

Matematik 1, 1969–70

Arne Brøndsted

Forelæsningsnoter til Matematik 1x

Lineær algebra

Med supplerende sider 1971–73 ved Anders Thorup
og 1974–75 (Mat101-noter) ved NN

Kap. 1. Vektorrum.

Kap. 2. Lineære afbildninger.

Kap. 3. Dualitet (suppl. 3.2*, 3.3*).

Kap. 4. Matricer (suppl. 4.2.6*, 4.2.7*, 4.4.1*).

Kap. 5. Determinant.

Kap. 6. Normalformer for matricer.

Kap. 7. Vektorrum med indre produkt (suppl. 7.8).

Kap. 8. Kvadratiske former.

Kap. 9. Affin geometri (Suppl. 9.8, 9.9, 9*).

Supplement.

Kap. 1. Vektorrum. 1.1. Vektorrum (6 sider), 1.2. Underrum (3 sider), 1.3. Lineær afhængighed og uafhængighed (4 sider), 1.4. Dimension, Basis, Koordinater (8 sider), 1.5. Sum og direkte sum af underrum (7 sider), 1.6. Kvotientrum (5 sider), Øvelse 1-36.

Kap. 2. Lineære afbildninger. 2.1. Lineære afbildninger (6 sider), 2.2. Dimensionsætningen (3 sider), 2.3. Regning med lineære afbildninger (2 sider), Øvelse 1-8.

Kap. 3. Dualitet. 3.1. Vektorrum i dualitet (6 sider), 3.2. Duelt vektorrum (4 sider), 3.3. Dual af-bildninger (4 sider), Øvelse 1-5.

Kap. 4. Matricer. 4.1. Matricer (16 sider), 4.2. Lineære af-bildningers matrix ligninger (7 sider), 4.3. Koordinattransformation (4 sider), 4.4. Matrix-rang (4 sider), 4.5. Lineære ligningssystemer (7 sider), Øvelse 1-30.

Kap. 5. Determinant. 5.1. Alternierende n -linearformer (6 sider), 5.2. Determinant-ætninger (4 sider), 5.3. Udvikling af determinant (4 sider), Øvelse 1-15.

Kap. 6. Normalformer for matricer. 6.1. Egenverdier og egenvektorer (6 sider), 6.2. Karakteristisk polynomium (5 sider), 6.3. Triagonalisering (4 sider), 6.4. Jordan's normalform (14 sider), Øvelse 1-24.

Kap. 7. Vektorrum med indre produkt. 7.1. Indre produkt. (12 sider). 7.2. Norm. (6 sider). 7.3. Adjungeret afbildning. (3 sider). 7.4. Dualitet. (3 sider). 7.5. Normale afbildninger. (3 sider). 7.6. Selvadjungerede afbildninger. (3 sider). 7.7. Ortogonale og unitære afbildninger. (9 sider). Øvelse 1-34.

Kap. 8. Kvadratiske former. 8.1. Symmetriske bilinearformer. (4 sider). 8.2. Kvadratiske former. (2 sider). 8.3. Normalformer for kvadratiske former. (5 sider). Øvelse 1-3.

Kap. 9. Affin geometri. 9.1. Affine rum. (5 sider). 9.2. Affine underrum. (4 sider). 9.3. Affin afhængighed og uafhængighed. (6 sider). 9.4. Affine afbildninger. (11 sider). 9.5. Affine funktioner og hyperplaner. (7 sider). 9.6. Konvekse mængder. (8 sider). 9.7. Kvadratter. (10 sider). Øvelse 1-34.

Kap. 1. Vektorrum.

1.1. Vektorrum.	1.1.1 - 1.1.6
1.2. Underrum.	1.2.1 - 1.2.3
1.3. Lineær afhængighed og uafhængighed.	1.3.1 - 1.3.4
1.4. Dimension. Basis. Koordinater.	1.4.1 - 1.4.8
1.5. Sum og direkte sum af underrum	1.5.1 - 1.5.7
1.6. Kvotientrum	1.6.1 - 1.6.5
Øvelser	1. ØV 1-36

1.1. Vektorrum.

Overalt i det følgende betegner L de reelle tals legeme $\mathbb{R}$ eller de komplekse tals legeme $\mathbb{C}$. Det bemærkes dog, at meget også er gyldigt for vilkårlige kommutative legemer.

En ikke-tom mængde V , med elementer $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \dots$, siges at være et vektorrum over legemet L , hvis der er givet en komposition $(\underline{u}, \underline{v}) \mapsto \underline{u} + \underline{v}$ af $V \times V$ ind i V , kaldet addition, og en komposition $(\lambda, \underline{v}) \mapsto \lambda \underline{v}$ af $L \times V$ ind i V , kaldet multiplikation, således at følgende betingelser er opfyldt:

$$(i) \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V : \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$$

$$(ii) \quad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V : \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$$

$$(iii) \quad \exists \underline{0} \in V \quad \forall \underline{v} \in V : \underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$$

$$(iv) \quad \forall \underline{v} \in V \quad \exists -\underline{v} \in V : \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$$

$$(v) \quad \forall \lambda, \mu \in L \quad \forall \underline{v} \in V : \lambda(\mu \underline{v}) = (\lambda\mu) \underline{v}$$

$$(vi) \quad \forall \underline{v} \in V : 1 \underline{v} = \underline{v}$$

$$(vii) \quad \forall \lambda, \mu \in L \quad \forall \underline{v} \in V : (\lambda + \mu) \underline{v} = \lambda \underline{v} + \mu \underline{v}$$

$$(viii) \quad \forall \lambda \in L \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V : \lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \underline{u} + \lambda \underline{v}$$

Er V et vektorrum over L , kaldes elementerne i V vektorer, og elementerne i L skalarer. Vektoren $\underline{u} + \underline{v}$ kaldes summen af $\underline{u}$ og $\underline{v}$, og vektoren $\lambda \underline{v}$ kaldes produktet af λ og $\underline{v}$. Vektoren $\underline{0}$ kaldes nulvektoren, vektoren $-\underline{v}$ kaldes den til $\underline{v}$ modsatte

vektor. Som betegnelse for vektorrummet bruges (V, L) eller blot V . Vektorrum over $\mathbb{R}$ hhv. $\mathbb{C}$ kaldes reelle hhv. komplekse vektorrum.

Det bemærkes, at betingelserne (i) - (iv) netop udtrykker, at $(V, +)$ er en kommutativ gruppe med $\underline{0}$ som neutralelement og $-x$ som inverst element til x . Der gælder derfor, at nulvektoren og den til en vektor modsatte vektor er entydigt bestemte. Endvidere følger, at der for vilkårlige vektorer $u, v \in V$ findes netop een vektor $x \in V$ med $u + x = v$; nemlig $x = v + (-u)$, som også betegnes $v - u$ og kaldes differensen af v og u . Idet $x + \underline{0} = x$, kan man altså af $x + x = x$ slutte, at $x = \underline{0}$.

Af (ii) kan sluttet, at man ved addition af flere end to vektorer kan undvære parenteser til angivelse af den orden, hvori additionerne udføres. Af (i) kan dernæst sluttet, at en sum af flere vektorer ikke afhænger af disses rækkefølge. For multiplikation af en vektor med flere skalarer gælder tilsvarende, at parenteser kan undværes, smb. (v). De distributive love (vii) og (viii) kan udvides til et vilkårligt (endeligt) antal summander.

For en sum $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ skal vi også bruge betegnelsen $\sum_{i=1}^n x_i$. Det viser sig at være bekvemt at kunne tale om den tomme sum, d.v.s. summen af ingen vektorer; denne tillegges værdien $\underline{0}$.

Vi skal vise nogle simple regler for multiplikation af vektorer med skalarer. Idet λ og μ betegner vilkårlige skalarer, og u og x vilkårlige vektorer, gælder:

$$(1) \quad \lambda \underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \underline{v} = \underline{0}$$

Vi har $0\underline{v} = (0+0)\underline{v} = 0\underline{v} + 0\underline{v}$, hvormed $0\underline{v} = \underline{0}$, og vi har $\lambda \underline{0} = \lambda(\underline{0} + \underline{0}) = \lambda \underline{0} + \lambda \underline{0}$, hvormed $\lambda \underline{0} = \underline{0}$. Er omvendt $\lambda \underline{v} = \underline{0}$ og $\lambda \neq 0$, fås $\underline{0} = \lambda^{-1} \underline{0} = \lambda^{-1}(\lambda \underline{v}) = (\lambda^{-1}\lambda)\underline{v} = 1\underline{v} = \underline{v}$. - (1) kaldes nulreglen.

$$(2) \quad (\mu - \lambda)\underline{v} = \mu\underline{v} - \lambda\underline{v}$$

Vi har $\lambda\underline{v} + (\mu - \lambda)\underline{v} = (\lambda + (\mu - \lambda))\underline{v} = \mu\underline{v}$, hvorefter (2) følger.

$$(3) \quad \lambda(\underline{u} - \underline{v}) = \lambda\underline{u} - \lambda\underline{v}$$

Vi har $\lambda\underline{v} + \lambda(\underline{u} - \underline{v}) = \lambda(\underline{v} + (\underline{u} - \underline{v})) = \lambda\underline{u}$, hvorefter (3) følger.

$$(4) \quad (-\lambda)\underline{v} = \lambda(-\underline{v}) = -\lambda\underline{v}$$

Indsættes $\mu=0$ i (2) fås $(-\lambda)\underline{v} = 0\underline{v} - \lambda\underline{v} = \underline{0} - \lambda\underline{v} = -\lambda\underline{v}$, og indsættes $\underline{u}=\underline{0}$ i (3) fås $\lambda(-\underline{v}) = \lambda\underline{0} - \lambda\underline{v} = \underline{0} - \lambda\underline{v} = -\lambda\underline{v}$.

$$(5) \quad (-1)\underline{v} = -\underline{v}$$

Indsættes $\lambda=1$ i (4) fås $(-1)\underline{v} = 1(-\underline{v}) = -\underline{v}$.

Bemærkning. Lad $(G, +)$ være en gruppe. For $g \in G$ og $n \in \mathbb{N}$ defineres da den n 'te "potens" ng af g som summen af n addender g ,

$$ng = g + \dots + g.$$

Dernæst defineres, stadig for $n \in \mathbb{N}$, den $(-n)$ 'te potens $(-n)g$ ved

$$(-n)g = n(-g),$$

altså

$$(-n)g = (-g) + \dots + (-g),$$

hvor $-g$ er det til g inverse element i gruppen.

Endelig defineres den 0'te potens. Og ved

$$0g = \sigma$$

hvor σ er gruppens neutralelement. Er nu (V, L) et vektorrum, bliver $(V, +)$ en kommutativ gruppe.

For $n \in \mathbb{Z}$ og $v \in V$ har symbolet nv således to betydninger, nemlig dels produktet af skalar n og vektoren v , og dels den n 'te potens af v . Lad os et øjeblik skrive $n * v$ for den n 'te potens af v , og fastholde betegnelsen nv for produktet af n og v . For $n \in \mathbb{N}$ og $v \in V$ gælder da

$$\begin{aligned} n * v &= v + \dots + v \\ &= 1v + \dots + 1v \\ &= (1 + \dots + 1)v \\ &= nv, \end{aligned}$$

hvor første lighedstegn begrundes ved definitionen af $n * v$ for $n \in \mathbb{N}$, andet ved (vi), og tredje ved (vii). Derefter fås, stadig for $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (-n) * v &= n * (-v) \\ &= n(-v) \\ &= (-n)v, \end{aligned}$$

hvor første lighedstegn begrundes ved definitionen af $(-n) * v$ for $n \in \mathbb{N}$, andet ved det ovenfor viste, og tredje ved (4). Endelig fås

$$0 * v = \underline{0} = 0v,$$

hvor første lighedstegn begrundes ved definitionen af $0 * v$, og andet ved (1). Vi har således $nv = n * v$ for alle $n \in \mathbb{Z}$ og $v \in V$, - og betegnelsen $n * v$ er altså overflødig. $\square$

Bemærkning. Fra den elementære geometri kendes begrebet "geometrisk vektor" i "planen" og i "rummet", herunder "addition" af to geometriske vektorer og "multiplikation" af en geometrisk vektor med et reelt tal. Mængden af geometriske vektorer i planen og i rummet er (med de egenskaber, som begreberne tilføjes) reelle vektorrum. Dette motiverer brugen af glaserne vektor og vektorrum i definitionen side 1.1.1. (Vi skal senere vende tilbage til spørgsmålet om den elementære geometris grundlag, se bl. side 9.4.10.)

Eksempel. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er L^n et vektorrum over L med kompositionerne

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

For $n=1$ får specielt L som vektorrum over sig selv.

Eksempel. Mængden L^n af alle følger af elementer fra L er et vektorrum over L med kompositionerne

$$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots),$$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots).$$

Eksempel. Lad T være en vilkårlig ikke-tom mængde, og lad $\mathcal{F}(T, L)$ betegne mængden af alle afbildninger af T ind i L . For $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(T, L)$ og $\lambda \in L$ defineres $\varphi + \psi \in \mathcal{F}(T, L)$ ved

$$t \mapsto (\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t)$$

og $\lambda \varphi \in \mathcal{F}(T, L)$ ved

$$t \mapsto (\lambda \varphi)(t) = \lambda \varphi(t).$$

Herved er $\mathcal{F}(T, L)$ organiseret som et vektorrum over L . Nulvektoren er den konstante funktion $t \mapsto 0$, den til $\varphi \in \mathcal{F}(T, L)$ modsatte vektor $-\varphi$ er funktionen $t \mapsto (-\varphi)(t) = -\varphi(t)$. — Er T en endelig mængde med $n \in \mathbb{N}$ elementer, $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, kan $(\mathcal{F}(T, L), L)$ identificeres med (L^n, L) , idet $\varphi \in \mathcal{F}(T, L)$ identificeres med n -sættet $(\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_n)) \in L^n$. Er T en numerabel mængde, $T = \{t_1, t_2, \dots\}$, kan $(\mathcal{F}(T, L), L)$ identificeres med $(L^{\mathbb{N}}, L)$, idet $\varphi \in \mathcal{F}(T, L)$ identificeres med følgen $(\varphi(t_1), \varphi(t_2), \dots) \in L^{\mathbb{N}}$.

1.2. Underrum.

Lad (V, L) være et vektorrum. En ikke-tom delmængde U af V siges at være et underrum af V , hvis for det første additionen i V inducerer en addition i U , d.v.s.

$$(1) \quad \forall u, v \in U : u + v \in U,$$

hvis for det andet multiplikationen i V med skalarer fra L inducerer en multiplikation i U med skalarer fra L , d.v.s.

$$(2) \quad \forall \lambda \in L \quad \forall v \in U : \lambda v \in U,$$

og hvis for det tredje U herved bliver organiseret som et vektorrum over L . Det påstås, at den sidste betingelse følger af de to første. Først bemærkes, at betingelserne (i)-(ii) og (v)-(viii) side 1.1.1 oplagt er opfyldt for U , da de er det for V . For at være, at (iii) og (iv) er opfyldt for U , er det tilstrækkeligt at godtgøre, at såvel nulvektoren 0 i V som den til en vektor $u \in U$ modsatte vektor $-u$ i V tilhører U . For en vilkårlig vektor $u \in U$ har vi $0u = 0 \in U$ ved brug af (1) side 1.1.3 og (2) ovenfor, og for enhver vektor $u \in U$ har vi $(-1)u = -u \in U$ ved brug af (5) side 1.1.3 og (2) ovenfor. Vi har dermed:

En ikke-tom delmængde U af (V, L) er et underrum, hvis og kun hvis betingelserne (1)-(2) er opfyldt. Er U et underrum, så er nulvektoren i V tillige nulvektor i U , og den til en vektor $u \in U$ modsatte vektor $-u$ i V er tillige modsat vektor til u i U .

Det ses let, at (1)-(2) er ensbetydende med

$$(3) \quad \forall \lambda, \mu \in L \quad \forall u, v \in U : \lambda u + \mu v \in U.$$

Det bemærkes, at (V, L) altid har $\{0\}$ og V som underrum. Et underrum U kaldes et egte underrum, dersom $U \subset V$.

Lad $U_i, i \in I$, være underrum af (V, L) . Da betingelserne (1)-(2) er opfyldt for hvert U_i , er de også opfyldt for $\bigcap_{i \in I} U_i$, og da 0 tilhører hvert U_i , har vi også $0 \in \bigcap_{i \in I} U_i$, hvormed $\bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset$. Følgelig gælder:

Føllesmængden af underrum af (V, L) er igen et underrum af (V, L) .

Lad M være en delmængde af (V, L) . Da V selv er et underrum af V , er mængden af underrum af V , som indeholder M , ikke tom. Føllesmængden af disse underrum er ifølge det foregående igen et underrum, som indeholder M . Dette underrum kaldes det af M udspændte eller frembragte underrum, og betegnes $\text{span } M$. Det er det "mindste" underrum, som indeholder M , i den forstand, at det er indeholdt i ethvert andet sådant. Bemærk, at $\text{span } \emptyset = \{0\}$.

Lad $x_1, \dots, x_p$ være (ikke nødvendigvis forskellige) vektorer fra (V, L) . En vektor u af formen

$$u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i,$$

hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in L$, siges at være en linearkombination af vektorerne $x_1, \dots, x_p$ (med koefficienterne $\lambda_1, \dots, \lambda_p$). Det viser sig bekvemt også at kunne tale om den tomme

linearkombination, d.v.s. linearkombinationen af ingen vektorer; denne fremstiller 0 , i overensstemmelse med, at den tomme sum har værdien 0 .

Det af en delmængde M af (V, L) frembragte underrum $\text{span } M$ er identisk med mængden af linearkombinationer af vektorer fra M .

Bevis. Lad U betegne mængden af linearkombinationer af vektorer fra M ; bemærk, at $0 \in U$. Det er klart, at ethvert underrum, som indeholder M , tillige indeholder U ; specielt er altså U indeholdt i $\text{span } M$. På den anden side er M åbenbart indeholdt i U ; og da såvel summen af to linearkombinationer af vektorer fra M som produktet af en skalar og en linearkombination af vektorer fra M er en linearkombination af vektorer fra M , er U et underrum. Heraf fremgår, at U indeholder $\text{span } M$. I alt har vi altså $U = \text{span } M$, som påstået. $\square$

1.3. Lineær afhængighed og uafhængighed.

Lad $(x_1, \dots, x_p)$ være et sæt af endelig mange (ikke nødvendigvis forskellige) vektorer fra et vektorrum (V, L) . Der findes da skalarer $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, således at

$$(1) \quad \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0,$$

nemlig $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Hvis (1) kun er opfyldt for $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$, siges sættet $(x_1, \dots, x_p)$ at være lineært uafhængigt. Hvis sættet ikke er lineært uafhængigt, siges det at være lineært afhængigt; dette kommer altså ud på, at der findes skalarer $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, som ikke alle er 0, således at (1) er opfyldt.

Det viser sig bekvemt at kunne tale om det tomme sæt; ved definition fastsættes, at dette er lineært uafhængigt.

En identitet af formen (1) kaldes en lineær relation mellem vektorerne $x_1, \dots, x_p$; den siges at være egentlig, hvis ikke alle koefficienterne $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ er 0. Et endeligt (evt. tomt) sæt af vektorer er altså lineært afhængigt eller lineært uafhængigt, efter som der består eller ikke består nogen egentlig lineær relation mellem vektorerne i sættet.

Et sæt bestående af een vektor x er lineært afhængigt, hvis og kun hvis der findes en skalar $\lambda \neq 0$, således at $\lambda x = 0$, altså hvis og kun hvis $x = 0$. Et sæt (x_1, x_2) bestående af to vektorer er lineært afhængigt, hvis og kun, hvis der findes skalarer λ_1 og λ_2 , som ikke begge er 0, således at $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$, altså hvis og kun hvis mindst een af de to vektorer fremgår af den anden ved multiplikation med en skalar.

Når et delset af et vektorsæt er lineært afhængigt, er hele sættet lineært afhængigt. Thi i en egentlig lineær relation mellem en del af sættets vektorer kan de øvrige tilføjes med koefficienten 0.

Specielt noteres, at et vektorsæt, som indeholder $\underline{0}$, eller som indeholder samme vektor to gange, er lineært afhængigt.

Hvert delset af et lineært uafhængigt sæt er lineært uafhængigt. Dette er blot en omformulering af resultatet ovenfor.

Et sæt $(x_1, \dots, x_p)$, hvor $p \geq 2$, er lineært afhængigt, hvis og kun hvis mindst een af vektorerne i sættet kan fremstilles som en linearkombination af de øvrige.

Beris. Hvis sættet er lineært afhængigt, består det en egentlig lineær relation mellem vektorerne,

$$(2) \quad \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = \underline{0}.$$

Ved eventuel omnummerering kan opnås, at $\lambda_1 \neq 0$. Ved multiplikation med $-\lambda_1^{-1}$ i (2) og efterfølgende addition af x_1 fås

$$\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)x_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_p}{\lambda_1}\right)x_p = x_1.$$

x_1 er altså en linearkombination af de øvrige vektorer. Antag omvendt, at en af vektorerne er en linearkombination af de øvrige; ved eventuel omnummerering kan opnås, at

$$x_1 = \mu_2 x_2 + \dots + \mu_p x_p.$$

Adderes vektoren $-x_1$ fås

$$0 = (-1)x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_p x_p.$$

I denne lineære relation er koefficienten til x_1 forskellig fra 0, og sættet $(x_1, \dots, x_p)$ er følgelig lineært afhængigt. $\square$

Hvis en vektor v kan fremstilles som linearkombination af vektorerne i et sæt $(x_1, \dots, x_p)$, så vil koefficienterne i fremstillingen være entydigt bestemte, hvis og kun hvis sættet $(x_1, \dots, x_p)$ er lineært uafhængigt.

Beris. Lad

$$(3) \quad v = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$$

vere en fremstilling af v som linearkombination af $x_1, \dots, x_p$. Er

$$0 = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_p x_p$$

en vilkårlig lineær relation mellem vektorerne $x_1, \dots, x_p$, vil

$$v = (\lambda_1 + \mu_1)x_1 + \dots + (\lambda_p + \mu_p)x_p$$

vere en fremstilling af v . Antages, at fremstillingen (3) er entydig, kan således sluttet, at $\mu_1 = \dots = \mu_p = 0$, og dermed, at sættet $(x_1, \dots, x_p)$ er lineært uafhængigt. Er

$$v = \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_p x_p$$

en vilkårlig fremstilling af v , fås

$$0 = (\lambda_1 - \gamma_1)x_1 + \dots + (\lambda_p - \gamma_p)x_p.$$

Antages, at sættet $(x_1, \dots, x_p)$ er lineært uafhængigt, fås $\lambda_1 - \nu_1 = \dots = \lambda_p - \nu_p = 0$, og dermed, at fremstillingen (3) er entydig. $\square$

1.4. Dimension. Basis. Koordinater.

Lad $(x_1, \dots, x_p)$ være et sæt af vektorer fra et vektorrum (V, L) . Ved rang $rg(x_1, \dots, x_p)$ af sættet forstås det maksimale antal vektorer i noget lineært uafhængigt delset. Det tomme sæt har rang 0. Et sæt med rang 0 er enten det tomme sæt eller et sæt af formen $(0, \dots, 0)$.

Lad M være en vilkårlig delmængde af V . Ved rang $rg M$ af M forstås supremum for mængden af de $r \in \mathbb{N}_0$ for hvilke der findes et sæt af vektorer fra M med rang r . Der gælder altså $rg M = 0$, hvis og kun hvis $M = \emptyset$ eller $M = \{0\}$, der gælder $rg M = r \in \mathbb{N}$, hvis og kun hvis der findes et lineært uafhængigt r -sæt $(x_1, \dots, x_r)$ af vektorer fra M , men intet sådant $(r+1)$ -sæt, og der gælder $rg M = \infty$, hvis og kun hvis der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ findes et lineært uafhængigt n -sæt af vektorer fra M .

Er $rg M = r \in \mathbb{N}_0$, forstås ved et maksimal sæt for M et lineært uafhængigt sæt af r vektorer fra M .

Ved dimensionen $\dim V$ af vektorrummet (V, L) forstås rangen af V , idet V opfattes som delmængde af sig selv. Det er klart, at der da også for ethvert underrum U af V gælder $\dim U = rg U$, hvor $rg U$ betegner rangen af U som delmængde af V . Hvis $\dim V < \infty$, siges V at have endelig dimension eller at være endelig-dimensionalt. Et vektorrum har dimension 0, hvis og kun hvis det kun består af 0 .

Er (V, L) et endelig-dimensionalt vektorrum, forstås ved en basis for V et lineært uafhængigt sæt

af vektorer fra V , som frembringer V , - idet et sæt af vektorer fra V siges at frembringe V , dersom $V = \text{span } M$, hvor M betegner mængden af sættets vektorer. Et vektorrum af dimension 0 har det tomme sæt som (eneste) basis. Et hovedpunkt i det følgende er at vise, at et vektorsæt er en basis for V , hvis og kun hvis det er et maksimalsæt for V . Heraf fremgår, at ethvert vektorrum V af endelig dimension har (mindst) en basis, og at enhver basis indeholder det samme antal vektorer, nemlig $\dim V$.

At en tidligere sætning (side 1.3.3) fremgår umiddelbart:

Et sæt af vektorer fra et endelig-dimensionelt vektorrum V er en basis for V , hvis og kun hvis hver vektor i V har en og kun een fremstilling som linearkombination af vektorerne i sættet.

Den videre undersøgelse af begreberne dimension og basis bygger på nedenstående fundamentale "udskiftningssætning" samt følgende hjølpsætning:

Er M en delmængde af et vektorrum V med $\text{rg } M = r \in \mathbb{N}$, og er $(x_1, \dots, x_r)$ et maksimalsæt for M , så kan hver vektor i M fremstilles som linearkombination af vektorerne $x_1, \dots, x_r$.

Bevis. For hver vektor $x \in M$ er sættet $(x_1, \dots, x_r, x)$ lineært afhængigt, da det indeholder $r+1$ vektorer. I en egentlig lineær relation mellem sættets vektorer kan koefficienten til x ikke være 0, idet der ellers ville bestå en egentlig lineær relation mellem vek-

vektorerne $x_1, \dots, x_r$, i strid med, at sættet $(x_1, \dots, x_r)$ er lineært uafhængigt. Heraf sluttes, at x kan fremstilles som linearkombination af $x_1, \dots, x_r$. $\square$

Udskiftningssætningen. Lad V være et vektorrum, lad $(x_1, \dots, x_q)$ være et sæt af vektorer fra V , som frembringer V , og lad $(u_1, \dots, u_p)$ være et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra V . Da er $p \leq q$, og der findes $q-p$ blandt vektorerne $x_1, \dots, x_q$, som sammen med $u_1, \dots, u_p$ frembringer V .

Beris. Da $x_1, \dots, x_q$ frembringer V , kan u_1 fremstilles som linearkombination af disse vektorer. I en sådan linearkombination må mindst een af vektorerne x_i forekomme med en fra 0 forskellig koefficient; thi i modsat fald ville vi have $u_1 = 0$, i strid med, at u_1 er en vektor i et lineært uafhængigt sæt. Det kan antages, at x_1 har en fra 0 forskellig koefficient. Da kan x_1 fremstilles som linearkombination af vektorerne $u_1, x_2, \dots, x_q$. Disse vektorer vil derfor frembringe V ; thi enhver vektor $w \in V$ er linearkombination af $x_1, \dots, x_q$, og erstattes i en sådan linearkombination x_1 med en linearkombination af $u_1, x_2, \dots, x_q$, fås w fremstillet som en linearkombination af $u_1, x_2, \dots, x_q$. Er $p \geq 2$, betragtes dernæst vektoren u_2 . Den kan ifølge det netop viste fremstilles som en linearkombination af $u_1, x_2, \dots, x_q$. I en sådan fremstilling må mindst een af vektorerne $x_2, \dots, x_q$ forekomme med en fra 0 forskellig koefficient; thi ellers ville u_2 fremgå af u_1 ved multiplikation med en skalar, i strid med, at u_1 og

u_2 er vektorer i et lineært uafhængigt sæt. Det kan antages, at koefficienten til x_2 er forskellig fra 0. Da kan x_2 fremstilles som linearkombination af $u_1, u_2, x_3, \dots, x_q$, og det indses som ovenfor, at disse vektorer frembringer V . Således fortsættes, idet vi efter det k 'te skridt har et frembringersæt for V bestående af $u_1, \dots, u_k$ samt $q-k$ af vektorerne $x_1, \dots, x_q$. Var nu $p > q$, ville vi ende med som frembringersæt at få sættet $(u_1, \dots, u_q)$, og enhver af vektorerne $u_{q+1}, \dots, u_p$ skulle da have en fremstilling som linearkombination af $u_1, \dots, u_q$, i strid med, at sættet $(u_1, \dots, u_p)$ er lineært uafhængigt. Der gælder altså som påstået $p \leq q$. Heraf fremgår videre, at udskiftningsprocessen bringes til afslutning i p skridt, hvormed også sætningens anden påstand er vist. $\square$

Vi skal herefter udmønte hjælpesætningen og udskiftningssætningen; ved beviset for den første af de følgende sætninger dog kun hjælpesætningen.

For ethvert underrum U af et vektorrum V gælder $\dim U \leq \dim V$. Hvis V er endelig-dimensionalt, gælder $\dim U = \dim V$ kun for $U = V$.

Bevis. For $\dim V = \infty$ er der intet at vise. For $\dim V = r \in \mathbb{N}_0$ kan der i delmængden U af V ikke findes lineært uafhængige sæt bestående af flere end r vektorer; heraf følger uligheden. Er $\dim U = \dim V = r$, vil et maksimalsæt for U tillige være et maksimalsæt for V ; ifølge hjælpesætningen vil sættet da frembringe både U og V , hvormed $U = V$. $\square$

Ethvert endelig-dimensionalt vektorrum V har en basis. Enhver basis for V indeholder det samme antal vektorer, nemlig $\dim V$.

Dette hovedresultat er en umiddelbar konsekvens af følgende sætning:

Et sæt af vektorer fra et endelig-dimensionalt vektorrum V er en basis for V , hvis og kun hvis det er et maksimalsæt for V .

Beris. For $\dim V = 0$ er påstanden trivielt opfyldt. Antag derefter, at $\dim V > 0$; maksimalsættene og de eventuelle baser er da ikke-tomme sæt. Ethvert maksimalsæt er en basis; thi et maksimalsæt er lineært uafhængigt, og det frembringer V ifølge hjælpesætningen. Lad omvendt $(v_1, \dots, v_q)$ være en basis for V ; da enhver basis er et lineært uafhængigt sæt, skal det blot vises, at $q = \dim V$. Uligheden $q \leq \dim V$ følger af, at $(v_1, \dots, v_q)$ er et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra V . Er på den anden side $(u_1, \dots, u_p)$ et vilkårligt lineært uafhængigt sæt af vektorer fra V , så gælder $p \leq q$ ifølge udskiftningssætningen; heraf fremgår, at $\dim V \leq q$. $\square$

Vi skal dermed vise:

For enhver delmængde M af et vektorrum V gælder $\dim(\text{span } M) = \text{rg } M$.

