ordnet mængde $(M,\leq)$, så er $(M,\leq)$ et fuldstændigt lattice. Tilsvarende for inf A.

8. En ordnet mængde $(M,\leq)$ siges at være

<u>totalt ordnet</u>, dersom der for alle $x,y \in M$ gælder $x \leq y$ eller $y \leq x$.

<u>velordnet</u>, dersom enhver ikke-tom delmængde af M har et første element.

<u>induktivt ordnet</u>, dersom enhver totalt ordnet delmængde af M har (mindst) en majorant.

Enhver velordnet mængde er totalt ordnet; det omvendte gælder ikke.

<u>Velordningssætningen</u>. Enhver ikke-tom mængde M kan velordnes (d.v.s. der findes en ordning $\leq$ på M , således at $(M,\leq)$ er velordnet).

<u>Zorn's lemma</u>. Enhver ikke-tom induktivt ordnet mængde har (mindst) et maksimalt element.

<u>Øvelse 1</u>. Bevis de ubeviste påstande i teksten.

<u>Øvelse 2</u>. Lad M være en vilkårlig mængde, og lad $\mathcal{P}(M)$ betegne M's <u>potensmængde</u>, d.v.s. mængden af delmængden af M[1]. Mængden $\mathcal{P}(M)$ er ordnet ved $\subset$[2]. Det samme gælder derfor om enhver delmængde S af $\mathcal{P}(M)$. Diskutér strukturen af $(S,\subset)$ for nedenstående valg af S. (Undersøg, om der er første element, minimale elementer etc., om ordningen er total etc., om ordningen er en (fuldstændig) lattice ordning.)

1° M vilkårlig. $S = \mathcal{P}(M), \mathcal{P}(M)\setminus\{\emptyset\}, \mathcal{P}(M)\setminus\{\emptyset, M\}$.

2° $M = \mathbb{R}$. S = mængden af intervaller.

3° $M = \mathbb{R}^n$. S = mængden af åbne mængder.
S = mængden af afsluttede mængder.

4° $M = \mathbb{R}^2$. S = mængden af afsluttede cirkelskiver.

<u>Øvelse 3</u>. Giv et forslag til definition af begrebet dellattice. (Sammenlign eventuelt 2° og 3° i øvelse 2.)

1) I mængdelære-noterne er denne mængde betegnet $\grave{D}(M)$.

2) Her - og i topologi-noterne - benyttes $\subset$ i betydningen "indeholdt i, eventuelt identisk med", og altså <u>ikke</u> i betydningen "ægte delmængde".

Om mængdeprodukter m.m.

Lad f være en afbildning af en mængde M_1 ind i en mængde M_2. Mængden M_1 kaldes da *definitionsmængden* for f, og mængden M_2 kaldes *en dispositionsmængde* for f. To afbildninger $f\colon M_1 \to M_2$ og $g\colon N_1 \to N_2$ regnes for samme afbildning, dersom $M_1 = N_1$ og $f(x) = g(x)$ for alle $x \in M_1 = N_1$. Man kan sige, at det ved angivelse af en afbildning er unødvendigt (men som regel hensigtsmæssigt) at specificere en dispositionsmængde.

Ved en *familie* med en mængde I som *indeksmængde* forstås simpelthen en afbildning med I som definitionsmængde. For en familie φ med I som indeksmængde benyttes også skrivemåden $(\varphi(i))_{i\in I}$, eller $(x_i)_{i\in I}$, hvor $x_i = \varphi(i)$.

Ved en familie $(M_i)_{i\in I}$ af mængder forstås ifølge det foregående en afbildning φ med I som definitionsmængde, således at billedet $\varphi(i)$ for hvert $i \in I$ er en mængde, nemlig M_i. Ved *(mængde-)produktet* $\Pi_{i\in I}M_i$ af familien $(M_i)_{i\in I}$ forstås mængden af alle afbildninger ψ med I som definitionsmængde, således at $\psi(i) \in M_i$ for hvert $i \in I$. Mængdeproduktet er altså mængden af alle familier $(x_i)_{i\in I}$, hvor $x_i \in M_i$ for hvert $i \in I$. Mængderne M_i kaldes *faktormængderne*. Afbildningerne π_{i_0} med $\Pi_{i\in I}M_i$ som definitionsmængde, som til $(x_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}M_i$ lader svare x_{i_0}, kaldes *projektionerne*.

Er M og I mængder, betegnes med M^I mængden af alle afbildninger af I ind i M. Man ser, at $\Pi_{i\in I}M_i = M^I$, når $M_i = M$ for alle $i \in I$.

For en familie $(x_i)_{i\in I}$ med $I = \{1,2,\cdots,n\}$ som indeksmængde benyttes også skrivemåden $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. En sådan familie kaldes som bekendt også et *sæt*.

Ved produktet $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ af et sæt $(M_1, M_2, \cdots, M_n)$ af mængder forstås som bekendt mængden af sæt $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, hvor $x_i \in M_i$ for alle $i \in I = \{1, 2, \cdots, n\}$. Der gælder derfor $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \Pi_{i \in I} M_i$ for $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

For produktet af sættet $(M, M, \cdots, M)$, hvor samme mængde M forekommer n gange, skrives som bekendt også M^n. Ifølge det foregående har vi også $M \times M \times \cdots \times M = M^{\{1, 2, \ldots, n\}}$. Skrivemåden M^n kan altså opfattes som en kort skrivemåde for $M^{\{1, 2, \cdots, n\}}$.

For potensmængden $\mathcal{P}(M)$ af M benyttes lejlighedsvis betegnelsen 2^M. Til forståelse heraf bemærkes, at den afbildning $\mathcal{P}(M) \to \{0, 1\}^M$, som til $A \in \mathcal{P}(M)$ lader svare A's indikatorfunktion

$$\varphi_A(x) := \begin{cases} 0 \text{ for } x \in M \setminus A, \\ 1 \text{ for } x \in A, \end{cases}$$

er bijektiv. Man kan derfor "identificere" $\mathcal{P}(M)$ og $\{0, 1\}^M$. Opfattes 2^M som en kort skrivemåde for $\{0, 1\}^M$, har vi altså $\mathcal{P}(M)$ "=" 2^M (!)