Beris. For $\text{rg } M = 0$ og for $\text{rg } M = \infty$ er påstanden klart gyldig. Er $\text{rg } M = r \in \mathbb{N}$, og er $(v_1, \dots, v_r)$ et maksimalsæt for M , kan enhver vektor i M ifølge hjælpe-

setningen fremstilles som linearkombination af $x_1, \dots, x_r$. Det samme gælder da om enhver vektor $x \in \text{span } M$; thi x kan fremstilles som linearkombination af vektorer fra M (sml. side 1.2.3). Sættet $(x_1, \dots, x_r)$ frembringer altså $\text{span } M$, og da det tillige er lineært uafhængigt, er det en basis for $\text{span } M$. Ifølge den foregående sætning er sættet da også et maksimalsæt for $\text{span } M$, hvormed $\dim(\text{span } M) = r$. $\square$

Vi skal endelig vise:

Lad V være et vektorrum med $\dim V = n \in \mathbb{N}$, og lad $(u_1, \dots, u_p)$ være et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra V . Hvis $p < n$, kan sættet $(u_1, \dots, u_p)$ suppleres til en basis for V ved tilføjelse af $n-p$ vektorer $u_{p+1}, \dots, u_n$.

Bewis. Lad $(x_1, \dots, x_n)$ være en basis for V (sml. side 1.4.5). Ifølge udskiftningssætningen findes da $n-p$ vektorer $u_{p+1}, \dots, u_n$ blandt vektorerne $x_1, \dots, x_n$, som sammen med vektorerne $u_1, \dots, u_p$ frembringer V . Sættes $M = \{u_1, \dots, u_n\}$, har vi altså $\dim(\text{span } M) = n$. Ifølge den foregående sætning har vi da også $\text{rg } M = n$, hvorefter følger, at sættet $(u_1, \dots, u_n)$ er lineært uafhængigt, og dermed er en basis. $\square$

Er $(e_1, \dots, e_n)$ en basis for et vektorrum (V, L) med $\dim V = n \in \mathbb{N}$, så har hver vektor $x \in V$ en og kun en fremstilling som linearkombination af $e_1, \dots, e_n$,

$$x = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n.$$

Talsættet $(v_1, \dots, v_n) \in L^n$ kaldes koordinatsættet for vektoren $\underline{v}$ m.h.t. basen (eller koordinatsystemet) $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$; tallet v_i kaldes vektorens i 'te koordinat. Den hermed definerede afbildning

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n \mapsto k(\underline{v}) = (v_1, \dots, v_n)$$

af V ind i L^n kaldes koordinatafbildningen (hørende til den betragtede basis). Koordinatafbildningen $k: V \rightarrow L^n$ er bijektiv; thi for ethvert sæt $(v_1, \dots, v_n) \in L^n$ findes netop en vektor $\underline{v} \in V$ med $k(\underline{v}) = (v_1, \dots, v_n)$, nemlig vektoren $\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n$. Endvidere noteres, at

$$k(\underline{u} + \underline{v}) = k(\underline{u}) + k(\underline{v}),$$

$$k(\lambda \underline{v}) = \lambda k(\underline{v}).$$

Thi

$$(u_1 \underline{e}_1 + \dots + u_n \underline{e}_n) + (v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n) = (u_1 + v_1) \underline{e}_1 + \dots + (u_n + v_n) \underline{e}_n$$

og

$$\lambda(v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n) = \lambda v_1 \underline{e}_1 + \dots + \lambda v_n \underline{e}_n.$$

Bemærkning. Vektorrummet af geometriske vektorer i planen hhv. rummet har dimension 2 hhv. 3. (Se i øvrigt side 1.1.5).

Eksempel. I vektorrummet (L^n, L) udgør sættet bestående af vektorerne $\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\underline{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ en basis, den såkaldte naturlige eller kanoniske basis. Thi at

$$v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n = (v_1, \dots, v_n)$$

følger dels, at sættet er lineært uafhængigt, dels at det frembringer L^n . Vektorrummet (L^n, L) har således dimension n . Det kaldes derfor det n -dimensionale reelle eller komplekse tal(vektor)rum.

(En bekvem skrivemåde for vektorerne $\underline{e}_i$ fås ved benyttelse af det såkaldte Kronecker-symbol δ_{ij} .

Dette er defineret ved

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i=j, \\ 0 & \text{for } i \neq j, \end{cases}$$

hvormed $\underline{e}_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in}).$

1.5. Sum og direkte sum af underrum.

Lad (V, L) være et vektorrum. For to vilkårlige delmængder M_1 og M_2 af V defineres deres sum $M_1 + M_2$ ved

$$M_1 + M_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in M_1 \wedge u_2 \in M_2\}.$$

Det noteres, at hvis en af mængderne M_1 og M_2 er tom, så er også summen tom.

Herved er defineret en komposition i mængden af delmængder af V . Det er klart, at den er kommutativ og associativ, idet vektoradditionen har disse egenskaber. Der findes et neutralt element, nemlig $\{\emptyset\}$. Men en mængde M_1 , der indeholder mindst to vektorer, har ikke nogen "modsat" mængde; thi for enhver ikke-tom mængde M_2 vil $M_1 + M_2$ indeholde mindst to vektorer. Forkortningsreglen gælder heller ikke.

Vi skal i det følgende interessere os for summer af underrum af V . Vi viser først:

For to underrum U_1 og U_2 af (V, L) er $U_1 + U_2$ det mindste underrum, der indeholder både U_1 og U_2 , altså $U_1 + U_2 = \text{span}(U_1 \cup U_2)$.

Bevis. Som bekendt er $\text{span}(U_1 \cup U_2)$ mængden af linearkombinationer af vektorer fra $U_1 \cup U_2$. For $u_1 \in U_1$ og $u_2 \in U_2$ er $u_1 + u_2$ en sådan linearkombination. Dette viser, at $U_1 + U_2 \subseteq \text{span}(U_1 \cup U_2)$. For at vise den modsatte inklusion skal godtgøres, at $U_1 + U_2$ er et underrum, som indeholder U_1 og U_2 . For $\lambda, \mu \in L$, $u_1', u_1'' \in U_1$ og $u_2', u_2'' \in U_2$ har vi $\lambda u_1' + \mu u_1'' \in U_1$ og

$\lambda u_1' + \mu u_2'' \in U_2$, idet U_1 og U_2 er under rum (små. side 1.2.1-1.2.2). Endvidere gælder

$$\lambda(u_1' + u_2') + \mu(u_1'' + u_2'') = (\lambda u_1' + \mu u_1'') + (\lambda u_2' + \mu u_2'').$$

I alt har vi således

$$\lambda(u_1' + u_2') + \mu(u_1'' + u_2'') \in U_1 + U_2,$$

hvormed er vist, at $U_1 + U_2$ er et under rum (små. side 1.2.1-1.2.2). Endvidere har vi $U_1 = U_1 + \{0\} \subseteq U_1 + U_2$ og $U_2 = \{0\} + U_2 \subseteq U_1 + U_2$. $\square$

For endelig-dimensionale under rum U_1 og U_2 af (V, L) gælder $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$. (Grassmann's dimensions formel.)

Bevís. Vi sætter $\dim U_1 = p$, $\dim U_2 = q$ og $\dim(U_1 \cap U_2) = r$. Hvis $r > 0$, $p > r$ og $q > r$ vælges en basis $(e_1, \dots, e_r)$ for $U_1 \cap U_2$, og denne suppleres dels til en basis

$$(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}', \dots, e_p')$$

for U_1 , og dels til en basis

$$(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}'', \dots, e_q'')$$

for U_2 . Enhver vektor i $U_1 + U_2$ kan da fremstilles som linearkombination af vektorerne i $(p+q-r)$ -sættet

$$(1) \quad (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}', \dots, e_p', e_{r+1}'', \dots, e_q'')$$

Dette sæt er lineært uafhængigt. Lad nemlig

$$(2) \quad \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1}' e_{r+1}' + \dots + \lambda_p' e_p' + \lambda_{r+1}'' e_{r+1}'' + \dots + \lambda_q'' e_q'' = 0$$

være en lineær relation mellem sættets vektorer. Vektoren

$-(\lambda''_{r+1} \underline{e}_{r+1} + \dots + \lambda''_q \underline{e}_q)$ vides at tilhøre U_2 ; af (2) fremgår, at den også tilhører U_1 , og dermed $U_1 \cap U_2$. Den er følgelig en linearkombination af $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r$, og der må altså bestå en lineær relation af formen

$$\mu_1 \underline{e}_1 + \dots + \mu_r \underline{e}_r + \lambda''_{r+1} \underline{e}_{r+1} + \dots + \lambda''_q \underline{e}_q = \underline{0}.$$

Da sættet $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r, \underline{e}_{r+1}, \dots, \underline{e}_q)$ er lineært uafhængigt, kan specielt sluttes, at $\lambda''_{r+1} = \dots = \lambda''_q = 0$. Derefter følger af (2), at $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \lambda'_{r+1} = \dots = \lambda'_p = 0$, idet sættet $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r, \underline{e}'_{r+1}, \dots, \underline{e}'_p)$ er lineært uafhængigt. Dermed er vist, at sættet (1) er lineært uafhængigt, og følgelig er en basis for $U_1 + U_2$. Der gælder altså $\dim(U_1 + U_2) = p + q - r$, som påstået. — For $r=0$, $p=r$ eller $q=r$ foreløber beviset efter samme retningslinier som ovenfor, med visse oplagte modifikationer. For $p=r$ eller $q=r$ kan formulens gyldighed også indses direkte. $\square$

Lad U, U_1 og U_2 være underrum af V med $U = U_1 + U_2$. Hver vektor $\underline{u} \in U$ har da (mindst) en fremstilling af formen $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ med $\underline{u}_1 \in U_1$ og $\underline{u}_2 \in U_2$. Har hver vektor fra U kun een sådan fremstilling, siges U at være direkte sum af underrummene U_1 og U_2 , og man skriver

$$U = U_1 \oplus U_2.$$

Dette kommer altså ud på, at der for alle vektorer $\underline{u}'_1, \underline{u}''_1 \in U_1$, $\underline{u}'_2, \underline{u}''_2 \in U_2$ gælder

$$(3) \quad \underline{u}'_1 + \underline{u}'_2 = \underline{u}''_1 + \underline{u}''_2 \Rightarrow \underline{u}'_1 = \underline{u}''_1 \wedge \underline{u}'_2 = \underline{u}''_2$$

Lad U, U_1 og U_2 være underrum af (V, L) med $U = U_1 + U_2$. Da er hver af følgende to betingelser ensbetydende med, at U er direkte sum af U_1 og U_2 :

(a) Nulvektoren har kun een fremstilling som sum af en vektor fra U_1 og en vektor fra U_2 , nemlig fremstillingen $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$

(b) $U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}$.

Hvis U_1 og U_2 er endelig-dimensionale, så er også følgende betingelse ensbetydende med, at U er direkte sum af U_1 og U_2 :

(c) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

Bewis. Det er klart, at hvis summen er direkte, så er (a) opfyldt. Antag omvendt, at (a) er opfyldt. Af $\underline{u}' + \underline{u}_2' = \underline{u}_1'' + \underline{u}_2''$, hvor $\underline{u}_1', \underline{u}_1'' \in U_1, \underline{u}_2', \underline{u}_2'' \in U_2$, følger da $(\underline{u}_1' - \underline{u}_1'') + (\underline{u}_2' - \underline{u}_2'') = \underline{0}$, og dermed, ifølge (a), $\underline{u}_1' - \underline{u}_1'' = \underline{u}_2' - \underline{u}_2'' = \underline{0}$, altså $\underline{u}_1' = \underline{u}_1''$ og $\underline{u}_2' = \underline{u}_2''$; betingelsen (3) følger altså af (a). Vis skal dernæst vise, at (a) og (b) er ensbetydende. Antag (a) opfyldt, og lad $\underline{u} \in U_1 \cap U_2$. Da gælder $\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{0}$ med $\underline{u} \in U_1$ og $-\underline{u} \in U_2$. Ifølge (a) har vi da $\underline{u} = -\underline{u} = \underline{0}$, hvormed er vist, at (a) implicerer (b). Er omvendt (b) opfyldt, og $\underline{u}_1 \in U_1, \underline{u}_2 \in U_2$ vektorer med $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{0}$, fås $\underline{u}_1 = -\underline{u}_2 \in U_1 \cap U_2$, og derfor, ved brug af (b), $\underline{u}_1 = -\underline{u}_2 = \underline{0}$; dette viser, at (b) implicerer (a). Er endelig U_1 og U_2 endelig-dimensionale, så fremgår af Grassmann's dimensionsformel, at (b) og (c) er ensbetydende. $\square$

To underrum U_1 og U_2 af (V, L) siges at være komplementære, dersom $V = U_1 \oplus U_2$. Hver vektor $v \in V$ kan da på en og kun een måde skrives på formen $v = u_1 + u_2$, hvor $u_1 \in U_1$ og $u_2 \in U_2$. Vektoren u_1 kaldes komponenten af v efter U_1 m.h.t. U_2 , eller projektion af v på U_1 langs U_2 ; tilsvarende for u_2 .

Lad (V, L) være et endelig-dimensionelt vektorrum, og lad U_1 være et underrum af V . Der findes da (mindst) et til U_1 komplementært underrum U_2 .

Beris. Påstanden er trivial for $\dim V = 0$. For $\dim V = n \geq 1$ er påstanden ligeledes trivial for $\dim U_1 = 0$ og for $\dim U_1 = n$. For $n > \dim U_1 = p \geq 1$ vælges en basis $(e_1, \dots, e_p)$ for U_1 , og denne suppleres til en basis for V ved tilføjelse af vektorer $e_{p+1}, \dots, e_n$. Sættes nu $U_2 = \text{span}\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$, har vi $U_1 + U_2 = V$ og $\dim(U_1 + U_2) = n$. Da vi endvidere har $\dim U_1 = p$ og $\dim U_2 = n - p$, følger påstanden af sidste del af den foregående sætning. $\square$

Idet additionen af delmængder af et vektorrum er associativ og kommutativ, er summen af flere end to mængder uafhængig af den orden, hvori additionerne udføres, og af mængdernes rækkefølge. Specielt kan sådanne summer skrives uden parenteser.

Lad $U_1, \dots, U_p$ være underrum af (V, L) . Vi har da ifølge definitionen

$$U_1 + \dots + U_p = \{u_1 + \dots + u_p \mid u_i \in U_i\}.$$

Som i tilfældet $p=2$ gælder (med et analogt bevis):

For underrum $U_1, \dots, U_p$ af (V, L) er $U_1 + \dots + U_p$ det mindste underrum, som indeholder $U_1, \dots, U_p$, altså $U_1 + \dots + U_p = \text{span}(U_1 \cup \dots \cup U_p)$.

Har hver vektor $u \in U = U_1 + \dots + U_p$ kun een fremstilling af formen $u = u_1 + \dots + u_p$ med $u_i \in U_i$, siges U at være direkte sum af underrummene $U_1, \dots, U_p$, og man skriver $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_p$. Som for $p=2$ gælder:

Lad $U, U_1, \dots, U_p$ være underrum af (V, L) med $U = U_1 + \dots + U_p$. Da er U direkte sum af $U_1, \dots, U_p$, hvis og kun hvis $\underline{0}$ kun har een fremstilling af formen $\underline{0} = \underline{u}_1 + \dots + \underline{u}_p$ med $u_i \in U_i$, nemlig fremstillingen $\underline{0} = \underline{0} + \dots + \underline{0}$.

Vi skal til sidst vise:

For endelig-dimensionale underrum $U_1, \dots, U_p$ af (V, L) gælder $\dim(U_1 + \dots + U_p) \leq \dim U_1 + \dots + \dim U_p$. Lighedstegnet gælder, hvis og kun hvis summen af $U_1, \dots, U_p$ er direkte.

Beris. Valges en basis for hvert af underrummene $U_1, \dots, U_p$, og sammenstykkedes disse baser til eet sæt af vektorer, fås et frembringersæt for underrummet $U_1 + \dots + U_p$, bestående af $\dim U_1 + \dots + \dim U_p$ vektorer. Heraf følger uligheden ved brug af sætningen nederst side 1.4.5. Hvis summen er direkte, så har $\underline{0}$ kun een fremstilling af formen $\underline{0} = \underline{u}_1 + \dots + \underline{u}_p$ med $u_i \in U_i$, og dermed kun een fremstilling som linearkombination af vektorerne i frembringersættet; følgelig er frembringersættet lineært uafhængigt, og dermed en basis

for $U_1 + \dots + U_p$. Der gælder derfor lighedstegn. Omvendt, gælder lighedstegnet og betegner M mængden af frembringelsesvæktorer, så har vi (sml. side 1.4.5)

$$\operatorname{rg} M = \dim(\operatorname{span} M) = \dim(U_1 + \dots + U_p) = \dim U_1 + \dots + \dim U_p;$$

rang af M stemmer altså overens med antallet af vektorer i frembringelses sættet, og sættet er derfor lineært uafhængigt. Følgelig har $\underline{0}$ kun en fremstilling som linearkombination af vektorerne i sættet, og dermed kun en fremstilling af formen $\underline{0} = \underline{u}_1 + \dots + \underline{u}_p$ med $\underline{u}_i \in U_i$, hvorefter sluttes, ved brug af den foregående sætning, at summen er direkte. $\square$

1.6. Kvotientrum.

Lad U være et underrum af et vektorrum (V, L) . Er x en vektor i V , skal vi for summen $\{x\} + U$ af mængderne $\{x\}$ og U indføre den forenklede betegnelse $x + U$. Vi har altså

$$x + U = \{x + u \mid u \in U\}.$$

Mængderne af formen $x + U$ kaldes sideunderrum til U . Mængden af sideunderrum til U betegnes V/U . Ved dimensionen $\dim(x + U)$ af et sideunderrum $x + U$ forstås dimensionen af U .

Med det formål for øje at undersøge sideunderrummene til U , defineres følgende relation i V : En vektor $x_1 \in V$ siges at være kongruent modulo U med en vektor $x \in V$, dersom $x_1 - x \in U$. Vi skriver da $x_1 \equiv x \pmod{U}$, eller blot $x_1 \equiv x$, dersom U er underforstået. For enhver vektor $x \in V$ gælder $x \equiv x$; thi $x - x = 0 \in U$. Er x_1 og x vektorer i V med $x_1 \equiv x$, gælder også $x \equiv x_1$; thi af $x_1 - x \in U$ følger $x - x_1 \in U$. Og er x_2, x_1 og x vektorer i V med $x_2 \equiv x_1$ og $x_1 \equiv x$, gælder også $x_2 \equiv x$; thi af $x_2 - x_1 \in U$ og $x_1 - x \in U$ følger $(x_2 - x_1) + (x_1 - x) \in U$, altså $x_2 - x \in U$. I alt er hermed godtgjort, at relationen "kongruens modulo U " er en ækvivalensrelation i V . Det fremgår af definitionen, at ækvivalensklassen, som indeholder en given vektor $x \in V$, altså mængden af vektorer $x_1 \in V$ som er kongruente modulo U med x , netop er sideunderrummet $x + U$. Vi har altså:

Sideunderrummene til et underrum U af (V, L) er netop ækvivalensklasserne ved ækvivalensrelationen "kongruens modulo U ".

Heraf følger, at forskellige sideunderrum er disjunkte. Idet $v \in v+U$, sluttes endvidere, at følgende tre betingelser er ensbetydende: $v_1+U=v_2+U$; $v_1 \in v_2+U$; $v_1-v_2 \in U$.

Ækvivalensrelationen $\equiv$ (modulo U) harmonerer med vektorrummets kompositionsforskriften i den betydning, at

$$v_1' \equiv v_1 \wedge v_2' \equiv v_2 \Rightarrow v_1' + v_2' \equiv v_1 + v_2,$$

$$v' \equiv v \Rightarrow \lambda v' \equiv \lambda v.$$

Thi af $v_1'-v_1 \in U$ og $v_2'-v_2 \in U$ følger $(v_1'-v_1) + (v_2'-v_2) \in U$, og dermed $(v_1'+v_2') - (v_1+v_2) \in U$; og af $v'-v \in U$ følger $\lambda(v'-v) \in U$, og dermed $\lambda v' - \lambda v \in U$. Vi har altså, at summen af en vilkårlig vektor i sideunderrummet v_1+U og en vilkårlig vektor i sideunderrummet v_2+U altid vil tilhøre sideunderrummet $(v_1+v_2)+U$, og at produktet af en skalar $\lambda \in L$ og en vilkårlig vektor i sideunderrummet $v+U$ altid vil tilhøre sideunderrummet $\lambda v+U$. Dette viser, at der ved

$$(v_1+U) + (v_2+U) = (v_1+v_2)+U$$

defineres en komposition $V/U \times V/U \rightarrow V/U$, kaldet addition, og at der ved

$$\lambda(v+U) = \lambda v+U$$

defineres en komposition $L \times V/U \rightarrow V/U$, kaldet multiplikation. (Man regner altså med sideunderrummene ved at regne med repræsentanter for sideunderrummene.) Det eftervises uden besvær, at V/U herved er organiseret som et vektorrum $(V/U, L)$ over L . Dette vektor-

rum kaldes kvotientrummet af (V, L) over U . Nulvektoren i kvotientrummet er sideunderrummet $\underline{0} + U$, altså U , den modsatte vektor til $\underline{x} + U$ er $-\underline{x} + U$. For $U = V$ bliver kvotientrummet V/U et vektorrum kun indeholdende nulvektoren. For $U = \{\underline{0}\}$ bliver sideunderrummene til U af formen $\underline{x} + \{\underline{0}\} = \{\underline{x}\}$.

Bemærkning. Det eftervises let, at

$$(\underline{x}_1 + U) + (\underline{x}_2 + U) = \{(\underline{x}_1 + \underline{u}_1) + (\underline{x}_2 + \underline{u}_2) \mid \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U\},$$

hvor $(\underline{x}_1 + U) + (\underline{x}_2 + U)$ betegner summen af $\underline{x}_1 + U$ og $\underline{x}_2 + U$ i V/U ; additionen i V/U er altså den samme som "mængdeadditionen" (smk. side 1.5.1). - Det vises let, at der for $\lambda \neq 0$ gælder

$$\lambda(\underline{x} + U) = \{\lambda(\underline{x} + \underline{u}) \mid \underline{u} \in U\},$$

hvorimod $0(\underline{x} + U) = U$, som for $U \neq \{\underline{0}\}$ er forskelligt fra $\{0(\underline{x} + \underline{u}) \mid \underline{u} \in U\} = \{\underline{0}\}$. $\square$

Vi skal endelig vise:

Er (V, L) et endelig-dimensionalt vektorrum, og er U et underrum af V , så gælder $\dim U + \dim V/U = \dim V$.

Bewis. For $\dim V = 0$ er ligningen oplagt. For $\dim V \geq 1$, og $U = V$ eller $U = \{\underline{0}\}$ er ligningen ligeledes oplagt. Antag derfor, at U er et underrum med $\dim U = p$, hvor $1 \leq p < n = \dim V$. Lad $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_p)$ være en basis for U ; denne suppleres til en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_p, \underline{e}_{p+1}, \dots, \underline{e}_n)$

for V . Det påstås, at sættet

$$(1) \quad (\underline{e}_{p+1} + U, \dots, \underline{e}_n + U)$$

er en basis for V/U . Lad

$$\lambda_{p+1}(\underline{e}_{p+1} + U) + \dots + \lambda_n(\underline{e}_n + U) = U$$

være en lineær relation mellem vektorerne i sættet.

Vi har da

$$\begin{aligned} U &= \lambda_{p+1}(\underline{e}_{p+1} + U) + \dots + \lambda_n(\underline{e}_n + U) \\ &= (\lambda_{p+1}\underline{e}_{p+1} + U) + \dots + (\lambda_n\underline{e}_n + U) \\ &= (\lambda_{p+1}\underline{e}_{p+1} + \dots + \lambda_n\underline{e}_n) + U, \end{aligned}$$

hvilket medfører

$$\lambda_{p+1}\underline{e}_{p+1} + \dots + \lambda_n\underline{e}_n \in U.$$

Der findes derfor $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in L$, således at

$$\lambda_{p+1}\underline{e}_{p+1} + \dots + \lambda_n\underline{e}_n = \lambda_1\underline{e}_1 + \dots + \lambda_p\underline{e}_p.$$

Men da sættet $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ er lineært uafhængigt, sluttes, at $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$ ($= \lambda_1 = \dots = \lambda_p$), hvormed er vist, at sættet (1) er lineært uafhængigt. Lad dernæst $\underline{v} + U$ være en vilkårlig vektor i V/U . Der findes da $\mu_1, \dots, \mu_n \in L$, således at

$$\underline{v} = \mu_1\underline{e}_1 + \dots + \mu_n\underline{e}_n.$$

Dette giver

$$\begin{aligned} \underline{v} + U &= (\mu_1\underline{e}_1 + \dots + \mu_n\underline{e}_n) + U \\ &= ((\mu_1\underline{e}_1 + \dots + \mu_p\underline{e}_p) + U) + (\mu_{p+1}\underline{e}_{p+1} + U) + \dots + (\mu_n\underline{e}_n + U) \end{aligned}$$

$$= U + (\mu_{p+1} \underline{e}_{p+1} + U) + \dots + (\mu_n \underline{e}_n + U)$$

$$= (\mu_{p+1} \underline{e}_{p+1} + U) + \dots + (\mu_n \underline{e}_n + U)$$

$$= \mu_{p+1} (\underline{e}_{p+1} + U) + \dots + \mu_n (\underline{e}_n + U),$$

hvormed er vist, at sættet (1) frembringer $\forall U$. Sættet er derfor en basis for $\forall U$. Dette giver

$$\begin{aligned} \dim U + \dim \forall U &= p + (n-p) \\ &= n = \dim V. \quad \square \end{aligned}$$

1. Vis, at betingelsen (vi) i definitionen af vektorrum ikke er en konsekvens af de øvrige betingelser. (Betragt f.eks. mængden $\mathbb{R}^2$ med den sædvanlige addition,

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

samt "multiplikationen":

$$\lambda (a_1, a_2) = (\lambda a_1, 0).)$$

2. Lad $(V, \mathbb{R})$ være et reelt vektorrum. Vis, at produktmængden $V \times V$ organiseres som et komplekst vektorrum ved kompositionerne

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

$$(\lambda + i\mu)(u_1, u_2) = (\lambda u_1 - \mu u_2, \mu u_1 + \lambda u_2),$$

hvor $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Vektorrummet kaldes den komplekse udvidelse af $(V, \mathbb{R})$.

3. Undersøg, hvilke af følgende delmængder af $\mathbb{R}^n$, der er underrum af $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$:

- Mængden af konvergente følger.
- Mængden af konvergente følger med 0 som grænseværdi.
- Mængden af konvergente følger med 1 som grænseværdi.

4. Undersøg, hvilke af følgende delmængder af $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, der er underrum af $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R})$:
- Mængden af kontinuerte funktioner.
 - Mængden af differentiable funktioner.
 - Mængden af polynomier.
 - Mængden af n 'te grads polynomier, hvor n er et givet naturligt tal.
 - Mængden af polynomier af grad $\leq n$ (herunder nulpolynomiet), hvor n er et givet naturligt tal.
 - Mængden af funktioner φ med $\varphi(1) = 0$.
 - Mængden af funktioner φ med $\varphi(1) = 1$.
 - Mængden af funktioner φ med $\varphi(1) = \varphi(-1)$.
 - Mængden af funktioner φ med $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| < \infty$.
 - Mængden af funktioner φ med $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| < k$, hvor k er et givet positivt tal.
5. I vektorrummet $(L^{\mathbb{N}}, L)$ betragtes mængden M bestående af vektorerne $(1, 0, 0, 0, \dots)$, $(0, 1, 0, 0, \dots)$, $(0, 0, 1, 0, \dots)$, $\dots$. Bestem $\text{span } M$.

6. Undersøg, om følgende sæt af vektorer fra de angivne vektorrum er lineært afhængige, og fremstil i betragtende fald en af vektorerne som en linearkombination af de øvrige.

a) $((-1,1), (2,2), (0,3)), - (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$

b) $((i,1), (1+i,0), (0,1-i)), - (\mathbb{C}^2, \mathbb{C}).$

c) $((1,1,1), (0,2,2), (0,1,3)), - (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}).$

d) $((1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,-1,1,-1), (0,0,1,1)), - (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}).$

7. Bestem mængden af de $t \in \mathbb{R}$ for hvilke sættet $((1,t), (t,1))$ er et lineært afhængigt sæt af vektorer fra $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

8. Bestem mængden af de $t \in L$ for hvilke sættet $((1,t,0), (t,0,1), (0,1,t))$ er et lineært afhængigt sæt af vektorer fra (L^3, L) .

9. Angiv en nødvendigt og tilstrækkelig betingelse for at sættet bestående af vektorerne

$$(a_{11}, 0, 0, \dots, 0)$$

$$(a_{21}, a_{22}, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$(a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots, a_{nn})$$

fra vektorrummet (L^n, L) er lineært uafhængigt.

10. Vis, at hvis et sæt $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ af vektorer fra et vektorrum (V, L) er lineært uafhængigt, så vil også ethvert sæt af formen $(v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_n)$ være lineært uafhængigt.
11. Vis, at et sæt $((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ af vektorer fra (L^2, L) er lineært afhængigt, hvis og kun hvis $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.
12. Lad $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ være givet ved $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = \sin t$ og $\varphi_3(t) = \cos t$ for $t \in \mathbb{R}$. Vis, at sættet $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ er et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R})$.
13. Lad $p_1, \dots, p_n$ være indbyrdes forskellige tal fra $\mathbb{N}_0$. Vis, at sættet bestående af polynomierne $t^{p_1}, \dots, t^{p_n}$ er et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra $(\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C}), \mathbb{C})$.
14. For $a \in \mathbb{R}_+$ sættes $\exp_a(t) = a^t$, $t \in \mathbb{R}$. Vis, at hvis $a_1, \dots, a_n$ er indbyrdes forskellige tal fra $\mathbb{R}_+$, så er $(\exp_{a_1}, \dots, \exp_{a_n})$ et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R})$.
15. I vektorrummet $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ betragtes mængden M bestående af vektorerne $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ og $(-1, -1)$. Bestem $\text{rg } M$, og angiv samtlige maksimalsæt for M .

16. I vektorrummet $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ betragtes mængden M bestående af vektorerne $(-2, 4, 0)$, $(0, 3, 1)$ og $(2, -1, 1)$. Bestem $\text{rg } M$, og angiv et maksimalsæt for M . Undersøg, om vektorerne $(1, 0, 0)$ og $(2, 2, 2)$ tilhører $\text{span } M$.
17. Angiv en basis for $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, som indeholder vektorerne $(3, 0, 1, 2)$ og $(-1, 2, 0, -1)$.
18. For $n \in \mathbb{N}_0$ betegnes med $\mathcal{P}_n$ underrummet af $(\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ bestående af alle polynomier af grad $\leq n$. Vis, at sættet bestående af polynomierne t^p , $p = 0, 1, \dots, n$, udgør en basis for $\mathcal{P}_n$. Vis, at ethvert sæt bestående af $n+1$ egentlige polynomier fra $\mathcal{P}_n$, således at ikke to har samme grad, udgør en basis for $\mathcal{P}_n$.
19. Lad $(e_1, \dots, e_n)$ være en basis for et reelt vektorrum $(V, \mathbb{R})$. Angiv en basis for den komplekse udvidelse af $(V, \mathbb{R})$, (smk. øv 2).
20. Lad $(V, \mathbb{C})$ være et komplekst vektorrum. Mængden V kan dog på naturlig måde organiseres som et reelt vektorrum. (Hvordan?). Udtyk dimensionen af V som reelt vektorrum ved dimensionen af V som komplekst vektorrum.

21. Lad $\varphi_1, \dots, \varphi_6 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ være givet ved $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = \cos t$, $\varphi_3(t) = \sin t$, $\varphi_4(t) = \cos^2 t$, $\varphi_5(t) = \cos t \cdot \sin t$ og $\varphi_6(t) = \sin^2 t$ for $t \in \mathbb{R}$. Bestem dimensionen og angiv en basis for det af disse vektorer udspændte underrum af $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R})$.
22. For $u \in \mathbb{R}$ og $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ sættes $\varphi_{u,a}(t) = a \cdot \cos(t-u)$, $t \in \mathbb{R}$. Vis, at mængden af alle sådanne funktioner $\varphi_{u,a}$ udgør et under- rum af $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R})$. Vis, at underrummet har endelig dimension, og angiv en basis for det.
23. Lad $t_0, t_1, \dots, t_n$ være $n+1$ forskellige kom- plexe tal. For $m=0, 1, \dots, n$ sættes

$$f_m(t) = (t-t_0) \cdots (t-t_{m-1})(t-t_{m+1}) \cdots (t-t_n)$$

for $t \in \mathbb{C}$. Vis, at sættet bestående af funktionerne f_m , $m=0, 1, \dots, n$, udgør en basis for $\mathcal{P}_n$, (smk. øv 18). Vis, at for ethvert polynomium $g \in \mathcal{P}_n$ gælder Lagranges interpolationsformel

$$g(t) = \sum_{m=0}^n \frac{g(t_m)}{f_m(t_m)} f_m(t), \quad t \in \mathbb{C}.$$

Gør rede for, at der for $n+1$ vilkårlige (ikke nød- vendigvis forskellige) komplekse tal $a_0, a_1, \dots, a_n$ findes netop eet polynomium h af højst n 'te grad med $h(t_m) = a_m$, $m=0, 1, \dots, n$.

24. Bestem polynomiet g af højst tredje grad således, at $g(-1)=3$, $g(0)=1$, $g(2)=-1$ og $g(4)=2$, (sml. øv 23).

25. Vis, at der for vilkårlige, indbyrdes forskellige komplekse tal $t_0, t_1, \dots, t_n$ gælder

$$\sum_{m=0}^n \frac{t_m^m}{f_m(t_m)} = \begin{cases} 1 & \text{for } m=n, \\ 0 & \text{for } 0 \leq m \leq n-1, \end{cases}$$

hvor $f_m(t) = (t-t_0) \cdots (t-t_{m-1})(t-t_{m+1}) \cdots (t-t_n)$, (sml. øv 23).

26. I vektorrummet $(V, \mathbb{R})$ af geometriske vektorer er givet fra O forskellige vektorer $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e}$. Det forudsættes, at $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e}$ er parallelle med samme plan, at $\underline{a}$ ikke er parallel med denne plan, at $\underline{b} \neq \underline{c}$, og at $\underline{d}$ og $\underline{e}$ er indbyrdes vinkelrette enhedsvektorer. Giv geometriske beskrivelser af følgende delmængder af V :

$$M_1 = \{ \lambda \underline{a} \mid \lambda \in \mathbb{R} \},$$

$$M_2 = \{ \mu \underline{b} \mid \mu \in [0, \infty[\},$$

$$M_3 = \{ \nu \underline{c} \mid \nu \in [0, 1] \},$$

$$M_4 = \{ \rho \underline{d} + \sigma \underline{e} \mid \rho^2 + \sigma^2 \leq 1 \},$$

samt $M_1 + M_1$, $M_1 + M_2$, $M_1 + M_2 + M_3$, $M_3 + M_4$, $M_2 + M_3 + M_4$, $M_4 + M_4$.

27. Lad M_1, M_2 og M_3 være delmængder af et vektorrum. Mængderne $M_1 \cap (M_2 + M_3)$ og $(M_1 \cap M_2) + (M_1 \cap M_3)$ stemmer almindeligvis ikke overens. Vis dette ved angivelse af et eksempel, og undersøg, om en inklusion mellem de to mængder er almen-gyldig.

28. Lad U, U_1 og U_2 være endelig-dimensionale underrum af et vektorrum, således at $U \cap U_1 = U \cap U_2$ og $U + U_1 = U + U_2$. Vis, at $U_1 \subseteq U_2$ implicerer $U_1 = U_2$.

29. Hvilke direkte summer kan dannes af underrummene

$$U_1 = \text{span} \{ (1, 1, 1, 1) \},$$

$$U_2 = \text{span} \{ (0, 1, 0, -1), (1, 2, 1, 0) \},$$

$$U_3 = \text{span} \{ (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0) \}$$

i vektorrummet (L^4, L) ?

30. En funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes lige, dersom $f(-t) = f(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$, og ulige, dersom $f(-t) = -f(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Vis, at såvel mængden af lige funktioner som mængden af ulige funktioner er underrum af $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R})$, og at disse to underrum er komplementære.

31. Angiv en basis for et komplementært under-
rum U_2 til underrummet $U_1 = \text{span}\{(3, -2, 1)\}$ i
 (L^3, L) . Find derefter projektionen af vektoren
 $(2, 2, 2)$ på U_1 langs det fundne underrum U_2 .
32. Lad (V, L) være et endelig-dimensionalt vektor-
rum, og lad U være et underrum af V med
 $0 < \dim U < \dim V$. Vis, at der findes uendelig man-
ge til U komplementære underrum af V .
33. Vis, at summen $U_1 + U_2 + U_3$ af tre underrum af
et vektorrum er direkte, hvis og kun hvis der
gælder $U_1 \cap (U_2 + U_3) = U_2 \cap (U_1 + U_3) = U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{0\}$.
34. Vis, at en ikke-tom delmængde M af et vektor-
rum (V, L) er et sideunderrum i V , hvis og
kun hvis M er afsluttet over for dannelse af
linearkombinationer med koefficientsum 1,
altså hvis og kun hvis der for ethvert sæt
 $(x_1, \dots, x_n)$ af vektorer fra M og ethvert sæt
 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ af skalarer med $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ gælder
 $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in M$.
35. Vis, at en ikke-tom fællesmængde af sideun-
derrum i et vektorrum igen er et sideunder-
rum.

36. Lad $(V_1, L), \dots, (V_n, L)$ være vektorrum over samme legeme L . Overvej, at produktmængden

$$V_1 \times \dots \times V_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in V_1 \wedge \dots \wedge x_n \in V_n \}$$

på naturlig måde kan organiseres som et vektorrum over L ; dette vektorrum kaldes produktet (eller det direkte produkt) af vektorrummene $(V_1, L), \dots, (V_n, L)$. Udtryk dimensionen af produktet ved dimensionerne af $(V_1, L), \dots, (V_n, L)$.

For $i=1, \dots, n$ betegnes med W_i delmængden af $V_1 \times \dots \times V_n$ bestående af vektorerne af formen $(0_1, \dots, 0_{i-1}, x_i, 0_{i+1}, \dots, 0_n)$, hvor 0_j er nulvektoren i V_j , og $x_i \in V_i$. Vis, at delmængderne W_i er underrum af produktet $V_1 \times \dots \times V_n$, og at $W_1 \oplus \dots \oplus W_n = V_1 \times \dots \times V_n$. Beskriv kvotientrummene $V_1 \times \dots \times V_n / W_i$.

Kap. 2. Lineære afbildninger.

2.1. Lineære afbildninger.	2.1.1 - 2.1.6
2.2. Dimensionssætningen.	2.2.1 - 2.2.3
2.3. Regning med lineære afbildninger.	2.3.1 - 2.3.2
Øvelser	2. Øv 1-8

2.1. Lineære afbildninger.

Lad (U, L) og (V, L) være (ikke nødvendigvis forskellige) vektorrum over samme legeme. Vi skal benytte samme betegnelser for kompositionerne i de to vektorrum, og både nulvektoren i U og nulvektoren i V vil blive betegnet 0 . En afbildning $f: U \rightarrow V$ kaldes en lineær afbildning (også homomorf afbildning eller homomorfi), dersom følgende to betingelser er opfyldt:

$$(i) \quad \forall u_1, u_2 \in U : f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2).$$

$$(ii) \quad \forall \lambda \in L \quad \forall u \in U : f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

En bipektiv lineær afbildning kaldes også en isomorf afbildning eller en isomorfi. For $U = V$ benyttes også gloserne endomorf afbildning eller endomorfi for en homomorf afbildning, og gloserne automorf afbildning eller automorfi for en isomorf afbildning.

Det ses umiddelbart, at betingelserne (i) - (ii) er ensbetydende med følgende ene betingelse, som således også kunne være benyttet ved definitionen:

$$(iii) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in L \quad \forall u_1, u_2 \in U : f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2).$$

Betingelsen (iii) kan siges at udtrykke, at f bevarer linearkombinationer af to vektorer. Ved brug af (iii) vises let ved induktion, at hvis f er lineær, så har vi

$$(1) \quad f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_p f(u_p)$$

for alle $p \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in L$ og $u_1, \dots, u_p \in U$; for $p = 1$ er (1) blot (ii). Idet omvendt enhver afbildning f med

egenskaben (i) trivielt har egenskaben (iii), gælder altså:

En afbildning $f: U \rightarrow V$ er lineær, hvis og kun hvis den bevarer (ikke-tomme) linearkombinationer.

Vedrørende eksistensen af lineære afbildninger skal vi vise:

Hvis U har endelig dimension $n \in \mathbb{N}$, så findes for enhver basis $(e_1, \dots, e_n)$ for U og ethvert sæt $(x_1, \dots, x_n)$ af n vektorer fra V en og kun en lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ med $f(e_i) = x_i$, $i = 1, \dots, n$.

Beris. Lad f være den ved

$$f(u_1 e_1 + \dots + u_n e_n) = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n$$

definerede afbildning af U ind i V . Det eftervises let, at f er lineær, og at $f(e_i) = x_i$ for $i = 1, \dots, n$.

Lad omvendt $g: U \rightarrow V$ være en lineær afbildning med $g(e_i) = x_i$ for $i = 1, \dots, n$. Der gælder da

$$\begin{aligned} g(u_1 e_1 + \dots + u_n e_n) &= u_1 g(e_1) + \dots + u_n g(e_n) \\ &= u_1 x_1 + \dots + u_n x_n, \end{aligned}$$

hvilket viser, at $g = f$. $\square$

Vi skal herefter undersøge egenskaber ved en lineær afbildning $f: U \rightarrow V$.

Modsat vektor afbildes i modsat vektor, altså $f(-u) = -f(u)$ for $u \in U$, og nulvektor afbildes i nulvektor, altså $f(0) = 0$.

Beris. Ved brug af (ii) fås $f(-u) = f((-1)u) = (-1)f(u) = -f(u)$ og $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 f(0) = 0$. $\square$

Er $(u_1, \dots, u_p)$ et lineært afhængigt sæt af vektorer i U , så er også sættet $(f(u_1), \dots, f(u_p))$ af billedvektorer i V lineært afhængigt.

Beris. Lad $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$ være en egentlig lineær relation mellem vektorerne i sættet $(u_1, \dots, u_p)$. At den foregående sætning følger da $f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p) = 0$, altså $\lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_p f(u_p) = 0$. Heraf fremgår, at sættet $(f(u_1), \dots, f(u_p))$ er lineært afhængigt. $\square$

Det noteres, at den foregående sætning kan omformuleres til følgende:

Er $(u_1, \dots, u_p)$ et sæt af vektorer i U for hvilket sættet $(f(u_1), \dots, f(u_p))$ af billedvektorer i V er lineært uafhængigt, så er også sættet $(u_1, \dots, u_p)$ lineært uafhængigt.

Det bemærkes, at der til et lineært uafhængigt sæt meget vel kan svare et lineært afhængigt sæt af billedvektorer. Dette vil f.eks. gælde for enhver basis for U og enhver lineær afbildning $f: U \rightarrow V$, dersom $\dim V < \dim U < \infty$.

For ethvert underrum V_1 af V er originalmængden $f^{-1}(V_1)$ et underrum af U .

Beris. Af $f(0) = 0$ følger, at $f^{-1}(V_1)$ er ikke-tom. Det skal derefter vises, at $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in f^{-1}(V_1)$ for $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ og $u_1, u_2 \in f^{-1}(V_1)$. Af $u_1, u_2 \in f^{-1}(V_1)$ følger $f(u_1), f(u_2) \in V_1$, og dermed $\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) \in V_1$, idet V_1 er et underrum. Ved brug af lineariteten giver dette $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \in V_1$, altså $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in f^{-1}(V_1)$. $\square$

Idet $\{0\}$ er et underrum af V , følger af den foregående sætning, at originalmængden $f^{-1}(0)$ er et underrum af U . Det kaldes f 's kerne (eller nulrum), og betegnes K_f eller blot K . Vi har altså

$$K_f = \{u \in U \mid f(u) = 0\}.$$

For ethvert underrum U_1 af U er billedet $f(U_1)$ et underrum af V .

Beris. Det skal vises, at $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in f(U_1)$ for $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ og $x_1, x_2 \in f(U_1)$. Lad u_1 og u_2 være vektorer i U_1 med $f(u_1) = x_1$ og $f(u_2) = x_2$. Vi har da $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U_1$, idet U_1 er et underrum, og dermed $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \in f(U_1)$, altså $\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in f(U_1)$. $\square$

At denne sætning fremgår specielt, at billedmængden $f(U)$ er et underrum af V . Det kaldes billedrummet ved afbildningen f . Dimensionen af billedrummet kaldes leslighedsvis for rang af f og betegnes da $\text{rg } f$, - altså $\text{rg } f = \dim f(U)$.

Dimensionen af billedrummet ved afbildningen $f: U \rightarrow V$ er mindre end eller lig med dimensionen af U , altså $\dim f(U) \leq \dim U$.

Beris. For ethvert lineært uafhængigt sæt $(f(u_1), \dots, f(u_p))$ af p vektorer fra $f(U)$ findes også et lineært uafhængigt sæt af p vektorer fra U , nemlig sættet $(u_1, \dots, u_p)$, (smk. side 2.1.3). Heraf følger påstanden. $\square$

Idet restriktionen af f til et underrum af U er en lineær afbildning af dette underrum ind i V , følger af den sidste sætning, at der for et hvert underrum U_1 af U gælder $\dim f(U_1) \leq \dim U_1$.

Hvis f er bijektiv, altså en isomorfi, så er den omvendte afbildning $f^{-1}: V \rightarrow U$ lineær, og dermed en isomorfi. Der gælder da $\dim U = \dim V$.

Bevis. For $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ og $x_1, x_2 \in V$ har vi

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 f^{-1}(x_1) + \lambda_2 f^{-1}(x_2)) &= \lambda_1 f \circ f^{-1}(x_1) + \lambda_2 f \circ f^{-1}(x_2) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \end{aligned}$$

og dermed

$$f^{-1}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f^{-1}(x_1) + \lambda_2 f^{-1}(x_2),$$

hvilket viser, at f^{-1} er lineær. Af den foregående sætning fås derefter dels $\dim V = \dim f(U) \leq \dim U$, idet f er surjektiv og lineær, dels $\dim U = \dim f^{-1}(V) \leq \dim V$, idet f^{-1} er surjektiv og lineær. $\square$

Af denne sætning følger, at hvis $f: U \rightarrow V$ er en injektiv lineær afbildning, så gælder $\dim f(U_1) = \dim U_1$ for ethvert underrum U_1 af U ; thi restriktionen af f til U_1 er en isomorfi af U_1 på $f(U_1)$.

Eksempel. Lad (U, L) være et vektorrum, og lad $\alpha \in L$. Ved $u \mapsto \alpha u$ defineres da en lineær afbildning af U ind i U ; for $\alpha \neq 0$ er afbildningen bijektiv, altså en isomorfi. Den kaldes homotetien eller multiplikationen med α som faktor.

Eksempel. Lad U_1 og U_2 være komplementære underrum af et vektorrum (U, L) , (sml. side 1.5.5). Ved til hver vektor u i U at lade svare dens projektion på U_1 langs U_2 , (sml. side 1.5.5), får en lineær afbildning p_1 af U ind i U , kaldet parallelprojektion på U_1 langs U_2 . Billedrummet for p_1 er U_1 , kernen er U_2 . Tilsvarende defineres parallelprojektion p_2 på U_2 langs U_1 .

Eksempel. Lad (U, L) være et vektorrum med $\dim U = n \in \mathbb{N}$, og lad der i U være valgt en basis. Den tilhørende koordinatafbildning er da en isomorfi af (U, L) på (L^n, L) , (sml. side 1.4.7).

Eksempel. Lad U være et underrum af et vektorrum (V, L) . Afbildningen $v \mapsto v + U$ er da en lineær afbildning af V på kvotientrummet V/U , (sml. side 1.6.2). Afbildningen kaldes den natur-
lige projektion af V på V/U .

2.2. Dimensionsætningen.

Lad $f: U \rightarrow V$ være en lineær afbildning, og lad K være afbildningens kerne. Vi viser først:

Originalmængderne til vektorerue i billedrummet $f(U)$ er præcis sideunderrummene til K i U . For enhver vektor $u \in U$ gælder $u + K = f^{-1}(f(u))$.

Beris. Den første påstand kommer ud på, at to vektorer i U har samme billede ved f , hvis og kun hvis de tilhører samme sideunderrum til K . Af $f(u_1 - u_2) = f(u_1 + (-u_2)) = f(u_1) + f(-u_2) = f(u_1) + (-f(u_2)) = f(u_1) - f(u_2)$ for $u_1, u_2 \in U$ følger, at u_1 og u_2 har samme billede ved f , hvis og kun hvis $u_1 - u_2$ tilhører K ; men dette sidste er ensbetydende med, at u_1 og u_2 tilhører samme sideunderrum til K , (sml. side 1.6.1). Idet u tilhører både $u + K$ og $f^{-1}(f(u))$, følger sætningens anden påstand af den første. $\square$

En oplagt konsekvens af den foregående sætning er følgende:

Afbildningen f er injektiv, hvis og kun hvis kerne K kun indeholder 0 .

Vi skal herefter vise den såkaldte homomorfisætning:

Afbildningen $u + K \mapsto f(u)$ er en isomorfi af U/K på $f(U)$, afbildningen $y \mapsto f^{-1}(y)$ er den omvendte isomorfi af $f(U)$ på U/K .

Beris. Af den første af de to foregående sætninger følger, at

$$u+K \mapsto \phi(u+K) = f(u)$$

er en veldefineret bijektiv afbildning af U/K på $f(U)$, og at ϕ 's omvendte afbildning er afbildningen $v \mapsto f^{-1}(v)$. Det skal herefter blot vises, at ϕ er lineær. For $u_1, u_2 \in U$ har vi

$$\begin{aligned} \phi((u_1+K) + (u_2+K)) &= \phi((u_1+u_2)+K) \\ &= f(u_1+u_2) \\ &= f(u_1) + f(u_2) \\ &= \phi(u_1+K) + \phi(u_2+K), \end{aligned}$$

og for $\lambda \in L$ og $u \in U$ har vi

$$\begin{aligned} \phi(\lambda(u+K)) &= \phi(\lambda u + K) \\ &= f(\lambda u) \\ &= \lambda f(u) \\ &= \lambda \phi(u+K). \end{aligned}$$

(Sml. i øvrigt side 1.6.2). Hermed er vist, at ϕ er lineær. $\square$

Vi kan nu vise dimensionsætningen:

Hvis U har endelig dimension, så gælder
 $\dim K + \dim f(U) = \dim U$.

Basis. Som tidligere vist (side 1.6.3) har vi $\dim K + \dim U/K = \dim U$. Men ifølge homomorfisættningen findes der en isomorfi af U/K på $f(U)$, og det gælder derfor $\dim U/K = \dim f(U)$, (sml. side 2.1.5). $\square$

Ved anvendelse af dimensionsætningen skal vi vise:

Når U har endelig dimension, så er f injektiv, hvis og kun hvis $\dim f(U) = \dim U$.

Bevís. Som vist i det foregående er f injektiv, hvis og kun hvis $K = \{0\}$, altså $\dim K = 0$. Men dette er ifølge dimensionssætningen ensbetydende med, at $\dim f(U) = \dim U$. (Vi har i øvrigt tidligere bemærket (side 2.7.5), at hvis f er injektiv, så gælder $\dim f(U) = \dim U$, - også når U har uendelig dimension.) $\square$

Som et modstykke til den foregående sætning har vi:

Når V har endelig dimension, så er f surjektiv, hvis og kun hvis $\dim f(U) = \dim V$.

Bevís. Det er klart, at vi har $\dim f(U) = \dim V$, når f er surjektiv, (i øvrigt også for $\dim V = \infty$). Omvendt vides (sml. side 1.4.4), at det eneste underrom af V , som har samme dimension som V , er V selv; at $\dim f(U) = \dim V$ følger derfor, at f er surjektiv. $\square$

At de to sidste sætninger følger umiddelbart:

Når U og V har samme endelige dimension, så er afbildningen f injektiv, hvis og kun hvis den er surjektiv; injektivitet eller surjektivitet af f er således tilstrækkeligt til at sikre, at f er bijektiv, og dermed en isomorfi.

2.3. Regning med lineære afbildninger.

Lad U og V være vektorrum over samme legeme L . Vi skal der med $\mathcal{L}(U, V)$ betegne mængden af lineære afbildninger af U ind i V . For $f, g \in \mathcal{L}(U, V)$ og $\lambda \in L$ defineres afbildningen $f+g: U \rightarrow V$ og $\lambda f: U \rightarrow V$ ved

$$u \mapsto (f+g)(u) = f(u) + g(u),$$

$$u \mapsto (\lambda f)(u) = \lambda f(u).$$

Det eftervises let, at også $f+g$ og λf er lineære afbildninger, altså elementer af $\mathcal{L}(U, V)$. Det eftervises ligeledes let, at $\mathcal{L}(U, V)$ herved er organiseret som et vektorrum over L . Nulvektoren i dette vektorrum er "nulafbildningen" $u \mapsto 0$, den modsatte $-f$ til f er afbildningen $u \mapsto (-f)(u) = -f(u)$.

Som tidligere omtalt, (side 1.1.5), kan L opfattes som et vektorrum over sig selv. Vektorrummet $\mathcal{L}(V, L)$ af alle lineære afbildninger af (V, L) ind i L kaldes det til (V, L) duale vektorrum, og betegnes også (V^*, L) eller blot V^* . Afbildningerne i V^* kaldes linearformer på V ; nulafbildningen, altså nulvektoren i V^* , kaldes nulformen.

Lad U, V og W være vektorrum over samme legeme L . Det eftervises let, at er $f: U \rightarrow V$ og $g: V \rightarrow W$ lineære afbildninger, så er også den sammensatte afbildning $g \circ f: U \rightarrow W$ lineær. Endvidere vises let, at der for $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}(U, V)$, $g, g_1, g_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ og $\lambda \in L$ gælder

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f,$$

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2,$$

$$\lambda(g \circ f) = (\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f).$$

Vi skal sige, at (U, L) er isomorft med (V, L) , dersom der findes en isomorfi af U på V ; vi skriver da $U \cong V$. Det er klart, at den identiske afbildning af et vektorrum på sig selv er en isomorfi; relationen $\cong$ er således reflektiv. Vi har tidligere vist, (side 2.1.5), at den omvendte afbildning til en isomorfi igen er en isomorfi; relationen $\cong$ er således også symmetrisk. (Vi kan her efter tillade os at sige, at to vektorrum er indbyrdes isomorfe, dersom det ene er isomorft med det andet.) Endelig fremgår af det foregående, at der ved sammensætning af to isomorfier igen fås en isomorfi; relationen $\cong$ er derfor også transitiv. I alt er dermed godtgjort, at $\cong$ er en ækvivalensrelation i klassen af vektorrum over L .

Vi har tidligere vist, (side 2.1.5), at isomorfe vektorrum har samme dimension. Omvendt overbeviser man sig let om, at to vektorrum over samme legeme af samme endelige dimension er isomorfe. Uden bevis anføres, at to uendelig-dimensionale vektorrum over samme legeme ikke nødvendigvis er isomorfe.

Det noteres, at mængden af isomorfier af et givet vektorrum på sig selv er en gruppe med sammensætning som komposition, kaldet vektorrummets automorfigruppe.

1. Lad $(V, \mathbb{R})$ betegne vektorrummet af geometriske vektorer i rummet, og lad (a, b) være et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra V . Vis, at afbildningen

$$v \mapsto a \cdot v$$

af $(V, \mathbb{R})$ ind i $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ er lineær, og at afbildningerne

$$v \mapsto a \times v,$$

$$v \mapsto (a \cdot v)b + (b \cdot v)a,$$

af $(V, \mathbb{R})$ ind i $(V, \mathbb{R})$ er lineære. Angiv for hver af afbildningerne billedrum og kerne.

2. Lad $(V, \mathbb{R})$ betegne vektorrummet af geometriske vektorer i en given plan, og lad (e_1, e_2) være en basis for V . Ved

$$f_1(e_1) = e_1, \quad f_1(e_2) = -e_2,$$

$$f_2(e_1) = e_2, \quad f_2(e_2) = e_1,$$

$$f_3(e_1) = e_1 - e_2, \quad f_3(e_2) = e_2 - e_1,$$

fastlægges lineære afbildninger f_1, f_2, f_3 af V ind i V . Konstruer billedet af en vilkårlig vektor $x \in V$ ved hver af de tre afbildninger, idet e_1 og e_2 tegnes som ikke-vinkelrette vektorer af forskellig længde. Bestem endvidere for hver af de tre afbildninger kerne og billedrum, samt mængden af vektorer, som afbildes i sig selv.

3. Lad $(\mathcal{C}^0(A), \mathbb{R})$ hhv. $(\mathcal{C}^1(A), \mathbb{R})$ betegne vektorrummet af alle kontinuerte hhv. 1 gang kontinuert differentiable reelle funktioner på et interval A i $\mathbb{R}$. Ved til hver funktion $\varphi \in \mathcal{C}^1(A)$ at lade svare dens afledede $D\varphi$ fås en afbildning D af $\mathcal{C}^1(A)$ ind i $\mathcal{C}^0(A)$. Overvej, at afbildningen er lineær. Angiv billedrum og kerne. Bestem for en vilkårlig funktion $\varphi \in \mathcal{C}^1(A)$ originalmængden $D^{-1}(D\varphi)$. Find et til kernekomplementært underrum U af $\mathcal{C}^1(A)$, og eftervis, at restriktionen af D til U er injektiv og har samme billedrum som D .
4. Lad U_1 og U_2 være komplementære underrum af et vektorrum (U, L) . Angiv en naturlig isomorfi af U_1 på U/U_2 .
5. Lad $U_1, \dots, U_n$ være underrum af et vektorrum (U, L) med $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. Angiv en naturlig isomorfi af U på produktet $U_1 \times \dots \times U_n$, (små. 1. øv 36).
6. Lad f være en lineær afbildning af et (ikke nødvendigvis endelig-dimensionalt) vektorrum (U, L) ind i et vektorrum (V, L) , og lad U_1 være et til kerne K komplementært underrum af U . Vis, at restriktionen af f til U_1 er injektiv og har samme billedrum som f .

7. Lad $f: (U, L) \rightarrow (V, L)$ være en lineær afbildning med kerne K , og lad π være den naturlige projektion af U på U/K . Vis, at der findes en og kun een lineær afbildning $\tilde{f}: U/K \rightarrow V$, således at $f = \tilde{f} \circ \pi$.
8. Lad $f: (U, L) \rightarrow (V, L)$ være en lineær afbildning, lad U_1 være et underrum af U , og lad V_1 være et underrum af V med $f(U_1) \subseteq V_1$. Lad π_U og π_V være de naturlige projektioner af U på U/U_1 hhv. V på V/V_1 . Vis, at der findes en og kun een lineær afbildning $\tilde{f}: U/U_1 \rightarrow V/V_1$, således at $\pi_V \circ f = \tilde{f} \circ \pi_U$.

Kap. 3. Dualitet.

3.1. Vektorrum i dualitet.	3.1.1 - 3.1.6
3.2. Dualt vektorrum.	3.2.1 - 3.2.4
3.3. Duale afbildninger.	3.3.1 - 3.3.4
Øvelser	3. øv 1 - 5

3.1. Vektorrum i dualitet.

Lad (V, L) og (V', L) være vektorrum over samme legeme. Ved en bilinearform på $V \times V'$ forstås en afbildning $B: V \times V' \rightarrow L$ med følgende to egenskaber:

- (i) For enhver vektor $x' \in V'$ er afbildningen $x \mapsto B(x, x')$ en linearform på V .
- (ii) For enhver vektor $x \in V$ er afbildningen $x' \mapsto B(x, x')$ en linearform på V' .

Det eftervises let, at hvis B er en bilinearform på $V \times V'$, så er linearformen $x \mapsto B(x, 0)$ nulformen på V , og linearformen $x' \mapsto B(0, x')$ er nulformen på V' . Modsvarende siges B at være ikke-udartet, hvis følgende to betingelser er opfyldt:

- (iii) For enhver vektor $x' \in V' \setminus \{0\}$ er linearformen $x \mapsto B(x, x')$ forskellig fra nulformen på V .
- (iv) For enhver vektor $x \in V \setminus \{0\}$ er linearformen $x' \mapsto B(x, x')$ forskellig fra nulformen på V' .

Vektorrummene (V, L) og (V', L) siges at være i dualitet, eller at være et dualt par af vektorrum, hvis det er givet en ikke-udartet bilinearform B på $V \times V'$. Vi vil da skrive $\langle x, x' \rangle$ i stedet for $B(x, x')$, og kalde $\langle x, x' \rangle$ for produktet af x og x' .

To vektorrum (V, L) og (V', L) med samme endelige dimension kan altid bringes i dualitet. For dimensionen 0 er dette oplagt. For $\dim V = \dim V' = n \in \mathbb{N}$ vælges baser $(e_1, \dots, e_n)$ og $(f_1, \dots, f_n)$ for hhv. V og V' . Afbildningen $B: V \times V' \rightarrow L$ givet ved

$$B(v_1 e_1 + \dots + v_n e_n, v'_1 f_1 + \dots + v'_n f_n) = v_1 v'_1 + \dots + v_n v'_n$$

er da en ikke-udartet bilinearform på $V \times V'$. Omvendt har vi:

Hvis (V, L) og (V', L) er i dualitet, så gælder $\dim V = \dim V'$.

Bewis. På grund af den fuldstændige symmetri mellem V og V' er det tilstrækkeligt at vise, at hvis V har endelig dimension, så har også V' endelig dimension, og $\dim V' \leq \dim V$. For $\dim V = 0$ er dette klart. Antag derfor, at $\dim V = n \in \mathbb{N}$, og lad $(e_1, \dots, e_n)$ være en basis for V . Ved

$$(1) \quad v' \mapsto f(v') = (\langle e_1, v' \rangle, \dots, \langle e_n, v' \rangle)$$

defineres da en afbildning $f: V' \rightarrow L^n$. Ved brug af (ii) vises let, at f er lineær. Endvidere er f injektiv. Thi lad v' være en vektor i V' med $f(v') = (0, \dots, 0)$. Her gælder da $\langle e_1, v' \rangle = \dots = \langle e_n, v' \rangle = 0$, og dermed $\langle v, v' \rangle = 0$ for enhver vektor $v \in V$ ifølge (i); men ifølge (iii) har vi da $v' = 0$. Kerne for f består altså kun af 0 , hvormed er vist, at f er injektiv. Vi har derfor, (små. side 2.2.3), $\dim V' = \dim f(V) \leq \dim L^n = n = \dim V$, som ønsket. $\square$

Lad (V, L) og (V', L) være i dualitet, og antag, at $\dim V = \dim V' = n \in \mathbb{N}$. Et par bestående af en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ for V og en basis $(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$ for V' siges at være et par af dualt baser, dersom

$$(2) \quad \langle \underline{e}_i, \underline{e}'_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n;$$

baserne siges da også at være dualt til hinanden. Herom gælder:

Hvis (V, L) og (V', L) er i dualitet, og $\dim V = \dim V' = n \in \mathbb{N}$, så findes for enhver basis for V hhv. V' netop en hermed dual basis for V' hhv. V .

Bewis. Det er tilstrækkeligt at vise, at der for enhver basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ for V findes ^{netop} en hermed dual basis for V' . Lad $f: V' \rightarrow L^n$ være afbildningen defineret ved (1) ovenfor. Som vist er f lineær og injektiv. Idet $\dim V' = \dim L^n$, er f også surjektiv, (sml. side 2.2.3), og dermed bijektiv. Der findes følgelig for ethvert sæt $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in L^n$ en og kun en vektor $\underline{v}' \in V'$ med $\langle \underline{e}_i, \underline{v}' \rangle = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$. Specielt findes entydigt bestemte vektorer $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ i V' , således at (2) er opfyldt. Det skal vises, at sættet $(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$ er en basis for V' . Da antallet af vektorer i sættet stemmer overens med dimensionen, er det tilstrækkeligt at vise, at sættet er lineært uafhængigt. Lad derfor $\lambda_1 \underline{e}'_1 + \dots + \lambda_n \underline{e}'_n = \underline{0}$ være en lineær relation mellem vektorerne i sættet; for $i = 1, \dots, n$ har vi da $0 = \langle \underline{e}_i, \underline{0} \rangle = \langle \underline{e}_i, \lambda_1 \underline{e}'_1 + \dots + \lambda_n \underline{e}'_n \rangle = \lambda_1 \langle \underline{e}_i, \underline{e}'_1 \rangle + \dots + \lambda_n \langle \underline{e}_i, \underline{e}'_n \rangle = \lambda_i$, hvoraf det ønskede fremgik. $\square$

Det bemærkes, at $(e_1, \dots, e_n)$ og $(e'_1, \dots, e'_n)$ duale baser for vektorrum (V, L) og (V', L) i dualitet, og er $\underline{v} = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ og $\underline{v}' = v'_1 e'_1 + \dots + v'_n e'_n$ vektorer i hhv. V og V' , så gælder

$$\langle \underline{v}, \underline{v}' \rangle = v_1 v'_1 + \dots + v_n v'_n.$$

Specielt noteres, at

$$\langle \underline{v}, e'_i \rangle = v_i, \quad i=1, \dots, n,$$

$$\langle e_i, \underline{v}' \rangle = v'_i, \quad i=1, \dots, n.$$

Lad (V, L) og (V', L) være i dualitet. Hvis $\underline{v} \in V$ og $\underline{v}' \in V'$ er vektorer med $\langle \underline{v}, \underline{v}' \rangle = 0$, siges $\underline{v}$ at annihilere $\underline{v}'$, og $\underline{v}'$ siges at annihilere $\underline{v}$. Nulvektoren i V hhv. V' annihilerer samtlige vektorer i V' hhv. V , og er den eneste vektor med denne egenskab. Mængden af vektorer i V' hhv. V , som annihilere samtlige vektorer i en ikke-tom delmængde M af V hhv. V' , kaldes M 's annihilator, og betegnes M° . Annihilatoren til M° betegnes $M^{\circ\circ}$, og annihilatoren til $M^{\circ\circ}$ betegnes $M^{\circ\circ\circ}$.

Det eftervises meget let, at for en ikke-tom delmængde M af V eller V' er M° et underrum af V' hhv. V . Endvidere vises let, at

$$M \subseteq M^{\circ\circ},$$

og at

$$M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_1^\circ \supseteq M_2^\circ.$$

Vi skal derefter vise:

Hvis (V, L) og (V', L) er endelig-dimensionale vektorrum i dualitet, så gælder for ethvert under-
rum W af V eller V' :

$$(3) \quad \dim W + \dim W^0 = \dim V = \dim V'.$$

$$(4) \quad W = W^{00}.$$

Beweis. For at vise (3) er det tilstrækkeligt at vise, at $\dim W + \dim W^0 = \dim V$ for ethvert under-
rum W af V . For $\dim W = 0$ har vi $W^0 = V'$, og på-
standen er oplagt. For $\dim W = \dim V > 0$ har vi
 $W = V$, og dermed $W^0 = \{0\}$, hvorefter påstanden er
oplagt. For $0 < \dim W = r < \dim V$ vælges en basis
 $(e_1, \dots, e_r)$ for W , som derefter suppleres til en basis
 $(e_1, \dots, e_n)$ for V . Lad $(e'_1, \dots, e'_n)$ være den til
basen $(e_1, \dots, e_n)$ duale basis for V' . Det er da klart,
at vektorerne $e'_{r+1}, \dots, e'_n$ tilhører W^0 . Er endvidere
 $v' = v'_1 e'_1 + \dots + v'_n e'_n$ en vektor i W^0 , har vi $\langle e_i, v' \rangle = 0$
for $i = 1, \dots, r$, og dermed $v'_i = 0$ for $i = 1, \dots, r$, (se side 3.1.4).
Heraf følger, at v' er en linearkombination af vek-
torerne $e'_{r+1}, \dots, e'_n$. Sættet $(e'_{r+1}, \dots, e'_n)$ er altså en
basis for W^0 , og vi har dermed $\dim W + \dim W^0 =$
 $r + (n - r) = n = \dim V$, som ønsket. - For at vise (4) note-
res, at da der gælder $W \subseteq W^{00}$, er det tilstrækkeligt at
vise, at $\dim W = \dim W^{00}$. Dette fås ved at anvende
(3), dels på W , og dels på W^0 . $\square$

At sætningens anden påstand fremgår, at hvis M
er en ikke-tom delmængde af V eller V' , hvor (V, L) og
 (V', L) er endelig-dimensionale vektorrum i dualitet,
så gælder

$$M^0 = M^{000}.$$

Med henblik på en senere anvendelse skal vi endelig vise:

Lad (V, L) og (V', L) være endelig-dimensionale vektorrum i dualitet, lad U og U' være underrum af hhv. V og V' , og antag, at U og U' er i dualitet ved restriktionen af den på $V \times V'$ givne bilinearform til $U \times U'$. Da gælder $U \oplus (U')^\circ = V$.

Beris. Da U og U' er i dualitet, er 0 den eneste vektor i U , som annullerer samtlige vektorer i U' . Heraf følger, at $U \cap (U')^\circ = \{0\}$, hvilket viser, at U og $(U')^\circ$ danner direkte sum. Født vektorrum i dualitet har samme dimension (sml. side 3.1.2), har vi $\dim U = \dim U'$. Ved brug af (3) får vi herefter $\dim(U \oplus (U')^\circ) = \dim U + \dim (U')^\circ = \dim U' + \dim (U')^\circ = \dim V$, hvorefter fremgår, at $U \oplus (U')^\circ = V$. $\square$

3.2* Dualt vektorrum.

Lad (V, L) være et vektorrum. En linear afbildning $\xi: V \rightarrow L$ kaldes en linearform på V . Linearformerne på V udgør på naturlig måde et vektorrum over L , nemlig som underrum i vektorrummet af alle afbildninger af mængden V ind i legemet L . Kompositionerne er altså for linearformer ξ og η og $a \in L$ bestemt ved, at

$a\xi$ betegner linearformen: $v \mapsto a\xi(v)$

$\xi + \eta$ betegner linearformen: $v \mapsto \xi(v) + \eta(v)$.

Vektorrummet af linearformer på V kaldes V 's dualt vektorrum, og betegnes (V^*, L) .

Nulvektoren i V^* er den konstante afbildning: $v \mapsto 0$, kaldet nulformen.

Eksempler. På vektorrummet $\mathcal{C}^1[-1, 1]$ af 1 gang kontinuert differentiable komplekse funktioner på intervallet $[-1, 1]$ er $f \mapsto \int_{-1}^1 f(t) dt$, $f \mapsto f(-1)$ og $f \mapsto f'(0)$ linearformer. På vektorrummet af konvergente reelle talfølger (a_n) er $(a_n) \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ en linearform. På $\mathbb{R}^3$ er $(x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1 - x_2$ en linearform.

Da billedrummet ved en linearform $\xi: V \rightarrow L$ er $\{0\}$ eller L , er enhver fra nulformen forskellig linearform surjektiv. Der gælder:

To linearformer ξ og η på V , forskellige fra nulformen, har samme kerne, hvis og kun hvis de er proportionale (altså hvis og kun hvis der findes $a \in L \setminus \{0\}$ så et $\eta = a\xi$).

Bewis. "Hvis" er klart. Antag nu, at ξ og η har samme kerne. Da ξ er surjektiv, findes en vektor $\underline{e} \in V$ med $\xi(\underline{e}) = 1$. Vi sætter $\eta(\underline{e}) = a$, og vi vil vise, at $\eta = a\xi$. For en vilkårlig vektor $\underline{v} \in V$ ser vi, at $\underline{v} - \xi(\underline{v})\underline{e}$ ligger i ξ 's kerne, og derfor også i η 's kerne. Der gælder derfor $0 = \eta(\underline{v} - \xi(\underline{v})\underline{e}) = \eta(\underline{v}) - \xi(\underline{v})\eta(\underline{e}) = \eta(\underline{v}) - a\xi(\underline{v})$, altså $\eta(\underline{v}) = a\xi(\underline{v})$ $\square$

En linearform på V er, som alle lineære afbildninger fra V , helt bestemt ved sine værdier på en basis. Dette vil vi udnytte til at skaffe os et overblik over V^* i det endelige dimensionale tilfælde. Lad nemlig $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ være en basis for V . Det ses let, at den i 'te koordinatfunktion m.h.t. denne basis, altså afbildningen

$$\kappa_i : \underline{v} = v_1\underline{e}_1 + \dots + v_n\underline{e}_n \mapsto v_i,$$

er en linearform på V . Sætter vi, for $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, n$,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{når } i=j \\ 0 & \text{når } i \neq j, \end{cases}$$

ses det, at den i 'te koordinatfunktion $\kappa_i : V \rightarrow L$ er bestemt ved

$$\kappa_i(\underline{e}_j) = \delta_{ij}, \quad j=1, \dots, n.$$

Hvis $a_1, \dots, a_n \in L$, vil linearformen $\xi = a_1\kappa_1 + \dots + a_n\kappa_n$ altså være bestemt ved $\xi(\underline{e}_j) = a_j$, $j=1, \dots, n$.

Heraf følger, at hver linearform $\xi \in V^*$ har en entydig fremstilling som linearkombination af koordinatfunktionerne, nemlig

$$\xi = \xi(\underline{e}_1)\kappa_1 + \dots + \xi(\underline{e}_n)\kappa_n.$$

Vi har således vist:

Lad (V, L) være et n -dimensionalt vektorrum.

For enhver basis $(e_1, \dots, e_n)$ for V udgør de tilhørende koordinatfunktioner $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ en basis for det duale vektorrum V^* .

Specielt er $\dim V^* = \dim V$.

Basen $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ for V^* kaldes den til $(e_1, \dots, e_n)$ hørende duale basis, og den betegnes ofte $(e_1^*, \dots, e_n^*)$.

Eksempel. I vektorrummet (L^n, L) har vi den naturlige basis $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Den i 'te koordinatfunktion m.h.t. denne basis er $\kappa_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$. Linearformen $a_1 \kappa_1 + \dots + a_n \kappa_n$ på L^n er afbildningen: $(x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$. Linearformens koordinater $(a_1, \dots, a_n)$ m.h.t. den duale basis $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ kaldes også linearformens koefficienter. Via den duale basis identificeres ofte $(L^n)^*$ med L^n .

Lad igen (V, L) være et vilkårligt vektorrum. For enhver vektor $v \in V$ er afbildningen $\xi \mapsto \xi(v)$ en lineær afbildning: $V^* \rightarrow L$, altså en linearform på V^* , altså element i $(V^*)^* = V^{**}$. Denne linearform på V^* betegnes v^{**} , altså $v^{**}(\xi) = \xi(v)$. Det eftervises let, at $v \mapsto v^{**}$ er en lineær afbildning: $V \rightarrow V^{**}$. Den kaldes den naturlige afbildning.

Hvis (V, L) er et vektorrum af den endelige dimension n , så er den naturlige afbildning $V \rightarrow V^{**}$ en isomorfi.

Bevis. Lad $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ være en basis for V , og lad $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ være den duale basis for V^* , altså bestemt ved

$$\kappa_i(\underline{e}_j) = \delta_{ij}, \quad i=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, n.$$

Ifølge definitionen af $\underline{v} \mapsto \underline{v}^{**}$ kan disse relationer skrives

$$\underline{e}_j^{**}(\kappa_i) = \delta_{ij}, \quad i=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, n,$$

og heraf følger, at $(\underline{e}_1^{**}, \dots, \underline{e}_n^{**})$ er den duale basis for V^{**} m.h.t. basen $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$.

Da afbildningen $\underline{v} \mapsto \underline{v}^{**}$ således afbilder en basis for V på en basis for V^{**} , er den en isomorfi $\square$.

Lad igen (V, L) være et vilkårligt vektorrum, lad $\underline{v}$ være en vektor i V , og lad ξ være en linearform på V . Hvis $\xi(\underline{v}) = 0$, siger vi, at ξ forsvinder på $\underline{v}$, eller at ξ annihilerer $\underline{v}$, eller at $\underline{v}$ annihilerer ξ . Det ses let, at de linearformer, der annihilerer alle vektorer i en given mængde $M \subseteq V$ (vi siger kort: de linearformer, der forsvinder på M), udgør et underrum i V^* . Dette underrum kaldes M 's annihilator i V^* , og det betegnes M° . Ligeledes ses det, at hvis $\Xi \subseteq V^*$ er en mængde af linearformer på V , så vil de vektorer i V , der annihilerer alle linearformer i Ξ , udgøre et underrum. Dette underrum kaldes Ξ 's annihilator i V og betegnes Ξ° .

Der gælder følgende dualitetsprincip for endelig dimensionale vektorrum:

Lad (V, L) være et vektorrum af den endelige dimension n .

For underrum U og U_1 i V gælder

$$(i) \quad \dim U^\circ = n - \dim U$$

$$(ii) \quad (U^\circ)^\circ = U$$

$$(iii) \quad (U + U_1)^\circ = U^\circ \cap U_1^\circ$$

$$(iv) \quad (U \cap U_1)^\circ = U^\circ + U_1^\circ$$

Der gælder tilsvarende relationer (i^*) , (ii^*) , (iii^*) og (iv^*) for underrum i V^* .

Bevis. Relationerne (i^*) , $\dots$, (iv^*) følger af de tilsvarende relationer (i) , $\dots$, (iv) , thi via den naturlige isomorfi $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ kan vi opfatte vektorer i V som linearformer på V^* . Det ses let, at med denne identifikation vil "annihilator i V " svare til "annihilator i $(V^*)^*$ ". Heraf følger påstanden.

(i): Lad $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ være en basis for underrummet U , suppler til en basis $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \dots, \varepsilon_n)$ for V , og lad $(\kappa_1, \dots, \kappa_p, \kappa_{p+1}, \dots, \kappa_n)$ være den tilhørende duale basis for V^* . En linearform

$\xi \in V^*$ har den entydige fremstilling

$\xi = a_1 \kappa_1 + \dots + a_p \kappa_p + a_{p+1} \kappa_{p+1} + \dots + a_n \kappa_n$, og her er $a_i = \xi(\varepsilon_i)$. Nu vil ξ forsvinde på U netop når ξ forsvinder på basisvektorerne $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ for U , altså netop når $a_1 = \dots = a_p = 0$. Altså er $\xi \in U^\circ$, hvis og kun hvis $\xi \in \text{Span}(\kappa_{p+1}, \dots, \kappa_n)$, så vi har vist, at $U^\circ = \text{Span}(\kappa_{p+1}, \dots, \kappa_n)$.

Ættet $(\kappa_{p+1}, \dots, \kappa_n)$ er lineært uafhængigt og dermed en basis for $\text{Span}(\kappa_{p+1}, \dots, \kappa_n) = U^\circ$. Specielt er $\dim U^\circ = n - p = n - \dim U$.

(ii): Det er klart, at $U \subseteq (U^\circ)^\circ$. Anvender vi
 (i*) på underrummet $U^\circ \subseteq V^*$, finder vi
 $\dim(U^\circ)^\circ = \dim V^* - \dim U^\circ = n - \dim U^\circ = \dim U$,
 og nu kan vi slutte, at $U = (U^\circ)^\circ$.

(iii): Hvis linearformen ξ annullerer både
 u og u_1 , vil den annullere $u + u_1$. Af denne be-
 merkning følger (iii) let.

(iv): Anvendes (iii*) på underrummene U° og U_1° i
 V^* , fås $(U^\circ + U_1^\circ)^\circ = U^{\circ\circ} \cap U_1^{\circ\circ}$. Gentagen
 anvendelse af (ii) giver derfor $(U \cap U_1)^\circ =$
 $(U^{\circ\circ} \cap U_1^{\circ\circ})^\circ = [(U^\circ + U_1^\circ)^\circ]^\circ = U^\circ + U_1^\circ. \quad \square$

3.2. Duale vektorrum.

Ved det til et vektorrum (V, L) duale vektorrum (V^*, L) forstås som bekendt vektorrummet $(\mathcal{L}(V, L), L)$ af alle linearformer på V , (sml. side 2.3.1). Vi skal vise:

Ethvert endelig-dimensionelt vektorrum (V, L) er i dualitet med sit duale vektorrum (V^*, L) ved afbildningen $(x, \xi) \mapsto \xi(x)$, $x \in V$, $\xi \in V^*$.

Bewis. At afbildningen for fastholdt ξ er lineær i x følger af, at ξ er en lineær afbildning. At afbildningen for fastholdt x er lineær i ξ følger af definitionen af vektorrumskompositionerne i V^* . At der til enhver fra nulformen forskellig linearform ξ på V findes en vektor $x \in V$ med $\xi(x) \neq 0$ er trivielt. Endelig, at der for enhver vektor $x \in V \setminus \{0\}$ findes en linearform ξ med $\xi(x) \neq 0$, indses på følgende måde. For $\dim V = 0$ er der intet at vise. For $\dim V > 0$ vælges en basis for V af formen $(x, e_2, \dots, e_n)$; dette er muligt, fordi $x \neq 0$. Der findes da en (og kun en) linearform ξ på V med $\xi(x) = 1$ og $\xi(e_2) = \dots = \xi(e_n) = 0$, (sml. side 2.1.2). Denne linearform ξ har den ønskede egenskab. $\square$

Uden bevis anføres, at den foregående sætning også gælder for uendelig-dimensionale vektorrum. Desimod gælder de følgende sætninger kun for vektorrum af endelig dimension.

Den følgende sætning viser, at hvis (V, L) er et endelig-dimensionalt vektorrum, så er det duale

vektorrum (V^*, L) "i det væsentlige" det eneste vektorrum, som er i dualitet med (V, L) , i den forstand, at ethvert vektorrum (V', L) , som er i dualitet med (V, L) , på entydig måde kan "identificeres" med (V^*, L) . Specielt noteres, at da (V, L) er i dualitet med (V^*, L) , kan (V, L) identificeres med det til (V^*, L) duale vektorrum (V^{**}, L) .

Lad (V, L) være et endelig-dimensionelt vektorrum. Hvis (V', L) er et vektorrum i dualitet med (V, L) , så findes en og kun een afbildning $\phi: V' \rightarrow V^*$ med

$$(1) \quad (\phi(v'))(v) = \langle v, v' \rangle, \quad v \in V, v' \in V',$$

og denne afbildning ϕ er en isomorfi af V' på V^* .

Afbildningen $\phi: V' \rightarrow V^*$ kaldes den naturlige isomorfi af V' på V^* .

Beweis. Hvis ϕ_1 og ϕ_2 er afbildninger af V' ind i V^* med egenskaben (1), så er $\phi_1(v')$ og $\phi_2(v')$ for hver vektor $v' \in V'$ den samme lineartform på V , og ϕ_1 og ϕ_2 dermed den samme afbildning. Hermed er entydigheden vist. Lad v' være en vektor i V' . Afbildningen $v \mapsto \langle v, v' \rangle$ er da en lineartform på V , altså et element i V^* . Til hver vektor $v' \in V'$ er således knyttet en lineartform $\phi(v')$ på V , bestemt ved $(\phi(v'))(v) = \langle v, v' \rangle$, $v \in V$. Hermed er påvist eksistensen af en afbildning $\phi: V' \rightarrow V^*$ med egenskaben (1). Det skal endelig vises, at denne afbildning er en isomorfi. For $v'_1, v'_2 \in V'$ og $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ har vi for alle vektorer $v \in V$

$$\begin{aligned}
(\phi(\lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2))(v) &= \langle v, \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 \rangle \\
&= \lambda_1 \langle v, v'_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, v'_2 \rangle \\
&= \lambda_1 [(\phi(v'_1))(v)] + \lambda_2 [(\phi(v'_2))(v)] \\
&= (\lambda_1 \phi(v'_1))(v) + (\lambda_2 \phi(v'_2))(v) \\
&= (\lambda_1 \phi(v'_1) + \lambda_2 \phi(v'_2))(v),
\end{aligned}$$

hvor gyldigheden af de to sidste lighedsteqn følger af definitionen af vektorrumskompositionerne i V^* . Dette viser, at

$$\phi(\lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2) = \lambda_1 \phi(v'_1) + \lambda_2 \phi(v'_2),$$

altså at ϕ er lineær. Af $v' \in V' \setminus \{0\}$ følger, at lineærformen $v \mapsto \langle v, v' \rangle$ er forskellig fra nulformen; nulvektoren i V' er altså den eneste vektor, som ved ϕ afbildes i nulvektoren i V^* . Herefter fremgår, at ϕ har kernen $\{0\}$, og følgelig er injektiv. Men da V' og V^* begge er i dualitet med V , har de samme dimension. Afbildningen ϕ er derfor også surjektiv, og dermed en isomorfi. $\square$

Lad (V, L) være et endelig-dimensionalt vektorrum. Hvis (V', L) er et vektorrum i dualitet med (V, L) , så findes en og kun een afbildning $\psi: V^* \rightarrow V'$ med

$$(2) \quad \langle v, \psi(\xi) \rangle = \xi(v), \quad v \in V, \xi \in V^*,$$

og denne afbildning ψ er en isomorfi af V^* på V' .

Afbildningen $\psi: V^* \rightarrow V'$ kaldes den naturlige isomorfi af V^* på V' .

Beris. Lad $\psi: V^* \rightarrow V'$ være en afbildning med egenskaben (2), og lad $\phi: V' \rightarrow V^*$ være den naturlige isomorfi af V' på V^* . For enhver vektor $v \in V$ og enhver linearform $\xi \in V^*$ gælder da

$$\xi(v) = \langle v, \psi(\xi) \rangle = [\phi(\psi(\xi))](v).$$

Heraf fremgår, at $\phi \circ \psi$ er den identiske afbildning af V^* , hvorefter videre sluttes, at ψ er den inverse til ϕ . Hermed er entydigheden vist. Omvendt er ϕ^{-1} en afbildning med de ønskede egenskaber. $\square$

At beviset for den foregående sætning fremgår:

Lad (V, L) være et endelig-dimensionalt vektorrum, og lad (V', L) være et vektorrum i dualitet med (V, L) . Da er de naturlige isomorfier $\phi: V' \rightarrow V^*$ og $\psi: V^* \rightarrow V'$ hinandens inverse.

3.3* Dual afbildning.

Lad (V, L) og (W, L) være vektorrum, og lad $f: V \rightarrow W$ være en lineær afbildning. Hvis $\eta: W \rightarrow L$ er en linearform på W , altså $\eta \in W^*$, så er den sammensatte afbildning $\eta \circ f: V \rightarrow L$ en linearform på V , altså $\eta \circ f \in V^*$. Det ses let, at afbildningen $\eta \mapsto \eta \circ f$ er en lineær afbildning: $W^* \rightarrow V^*$. Den kaldes den til f hørende duale eller transponerede afbildning og betegnes f' . Altså

$$f'(\eta) = \eta \circ f, \quad \eta \in W^*.$$

Til den lineære afbildning $f': W^* \rightarrow V^*$ kan vi danne den transponerede $(f')' = f'': V^{**} \rightarrow W^{**}$.

Der gælder: Hvis V og W er endelig dimensionale, så vil $f'': V^{**} \rightarrow W^{**}$ svare til $f: V \rightarrow W$ via de naturlige isomorfier $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ og $W \xrightarrow{\sim} W^{**}$. Mere præcist: Hvis $\varphi_V: V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ og $\varphi_W: W \xrightarrow{\sim} W^{**}$ er de naturlige isomorfier, så er $\varphi_W^{-1} \circ f'' \circ \varphi_V = f$. Dette er ensbetydende med at $f'' \circ \varphi_V = \varphi_W \circ f$, og det indses på følgende måde: For hver vektor $x \in V$ er $f''(\varphi_V(x))$ og $\varphi_W(f(x))$ linearformer på W^* . Nu er $f''(\varphi_V(x)) = f''(x^{**}) = x^{**} \circ f'$, og værdien på $\eta \in W^*$ er $f''(\varphi_V(x))(\eta) = x^{**}(f'(\eta)) = x^{**}(\eta \circ f) = \eta(f(x))$. På den anden side er $\varphi_W(f(x)) = f(x)^{**}$, og værdien på $\eta \in W^*$ er $f(x)^{**}(\eta) = \eta(f(x))$. Følgelig er $f''(\varphi_V(x))(\eta) = \varphi_W(f(x))(\eta)$ for alle $\eta \in W^*$, altså $f''(\varphi_V(x)) = \varphi_W(f(x))$. Da x var vilkårlig, har vi altså vist, at $f'' \circ \varphi_V = \varphi_W \circ f$ $\square$

Tilsvarende for en lineær afbildning $f: V \rightarrow W$ betegnes $\text{Ker } f$, gælder følgende sætning

Lad (V, L) og (W, L) være endelig dimensionale vektorrum, og lad $f: V \rightarrow W$ være en lineær afbildning. Da er

$$(i) \quad \underline{\text{Ker}(f') = f(V)^\circ}$$

$$(ii) \quad \underline{f'(W^*) = (\text{Ker } f)^\circ}$$

$$(iii) \quad \underline{\text{rg}(f') = \text{rg}(f)}.$$

Beweis (i): $\eta \in \text{Ker}(f') \Leftrightarrow f'(\eta) = 0 \Leftrightarrow \eta \circ f = 0$
 $\Leftrightarrow \eta$ forsvinder på $f(V) \Leftrightarrow \eta \in f(V)^\circ$.

(ii): Da rummene er endelig dimensionale er relationen (ii) $\Leftrightarrow f'(W^*)^\circ = \text{Ker } f$, og dette er netop (i) anvendt på den lineære afbildning $f': W^* \rightarrow V^*$, hvis transponerede kan identificeres med f .

(iii) Ifølge dualitetsprincippet og dimensionsformlen for en lineær afbildning gælder $\text{rg}(f') = \dim f'(W^*) = \dim(\text{Ker } f)^\circ = \dim V - \dim \text{Ker}(f) = \dim f(V) = \text{rg}(f) \quad \square$

3.3. Duale afbildninger.

Lad U, U', V og V' være endelig-dimensionale vektorrum over samme legeme L , og antag, at såvel U og U' som V og V' er i dualitet.

For enhver linear afbildning $f: U \rightarrow V$ findes en og kun een afbildning $f': V' \rightarrow U'$ med

$$(1) \quad \langle f(u), v' \rangle = \langle u, f'(v') \rangle, \quad u \in U, v' \in V',$$

og denne afbildning f' er linear.

Afbildningen $f': V' \rightarrow U'$ kaldes den til afbildningen $f: U \rightarrow V$ duale afbildning m.h.t. de duale par U, U' og V, V' .

Bevis. Hvis f_1' og f_2' er afbildninger af V' ind i U' med egenskaben (1), så vil der for enhver vektor $v' \in V'$ gælde $\langle u, f_1'(v') \rangle = \langle u, f_2'(v') \rangle$, altså $\langle u, f_1'(v') - f_2'(v') \rangle = 0$, for alle vektorer $u \in U$. Heraf følger, at $f_1'(v') - f_2'(v') = 0$ for alle $v' \in V'$, altså at $f_1' = f_2'$. Hermed er entydigheden vist. Lad v' være en vektor i V' . Det indses let, at afbildningen $u \mapsto \langle f(u), v' \rangle$ er en lineartform på U , altså et element i U^* . Til $v' \in V'$ er således knyttet en lineartform $\xi_{v'} \in U^*$ med $\langle f(u), v' \rangle = \xi_{v'}(u)$ for alle $u \in U$. Sættes $f'(v') = \psi(\xi_{v'})$, hvor ψ er den naturlige isomrfi af U^* på U' , får vi for alle $u \in U$

$$\begin{aligned} \langle f(u), v' \rangle &= \xi_{v'}(u) \\ &= \langle u, \psi(\xi_{v'}) \rangle \\ &= \langle u, f'(v') \rangle, \end{aligned}$$

hvormed eksistensen af f' er vist. Det skal herefter vises, at f' er lineær. Lad $v_1', v_2' \in V'$ og $\lambda_1, \lambda_2 \in L$. For alle vektorer $u \in U$ har vi da

$$\begin{aligned} \langle u, f'(\lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2') \rangle &= \langle f(u), \lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' \rangle \\ &= \lambda_1 \langle f(u), v_1' \rangle + \lambda_2 \langle f(u), v_2' \rangle \\ &= \lambda_1 \langle u, f'(v_1') \rangle + \lambda_2 \langle u, f'(v_2') \rangle \\ &= \langle u, \lambda_1 f'(v_1') + \lambda_2 f'(v_2') \rangle. \end{aligned}$$

Heraf følger, at $f'(\lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2') - (\lambda_1 f'(v_1') + \lambda_2 f'(v_2')) = \underline{0}$, altså at $f'(\lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2') = \lambda_1 f'(v_1') + \lambda_2 f'(v_2')$. $\square$

Er g en lineær afbildning af V' ind i U' , kan på tilsvarende måde tales om den duale afbildning g' af U ind i V . Den er bestemt ved

$$(2) \quad \langle u, g(v') \rangle = \langle g'(u), v' \rangle, \quad v' \in V', u \in U.$$

Lad f være en lineær afbildning af U ind i V , og lad f'' betegne den duale afbildning til f 's duale afbildning f' . Afbildningen f'' er da ifølge (2) bestemt ved

$$\langle u, f'(v') \rangle = \langle f''(u), v' \rangle, \quad v' \in V', u \in U.$$

Sammenlignes dette med (1), ses at

$$f'' = f.$$

Det har herefter god mening at tale om f og f' som et par af duale afbildninger.

I den følgende sætning opsummeres egenskaber ved den duale til en lineær afbildning. Som ovenfor forudsættes, at U, U', V og V' er endelig-dimensionale vektorrum over samme legeme, og at både U, U' og V, V' er duale par.

Lad $f: U \rightarrow V$ være en lineær afbildning, og lad $f': V' \rightarrow U'$ være den duale afbildning. Da gælder:

$$(3) \quad K_{f'} = f(U)^\circ.$$

$$(4) \quad K_f = f'(V')^\circ.$$

(5) f' er injektiv hhv. surjektiv, hvis og kun hvis f er surjektiv hhv. injektiv.

(6) f' har samme rang som f .

For $U=V$ og $U'=V'$ har vi for ethvert underrum U_1 af U :

$$(7) \quad f(U_1) \subseteq U_1 \text{ implicerer } f'(U_1^\circ) \subseteq U_1^\circ.$$

Beweis. Ifølge (1) er $\underline{v}' \in f(U)^\circ$ ensbetydende med $f'(\underline{v}') \in U^\circ$, altså med $f'(\underline{v}') = \underline{0}$. Heraf fremgår (3). Idet $f'' = f$, fås (4) ved anvendelse af (3) på f' . Påstanden (5) følger umiddelbart af (3) og (4). For at vise (6) noteres, at $\dim K_f + \dim K_{f'}^\circ = \dim U$. Sammenholdes dette med den velkendte formel $\dim K_f + \dim f(U) = \dim U$, fås $\dim K_{f'}^\circ = \dim f(U)$. Ifølge (4) har vi umiddelbart $K_{f'}^\circ = f'(V')^{\circ\circ} = f'(V')$, og dermed $\dim f'(V') = \dim f(U)$. Antag endelig, at $f(U_1) \subseteq U_1$, og lad $\underline{u}' \in U_1^\circ$. For alle $\underline{u} \in U_1$ har vi da $\langle f(\underline{u}), \underline{u}' \rangle = 0$, altså $\langle \underline{u}, f'(\underline{u}') \rangle = 0$, hvormed $f'(\underline{u}') \in U_1^\circ$. $\square$

Vi skal til sidst i kort form opsammere "regler" for dannelse af duale afbildninger. Det overlades til læseren at præcisere påstandene og at udføre beviserne.

$$(f+g)' = f' + g' \quad f, g \in \mathcal{L}(U, V)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f' \quad f \in \mathcal{L}(U, V), \lambda \in \mathbb{L}$$

$$(h \circ f)' = f' \circ h' \quad f \in \mathcal{L}(U, V), h \in \mathcal{L}(V, W)$$

$$(f^n)' = (f')^n \quad f \in \mathcal{L}(U, U), n \in \mathbb{N}$$

$$(\text{Id}_U)' = \text{Id}_{U'}$$

$$(f^{-1})' = (f')^{-1} \quad f \in \mathcal{L}(U, V)$$

Den duale til nulafbildningen $\theta: U \rightarrow V$ er nulafbildningen $\theta: V' \rightarrow U'$.

1. Vis, at vektorrummet $(V, \mathbb{R})$ af geometriske vektorer i rummet er i dualitet med sig selv ved afbildningen $(\underline{u}, \underline{v}) \mapsto \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u} \cdot \underline{v}$, hvor $\underline{u} \cdot \underline{v}$ betegner det skalære produkt af $\underline{u}$ og $\underline{v}$. Undersøg hvilke baser, der er duale til sig selv. Bestrøv M^0 og M^{00} , idet M er en vilkårlig ikke-tom delmængde af V . Gør rede for, at der for enhver lineærform ξ på V findes en og kun een vektor $\underline{u} \in V$, således at der for enhver vektor $\underline{v} \in V$ gælder $\xi(\underline{v}) = \underline{v} \cdot \underline{u}$. Lad $\underline{a}$ være en vilkårlig vektor i V , og lad f være den ved $\underline{u} \mapsto \underline{a} \times \underline{u}$ definerede lineære afbildning af V ind i V . Bestem den til f duale afbildning f' (m.h.t. de duale par V, V og V, V).

2. Lad (U, L) og (V, L) være endelig-dimensionale vektorrum, og lad $B: U \times V \rightarrow L$ være en bilinearform. Sæt

$$U_1 = \{ \underline{u} \in U \mid \forall \underline{v} \in V : B(\underline{u}, \underline{v}) = 0 \},$$

$$V_1 = \{ \underline{v} \in V \mid \forall \underline{u} \in U : B(\underline{u}, \underline{v}) = 0 \}.$$

Overvej, at U_1 og V_1 er underrum af hhv. U og V . Vis, at der ved $(\underline{u} + U_1, \underline{v} + V_1) \mapsto \tilde{B}(\underline{u} + U_1, \underline{v} + V_1) = B(\underline{u}, \underline{v})$ defineres en afbildning $\tilde{B}: U/U_1 \times V/V_1 \rightarrow L$, og at denne afbildning er en ikke-udartet bilinearform. Vis, at $\dim U - \dim U_1 = \dim V - \dim V_1$.

3. Lad (V, L) og (V', L) være endelig-dimensionale vektorrum i dualitet. Lad videre V_1 og V'_1 være underrum af V hhv. V' , således at V_1 og V'_1 er i dualitet ved restriktionen af den givne bilinear-form til $V_1 \times V'_1$. Vis, at $V_1 \oplus V'_1{}^\circ = V$.
4. Lad (U, L) , (U', L) og (V, L) , (V', L) være par af endelig-dimensionale vektorrum i dualitet. Angiv en naturlig isomrfi af $(\mathcal{L}(U, V), L)$ på $(\mathcal{L}(V', U'), L)$.
5. Lad (V, L) og (V', L) være endelig-dimensionale vektorrum i dualitet, og lad $f: V \rightarrow V$ være en linear afbildning. Vis, at hvis f er idempotent, d.v.s. $f^2 = f$, så er også den duale afbildning $f': V' \rightarrow V'$ idempotent. Vis, at i så fald er såvel $f(V)$ og $f'(V')$ som K_f og $K_{f'}$ i dualitet ved restriktionen af den givne bilinearform.

Kap. 4. Matricer.

4.1. Matricer.	4.1.1 - 4.1.10
4.2. Lineære afbildningers matrixligninger.	4.2.1 - 4.2.7
4.3. Koordinattransformation.	4.3.1 - 4.3.4
4.4. Matrixrang.	4.4.1 - 4.4.4
4.5. Lineære ligningssystemer.	4.5.1 - 4.5.7
Øvelser	4. øv 1 - 30

4.1. Matricer.

Lad m og n være naturlige tal. Ved en $(m \times n)$ -matrix med elementer fra L forstås et rektangulært skema af formen

$$(1) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

hvor $a_{ij} \in L$ for $i=1, \dots, m$ og $j=1, \dots, n$. Som betegnelse for matricen (1) benyttes også $(a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$, $(a_{ij})_{m,n}$ eller blot (a_{ij}) . Endvidere benyttes betegnelsen $\underline{A}_{m,n}$, eller blot $\underline{A}$.

Ved en rækkematrix hhv. søjlematrix forstås en $(1 \times n)$ -matrix hhv. en $(m \times 1)$ -matrix.

Lad $\underline{A} = (a_{ij})$ være en $(m \times n)$ -matrix. For $i=1, \dots, m$ kaldes rækkematricen

$$\underline{a}_{i-} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$$

for $\underline{A}$'s i 'te række, og for $j=1, \dots, n$ kaldes søjlematricen

$$\underline{a}_{-j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

for $\underline{A}$'s j 'te søjle. Matricen $\underline{A}$ har således m rækker og n søjler. Elementet a_{ij} tilhører den i 'te række og den j 'te søjle.

Er $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et talsæt tilhørende L^n , sættes

$$\underline{a}_- = (a_j)_{1,n} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

og

$$\underline{a}_1 = (a_i)_{n,1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Er $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ koordinatsættet for en vektor i et n -dimensionalt vektorrum m.h.t. en valgt basis, så kaldes $\underline{a}_-$ hhv. $\underline{a}_1$ for vektorens koordinatrække hhv. koordinatsøje.

Ved en delmatrix af $\underline{A}$ forstås en matrix, som fremgår af $\underline{A}$ ved at visse rækker og/eller søjler slettes.

En $(m \times n)$ -matrix siges at være kvadratisk, dersom $m = n$. Elementerne a_{ii} , $i = 1, \dots, n$, i en $(n \times n)$ -matrix $(a_{ij})_{n,n}$ kaldes matrixens diagonalelementer. En $(n \times n)$ -matrix $(a_{ij})_{n,n}$ siges at være en nedre trekantsmatrix, dersom $a_{ij} = 0$ for $i < j$, og en øvre trekantsmatrix, dersom $a_{ij} = 0$ for $i > j$. En $(n \times n)$ -matrix $(a_{ij})_{n,n}$ siges at være en diagonalmatrix, dersom $a_{ij} = 0$ for $i \neq j$; for en sådan benyttes også betegnelsen $(a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn})_{\text{diag}}$.

Ved $(m \times n)$ -nulmatricen $\underline{O} = \underline{O}_{m,n}$ forstås $(m \times n)$ -matricen, hvis elementer alle er 0.

Ved $(n \times n)$ -enhedsmatricen $\underline{E} = \underline{E}_{n,n}$ forstås $(n \times n)$ -diagonalmatricen, hvis diagonalelementer alle er 1. Vi har altså $\underline{E}_{n,n} = (\delta_{ij})_{n,n}$.

For $0 \leq r \leq m, n$ betegnes med $\underline{E}_{m,n}^{(r)}$ den $(m \times n)$ -matrix $(a_{ij})_{m,n}$ for hvilken $a_{ii} = 1$ for $i \leq r$, mens alle øvrige elementer a_{ij} er 0.

Lad der være givet matrixer $\underline{A}^{(\alpha,\beta)}$, $\alpha = 1, \dots, r$, $\beta = 1, \dots, s$, således at matrixerne med samme index α har samme rækkeantal m_α , og matrixerne med samme index β har samme søjleantal n_β . Matrixerne $\underline{A}^{(\alpha,\beta)}$ kan da på oplagt måde "sammenstykkes" til en ny matrix $\underline{A}$ med rækkeantal $m = m_1 + \dots + m_r$ og søjleantal $n = n_1 + \dots + n_s$. Vi siger, at $\underline{A}$ er en blokmatrix med blokkene $\underline{A}^{(\alpha,\beta)}$, og skriver

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{A}^{(1,1)} & \dots & \underline{A}^{(1,s)} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{A}^{(r,1)} & \dots & \underline{A}^{(r,s)} \end{pmatrix}$$

Omvendt er det klart, hvad der menes med, at en given matrix $\underline{A} = (a_{ij})_{m,n}$ er "opdelt" i blokke. Eksempelvis er der ved

$$\underline{A} = (\underline{a}_{|1} \quad \underline{a}_{|2} \quad \dots \quad \underline{a}_{|n})$$

angivet en opdeling af $\underline{A}$ i blokke, nemlig søjlerne. Matricen $\underline{E}_{m,n}^{(r)}$ kan på naturlig måde opdeles i blokke,

$$\underline{E}_{m,n}^{(r)} = \begin{pmatrix} \underline{E}_{r,r} & \underline{0}_{r,n-r} \\ \underline{0}_{m-r,r} & \underline{0}_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

hvor dog nogle af blokkene falder bort for $r=0$, $r=m$, eller $r=n$.

Mængden af $(m \times n)$ -matricer med elementer fra L betegnes $M_{m,n}(L)$. Er $\underline{A} = (a_{ij})_{m,n}$ og $\underline{B} = (b_{ij})_{m,n}$ to matricer fra $M_{m,n}(L)$, defineres summen $\underline{A} + \underline{B}$ af $\underline{A}$ og $\underline{B}$ ved

$$\underline{A} + \underline{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}.$$

For $\lambda \in L$ defineres produktet $\lambda \underline{A}$ af λ og $\underline{A}$ ved

$$\lambda \underline{A} = (\lambda a_{ij})_{m,n}.$$

Det verificeres let, at $M_{m,n}(L)$ ved disse kompositioner er organiseret som et vektorrum $(M_{m,n}(L), L)$ over L . Nulvektoren i dette vektorrum er nulmatricen $\underline{0}_{m,n}$; den modsatte $-\underline{A}$ til en matrix $\underline{A} = (a_{ij})_{m,n}$ er matricen $(-a_{ij})_{m,n}$. Vektorrummets dimension er mn , idet sættet bestående af de ialt mn matricer, som har et element lig med 1 og alle øvrige elementer lig med 0, udgør en basis.

Er $\underline{A} = (a_{ij})_{m,n}$ og $\underline{B} = (b_{jk})_{n,p}$ to matricer for hvilke den førstes søjleantal er lig med den andens rækkeantal, defineres produktmatricen $\underline{A} \underline{B}$ som $(m \times p)$ -matricen

$$\underline{A} \underline{B} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right)_{i=1, \dots, m; k=1, \dots, p}$$

For andre par af matricer defineres ikke nogen produktmatrix.

Matrixmultiplikationen er ikke kommutativ. Kun når $\underline{A}$ og $\underline{B}$ er kvadratiske matricer med samme rækkeantal vil der kunne gælde $\underline{A} \underline{B} = \underline{B} \underline{A}$, - men i almindelighed gælder $\underline{A} \underline{B} \neq \underline{B} \underline{A}$.

Matrixmultiplikationen er associativ i den forstand, at når $\underline{A} = (a_{ij})_{m,n}$ er en $(m \times n)$ -matrix, $\underline{B} = (b_{jk})_{n,p}$ en $(n \times p)$ -matrix og $\underline{C} = (c_{kl})_{p,q}$ en $(p \times q)$ -matrix, så kan $(\underline{AB})\underline{C}$ og $\underline{A}(\underline{BC})$ dannes, og der gælder $(\underline{AB})\underline{C} = \underline{A}(\underline{BC})$. Idet elementet i i 'te række og l 'te søjle af $(\underline{AB})\underline{C}$ er $\sum_{k=1}^p (\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}) c_{kl}$ og elementet i i 'te række og l 'te søjle af $\underline{A}(\underline{BC})$ er $\sum_{j=1}^n a_{ij} (\sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl})$, følger påstanden af følgende udregning:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p (\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}) c_{kl} &= \sum_{k=1}^p (a_{i1} b_{1k} + \dots + a_{in} b_{nk}) c_{kl} \\ &= \sum_{k=1}^p (a_{i1} b_{1k} c_{kl} + \dots + a_{in} b_{nk} c_{kl}) \\ &= (a_{i1} b_{11} c_{1l} + \dots + a_{in} b_{n1} c_{1l}) + \dots \\ &\quad \dots + (a_{i1} b_{1p} c_{pl} + \dots + a_{in} b_{np} c_{pl}) \\ &= a_{i1} (b_{11} c_{1l} + \dots + b_{1p} c_{pl}) + \dots \\ &\quad \dots + a_{in} (b_{n1} c_{1l} + \dots + b_{np} c_{pl}) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} (\sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl}). \end{aligned}$$

Produkter af flere end to matricer kan altså skrives uden parenteser.

Det ses let, at når $\underline{AB}$ kan dannes, så gælder $(\lambda \underline{A})\underline{B} = \underline{A}(\lambda \underline{B}) = \lambda(\underline{AB})$ for $\lambda \in L$.

Matrixmultiplikationen er distributiv m. h. t. additionen i den forstand, at når $\underline{A} = (a_{ij})_{m,n}$ er en $(m \times n)$ -matrix, og $\underline{B} = (b_{jk})_{n,p}$ og $\underline{C} = (c_{jk})_{n,p}$ er $(n \times p)$ -matricer, så kan $\underline{A}(\underline{B} + \underline{C})$ og $\underline{AB} + \underline{AC}$ dannes, og der gælder $\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{AB} + \underline{AC}$. Dette følger af, at $\sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk}$. Tilsvarende ses, at der gælder $(\underline{B} + \underline{C})\underline{D} = \underline{BD} + \underline{CD}$, når $\underline{D}$ er en $(p \times q)$ -matrix.

Af det foregående fremgår, at matrixaddition og matrixmultiplikation er kompositioner i $M_{n,n}(L)$, og at $M_{n,n}(L)$ herved er organiseret som en ring; for $n > 1$ er ringen ikke-kommutativ. Det ses let, at $\underline{E}_{n,n}$ er et element i ringen. Ringen kaldes matrix-ringen af grad n over L .

En $(n \times n)$ -matrix $\underline{A}$ siges at være regulær, dersom den har en invers matrix $\underline{A}^{-1}$ m.h.t. multiplikationen i $M_{n,n}(L)$, altså dersom der findes en $(n \times n)$ -matrix $\underline{A}^{-1}$ med $\underline{A}\underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{E}$; den inverse er da entydigt bestemt. Af et almindeligt resultat fremgår, at mængden af regulære $(n \times n)$ -matricer med elementer fra L udgør en gruppe med matrixmultiplikation som komposition. Gruppen kaldes den generelle lineære gruppe af grad n over L , og betegnes $GL(n, L)$.

Ved den transponerede af en $(m \times n)$ -matrix $\underline{A} = (a_{ij})_{m,n}$ forstås den $(n \times m)$ -matrix $\underline{A}'$, hvis element i k 'te række og l 'te søjle er a_{kl} . Sættes $\underline{A}' = (a'_{kl})_{n,m}$, har vi altså $a'_{kl} = a_{kl}$. ("Rækkerne hhv. søjlerne i $\underline{A}'$ er søjlerne hhv. rækkerne i $\underline{A}$ ".) Den transponerede af en række- hhv. søjlematrix er en søjle- hhv. rækkematrix. Det verificeres let, at der gælder

$$(\underline{A}')' = \underline{A}, \quad (\lambda \underline{A})' = \lambda \underline{A}', \quad (\underline{A} + \underline{B})' = \underline{A}' + \underline{B}', \quad (\underline{AB})' = \underline{B}'\underline{A}'.$$

For en regulær kvadratisk matrix $\underline{A}$ har vi $\underline{A}\underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{E}$. Anvendes det sidste af de ovenstående resultater herpå, fås $(\underline{A}^{-1})'\underline{A}' = \underline{A}'(\underline{A}^{-1})' = \underline{E}'$. Idet $\underline{E}' = \underline{E}$, har vi dermed: Er $\underline{A}$ en regulær kvadratisk matrix, så er også den transponerede matrix $\underline{A}'$ regulær, og $(\underline{A}')^{-1} = (\underline{A}^{-1})'$.

En kvadratisk matrix $\underline{A}$ siges at være symmetrisk hwr. antisymmetrisk (eller skøvsymmetrisk), dersom $\underline{A}' = \underline{A}$ hwr. $\underline{A}' = -\underline{A}$. Bemerk, at diagonalelementerne i en antisymmetrisk matrix alle er 0.

En regulær kvadratisk matrix $\underline{A}$ med elementer fra $\mathbb{R}$ siges at være ortogonal, dersom $\underline{A}' = \underline{A}^{-1}$. Det er klart, at alle enhedsmatricer er ortogonale. Er $\underline{A}$ ortogonal, så har vi $(\underline{A}^{-1})' = (\underline{A}')^{-1} = (\underline{A})^{-1}$, hvilket viser, at også $\underline{A}^{-1}$ er ortogonal. Og er $\underline{A}$ og $\underline{B}$ ortogonale $(n \times n)$ -matricer, så har vi $(\underline{AB})' = \underline{B}'\underline{A}' = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1} = (\underline{AB})^{-1}$, hvilket viser, at også $\underline{AB}$ er ortogonal. Ialt er hermed godtgjort, at mængden af ortogonale $(n \times n)$ -matricer er en undergruppe i $GL(n, \mathbb{R})$. Gruppen kaldes den ortogonale gruppe af grad n (over $\mathbb{R}$), og betegnes $O(n, \mathbb{R})$.

Ved den (komplekse) konjugerede af en $(m \times n)$ -matrix $\underline{A} = (a_{ij})_{m,n}$ forstås matricen $\bar{\underline{A}} = (\bar{a}_{ij})_{m,n}$, altså matricen, som fremgår af $\underline{A}$ ved konjugering af alle elementerne. For en matrix $\underline{A}$ med reelle elementer gælder $\underline{A} = \bar{\underline{A}}$. Det verificeres let, at der gælder

$$(\bar{\bar{\underline{A}}}) = \underline{A}, \quad (\lambda \underline{A}) = \bar{\lambda} \bar{\underline{A}}, \quad (\underline{A} + \underline{B}) = \bar{\underline{A}} + \bar{\underline{B}}, \quad (\underline{AB}) = \bar{\underline{A}} \bar{\underline{B}},$$

samt følgende: Er $\underline{A}$ en regulær kvadratisk matrix, så er også $\bar{\underline{A}}$ regulær, og $(\bar{\underline{A}})^{-1} = \bar{\underline{A}^{-1}}$.

Ved den adjungerede af en $(m \times n)$ -matrix $\underline{A}$ forstås matricen $\underline{A}^* = \underline{A}' (= \bar{\underline{A}}')$. For en matrix $\underline{A}$ med reelle elementer gælder $\underline{A}^* = \underline{A}'$. Det verificeres let, at der gælder

$$(\underline{A}^*)^* = \underline{A}, \quad (\lambda \underline{A})^* = \bar{\lambda} \underline{A}^*, \quad (\underline{A} + \underline{B})^* = \underline{A}^* + \underline{B}^*, \quad (\underline{AB})^* = \underline{B}^* \underline{A}^*,$$

samt følgende: Er $\underline{A}$ en regulær kvadratisk matrix, så

er også $\underline{A}^*$ regulær, og $(\underline{A}^*)^{-1} = (\underline{A}^{-1})^*$.

En kvadratisk matrix $\underline{A}$ siges at være Hermite'sk (eller Hermite'sk symmetrisk), dersom $\underline{A}^* = \underline{A}$, og anti-Hermite'sk, dersom $\underline{A}^* = -\underline{A}$. Bemærk, at diagonalelementerne i en Hermite'sk matrix alle er reelle, og at diagonalelementerne i en anti-Hermite'sk matrix alle er rent imaginære.

En regulær kvadratisk matrix $\underline{A}$ med elementer fra $\mathbb{C}$ siges at være unitær, dersom $\underline{A}^* = \underline{A}^{-1}$. Det vises let, at mængden af unitære $(n \times n)$ -matricer er en undergruppe i $GL(n, \mathbb{C})$. Gruppen kaldes den unitære gruppe af grad n (over $\mathbb{C}$), og betegnes $U(n, \mathbb{C})$.

Ved søjlerangen $rg \underline{A}$ af en $(m \times n)$ -matrix $\underline{A}$ med elementer fra L forstås rangen af sættet af søjler, idet søjlerne opfattes som vektorer i vektorrummet $(M_{m,1}(L), L)$. Tilsvarende defineres rækerangen af $\underline{A}$ som rangen af sættet af rækker, idet rækkerne opfattes som vektorer i vektorrummet $(M_{1,n}(L), L)$. Det vil senere blive vist, at søjlerangen og rækerangen faktisk stemmer overens, hvorefter vi simpelthen kan tale om rangen $rg \underline{A}$ af $\underline{A}$; indtil da må vi forbeholde betegnelsen $rg \underline{A}$ for søjlerangen.

Ved determinanten af en $(n \times n)$ -matrix $\underline{A} = (a_{ij})_{n,n}$ forstås tallet

$$\det \underline{A} = \sum_{p \in S_n} \text{sign } p \cdot a_{p(1)1} \cdots a_{p(n)n}.$$

For determinanten af $A = (a_{ij})_{n \times n}$ bruges også betegnelsen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Det fremgår af definitionen, at $\det A$ er en sum af $n!$ led. Når bortses fra fortegnet, er de $n!$ led netop samtlige produkter af n elementer fra matricen bestående af et element fra hver søjle, således at også hver række er repræsenteret en gang.

Man kan naturligt opfatte "determinant" som en afbildning af $M_{n \times n}(L)$ ind i L , nemlig afbildningen $A \mapsto \det A$. Determinanten af A bliver her ved billedet af A ved afbildningen "determinant". Alligevel vil vi tillade os at kalde determinanten af en matrix for "en determinant".

Man har ofte anledning til at betragte funktionsmatricer, d.v.s. matricer, hvis elementer er reelle eller komplekse funktioner definerede på en mængde M . Det overlades til læseren at overveje i hvilken udstrækning det foregående finder anvendelse på sådanne matricer. Dog noteres, at man på oplagt måde kan definere determinanten af en funktionsmatrix; determinanten bliver igen en reel eller kompleks funktion med samme definitions-mængde M som funktionerne i matricen.

Man har også anledning til at betragte vektormatricer, d.v.s. matricer, hvis elementer er vektorer fra et vektorrum (V, L) . Også her overlades til læseren at overveje i hvilken udstrækning det foregående finder anvendelse. Dog bemærkes, at der ikke kan tales om produktet af to vektormatricer. Derimod kan produktet af en vektormatrix og en talmatrix defineres på oplagt måde (når de nødvendige betingelser vedrørende række- og søjleantal er opfyldt); produktet bliver igen en vektormatrix.

4.2. Lineære afbildningers matrixligninger.

Lad (U, L) være et vektorrum med $\dim U = n \in \mathbb{N}$, lad (V, L) være et vektorrum med $\dim V = m \in \mathbb{N}$, og lad f være en lineær afbildning af U ind i V . Lad endvidere $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ være baser for hhv. U og V . Billederne $f(\underline{e}_j)$ af vektorerne $\underline{e}_j$ i basen for U kan da på en og kun een måde skrives som linearkombinationer af vektorerne i basen for V ,

$$f(\underline{e}_1) = a_{11}\underline{f}_1 + a_{21}\underline{f}_2 + \dots + a_{m1}\underline{f}_m$$

$$f(\underline{e}_2) = a_{12}\underline{f}_1 + a_{22}\underline{f}_2 + \dots + a_{m2}\underline{f}_m$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f(\underline{e}_n) = a_{1n}\underline{f}_1 + a_{2n}\underline{f}_2 + \dots + a_{mn}\underline{f}_m,$$

eller kort

$$f(\underline{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\underline{f}_i, \quad j=1, \dots, n.$$

Sættes $\underline{A} = (a_{ij})_{m,n}$, kan disse ligninger sammenfattes til matrixligningen

$$(1) \quad (f(\underline{e}_1) \dots f(\underline{e}_n)) = (\underline{f}_1 \dots \underline{f}_m) \underline{A}.$$

Det bemærkes, at den j 'te søjle i $\underline{A}$ er koordinatsøjlen for vektoren $f(\underline{e}_j)$ m.h.t. basen $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$. Lad nu $\underline{u}$ være en vektor i U med billedvektor $\underline{v} = f(\underline{u})$ i V , og lad koordinatsøjlerne for $\underline{u}$ og $\underline{v}$ (m.h.t. de betragtede baser) være hhv. $\underline{u}_1$ og $\underline{v}_1$. Vi har da

$$\underline{u} = (\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n) \underline{u}_1$$

og

$$(2) \quad \underline{v} = (\underline{f}_1 \cdots \underline{f}_m) \underline{v}_1,$$

hvor venstresiderne skal opfattes som (1×1) -matricer. Endvidere gælder på grund af lineariteten

$$\begin{aligned} \underline{v} &= f(\underline{u}) \\ &= (f(\underline{e}_1) \cdots f(\underline{e}_n)) \underline{u}_1. \end{aligned}$$

Sammenholdes dette sidste med (1) og (2) fås

$$(\underline{f}_1 \cdots \underline{f}_m) \underline{v}_1 = (\underline{f}_1 \cdots \underline{f}_m) \underline{A} \underline{u}_1.$$

Idet $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ er et lineært uafhængigt sæt, kan man heraf slutte, at

$$(3) \quad \underline{v}_1 = \underline{A} \underline{u}_1.$$

Til afbildningen f hører altså (mindst) en matrix $\underline{A}$ (m.h.t. de betragtede baser), således at koordinatsøjlen $\underline{v}_1$ for billedet af vektoren med koordinatsøjlen $\underline{u}_1$ kan udregnes ved ligningen (3). Det påstås, at den ovenfor bestemte matrix $\underline{A}$ er den eneste matrix med denne egenskab. Lad nemlig $\underline{B}$ være en vilkårlig $(m \times n)$ -matrix hørende til f (i den omtalte betydning). Produktet $\underline{B} \underline{e}_{|j}$ af $\underline{B}$ og den j 'te søjle $\underline{e}_{|j}$ i $\underline{E}_{n,n}$ giver ved udregning den j 'te søjle i $\underline{B}$. Nu er umiddelbart $\underline{e}_{|j}$ koordinatsøjlen for $\underline{e}_j$, og følgelig er den j 'te søjle i $\underline{B}$ koordinatsøjlen for $f(\underline{e}_j)$. Da også den j 'te søjle i $\underline{A}$ er koordinatsøjlen for $f(\underline{e}_j)$, stemmer $\underline{B}$ overens med $\underline{A}$ søjle for søjle, og vi har altså som påstået $\underline{B} = \underline{A}$. — Ligningen (3) kaldes matrixligningen for afbildningen f m.h.t. de betragtede baser.

Det er let at se, at hvis der til lineære afbildninger f og g af U ind i V hører hhv. $\underline{A}$ og $\underline{B}$ (m.h.t. valgte baser), så vil der til $f+g$ høre $\underline{A} + \underline{B}$, og til λf høre $\lambda \underline{A}$ for $\lambda \in L$. Det er klart, at hvis f og g er forskellige, så er $\underline{A}$ og $\underline{B}$ forskellige. Endelig bemærkes, at er $\underline{C}$ en vilkårlig $(m \times n)$ -matrix med elementer fra L , så findes en lineær afbildning af U ind i V , hvortil der (m.h.t. de valgte baser) hører matricen $\underline{C}$, nemlig afbildningen, som fører en vektor i U med koordinatsøjlen $\underline{u}_1$ over i den vektor i V , som har koordinatsøjlen $\underline{C} \underline{u}_1$.

Alt det foregående kan sammenfattes således:

Lad (U, L) og (V, L) være vektorrum med $\dim U = n \in \mathbb{N}$ og $\dim V = m \in \mathbb{N}$, og lad $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ være baser for hhv. U og V . Til hver lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ findes da en og kun een $(m \times n)$ -matrix $\underline{A}$, således at der mellem koordinatsøjlen $\underline{u}_1$ for en vektor $\underline{u} \in U$ og koordinatsøjlen $\underline{v}_1$ for billedvektoren $\underline{v} = f(\underline{u}) \in V$ består relationen

$$\underline{v}_1 = \underline{A} \underline{u}_1.$$

Matricen $\underline{A}$ er bestemt ved

$$(f(\underline{e}_1) \dots f(\underline{e}_n)) = (\underline{f}_1 \dots \underline{f}_m) \underline{A}.$$

Den ved $f \mapsto \underline{A}$ definerede afbildning er en isomorfi af $(\mathcal{L}(U, V), L)$ på $(M_{m, n}(L), L)$.

I det følgende betragtes lineære afbildninger mellem vektorrum over samme legeme med endelige dimensioner ≥ 1 .

For (spjle) rangen af den til en lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ hørende matrix $\underline{A}$ m.h.t. baser $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ for hrv. U og V gælder $\text{rg } \underline{A} = \dim f(U)$.

Beris. Da billedrummet $f(U)$ frembringes af vektorerne $f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n)$, er dimensionen af $f(U)$ lig med rangen af sættet $(f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n))$. Rangen af dette sæt er imidlertid den samme som rangen af det tilsvarende sæt af koordinatsøjler, altså spjlerangen af $\underline{A}$. $\square$

Lad $f: U \rightarrow V$ være en lineær afbildning. Der findes der en basis for U og en basis for V , således at der m.h.t. disse baser til f hører matrixen $\underline{E}_{m,n}^{(r)}$, hvor $n = \dim U$, $m = \dim V$ og $r = \dim f(U)$.

Beris. Ifølge dimensionssætningen har kernen K dimension $n-r$. For $r=0$ er f nulafbildningen, og matrixen er for ethvert valg af baser nulmatrixen $\underline{O}_{m,n}$, altså af den ønskede form. For $0 < r < n$ vælges en basis $(\underline{e}_{r+1}, \dots, \underline{e}_n)$ for K , og denne suppleres til en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ for U ; for $r=n$ vælges en vilkårlig basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ for U . Vektorsættet $(f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n))$ har rangen r , og da vi for $r < n$ har $f(\underline{e}_{r+1}) = \dots = f(\underline{e}_n) = \underline{0}$, må sættet $(f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_r))$ være lineært uafhængigt. For $r=m$ er det derfor en basis for V , og for $r < m$ kan det suppleres til en basis $(f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_r), \underline{f}_{r+1}, \dots, \underline{f}_m)$ for V . For disse valg af baser fås matrixen $\underline{E}_{m,n}^{(r)}$. $\square$

Bemærkning. Vi skal senere skærpe den foregående sætning derhen, at en vilkårlig matrix $\underline{A}$ i $M_{m,n}(L)$ med (søjle)rang r hører til f for passende valg af baser, (sml. side 4.3.3). $\square$

Lad $f: U \rightarrow V$ og $g: V \rightarrow W$ være lineære afbildninger, hvortil der hører hhv. $\underline{A}$ og $\underline{B}$ m.h.t. baser $(e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_m)$ og $(g_1, \dots, g_l)$ for hhv. U, V og W . Til den sammensatte afbildning $g \circ f: U \rightarrow W$ hører da matricen $\underline{B}\underline{A}$ m.h.t. baserne $(e_1, \dots, e_n)$ og $(g_1, \dots, g_l)$.

Beris. Af det givne følger, at der (med oplagte betegnelser) gælder $\underline{w}_1 = \underline{B}\underline{v}_1 = \underline{B}\underline{A}\underline{u}_1$, hvoraf påstanden følger. $\square$

En lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ er bijektiv, hvis og kun hvis den tilhørende matrix $\underline{A}$ m.h.t. baser $(e_1, \dots, e_n)$ og $(f_1, \dots, f_m)$ for hhv. U og V er (kvadratisk og) regulær. Er f bijektiv, så hører der til den omvendte afbildning $f^{-1}: V \rightarrow U$ den inverse matrix $\underline{A}^{-1}$ m.h.t. baserne $(f_1, \dots, f_m)$ og $(e_1, \dots, e_n)$.

Beris. Antag, at f er bijektiv. Af tidligere resultater (side 2.2.3) følger da, at $m=n$; den til f hørende matrix er således en $(n \times n)$ -matrix. Den omvendte afbildning $f^{-1}: V \rightarrow U$ er ligeledes lineær, (side 2.1.5); lad $\underline{B}$ være den til f^{-1} hørende $(n \times n)$ -matrix. Da der til såvel den identiske afbildning e_U af U som den identiske afbildning e_V af V hører matricen $\underline{E}_{n,n}$, og da vi har $f^{-1} \circ f = e_U$ og $f \circ f^{-1} = e_V$, sluttes af den foregående sætning, at $\underline{B}\underline{A} = \underline{A}\underline{B} = \underline{E}$. Matricen $\underline{A}$ er altså regulær, og $\underline{B} = \underline{A}^{-1}$. Antag omvendt, at den til f

hørende matrix $\underline{A}$ er kvadratisk og regulær. Vi har da specielt $\dim U = \dim V = n$, og der findes derfor en (og kun en) lineær afbildning $g: V \rightarrow U$, hvis tilhørende matrix m.h.t. de betragtede baser er $\underline{A}^{-1}$. Af den foregående sætning følger nu, at der til afbildningen $g \circ f: U \rightarrow U$ hører matricen $\underline{A}^{-1} \underline{A} = \underline{E}$, og dette viser, at $g \circ f = e_U$. Tilsvarende slutter vi af $\underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{E}$, at $f \circ g = e_V$. Heraf følger, at f er bijektiv (og at $f^{-1} = g$), thi da den sammensatte afbildning $g \circ f = e_U$ specielt er injektiv, må også f være injektiv, og da den sammensatte afbildning $f \circ g = e_V$ specielt er surjektiv, må også f være surjektiv. $\square$

Lad $f: U \rightarrow V$ være en lineær afbildning, og antag, at der til f hører matricen $\underline{A}$ m.h.t. baserne $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ for hhv. U og V . Til den duale afbildning $f': V^* \rightarrow U^*$ hører den transponerede matrix $\underline{A}'$ m.h.t. de duale baser $(\underline{f}_1^*, \dots, \underline{f}_m^*)$ og $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$.

Bevis. Til den duale afbildning hører $n \times m$ matricen $\underline{B} = (b_{ek})$, hvor b_{ek} er den k 'te koordinat for $f'(\underline{f}_k^*)$ m.h.t. basen $(\underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_n^*)$. For enhver linearform ξ på V gælder, at koordinaterne m.h.t. den duale basis er $(\xi(\underline{e}_1), \dots, \xi(\underline{e}_n))$, jfr. side 3.2*.2. Altså er $b_{ek} = [f'(\underline{f}_k^*)](\underline{e}_e) = (\underline{f}_k^* \circ f)(\underline{e}_e) = \underline{f}_k^*(f(\underline{e}_e)) = k$ -te koordinat for $f(\underline{e}_e)$ m.h.t. basen $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m) = a_{ke}$. Følgelig er $\underline{B} = \underline{A}'$. $\square$

I (L^n, L) og (L^m, L) har vi "naturlige" baser. Til hver $n \times m$ matrix $\underline{A}$ hører således

en lineær afbildning $m_{\underline{A}}: L^n \rightarrow L^m$, nemlig den ved $\underline{x}_1 \mapsto \underline{A}\underline{x}_1$ bestemt. Dette tillader at udlede sætninger om matricer v.h.a. tilsvarende sætninger om lineære afbildninger. Vi fremhæver her

Lad $\underline{A}$ og $\underline{B}$ være kvadratiske matricer, som opfylder $\underline{A}\underline{B} = \underline{E}$, da er også $\underline{B}\underline{A} = \underline{E}$ (og følgelig er $\underline{A}$ og $\underline{B}$ regulære og "hinandens inverse")

Bewis. Vi har $m_{\underline{A}} \circ m_{\underline{B}} = m_{\underline{A}\underline{B}} = m_{\underline{E}} = e_{L^n}$, og det følger, at $m_{\underline{B}}: L^n \rightarrow L^n$ er injektiv, og $m_{\underline{A}}: L^m \rightarrow L^n$ er surjektiv. Da en surjektiv lineær afbildning mellem rum af samme (endelige) dimension er en isomorfi, følger påstandene $\square$

hørende matrix $\underline{A}$ er kvadratisk og regulær. Vi har da specielt $\dim U = \dim V = n$, og der findes derfor en og kun en linear afbildning $g: V \rightarrow U$, hvis tilhørende matrix m.h.t. de betragtede baser er $\underline{A}^{-1}$. Af den foregående sætning følger nu, at der til afbildningen $g \circ f: U \rightarrow U$ hører matrixen $\underline{A}^{-1} \underline{A}$, altså $\underline{E}_{n,n}$, og at der til afbildningen $f \circ g: V \rightarrow V$ hører matrixen $\underline{A} \underline{A}^{-1}$, altså $\underline{E}_{n,n}$. Dette viser, at

$$(1) \quad g \circ f = e_U,$$

og at

$$(2) \quad f \circ g = e_V.$$

Da e_U specielt er injektiv, sluttet af (1), at f er injektiv, og da e_V specielt er surjektiv, sluttet af (2), at f er surjektiv. I alt fås således, at f er bijektiv. $\square$

Lad U, U' og V, V' være par af vektorrum i dualitet. Hvis der til en linear afbildning $f: U \rightarrow V$ hører matrixen $\underline{A}$ m.h.t. baser $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ for hhv. U og V , så vil der til den duale afbildning $f': V' \rightarrow U'$ høre den transponerede matrix $\underline{A}'$ m.h.t. de duale baser $(\underline{f}'_1, \dots, \underline{f}'_m)$ og $(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$ for hhv. V' og U' .

Beris. Elementet a_{ij} i den til f hørende matrix $\underline{A} = (a_{ij})_{m,n}$ er den i 'te koordinat for $f(\underline{e}_j)$, altså (små side 3.1.4)

$$a_{ij} = \langle f(\underline{e}_j), \underline{f}'_i \rangle.$$

Tilsvarende er elementet b_{ki} i den til f' hørende matrix $\underline{B} = (b_{ki})_{n,m}$ den k 'te koordinat for $f'(\underline{f}'_i)$, altså

$$b_{kl} = \langle \underline{e}_k, f'(\underline{f}'_l) \rangle.$$

Da f og f' er duale afbildninger, har vi endvidere,
(sml. side 3.3.1)

$$\langle \underline{e}_k, f'(\underline{f}'_l) \rangle = \langle f(\underline{e}_k), \underline{f}'_l \rangle.$$

Sammenholdes dette med det foregående fås $a_{kj} = b_{ji}$,
som påstået. $\square$

4.3. Koordinattransformation.

Vi skal undersøge, hvilken sammenhæng der består mellem koordinatsætterne for en og samme vektor m.h.t. forskellige baser. Herom gælder:

Lad (U, L) være et vektorrum med $\dim U = n \in \mathbb{N}$, og lad $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ være baser for U . Der findes da en og kun een $(n \times n)$ -matrix $\underline{\underline{S}}$, således at der mellem koordinatsøjlerne $\underline{u}_1$ og $\hat{\underline{u}}_1$ for en vektor $\underline{u} \in U$ m.h.t. hhv. basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og basen $(\hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ består relationen

$$(1) \quad \hat{\underline{u}}_1 = \underline{\underline{S}} \underline{u}_1.$$

Matricen $\underline{\underline{S}}$, som er regulær, er bestemt ved

$$(2) \quad (\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n) = (\hat{\underline{e}}_1 \dots \hat{\underline{e}}_n) \underline{\underline{S}}.$$

Bewis. Af sætningen om matrixligninger for lineære afbildninger (side 4.2.3) følger, at der findes en og kun een matrix $\underline{\underline{S}}$, således at (1) er opfyldt, nemlig matricen hørende til den identiske afbildning af U , idet originalvektorer henføres til basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og billedvektorer til basen $(\hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$. Af samme sætning fremgår også, at $\underline{\underline{S}}$ er bestemt ved (2). Endelig, at $\underline{\underline{S}}$ er regulær følger af, at den identiske afbildning er bijektiv (smbl. side 4.2.5). $\square$

Overgangen fra koordinaterne m.h.t. basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ til koordinaterne m.h.t. basen $(\hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ kaldes en koordinattransformation, og matricen $\underline{\underline{S}}$ kaldes den tilhørende koordinattransformationsmatrix.

Det bemærkes, at (2) er ensbetydende med

$$(3) \quad (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n) = (e_1, \dots, e_n) \underline{\underline{S}}^{-1}.$$

Koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$ er kendt, når vektorerne i basen $(e_1, \dots, e_n)$ er givet som linearkombinationer af vektorerne i basen $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$. Er derimod vektorerne i basen $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ givet som linearkombinationer af vektorerne i basen $(e_1, \dots, e_n)$, er $\underline{\underline{S}}^{-1}$ kendt, og $\underline{\underline{S}}$ må bestemmes som dennes inverse.

Lad $\underline{\underline{S}}$ være en vilkårlig regulær $(n \times n)$ -matrix med elementer fra L . For enhver basis $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ for U er da det ved (2) bestemte sæt $(e_1, \dots, e_n)$ en basis for U , og $\underline{\underline{S}}$ er koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra basen $(e_1, \dots, e_n)$ til basen $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$. Den sidste påstand følger af den første. For at indse gyldigheden af den første påstand bemærkes, at det af (3) fremgår, at enhver af vektorerne i basen $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ er en linearkombination af vektorerne i sættet $(e_1, \dots, e_n)$; sættet $(e_1, \dots, e_n)$ frembringer derfor U , og er følgelig en basis for U , (smk. side 1.4.5). På tilsvarende måde indses, at for enhver basis $(e_1, \dots, e_n)$ for U er det ved (3) bestemte sæt $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ en basis for U , og $\underline{\underline{S}}$ er koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra basen $(e_1, \dots, e_n)$ til basen $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$. Enhver regulær $(n \times n)$ -matrix (med elementer fra L) er således en koordinattransformationsmatrix, idet endda en af de to baser kan forestrives vilkårligt.

Ved anvendelse af sætningen ovenfor skal vi dernæst vise:

Lad (U, L) og (V, L) være vektorrum med endelige dimensioner ≥ 1 , lad $(e_1, \dots, e_n)$ og $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ være baser for U , og lad $(f_1, \dots, f_m)$ og $(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m)$ være baser for V . Lad videre $f: U \rightarrow V$ være en lineær afbildning, lad den til f hørende matrix m.h.t. baserne $(e_1, \dots, e_n)$ og $(f_1, \dots, f_m)$ være $\underline{A}$, og lad den til f hørende matrix m.h.t. baserne $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ og $(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m)$ være $\hat{\underline{A}}$. Her gælder da

$$\hat{\underline{A}} = \underline{I} \underline{A} \underline{S}^{-1},$$

hvor $\underline{S}$ og $\underline{I}$ er koordinattransformationsmatrixerne hørende til hhv. overgangen fra $(e_1, \dots, e_n)$ til $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ i U og overgangen fra $(f_1, \dots, f_m)$ til $(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m)$ i V .

Beweis. Påstanden følger af, at det (med oplagte betegnelser) gælder

$$\begin{aligned} \hat{\underline{v}}_1 &= \underline{I} \underline{v}_1 \\ &= \underline{I} \underline{A} \underline{u}_1 \\ &= \underline{I} \underline{A} \underline{S}^{-1} \hat{\underline{u}}_1. \quad \square \end{aligned}$$

Lad f være en lineær afbildning af et n -dimensionalt vektorrum (U, L) ind i et m -dimensionalt vektorrum (V, L) , og lad $\underline{A}$ være en $(m \times n)$ -matrix med elementer fra L . Der findes da en basis for U og en basis for V m.h.t. hvilke den til f hørende matrix er $\underline{A}$, hvis (og kun hvis) $\text{rg } \underline{A} = \dim f(U)$.

Bevis. Det er tidligere vist, at hvis $\underline{A}$ hører til f for passende basisvalg, så gælder $\text{rg } \underline{A} = \dim f(U)$, (sml. side 4.2.4). Antag omvendt, at $\text{rg } \underline{A} = \dim f(U) = r$. Af en tidligere sætning fremgår, at der findes baser $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ for hhv. U og V m.h.t. hvilke den til f hørende matrix er $\underline{E}_{m,n}^{(r)}$, (sml. side 4.2.4). Lad $g: U \rightarrow V$ være den lineære afbildning, hvis tilhørende matrix m.h.t. disse baser er $\underline{A}$. Idet $\dim g(U) = \text{rg } \underline{A} = r$, findes også baser $(\hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ og $(\hat{\underline{f}}_1, \dots, \hat{\underline{f}}_m)$ for hhv. U og V m.h.t. hvilke den til g hørende matrix er $\underline{E}_{m,n}^{(r)}$. Betegnes med $\underline{\Xi}$ og $\underline{I}$ koordinattransformationsmatrixerne hørende til hhv. overgangen fra $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ til $(\hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ og overgangen fra $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ til $(\hat{\underline{f}}_1, \dots, \hat{\underline{f}}_m)$, så har vi ifølge den foregående sætning $\underline{E}_{m,n}^{(r)} = \underline{I} \underline{A} \underline{\Xi}^{-1}$, altså $\underline{A} = \underline{I}^{-1} \underline{E}_{m,n}^{(r)} \underline{\Xi}$. Heraf fremgår, at $\underline{A}$ er den til f hørende matrix m.h.t. de baser, som fås ved at anvende koordinattransformationsmatrixerne $\underline{\Xi}^{-1}$ og $\underline{I}^{-1}$ på hhv. $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$. $\square$

4.4. Matrixrang.

Lad $\underline{A}$ være en $m \times n$ -matrix med elementer fra legemet L . Vi har defineret rang af $\underline{A}$, $\text{rg } \underline{A}$, som rangen af de n søjler $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ opfattet som vektorer i vektorrummet (L^n, L) . Vi har set, at hvis en lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ i passende baser beskrives ved matricen $\underline{A}$, da gælder $\dim f(U) = \text{rg}(f) = \text{rg } \underline{A}$. Specielt er altså $\text{rg } \underline{A} = \text{rg}(m_{\underline{A}})$, hvor $m_{\underline{A}}$ er den ved $\underline{x}_j \mapsto \underline{A}\underline{x}_j$ bestemte afbildning: $L^n \rightarrow L^m$. Det fremgår heraf, at $\text{rg } \underline{A} = m$ netop når $m_{\underline{A}}$ er injektiv, og at $\text{rg } \underline{A} = n$ netop når $m_{\underline{A}}$ er surjektiv. Da $m_{\underline{A}}$ er bijektiv, hvis og kun hvis $\underline{A}$ er regulær, har vi altså

$\underline{A}$ er (kvadratisk og) regulær, hvis og kun hvis $m = n = \text{rg } \underline{A}$.

Da dimensionen af billedrummet for $m_{\underline{A}}: L^n \rightarrow L^m$ ikke ændres sig ved sammensætning med en isomorfi, ser vi, at der gælder

$\text{rg}(\underline{S}\underline{A}) = \text{rg } \underline{A}$, når $\underline{S}$ er en regulær $(m \times m)$ -matrix
 $\text{rg}(\underline{A}\underline{I}) = \text{rg } \underline{A}$, når $\underline{I}$ er en regulær $(n \times n)$ -matrix.

For en $(m \times n)$ -matrix $\underline{A}$ stemmer (søjle)rang og rækkeang overens. (d.v.s. $\text{rg } \underline{A} = \text{rg } \underline{A}'$).

Bewis. Der findes (4.2.4) nye baser for L^n og L^m , således at der m.h.t. disse baser til $m_{\underline{A}}$ hører matricen

$\underline{E}_{m,n}^{(r)}$, hvor $r = \text{rg}(m_{\underline{A}}) = \text{rg } \underline{A}$. Heraf følger (4.3.3),

at der findes regulære matricer $\underline{I}$ og $\underline{S}$, så at

$\underline{E}_{m,n}^{(r)} = \underline{I}\underline{A}\underline{S}^{-1}$, eller $\underline{A} = \underline{I}^{-1}\underline{E}_{m,n}^{(r)}\underline{S}$. Heraf fås

$\underline{A}' = \underline{S}'[\underline{E}_{m,n}^{(r)}]'\underline{I}'^{-1}$, og da $\underline{S}'$ og $\underline{I}'^{-1}$ er regulære,

og $[\underline{E}_{m,n}^{(r)}]' = \underline{E}_{n,m}^{(r)}$ har rang r , slutter vi, at også $\text{rg } \underline{A}' = r$. $\square$

4.4. Matrixrang.

Enhver matrix $\underline{A} \in M_{m,n}(L)$ kan opfattes som matricen hørende til en lineær afbildning, idet der for ethvert n -dimensionalt vektorrum (U, L) , ethvert m -dimensionalt vektorrum (V, L) og ethvert valg af en basis for U og en basis for V findes en (og kun een) lineær afbildning $f: U \rightarrow V$, hvis tilhørende matrix m.h.t. de valgte baser netop er $\underline{A}$. Det er derfor muligt at udnytte sætninger i de to foregående afsnit til at bevise sætninger om matricer. Vi viser først:

For enhver matrix $\underline{A} \in M_{m,n}(L)$ stemmer søjlerang og rækkerang overens.

Beweis. Vi opfatter matricen $\underline{A}$ som matricen hørende til en lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ m.h.t. valgte baser. Lad U' og V' være vektorrum, som er i dualitet med hhv. U og V . Til den duale afbildning $f': V' \rightarrow U'$ hører da den transponerede matrix $\underline{A}'$ m.h.t. de duale baser, (sml. side 4.2.6). Det er tidligere vist, at f og f' har samme rang, (side 3.3.3). Rangens af en lineær afbildning, d.v.s. dimensionen af billedrummet, stemmer imidlertid overens med søjlerangen af den tilhørende matrix, (sml. side 4.2.4). Matricerne $\underline{A}$ og $\underline{A}'$ har derfor samme søjlerang. Men søjlerangen af $\underline{A}'$ er identisk med rækkerangen af $\underline{A}$, thi "søjlerne i $\underline{A}'$ er rækkerne i $\underline{A}$ ". Hermed er påstanden vist. $\square$

Vi skal herefter ved rangen $\text{rang } \underline{A}$ af $\underline{A}$ forstå den fælles rang af sættet af søjler og sættet af rækker.

En kvadratisk matrix $\underline{A} \in M_{n,n}(L)$ er regulær, hvis og kun hvis $\text{rg } \underline{A} = n$.

Bevis. Vi opfatter $\underline{A}$ som matrixen hørende til en lineær afbildning $f: U \rightarrow U$ m.h.t. en valgt basis. Det vides, at $\underline{A}$ er regulær, hvis og kun hvis f er bijektiv, (sml. side 4.2.5), og det vides, at f er bijektiv, hvis og kun hvis $\dim f(U) = n$, (sml. side 2.2.3). Påstanden følger herefter af, at det alment gælder $\text{rg } \underline{A} = \dim f(U)$. $\square$

For enhver fra nulmatrixen forskellig matrix $\underline{A} \in M_{m,n}(L)$ er $\text{rg } \underline{A}$ det største af de naturlige tal p for hvilke der findes en regulær $(p \times p)$ -delmatrix af $\underline{A}$.

Bevis. Idet vi sætter $\text{rg } \underline{A} = r$, skal det vises, at $\underline{A}$ har (mindst) en regulær $(r \times r)$ -delmatrix, men ingen regulær $(p \times p)$ -delmatrix for $p > r$. Lad $\underline{B}$ være en $(m \times r)$ -delmatrix af $\underline{A}$ med (søjle)rang r ; en sådan findes, idet $\underline{A}$ har (søjle)rang r . Da $\underline{B}$ har (række)rang r , findes en $(r \times r)$ -delmatrix $\underline{C}$ af $\underline{B}$ med (række)rang r . Ifølge den foregående sætning er $\underline{C}$ regulær, hvormed er vist, at $\underline{A}$ har en regulær $(r \times r)$ -delmatrix. Lad omvendt $\underline{C}$ være en regulær $(p \times p)$ -delmatrix af $\underline{A}$. Matrixen $\underline{C}$ er da delmatrix af en (entydigt bestemt) $(m \times p)$ -delmatrix $\underline{B}$ af $\underline{A}$. Da $\underline{C}$ har (søjle)rang p , vil også $\underline{B}$ have (søjle)rang p . Heraf følger, at (søjle)rang af $\underline{A}$ er mindst p , altså $p \leq r$, som påstået. $\square$

For vilkårlige matricer $\underline{A} \in M_{m,n}(L)$ og $\underline{B} \in M_{n,p}(L)$ gælder $\text{rg } \underline{AB} \leq \text{rg } \underline{A}$ og $\text{rg } \underline{AB} \leq \text{rg } \underline{B}$. For $\text{rg } \underline{B} = n$ gælder $\text{rg } \underline{AB} = \text{rg } \underline{A}$, og for $\text{rg } \underline{A} = n$ gælder $\text{rg } \underline{AB} = \text{rg } \underline{B}$.

Beris. Vi opfatter $\underline{B}$ og $\underline{A}$ som matricerne hørende til lineære afbildninger $f: U \rightarrow V$ hhv. $g: V \rightarrow W$, hvor U, V og W er vektorrum over L med dimensionerne p, n og m . Matricen $\underline{AB}$ er da den til $g \circ f: U \rightarrow W$ hørende matrix, (sml. side 4.2.5). Vi har nu $\text{rg } \underline{B} = \dim f(U)$, $\text{rg } \underline{A} = \dim g(V)$ og $\text{rg } \underline{AB} = \dim g(f(U))$. Af $f(U) \subseteq V$ følger $g(f(U)) \subseteq g(V)$, og dermed $\dim g(f(U)) \leq \dim g(V)$, altså den første ulighed. For $\text{rg } \underline{B} = n$ bliver f surjektiv, hvormed $f(U) = V$; vi får da $\dim g(f(U)) = \dim g(V)$, altså $\text{rg } \underline{AB} = \text{rg } \underline{A}$. Det er klart, at der gælder $\dim g(f(U)) \leq \dim f(U)$, altså den anden ulighed. For $\text{rg } \underline{A} = n$ bliver g injektiv; vi får da $\dim g(f(U)) = \dim f(U)$, altså $\text{rg } \underline{AB} = \text{rg } \underline{B}$. $\square$

To matricer $\underline{A}, \underline{B} \in M_{m,n}(L)$ siges at være ækvivalente, hvis der findes regulære matricer $\underline{P} \in M_{m,m}(L)$ og $\underline{Q} \in M_{n,n}(L)$, således at $\underline{B} = \underline{PAQ}^{-1}$. Som antydning er hermed defineret en ækvivalensrelation i $M_{m,n}(L)$. Refleksiviteten vises ved benyttelse af, at alle enhedsmatricer er regulære, symmetrien ved benyttelse af, at den inverse til en regulær matrix er regulær, og transitiviteten ved benyttelse af, at produktet af to regulære matricer er en regulær matrix.

Det ses, at to matricer er ækvivalente, hvis og kun hvis de hører til de samme lineære afbildninger for forskellige basisvalg, (sml. side 4.3.2, 4.3.3).

(Heraf fremgår i øvrigt på ny, at relationen er en ækvivalensrelation.) Vi har tidligere vist, at de til en given lineær afbildning hørende matricer m.h.t. forskellige basisvalg netop er de matricer (med det relevante række- og søjleantal), der har samme rang som afbildningen, (sml. side 4.3.3). Vi får derfor:

To matricer $\underline{A}, \underline{B} \in M_{m,n}(L)$ er ækvivalente, hvis og kun hvis de har samme rang.

4.5. Lineære ligningssystemer.

Lad der være givet et lineært ligningssystem med m ligninger og n ubekendte,

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

hvor $a_{ij}, b_i \in L$ for $i=1, \dots, m$ og $j=1, \dots, n$. En løsning (eller en partikular løsning) til (1) er et sæt $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i L^n , som tilfredsstiller alle ligningerne. Mængden af løsninger kaldes løsningsmængden (eller den fuldstændige løsning). Matricen $\underline{A} = (a_{ij})_{m,n}$ kaldes koefficientmatricen; matricen $(\underline{A} \ \underline{b}_1)$, som fås ved til $\underline{A}$ at føje $\underline{b}_1 = (b_i)_{m,1}$ som $(n+1)$ 'te søjle, kaldes den udvidede koefficientmatrix. Ligningssystemet siges at være homogent, dersom $b_1 = \dots = b_m = 0$, og inhomogent, dersom mindst et af tallene b_i er $\neq 0$. (Oftentimes vil man dog bruge adjektivet "inhomogent" i betydningen "ikke nødvendigvis, men muligvis, homogent"; et inhomogent lineært ligningssystem er da simpelthen et lineært ligningssystem.) Ved det til (1) hørende homogene ligningssystem forstås det ligningssystem, som fås ved at erstatte alle tallene b_i med 0.

Det noteres, at ligningssystemet (1) kan sammenfattes i matrixligningen $\underline{A} \underline{x}_1 = \underline{b}_1$, forstået således, at $(x_1, \dots, x_n)$ er løsning til (1), hvis og kun hvis $\underline{x}_1 = (x_i)_{n,1}$ er løsning til matrixligningen.

Eksistens og entydighed af løsninger. Struktur af løsningsmængden. Sammen med ligningssystemet (1) vil vi betragte den lineære afbildning f af (L^n, L) ind i (L^m, L) , hvortil der m.h.t. de kanoniske baser hører matricen $\underline{A}$. Idet vi sætter $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m)$, ses, at $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ er løsning til (1), hvis og kun hvis $f(\underline{x}) = \underline{b}$. Ligningssystemet (1) har derfor (mindst) en løsning, hvis og kun hvis $\underline{b}$ tilhører billedmængden $f(L^n)$, altså hvis og kun hvis $\underline{b}$ er linearkombination af vektorerne $\underline{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$, $j=1, \dots, n$. Dette sidste ses umiddelbart let at være ensbetydende med, at rangen af den udvidede koefficientmatrix ikke er større end rangen af koefficientmatricen. Vi har altså:

Ligningssystemet (1) har (mindst) en løsning, hvis og kun hvis $\text{rg}(\underline{A} \ \underline{b}) = \text{rg} \underline{A}$.

Som bekendt er f surjektiv hhv. injektiv, hvis og kun hvis $\text{rg} \underline{A} = m$ hhv. $\text{rg} \underline{A} = n$; vi får derfor:

Ligningssystemet (1) har mindst en hhv. højst en løsning for ethvert sæt $(b_1, \dots, b_m)$, hvis og kun hvis $\text{rg} \underline{A} = m$ hhv. $\text{rg} \underline{A} = n$, - og altså netop en, hvis og kun hvis $\text{rg} \underline{A} = m = n$.

Løsningsmængden til (1) er identisk med originalmængden $f^{-1}(\underline{b})$. For $\underline{b} = (0, \dots, 0)$ er det derfor altid løsningen $(0, \dots, 0)$, og løsningsmængden er kernen for f . For $\underline{b} \neq (0, \dots, 0)$ kan $f^{-1}(\underline{b})$ være tom; men hvis $f^{-1}(\underline{b})$ er ikke-tom, så har vi $f^{-1}(\underline{b}) = \tilde{x} + K$, hvor $\tilde{x}$ er en vilkårlig vektor i $f^{-1}(\underline{b})$ og K er f 's kerne.

Heraf fremgår:

Hvis ligningssystemet (1) er homogent, har det i det mindste løsningen $(0, \dots, 0)$. Løsningsmængden er et underrum i L^n med dimension $n - \text{rg } A$.

Hvis ligningssystemet (1) er inhomogent, har det ikke nødvendigvis nogen løsning. Er løsningsmængden ikke-tom, så er den et sideunderrum i L^n med dimension $n - \text{rg } A$, — nemlig sideunderrummet $\tilde{x} + K$, hvor $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ er en vilkårlig løsning til (1) og K er løsningsmængden til det tilhørende homogene ligningssystem.

Hvis (1) har løsning(er), fås den fuldstændige løsning således ved til en vilkårlig partikulær løsning at addere den fuldstændige løsning til det tilhørende homogene ligningssystem.

Vektorrummet (L^m, L) er i dualitet med sig selv ved

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

den kanoniske basis bliver herved dual til sig selv. Tilsvarende gælder for (L^m, L) . Til den duale afbildning $f': L^m \rightarrow L^n$ hører den transponerede matrix A' m.h.t. de kanoniske baser. Idet $f(L^n) = K_f^\circ$, (smk. side 3.3.3), har vi derfor:

Ligningssystemet (1) har (mindst) en løsning, hvis og kun hvis der for enhver løsning $(y_1, \dots, y_m)$ til det "transponerede" homogene ligningssystem

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m = 0$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m = 0$$

gælder

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m = 0.$$

Løsning ved reduktion til et Cramer'ske ligningssystem. I det foregående er vist, at et ligningssystem med en (kvadratisk og) regulær koefficientmatrix har netop en løsning; et sådant ligningssystem vil vi kalde et Cramer'ske ligningssystem. I et senere afsnit (5.3) skal vi explicit angive løsningen til et sådant ligningssystem. Vi skal på dette sted vise, hvorledes bestemmelsen af løsningsmængden til (1) - hvis der er løsning(er) - kan føres tilbage til løsning af et Cramer'ske ligningssystem.

Vi sætter $\text{rg } \underline{A} = r$. Ved eventuel omnummerering af ligningerne kan opnås, at sættet bestående af de første r rækker i $\underline{A}$ er lineært uafhængigt. Sættet bestående af de første r rækker i $(\underline{A} \ \underline{b}_1)$ er da også lineært uafhængigt. Hvis der nu blandt de sidste $m-r$ rækker i $(\underline{A} \ \underline{b}_1)$ findes en, som ikke kan fremstilles som linearkombination af de første r , så har $(\underline{A} \ \underline{b}_1)$ en (række)rang, som er større end r , og (1) har derfor ingen løsning. Hvis derimod enhver af de sidste $m-r$ rækker kan fremstilles som linearkombination af de første r , så har vi $\text{rg}(\underline{A} \ \underline{b}_1) = r$, hvilket sikrer eksistensen af

mindst en løsning til (1). Endvidere vil da gælde, at enhver løsning til systemet (*) bestående af de første r ligninger i (1) tillige er løsning til de sidste $m-r$ ligninger; folgelig vil (1) og (*) have samme løsningsmængde. Koefficientmatrixen for (*) er en $(r \times n)$ -matrix med rangen r ; ved eventuel omnummerering af de ubekendte kan opnås, at sættet bestående af de første r søjler er lineært uafhængigt. Skriveres (*) på formen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{aligned}$$

ses, at der for hvert valg af $x_{r+1}, \dots, x_n$ fremkommer et Cramer'sk ligningssystem til bestemmelse af $x_1, \dots, x_r$. Der findes derfor for ethvert valg af $x_{r+1}, \dots, x_n$ netop et sæt $(x_1, \dots, x_r)$, således at $(x_1, \dots, x_n)$ er løsning til (*), og dermed til (1).

Løsning ved elimination. Et lineært ligningssystem, hvis udvidede koefficientmatrix fremgår af den udvidede koefficientmatrix for det givne ligningssystem (1) ved multiplikation af en række med et tal $\neq 0$, har åbenbart samme løsningsmængde som (1); ("man har lov til at multiplicere en ligning med et tal $\neq 0$ "). Tilsvarende gælder, at et ligningssystem, hvis udvidede koefficientmatrix fremgår af den udvidede koefficientmatrix for (1) ved at en række er adderet til en af de øvrige

rækker, har samme løsningsmængde som (1); ("man har lov til at addere en ligning til en af de øvrige ligninger"). Under et kaldes disse to operationer for simple omformninger. Vi skal vise, at det givne ligningssystem (1) ved successive simple omformninger og eventuelle omnummereringer af ubekendte og ligninger kan overføres i et ligningssystem (*), hvis udvidede koefficientmatrix har følgende form (hvor a_{ij} og b_i naturligvis i almindelighed ikke betegner de samme tal som i (1)):

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{r+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & & & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 & b_m \end{pmatrix}$$

Hvis $\underline{A}$ er nulmatricen, så har ligningssystemet den ønskede form (med $r=0$). Hvis $\underline{A}$ ikke er nulmatricen, kan man ved eventuel omnummerering af ligningerne opnå, at første række i $\underline{A}$ ikke er nulrække, hvorefter man ved eventuel omnummerering af de ubekendte kan opnå, at $a_{11} \neq 0$. Ved simple omformninger kan derefter opnås, at $a_{11} = 1$ og $a_{i1} = 0$ for $i \geq 2$. Er herefter $a_{ij} = 0$ for $i, j \geq 2$, har ligningssystemet den ønskede form. Ellers kan ved eventuel omnummerering af ligningerne, som ikke berører første ligning, opnås, at anden række i $\underline{A}$ ikke er nulrække. Ved derefter eventuelt at omnummerere de ubekendte, dog ikke den

første, kan opnås, at $a_{22} \neq 0$. Herefter kan ved simple omformninger, som ikke involverer første række, opnås, at $a_{22} = 1$ og $a_{i2} = 0$ for $i \geq 3$. Ved at fortsætte denne proces får et ligningssystem (*) af den ønskede form.

Løsningsmængden til (*), og dermed løsningsmængden til (1), kan let bestemmes. Hvis $r < n$ og mindst et af tallene $b_{r+1}, \dots, b_m$ er $\neq 0$, har (*) ingen løsninger. Hvis $r < n$ og $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$, har (*) for $r = 0$ hele L^n som løsningsmængde, og for $r > 0$ samme løsningsmængde som delsystemet bestående af de første r ligninger. Dette delsystem kan umiddelbart løses: For hvert valg af $x_{r+1}, \dots, x_n$ kan x_r bestemmes af den r 'te ligning, x_{r-1} derefter af den $(r-1)$ 'te ligning, etc; vi får altså netop en løsning $(x_1, \dots, x_n)$ for hvert valg af $x_{r+1}, \dots, x_n$. Hvis endelig $r = n$, så er x_n bestemt ved den n 'te ligning, x_{n-1} derefter ved den $(n-1)$ 'te ligning, etc; vi får altså netop en løsning.

1. Udregn alle produkter med to faktorer, som kan dannes af matricerne

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = (1 \ -1 \ 1), \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Udregn matrixprodukterne $\underline{a} \underline{b}$ og $\underline{b} \underline{a}$, hvor $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ og $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$.

3. Udregn matrixprodukterne $\underline{B} \underline{A}$ og $\underline{A} \underline{C}$, hvor $\underline{A}$ er en vilkårlig $(m \times n)$ -matrix, $\underline{B}$ er en $(m \times m)$ -diagonalmatrix og $\underline{C}$ er en $(n \times n)$ -diagonalmatrix.

4. Hvad kan siges om produktet af to $(n \times n)$ -matricer, som begge er øvre trekantsmatricer?

5. Ved sporet $\text{tr} \underline{A}$ af en kvadratisk matrix $\underline{A}$ forstås summen af matrixens diagonalelementer. Vis, at der for hver $(m \times n)$ -matrix $\underline{B}$ og hver $(n \times m)$ -matrix $\underline{C}$ gælder $\text{tr}(\underline{B} \underline{C}) = \text{tr}(\underline{C} \underline{B})$.

6. Lad $\underline{A}$ være en vilkårlig $(n \times n)$ -matrix, og lad $\underline{E}_{\alpha\beta}$ være den $(n \times n)$ -matrix, hvor elementet i α -te række og β -te søjle er 1, mens alle øvrige elementer er 0. Udregn matrixprodukterne $\underline{E}_{\alpha\beta} \underline{A}$ og $\underline{A} \underline{E}_{\alpha\beta}$. Bestem mængden af $(n \times n)$ -matricer $\underline{B}$ for hvilke $\underline{X} \underline{B} = \underline{B} \underline{X}$ for enhver $(n \times n)$ -matrix $\underline{X}$.

7. Vis, at matrixaddition og matrixmultiplikation er kompositioner i mængden af (2×2) -matricer af formen $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$, og vis, at mængden med disse kompositioner er isomorf med de komplekse tals legeme.
8. Angiv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en diagonalmatrix er regulær.
9. Udregn matrixproduktet $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, hvor a, b, c, d er vilkårlige tal fra L . Angiv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en (2×2) -matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ er regulær, og angiv dens eventuelle inverse.
10. Beregn samtlige potenser $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{Z}$, og samtlige potenser $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Angiv ordenen af de to undergrupper af $GL(2, L)$, der udgøres af disse potenser.
11. Vis, at når en symmetrisk hhv. antisymmetrisk matrix er regulær, vil den inverse matrix ligeledes være symmetrisk hhv. antisymmetrisk. Vis, at ingen antisymmetrisk (3×3) -matrix er regulær.
12. Om en blokmatrix af formen $\begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{0} & \underline{C} \end{pmatrix}$ forudsættes, at blokkene $\underline{A}$ og $\underline{C}$ er kvadratiske. Vis, at matricen er regulær, hvis og kun hvis $\underline{A}$ og $\underline{C}$ er regulære, og angiv i bekræftende fald den inverse i form af en tilsvarende blokmatrix.

13. Angiv matrix ligningerne (m.h.t. den valgte basis) for de lineære afbildninger i 2. øv 2.
14. Lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ være en basis for et vektorrum (U, L) , og lad $(\underline{f}_1, \underline{f}_2)$ være en basis for et vektorrum (V, L) . Angiv matrix ligningen for den lineære afbildning $f: U \rightarrow V$ bestemt ved $f(\underline{e}_1) = \underline{f}_1$, $f(\underline{e}_2) = \underline{f}_2$, $f(\underline{e}_3) = \underline{f}_1 + \underline{f}_2$. Bestem endvidere kernen for f , samt originalmængden $f^{-1}(\underline{f}_1 + \underline{f}_2)$.
15. Lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ være en ortonormal basis i højrestilling for vektorrummet $(V, \mathbb{R})$ af geometriske vektorer i rummet. For en given vektor $\underline{a} \in V$ med koordinatsættet (a_1, a_2, a_3) betragtes den lineære afbildning $\underline{x} \mapsto \underline{a} \times \underline{x}$ af $(V, \mathbb{R})$ ind i $(V, \mathbb{R})$. Find den tilhørende matrix (m.h.t. den valgte basis).

Lad $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ være reelle tal med $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$. Angiv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at det lineære ligningssystem

$$\begin{array}{rcl} & -a_3x_2 + a_2x_3 & = b_1 \\ a_3x_1 & & -a_1x_3 = b_2 \\ -a_2x_1 + a_1x_2 & & = b_3 \end{array}$$

har mindst een løsning $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, og bestem i bekræftende fald samtlige løsninger.

16. Lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ være en ortonormal basis for vektorrummet $(V, \mathbb{R})$ af geometriske vektorer i en given plan, og lad f og g være de lineære afbildninger af $(V, \mathbb{R})$ ind i $(V, \mathbb{R})$ bestemt ved $f(\underline{e}_1) = \underline{e}_2$, $f(\underline{e}_2) = -\underline{e}_1$, $g(\underline{e}_1) = 2\underline{e}_1$, $g(\underline{e}_2) = \underline{e}_2$. Giv (eventuelt med støtte i regninger med matrixer) geometriske beskrivelser af følgende afbildninger, idet e betegner den identiske afbildning af V : $(f+e)$, $\frac{1}{2}(g+e)$, $g-e$, $(g-e) \circ f \circ (g-e)$, $f \circ g \circ f^{-1}$.

17. Lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ være en basis for et vektorrum $(U, \mathbb{R})$, lad $(\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3)$ være en basis for et vektorrum $(V, \mathbb{R})$, og lad $f: U \rightarrow V$ være den lineære afbildning, som m.h.t. de betragtede baser har matrixligningen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestem matrixligningerne for samtlige lineære afbildninger $g: V \rightarrow U$ med egenskaben, at $g \circ f$ er den identiske afbildning af U .

18. Lad (V, L) være et vektorrum af dimension $n \in \mathbb{N}$. Vis, at vektorrummets automorfigruppe er isomorf med den generelle lineære gruppe af grad n over L .

19. Lad (e_1, e_2, e_3) være en basis for et vektorrum (V, L) . Lad a, b og c være til fra L , og sæt $\bar{e}_1 = e_1 + ae_2 + be_3$, $\bar{e}_2 = e_2 + ce_3$, $\bar{e}_3 = e_3$. Vis, at også sættet $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ er en basis for V . Find koordinaterne til en vilkårlig vektor $v \in V$ m.h.t. basen $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ udtrykt ved dens koordinater m.h.t. basen (e_1, e_2, e_3) . Find også omvendt de sidstnævnte koordinater udtrykt ved de førstnævnte.

20. Vis, at sættet $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ bestående af vektorerne $\bar{e}_1 = (1, 2, 1)$, $\bar{e}_2 = (3, 3, 0)$, $\bar{e}_3 = (-1, 0, 2)$ er en basis for $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, og at sættet $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ bestående af vektorerne $\bar{f}_1 = (1, 1)$, $\bar{f}_2 = (1, -1)$ er en basis for $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er m.h.t. de kanoniske baser $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ hhv. $((1, 0), (0, 1))$ givet ved matrixen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestem den til f hørende matrix $\underline{\bar{A}}$ m.h.t. baserne $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ og $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$.

21. Lad f være en lineær afbildning af et endelig-dimensionalt vektorrum (V, L) ind i sig selv, og lad $\underline{A}$ være den til f hørende matrix m.h.t. en valgt basis for V . Ved sporet $\text{tr} f$ af f forstås da sporet $\text{tr} \underline{A}$ af matrixen $\underline{A}$, (smk. øv 5). Begrund, at definitionen er uafhængig af den valgte basis

22. Lad (V, L) være et endelig-dimensionalt vektorrum. Bestem mængden af lineære afbildninger $f: V \rightarrow V$ med egenskaben, at der til f hører samme matrix for ethvert valg af basis for V .
23. En linear afbildning f af et 3-dimensionalt vektorrum (U, L) , hvori der er valgt en basis (e_1, e_2, e_3) , ind i et 2-dimensionalt vektorrum (V, L) , hvori der er valgt en basis (f_1, f_2) , er med hensyn til de anførte baser givet ved matrixligningen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a-1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

hvor a er et tal tilhørende L . Angiv for enhver værdi af a afbildningens rang r . Bestem dernæst nye baser m.h.t. hvilke der til f hører matricen $\underline{\underline{E}}_{2,3}^{(r)}$. Angiv også de tilhørende koordinattransformationsmatricer $\underline{\underline{S}}$ og $\underline{\underline{I}}$, og gennemfør en kontrol ved at udregne $\underline{\underline{I}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{S}}^{-1}$, hvor $\underline{\underline{A}}$ er ovenstående (2×3) -matrix.

24. Lad (V, L) og (V', L) være et par af endelig-dimensionale vektorrum i dualitet. Lad $(e_1, \dots, e_n)$ og $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ være baser for V , og lad $\underline{\underline{S}}$ være koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra $(e_1, \dots, e_n)$ til $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$. Bestem koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen mellem de tilsvarende duale baser for V' .

25. Bestem rangen af følgende matricer:

$$(0 \ 1 \ 0 \ 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

26. Undersøg, om der for vilkårlige matricer $\underline{A} \in M_{m,n}(L)$ og $\underline{B} \in M_{n,p}(L)$ gælder $\text{rg } \underline{A}\underline{B} = \text{rg } \underline{A} \Rightarrow \text{rg } \underline{B} = n$ og $\text{rg } \underline{A}\underline{B} = \text{rg } \underline{B} \Rightarrow \text{rg } \underline{A} = n$.

27. Vis, at der for vilkårlige matricer $\underline{A} \in M_{m,n}(L)$ og $\underline{B} \in M_{n,p}(L)$ gælder $\text{rg } \underline{A} + \text{rg } \underline{B} - n \leq \text{rg } \underline{A}\underline{B}$.
Overvej, at der gælder lighedstegn for $\text{rg } \underline{A} = n$ og for $\text{rg } \underline{B} = n$. Undersøg, om der kan gælde lighedstegn selv om $\text{rg } \underline{A} < n$ og $\text{rg } \underline{B} < n$.

28. Find de eventuelle løsninger $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ til ligningssystemet

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3$$

$$-3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

29. Find de eventuelle løsninger $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ til hvert af de følgende tre ligningssystemer med samme venstre side:

$$-2x_1 + 2x_3 = 0, \quad = 1, \quad = 2$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \quad = 0, \quad = 2$$

$$x_2 + x_3 = 0, \quad = 0, \quad = 2$$

30. Bestem mængden af de $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ for hvilke ligningssystemet

$$2x_1 - x_2 + x_3 = b_1$$

$$x_1 + x_3 = b_2$$

har mindst een løsning $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, og find for hvert sådant (b_1, b_2) den fuldstændige løsning. Gennemfør det tilsvarende for ligningssystemet

$$2x_1 + x_2 = b_1$$

$$-x_1 = b_2$$

$$x_1 + x_2 = b_3$$

Kap. 5. Determinant.

5.1. Alternierende n -linearformer	5.1.1 - 5.1.6
5.2. Determinant-sætninger	5.2.1 - 5.2.4
5.3. Udvikling af determinant	5.3.1 - 5.3.4
Øvelser	5. øv 1-15

5.1. Alternierende n -linearformer.

Ved en n -linearform på et vektorrum (V, L) forstås en afbildning $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \phi(x_1, \dots, x_n)$ af V^n ind i L med egenskaberne

$$(i) \quad \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i' + x_i'', x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \dots, x_n) + \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i'', x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$(ii) \quad \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ \lambda \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Eller med andre ord: En n -linearform på (V, L) er en afbildning $\phi: V^n \rightarrow L$, som er lineær i hver enkelt variabel, når de øvrige $n-1$ variable tillægges (vilkaarlige) faste værdier. En n -linearform siges at være ikke-triviel, dersom den er forskellig fra multiformen, d.v.s. den konstante afbildning $(x_1, \dots, x_n) \mapsto 0$. En 1-linearform på V er det samme som en linearform på V . En 2-linearform på V er det samme som en bilinearform på $V \times V$, (smk. side 3.1.1); en sådan vil vi også kalde en bilinearform på V .

En n -linearform ϕ på V siges at være alternerende, dersom der gælder

$$(iii) \quad x_i = x_j \wedge i \neq j \Rightarrow \phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0,$$

altså dersom ϕ 's værdi er 0 på ethvert sæt, som indeholder samme vektor to gange.

Inden vi går i gang med en nærmere undersøgelse af alternerende n -linearformer skal vi vise følgende vigtige sætning:

Determinanten af en $(n \times n)$ -matrix er en alternerende n -linearform i matrixens søjler med værdien 1 på sættet af enhedsmatrixens søjler.

Bemærkning. Sætningen er formuleret noget kortfattet. En fuldstændig formulering lyder f. eks. således: Den afbildning af $\mathcal{M}_{n,1}(L)^n$ ind i L , som til et n -sæt $(\underline{A}_{n,1}^{(1)}, \dots, \underline{A}_{n,1}^{(n)})$ af $(n \times 1)$ -matricer lader svare determinanten af $(n \times n)$ -matricen $\underline{A} = (\underline{A}_{n,1}^{(1)} \dots \underline{A}_{n,1}^{(n)})$, er en alternerende n -linearform på $(\mathcal{M}_{n,1}(L), L)$ med værdien 1 på sættet $(\underline{\delta}_{1,1}, \dots, \underline{\delta}_{1,n})$. $\square$

Bevis. Lad $\underline{A} = (a_{ij})_{n,n}$ være en $(n \times n)$ -matrix. Determinanten af $\underline{A}$ er summen af alle produkter af formen $\text{sign } p \cdot a_{p(1)1} \dots a_{p(n)n}$, hvor $p \in S_n$. Hvert af disse produkter indeholder som faktor netop et element fra $\underline{A}$'s j 'te søjle. Vi kan derfor skrive $\det \underline{A}$ på formen

$$\det \underline{A} = a_{1j} A_j + \dots + a_{nj} A_j,$$

hvor $A_j, \dots, A_j$ ikke afhænger af elementerne i j 'te søjle. Heraf følger umiddelbart, at determinanten er lineær i j 'te søjle, når alle øvrige søjler forholdsvis; determinanten er altså en n -linearform i søjlerne.

Dernæst skal vises, at hvis den i 'te søjle i $\underline{A}$ er identisk med den j 'te, hvor $i < j$, så er $\det \underline{A} = 0$. Hertil inddeles S_n i to klasser,

$$S'_n = \{p \in S_n \mid p(i) < p(j)\},$$

$$S''_n = \{q \in S_n \mid q(i) > q(j)\}.$$

Betegnes med τ transpositionen, som ombytter i og j ,

har vi $\text{pot} \in S_n''$ for alle permutationer $p \in S_n'$. Afbildningen $p \mapsto \text{pot}$ af S_n' ind i S_n'' er oplagt injektiv; og da der for enhver permutation $q \in S_n''$ gælder $q \circ t \in S_n'$ og $q \circ t \mapsto q \circ t \circ t = q$, er afbildningen også surjektiv, og dermed bijektiv. Vi har derfor

$$\begin{aligned} \det \underline{A} &= \sum_{p \in S_n'} \text{sign } p \cdot a_{p(1)1} \cdots a_{p(n)n} + \sum_{q \in S_n''} \text{sign } q \cdot a_{q(1)1} \cdots a_{q(n)n} \\ &= \sum_{p \in S_n'} (\text{sign } p \cdot a_{p(1)1} \cdots a_{p(n)n} + \text{sign}(\text{pot}) \cdot a_{\text{pot}(1)1} \cdots a_{\text{pot}(n)n}) \\ &= \sum_{p \in S_n'} \text{sign } p \cdot (a_{p(1)1} \cdots a_{p(n)n} - a_{\text{pot}(1)1} \cdots a_{\text{pot}(n)n}), \end{aligned}$$

hvor der ved den sidste omskrivning er benyttet, at $\text{sign}(\text{pot}) = \text{sign } p \cdot \text{sign } t = -\text{sign } p$. Imidlertid gælder

$$\begin{aligned} &a_{\text{pot}(1)1} \cdots a_{\text{pot}(i)i} \cdots a_{\text{pot}(j)j} \cdots a_{\text{pot}(n)n} \\ &= a_{p(1)1} \cdots a_{p(j)i} \cdots a_{p(i)j} \cdots a_{p(n)n} \\ &= a_{p(1)1} \cdots a_{p(j)j} \cdots a_{p(i)i} \cdots a_{p(n)n} \\ &= a_{p(1)1} \cdots a_{p(i)i} \cdots a_{p(j)j} \cdots a_{p(n)n}, \end{aligned}$$

hvor der ved den næstsidste omskrivning er benyttet, at den i 'te og den j 'te søjle i $\underline{A}$ er identiske, og hvor den sidste omskrivning blot består i en omordning af faktorerne. Heraf fremgår, at alle led i den sidst opskrevne sum er 0, hvormed $\det \underline{A} = 0$.

Det skal endelig vises, at $\det \underline{E} = 1$. Dette følger af, at man ved udregning af $\det \underline{E}$ efter definitionen får bidraget 1 fra den identiske permutation, mens alle øvrige permutationer giver bidraget 0. $\square$

I den følgende sætning opsummeres væsentlige egenskaber ved alternerende n -linearformer.

For en alternerende n -linearform ϕ på et vektorrum (V, L) gælder:

- (1) $\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0.$
- (2) $\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j, x_{i+1}, \dots, x_n)$
 $= \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$
- (3) $\phi(x_{p(1)}, \dots, x_{p(n)}) = \text{sign } p \cdot \phi(x_1, \dots, x_n), \quad p \in S_n.$
- (4) $(x_1 \cdots x_n) = (u_1 \cdots u_n) \underline{A} \Rightarrow \phi(x_1, \dots, x_n) = \det \underline{A} \cdot \phi(u_1, \dots, u_n).$

Beris. Påstand (1) fås ved indsettelse af $\lambda = 0$ i (ii). Påstand (2) fås let ved anvendelse af (i), (ii) og (iii). For at bevise (3) er det tilstrækkeligt at vise, at

$$(5) \quad \phi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -\phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n);$$

thi fortegnet for en permutation p , som kan sammensættes af m transpositioner, er $(-1)^m$. Ved anvendelse af (i) og (iii) fås

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) \\ &= \phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) + \phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &\quad + \phi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) + \phi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &= \phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) + \phi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n), \end{aligned}$$

hvoraf (5), og dermed (3), følger. Sættes $\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, er relationen $(x_1 \cdots x_n) = (u_1 \cdots u_n) \underline{A}$ ensbetydende med

$$x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i \quad j=1, \dots, n.$$

Ved brug af (i) og (ii) får vi da

$$\begin{aligned}\phi(x_1, \dots, x_n) &= \phi\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} u_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} u_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \phi(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}).\end{aligned}$$

Ved benyttelse af (iii) ses, at det er tilstrækkeligt at summere over de sæt $(i_1, \dots, i_n)$, som består af indbyrdes forskellige elementer, d.v.s. over alle permutationer $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ af mængden $\{1, \dots, n\}$. Vi får da

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p \in S_n} a_{p(1)1} \dots a_{p(n)n} \phi(u_{p(1)}, \dots, u_{p(n)}).$$

Anvendes dernæst (3) får endelig

$$\begin{aligned}\phi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{p \in S_n} a_{p(1)1} \dots a_{p(n)n} \text{sign } p \cdot \phi(u_1, \dots, u_n) \\ &= \det \underline{A} \cdot \phi(u_1, \dots, u_n),\end{aligned}$$

hvormed (4) er bevist. $\square$

Vi skal herefter vise følgende hovedsætning:

Lad der i et n -dimensionalt vektorrum (V, L) være givet en basis $(e_1, \dots, e_n)$, og lad $k \in L$. Der findes da en og kun een alternerende n -linear form ϕ på (V, L) med $\phi(e_1, \dots, e_n) = k$. For $(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n) \underline{A}$ gælder $\phi(x_1, \dots, x_n) = k \cdot \det \underline{A}$.

Bevís. Lad $(x_1, \dots, x_n)$ være et vilkårligt sæt af n vektorer fra V , og lad $\underline{A}$ være matrixen, hvis j 'te søjle er koordinatsøjlen for x_j m.h.t. den givne basis, altså

$$(6) \quad (x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n) \underline{A}.$$

Hvis nu ϕ er en alternerende n -linear form med den

ønskede egenskaber, må det derfor ifølge (4) gælde

$$\begin{aligned}\phi(x_1, \dots, x_n) &= \det \underline{A} \cdot \phi(e_1, \dots, e_n) \\ &= k \cdot \det \underline{A}.\end{aligned}$$

Afbildningen

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \psi(x_1, \dots, x_n) = k \cdot \det \underline{A},$$

hvor $\underline{A}$ er bestemt ved (6), er altså den eneste mulige alternerende n -linearform med $\psi(e_1, \dots, e_n) = k$. At ψ faktisk er en alternerende n -linearform med værdien k på sættet $(e_1, \dots, e_n)$ følger let af, at determinanten af en $(n \times n)$ -matrix — som ovenfor vist — er en alternerende n -linearform i søjlerne med værdien 1 på sættet af enhedsmatricens søjler. $\square$

Til sidst vises:

Lad ϕ være en ikke-triviel alternerende n -linearform på et n -dimensionalt vektorrum (V, L) . Der gælder da $\phi(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, hvis og kun hvis sættet $(x_1, \dots, x_n)$ er lineært uafhængigt.

Bevís. Af den foregående sætning fremgår, at hvis en alternerende n -linearform på V antager værdien 0 på en basis, så er den nulformen. Heraf følger, at hvis $(x_1, \dots, x_n)$ er et lineært uafhængigt sæt, så gælder $\phi(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Omvendt, antag at $(x_1, \dots, x_n)$ er et lineært afhængigt sæt. Der er mindst en af vektorerne en linearkombination af de øvrige, $x_i = \sum_{j \neq i} \mu_j x_j$. Benyttes nu (2) med $\lambda_j = -\mu_j$, og benyttes derefter (1), fås $\phi(x_1, \dots, x_n) = 0$. $\square$

5.2. Determinant - sætninger.

Vi viser først to sætninger, som begge er simple konsekvenser af definitionen.

En kvadratisk matrix A og dens transponerede A' har samme determinant, $\det A = \det A'$.

Bewis. Sættes $A = (a_{ij})_{n,n}$, har vi ifølge definitionen

$$\det A = \sum_{q \in S_n} \text{sign } q \cdot a_{1q(1)} \cdots a_{nq(n)}.$$

Ordnes faktorerne i et produkt $a_{1q(1)} \cdots a_{nq(n)}$ efter søjle nummeret, får produktet udseendet $a_{q^{-1}(1)1} \cdots a_{q^{-1}(n)n}$. Vi har derfor

$$\det A = \sum_{q \in S_n} \text{sign } q \cdot a_{q^{-1}(1)1} \cdots a_{q^{-1}(n)n}.$$

Det bemærkes nu, at $\text{sign } q = \text{sign } q^{-1}$, og at q^{-1} gennemløber S_n , når q gør det. Sættes derfor $q^{-1} = p$, fås som ønsket

$$\det A = \sum_{p \in S_n} \text{sign } p \cdot a_{p(1)1} \cdots a_{p(n)n}. \quad \square$$

Determinanten af en trekantsmatrix er lig med produktet af elementerne i diagonalen.

Bewis. Ifølge den foregående sætning er det tilstrækkeligt at betragte en øvre trekantsmatrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ hvor altså $a_{ij} = 0$ for $i > j$. Lad p være en permutation i S_n , forskellig fra den identiske. Der findes da mindst et $j \in \{1, \dots, n\}$ med $p(j) > j$, nemlig (i hvert fald) det mindste af tallene $1, \dots, n$, som ved p ikke afbildes i sig selv. Vi har da $a_{p(j)j} = 0$, og dermed $\text{sign } p \cdot a_{p(1)1} \cdots a_{p(n)n} = 0$. Heraf fremgår, at $\det A =$

$\text{sign } e \cdot a_{e(1)1} \cdots a_{e(n)n}$, hvor e betegner den identiske permutation, altså $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$, som påstået. $\square$

Som vist er determinanten af en $(n \times n)$ -matrix en alternerende n -linearform i søjlerne med værdien 1 på sættet af enhedsmatricens søjler, (sml. side 5.1.2). Af den første af de to sætninger ovenfor fremgår, at rækkerne kan træde i stedet for søjlerne. De følgende fire sætninger er derfor umiddelbare konsekvenser af hhv. (i), (ii), (2) og (3) i forrige afsnit.

Adderes til den j 'te søjle i en kvadratisk matrix A en søjlematrix b_j , så er determinanten af den fremkomne matrix lig med summen af $\det A$ og determinanten af den matrix, som fremgår af A ved at den j 'te søjle erstattes med b_j . - Tilsvarende for rækkerne.

Multipliseres den j 'te søjle i en kvadratisk matrix A med en skalar λ , så er determinanten af den fremkomne matrix lig med $\lambda \det A$. - Tilsvarende for rækkerne.

Adderes til en søjle i en kvadratisk matrix A en linearkombination af de øvrige søjler, så har den fremkomne matrix samme determinant som A . - Tilsvarende for rækkerne. (Sådanne omformninger af matrixen kaldes "søjleoperationer" hhv. "rækkeoperationer".)

Udskiftes søjlerne i en kvadratisk matrix A en permutation p , så har den fremkomne matrix determinanten $\text{sign } p \cdot \det A$. - Tilsvarende for rækkerne.

At en sætning i forrige afsnit (side 5.1.6) fremgår direkte:

Determinanten af en $(n \times n)$ -matrix er $\neq 0$, hvis og kun hvis sættet af søjler (rækker) er lineært uafhængigt.

Idet en $(n \times n)$ -matrix er regulær, hvis og kun hvis dens rang er n , (sml. side 4.4.2), har vi også:

Determinanten af en $(n \times n)$ -matrix er $\neq 0$, hvis og kun hvis matricen er regulær.

Ved en underdeterminant af p 'te orden af en (likke nedvendigvis kvadratisk) matrix $\underline{A}$ forstås determinanten af en $(p \times p)$ -delmatrix af $\underline{A}$. Idet rangen af en fra $\mathbb{Q}_{m,n}$ forskellig $(m \times n)$ -matrix $\underline{A}$ er r , hvis og kun hvis $\underline{A}$ har en regulær $(r \times r)$ -delmatrix, men ingen regulær delmatrix med større række- og søjleantal, (sml. side 4.4.2), følger af den foregående sætning:

Rangen af en fra $\mathbb{Q}_{m,n}$ forskellig $(m \times n)$ -matrix $\underline{A}$ er det største af de naturlige tal p for hvilke $\underline{A}$ har en fra $\mathbb{Q}$ forskellig underdeterminant af p 'te orden.

Lad $\underline{A}$ og $\underline{B}$ være $(n \times n)$ -matricer. Betegnes med $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ og $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ den j 'te søjle i hhv. $\underline{A}$ og $\underline{AB}$, gælder trivielt

$$(\underline{a}_1 \cdots \underline{a}_n) = (\underline{a}_1 \cdots \underline{a}_n) \underline{B},$$

thi $(\underline{a}_1 \cdots \underline{a}_n) = \underline{A}$ og $(\underline{b}_1 \cdots \underline{b}_n) = \underline{AB}$. Ligningen

gælder imidlertid også, dersom man opfatter $(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_m)$ og $(\underline{c}_1 \dots \underline{c}_m)$ som række (vektor)matricer med elementer fra vektorrummet $M_{m,1}(L)$.
 Af et resultat i forrige afsnit (4), side 5.1.4) følger derfor:

For to $(n \times n)$ -matricer $\underline{A}$ og $\underline{B}$ gælder $\det(\underline{A}\underline{B}) = \det \underline{A} \cdot \det \underline{B}$.

Idet $\det \underline{E} = 1$, følger umiddelbart heraf:

For en regulær matrix $\underline{A}$ gælder $\det \underline{A} \cdot \det \underline{A}^{-1} = 1$.

For en ortogonal hhv. unitær matrix $\underline{A}$ gælder $\det \underline{A}' = \det \underline{A}' = \det \underline{A}$ hhv. $\det \underline{A}^{-1} = \det \underline{A}' = \overline{\det \underline{A}'} = \overline{\det \underline{A}}$; at den foregående sætning følger derfor:

For en ortogonal eller unitær matrix $\underline{A}$ gælder $|\det \underline{A}| = 1$.

5.3. Udvikling af determinant.

Lad $\underline{A} = (a_{ij})_{n,n}$ være en $(n \times n)$ -matrix. Som tidligere bemærket kan vi for ethvert $j \in \{1, \dots, n\}$ skrive $\det \underline{A}$ på formen

$$\det \underline{A} = a_{1j} A_{1j} + \dots + a_{nj} A_{nj},$$

hvor $A_{1j}, \dots, A_{nj}$ ikke afhænger af elementerne i den j 'te søjle; tallet A_{ij} kaldes komplementet til elementet a_{ij} . Det ses nu umiddelbart, at for ethvert $i \in \{1, \dots, n\}$ er A_{ij} determinanten af den matrix, som fremgår af $\underline{A}$ ved at den j 'te søjle udskiftes med den i 'te søjle i $\underline{E}$, altså

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Idet ombytning af to søjler eller to rækker bevirker fortegnsskift for determinanten, får vi

$$A_{ij} = (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-j} (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} & 1 \end{vmatrix}$$

Ved udregning af den sidst opskrevne determinant efter definitionen kommer der åbenbart kun bidrag til summen fra de permutationer $p \in S_n$ for hvilke $p(n) = n$. Det er let at se, at for en sådan permutation p har restriktionen $\tilde{p}$ til $\{1, \dots, n-1\}$ samme fortegn som p . Beteignes derfor med $\underline{A}_{ij}$ den delmatrix af $\underline{A}$, som fås ved at stryge i 'te række og j 'te søjle, har vi

$$\begin{aligned} A_{ij} &= (-1)^{n-j} (-1)^{n-i} \det \underline{A}_{ij} \\ &= (-1)^{i+j} \det \underline{A}_{ij}. \end{aligned}$$

Idet får derfor

$$(1) \quad \det \underline{A} = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det \underline{A}_{ij},$$

som kaldes formelen for udvikling af $\det \underline{A}$ efter j 'te søjle.

Ved udvikling af $\det \underline{A}'$ efter i 'te søjle fås

$$\det \underline{A}' = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det (\underline{A}_{ij})'.$$

Idet $\det \underline{A}' = \det \underline{A}$ og $\det (\underline{A}_{ij})' = \det \underline{A}_{ij}$, har vi altså

$$(2) \quad \det \underline{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det \underline{A}_{ij},$$

som kaldes formelen for udvikling af $\det \underline{A}$ efter i 'te række.

Bestemmelse af invers matrix. Det foregående kan udnyttes til at angive den inverse til en regulær matrix $\underline{A} = (a_{ij})_{n,n}$. Erstattes den j 'te søjle i $\underline{A}$ med den k 'te, hvor $j \neq k$, fås en matrix med to ens søjler. Dens determinant er følgelig 0. Ved udvikling efter den j 'te søjle får vi derfor

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n a_{ik} (-1)^{i+j} \det \underline{A}_{ij} = 0.$$

Idet $\det \underline{A} \neq 0$, giver (1) og (3)

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+j} \det \underline{A}_{ij}}{\det \underline{A}} a_{ik} = \delta_{jk}.$$

Sættes

$$\frac{(-1)^{i+j} \det \underline{A}_{ij}}{\det \underline{A}} = b_{ij},$$

og sættes derefter $\underline{B} = (b_{ij})_{n,n}$, har vi altså ifølge (4)

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} a_{ik} = \delta_{jk},$$

og dermed $\underline{B}' \underline{A} = \underline{E}$. Heraf følger, at $\underline{B}' = \underline{B}' \underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1}$, altså

$$(5) \quad \underline{A}^{-1} = \left(\frac{(-1)^{i+j} \det \underline{A}_{ij}}{\det \underline{A}} \right)_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}'$$

Den inverse til en regulær matrix $\underline{A}$ kan altså udregnes som den transponerede til den matrix, hvis element i i 'te række og j 'te søjle er $(-1)^{i+j} \det \underline{A}_{ij}$ divideret med $\det \underline{A}$.

Cramer's formel. Vi skal til sidst angive den entydigt bestemte løsning til et Cramer'sk ligningssystem, (sml. side 4.5.4). Skriver ligningssystemet på formen $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$, (sml. side 4.5.1), er løsningen åbenbart bestemt ved $\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$. Ved brug af (5) fås da

$$(6) \quad x_i = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{i+j} \det \underline{A}_{ji}}{\det \underline{A}} b_j, \quad i=1, \dots, n.$$

Idet udvikling af $\det(\underline{a}_{/1} \dots \underline{a}_{/i-1} \underline{b} \underline{a}_{/i+1} \dots \underline{a}_{/n})$ efter i 'te søjle giver $\sum_{j=1}^n b_j (-1)^{i+j} \det \underline{A}_{ji}$, kan (6) omskrives til

$$(7) \quad x_i = \frac{\det(\underline{a}_{/1} \dots \underline{a}_{/i-1} \underline{b} \underline{a}_{/i+1} \dots \underline{a}_{/n})}{\det \underline{A}}, \quad i=1, \dots, n.$$

Formlerne (7) til beregning af løsningen $(x_1, \dots, x_n)$ kaldes Cramer's formel.

1. Som bekendt (sml. side 5.1.5) er to vilkårlige ikke-trivielle alternerende n -linearformer (i det følgende blot kaldet "former") ϕ_1 og ϕ_2 på et n -dimensionalt vektorrum (V, L) proportionale, idet der findes en og kun en skalar $\lambda \in L \setminus \{0\}$, således at $\phi_2 = \lambda \phi_1$. Dette leder for $L = \mathbb{R}$ til begrebet orientering.

To former ϕ_1 og ϕ_2 på et reelt n -dimensionalt vektorrum $(V, \mathbb{R})$ siges at være ækvivalente, dersom den tilhørende proportionalitetsfaktor λ er positiv. Overvej, at der herved er defineret en ækvivalensrelation i mængden af former på $(V, \mathbb{R})$ med to ækvivalensklasser. Hver af disse to klasser kaldes en orientering af $(V, \mathbb{R})$. Vektorrummet siges at være orienteret, dersom der er valgt en orientering; enhver form tilhørende den valgte orientering siges da at repræsentere orienteringen. Et vektorrummet orienteret, siges en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ at være positiv, dersom $\phi(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) > 0$ for en, og dermed enhver, af de repræsenterende former ϕ , er $\phi(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) < 0$, siges basen at være negativ.

Uafhængigt af valg af orientering siges to baser $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{\hat{e}}_1, \dots, \underline{\hat{e}}_n)$ for et n -dimensionalt vektorrum $(V, \mathbb{R})$ at være ens eller modsat orienterede efter som der for en, og dermed enhver, form ϕ gælder, at ϕ 's værdi på $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{\hat{e}}_1, \dots, \underline{\hat{e}}_n)$ har samme eller

modsat fortegn. Vis, at $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{\hat{e}}_1, \dots, \underline{\hat{e}}_n)$ er en eller modsat orienterede efter som koordinattransformationsmatricen $\underline{S}$ hørende til overgangen fra $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ til $(\underline{\hat{e}}_1, \dots, \underline{\hat{e}}_n)$ har positiv eller negativ determinant.

2. Lad (V, L) og (V', L) være et par af n -dimensionale vektorrum i dualitet, og lad ϕ være en ikke-triviel alternerende n -linear form på V . En afbildning $\phi': V'^n \rightarrow L$ defineres på følgende måde: Er $(x'_1, \dots, x'_n) \in V'^n$ et lineært afhængigt sæt, sættes $\phi'(x'_1, \dots, x'_n) = 0$. Er $(x'_1, \dots, x'_n) \in V'^n$ et lineært uafhængigt sæt, og dermed en basis for V' , sættes $\phi'(x'_1, \dots, x'_n) = (\phi(x_1, \dots, x_n))^{-1}$, hvor $(x_1, \dots, x_n)$ betegner den til $(x'_1, \dots, x'_n)$ duale basis for V . Vis, at ϕ' er en ikke-triviel alternerende n -linear form på V' ; den siges at være dual til ϕ . Vis endvidere, at der for vilkårlige sæt $(x_1, \dots, x_n) \in V^n$ og $(x'_1, \dots, x'_n) \in V'^n$ gælder $\phi(x_1, \dots, x_n) \cdot \phi'(x'_1, \dots, x'_n) = \det(\langle x_i, x'_j \rangle)_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n}$.

3. Udregn determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & \dots & c_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ c_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Udregn determinanterne

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

5. Udregn determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \dots & n^2 \end{vmatrix}$$

6. Vis, at determinanten af en antisymmetriske $(n \times n)$ -matrix er 0, når n er ulige.

7. I en $(n \times n)$ -matrix er alle elementer i diagonalen lig med tallet a og alle øvrige elementer lig med tallet b . Udregn matrixens determinant.

8. Udregn determinanten

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

9. Vis, f.eks. ved induktion efter n , at

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{j=1 \\ i < j}}^n (a_j - a_i)$$

(Vandermonde's determinant.)

10. Lad f være en lineær afbildning af et endelig-dimensionalt vektorrum (V, L) ind i sig selv, og lad A være den til f hørende matrix m.h.t. en valgt basis for V . Ved determinanten $\det f$ af f forstås da determinanten $\det A$ af matricen A . Begrund, at definitionen er uafhængig af den valgte basis.

11. Beregn den inverse til hver af matrixerne

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

12. Vis, at den inverse til en regulær trekantsmatrix igen er en trekantsmatrix, og angiv dennes elementer i diagonalen.

13. Lad (V, L) være et 3-dimensionalt vektorrum, hvori der er valgt en basis (e_1, e_2, e_3) . For hvert $a \in L$ betegnes med f_a den lineære afbildning af V ind i V , som m.h.t. den valgte basis har matrixligningen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & a \\ 1 & a & 1 \\ -1 & -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestem mængden af de $a \in L$ for hvilke f_a er bijektiv, og find for sådanne a matrixligningen for f_a^{-1} .

14. Bestem mængden af de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ for hvilke ligningssystemet

$$ax_1 + x_2 + x_3 = b$$

$$x_1 + ax_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + ax_3 = 1$$

har mindst en løsning $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, og find for ethvert sådant (a, b) den fuldstændige løsning.

15. Lad $\underline{A} = (a_{ij})_{i=1, \dots, n-1; j=1, \dots, n}$ være en reel $((n-1) \times n)$ -matrix, og sæt

$$A_j = (-1)^j \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j+1} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

for $j=1, \dots, n$. Vis, at $(A_1, \dots, A_n)$ er løsning til ligningssystemet

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1,1}x_1 + \dots + a_{n-1,n}x_n = 0$$

og find for $\text{rg } \underline{A} = n-1$ den fuldstændige løsning.

Kap. 6. Normalformer for matricer.

6.1. Egenverdier og egenvektorer.	6.1.1 - 6.1.6
6.2. Karakteristisk polynomium.	6.2.1 - 6.2.5
6.3. Triagonalisering.	6.3.1 - 6.3.4
6.4. Jordan's normalform.	6.4.1 - 6.4.14
Øvelser	6. øv 1 - 24

6.1. Egenverdier og egenvektorer.

Lad i det følgende f være en endomorfi af et vektorrum (V, L) .

Et underrum U af V siges at være invariant ved f , dersom $f(U) \subseteq U$; at U er invariant kommer således ud på, at restriktionen af f til U er en endomorfi af U . Det er trivielt, at $\{0\}$ og V er invariante underrum; også f 's kerne er invariant.

En skalar $\lambda \in L$ siges at være en egenverdi for f , dersom der findes en vektor $x \in V \setminus \{0\}$, således at $f(x) = \lambda x$. En vektor $x \in V \setminus \{0\}$ siges at være en egenvektor for f , dersom der findes en skalar $\lambda \in L$, således at $f(x) = \lambda x$. Gælder $f(x) = \lambda x$ for en skalar λ og en vektor $x \neq 0$, siges x at være en til λ hørende egenvektor, og λ siges at være den til x hørende egenverdi. Det noteres, at en vektor er en egenvektor, hvis og kun hvis den frembringer et 1-dimensionalt invariant underrum.

Lad e betegne den identiske afbildning af V . For enhver skalar $\lambda \in L$ er da afbildningen $f - \lambda e$ en endomorfi af V . Kerne $K_{f-\lambda e}$ for $f - \lambda e$ kaldes egenrummet hørende til λ , og betegnes kort K_λ . Dimensionen af K_λ kaldes egenverdipliciteten (eller den geometriske multiplicitet) for λ , og betegnes $em\lambda$. Idet $f(x) = \lambda x$ er ensbetydende med $(f - \lambda e)(x) = 0$, ses, at λ er en egenverdi, hvis og kun hvis $em\lambda \geq 1$; de til λ hørende egenvektorer er da netop de $em\lambda - 1$ forskellige vektorer i K_λ . Bemærk i øvrigt, at $em\lambda \geq 1$ er ensbetydende med, at $f - \lambda e$ er ikke-injektiv.

Det noteres, at hvis λ er en egen værdi, så er K_λ et invariant under rum, og $f: K_\lambda \rightarrow K_\lambda$ er en homoteti med faktor λ . Er omvendt U et invariant under rum forskelligt fra $\{0\}$ med egenskaben, at $f: U \rightarrow U$ er en homoteti med faktor λ , så er λ en egen værdi og $U \subseteq K_\lambda$. Kendskab til egen værdierne og de tilhørende egen rum giver således fuldstændigt kendskab til de invariante under rum U med egenskaben, at $f: U \rightarrow U$ er en homoteti.

Vi skal herefter forudsætte, at (V, L) har endelig dimension $n \in \mathbb{N}$. (Påstandene (1) og (2) i den følgende sætning gælder dog også uden denne forudsætning.)

Lad $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ være (indbyrdes forskellige) egen værdier for f . Da gælder:

- (1) Ethvert sæt $(x_1, \dots, x_p)$, hvor x_i er en egen vektor hørende til λ_i , $i=1, \dots, p$, er lineært uafhængigt.
- (2) Egen rummene $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_p}$ danner direkte sum.
- (3) Summen af egen værdi multiplisiteterne er højst n , altså $e_{\lambda_1} + \dots + e_{\lambda_p} \leq n$.

Bevis. Påstanden (1) vises ved induktion efter p . Da egen vektorer ifølge definitionen er $\neq 0$, er et hvert sæt bestående af een egen vektor lineært uafhængigt; dette sikrer induktionens start. Antag herefter, at påstanden er rigtig for ethvert sæt af den betragtede art bestående af $p-1$ vektorer, hvor $p \geq 2$, og lad $(x_1, \dots, x_p)$ være et sæt af egen-

vektorer hørende til indbyrdes forskellige egen-værdier $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Lad

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = \underline{0}$$

være en lineær relation mellem vektorerne i sættet. Der gælder da dels

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) &= f(\underline{0}) \\ &= \underline{0}, \end{aligned}$$

og dels

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) &= \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_p f(v_p) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_p \lambda_p v_p, \end{aligned}$$

altså

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_p \lambda_p v_p = \underline{0}.$$

Multipliseres den givne relation med λ_p , og subtraheres den derefter fra den sidst opskrevne, fås

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_p) v_1 + \dots + \alpha_{p-1} (\lambda_{p-1} - \lambda_p) v_{p-1} = \underline{0}.$$

Ved brug af induktionsantagelsen kan heraf sluttet, at $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_p) = \dots = \alpha_{p-1} (\lambda_{p-1} - \lambda_p) = 0$, og dermed, idet $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ er indbyrdes forskellige, at $\alpha_1 = \dots = \alpha_{p-1} = 0$. Ved indsættelse i den givne relation sluttet endelig, at også $\alpha_p = 0$. Hermed er (1) bevist.

Påstanden (2) kommer ud på, at man af $v_1 + \dots + v_p = \underline{0}$, $v_1 \in K_{\lambda_1}, \dots, v_p \in K_{\lambda_p}$, kan slutte, at $v_1 = \dots = v_p = \underline{0}$, (sml. side 1.5.6). Dette fås let ved brug af (1).

Påstanden (3) følger af (2), (sml. side 1.5.6). $\square$

Vi noterer en trivial konsekvens af (3):

Endomorfien f har højst n egenverdier.

Vi skal sige, at f er diagonaliserbar, dersom der findes en basis for V m.h.t. hvilken den til f hørende matrix er en diagonalmatrix. Det er oplagt, at f er diagonaliserbar, hvis og kun hvis der findes en basis bestående af egenvektorer.

Endomorfien f er diagonaliserbar, hvis og kun hvis den har mindst en egenverdi og der gælder $e m_1 \lambda_1 + \dots + e m_p \lambda_p = n$, hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ er samtlige egenverdier for f . Er f diagonaliserbar, så er de til f hørende diagonalmatrixer netop de diagonalmatrixer hvis diagonalelementer er egenverdierne, idet hver egenverdi λ forekommer $e m_\lambda$ gange.

Beris. Antag, at f har egenverdierne $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, og at der gælder $e m_1 \lambda_1 + \dots + e m_p \lambda_p = n$. Sammenholdes dette med (2) fås $K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p} = V$, (sml. side 1.5.6). Valges en basis for hvert af underrummene K_{λ_i} , og sammenstykkes disse baser til eet sæt af vektorer, fås derfor en basis for V bestående af egenvektorer. Følgelig er f diagonaliserbar.

Antag omvendt, at f er diagonaliserbar, og lad $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ være en basis bestående af egenvektorer. Der er da mindst en egenverdi; lad $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ være samtlige egenverdier, og lad m_i betegne antallet af vektorer i basen, som hører til egenverdien λ_i , $i=1, \dots, p$. Vi har da $m_1 + \dots + m_p = n$ og $0 \leq m_i \leq e m_\lambda$.

Sammenholdes dette med (3) fås $m_i = e m \lambda_i$ for $i=1, \dots, p$, og dermed som ønsket $e m \lambda_1 + \dots + e m \lambda_p = n$.

Antag endelig, at f er diagonaliserbar, og lad $(e_1, \dots, e_n)$ være en basis bestående af egenvektorer. At det ovenfor beviste fremgår, at den tilhørende diagonalmatrix har den omtalte form. En vilkårlig anden diagonalmatrix af den omtalte form er da også en til f hørende matrix, nemlig m.h.t. en basis af formen $(e_{q(1)}, \dots, e_{q(n)})$, hvor $q \in S_n$. $\square$

Hvis f er diagonaliserbar, så har vi ifølge det foregående $K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p} = V$, hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ er de indbyrdes forskellige egenverdier. Lad p_{λ_i} betegne projektionen af V på K_{λ_i} langs $K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_{i-1}} \oplus K_{\lambda_{i+1}} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p}$. Der gælder da åbenbart

$$(4) \quad f = \lambda_1 p_{\lambda_1} + \dots + \lambda_p p_{\lambda_p}.$$

Vi siger, at (4) er en spektralrepræsentation af f . Omvendt er det let at vise, at hvis det om f er givet, at der findes under rum $U_1, \dots, U_q$ af V og indbyrdes forskellige skalarer $\mu_1, \dots, \mu_q \in L$, således at $U_1 \oplus \dots \oplus U_q = V$, og således at $f = \mu_1 p_{U_1} + \dots + \mu_q p_{U_q}$, hvor p_{U_i} betegner projektionen af V på U_i langs $U_1 \oplus \dots \oplus U_{i-1} \oplus U_{i+1} \oplus \dots \oplus U_q$, så er $\mu_1, \dots, \mu_q$ netop egenverdierne for f , og under rummene U_i er de tilhørende egenrum, (og f er altså diagonaliserbar).

Eksempel. En endomorfi f af et vektorrum (V, L) siges at være idempotent, dersom $f^2 = f$. Lad f være en sådan afbildning, og antag, at $\dim V \geq 1$. For enhver eventuel egenverdi λ og tilhørende egenvektor x gælder da $\lambda^2 x = \lambda x$, altså $\lambda^2 = \lambda$. Kun 0 og 1 kan altså være egenverdier for f . Det påstås, at $K_0 \oplus K_1 = V$. Da summen af K_0 og K_1 vides at være direkte, er det tilstrækkeligt at vise, at enhver vektor $x \in V$ kan fremstilles som sum af en vektor i K_0 og en vektor i K_1 . En sådan fremstilling er givet ved $x = (x - f(x)) + f(x)$. Thi $f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = 0 = 0(x - f(x))$, og $f(f(x)) = f^2(x) = 1 \cdot f(x)$. (Bemærk, at for $f = e$ er kun 1 egenverdi, og for $f = 0$, hvor 0 betegner nulafbildningen, er kun 0 egenverdi; for alle andre idempotente endomorfier f er både 0 og 1 egenverdi.) Det ses, at f er parallelprojektionens af V på K_1 langs K_0 . Idet omvendt enhver parallelprojektion er idempotent, følger, at de idempotente endomorfier af V netop er parallelprojektionerne.

Eksempel. En endomorfi f af et vektorrum (V, L) siges at være nilpotent, dersom der findes et $p \in \mathbb{N}$, således at $f^p = 0$, hvor 0 betegner nulafbildningen af V . Lad f være en sådan afbildning, og antag, at $\dim V \geq 1$. Idet 0 ikke er injektiv, kan f ikke være injektiv. Tallet 0 er altså egenverdi for f . På den anden side gælder, som man let ser, at hvis λ er egenverdi for en endomorfi g , så er λ^p egenverdi for g^p . Da $0 (= f^p)$ ikke har andre egenverdier end 0, sluttet, at f ikke har andre egenverdier end 0.

6.2. Karakteristisk polynomium.

To matricer $\underline{A}, \underline{B} \in M_{n,n}(L)$ siges at være regulær-ækvivalente, dersom der findes en regulær matrix $\underline{S} \in M_{n,n}(L)$, således at $\underline{B} = \underline{S}\underline{A}\underline{S}^{-1}$. Det eftervises let, at den herved definerede relation i $M_{n,n}(L)$ er en ækvivalensrelation. Det noteres (se side 4.3.3), at to matricer fra $M_{n,n}(L)$ er regulær-ækvivalente, hvis og kun hvis de hører til de samme endomorfier af et n -dimensionalt vektorrum over L for forskellige basisvalg. (Heraf ses i øvrigt på ny, at relationen er en ækvivalensrelation.)

Ved det karakteristiske polynomium for en matrix $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_{n,n}(L)$ forstås polynomiet

$$p_{\underline{A}}(t) = \det(\underline{A} - t\underline{E}) = \begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-t \end{vmatrix},$$

hvor vi både for $L = \mathbb{R}$ og $L = \mathbb{C}$ skal opfatte t som en kompleks variabel. Det ses, at $p_{\underline{A}}(t)$ har grad n . De komplekse rødder i $p_{\underline{A}}(t)$ kaldes $\underline{A}$'s karakteristiske rødder. Ved rodmultipliciteten (eller den algebraiske multiplicitet) $\text{rm } \lambda$ af et komplekst tal λ forstås multipliciteten af λ som rod i $p_{\underline{A}}(t)$; der gælder altså $\text{rm } \lambda \geq 1$, hvis og kun hvis λ er en karakteristisk rod. Er $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de indbyrdes forskellige karakteristiske rødder for $\underline{A}$, gælder som bekendt $\text{rm } \lambda_1 + \dots + \text{rm } \lambda_p = n$.

Regulær-ækvivalente matricer har samme karakteristiske polynomium.

Beris. Antag, at $\underline{B} = \underline{S}\underline{A}\underline{S}^{-1}$. For ethvert $t \in \mathbb{C}$ gælder da

$$\begin{aligned} \det(\underline{B} - t\underline{E}) &= \det(\underline{S}\underline{A}\underline{S}^{-1} - t\underline{E}) \\ &= \det(\underline{S}\underline{A}\underline{S}^{-1} - \underline{S}(t\underline{E})\underline{S}^{-1}) \\ &= \det \underline{S}(\underline{A} - t\underline{E})\underline{S}^{-1} \\ &= \det \underline{S} \det(\underline{A} - t\underline{E}) \det \underline{S}^{-1} \\ &= \det(\underline{A} - t\underline{E}), \end{aligned}$$

hvormed $P_{\underline{B}}(t) = P_{\underline{A}}(t)$. $\square$

Lad herefter f være en endomorfi af et n -dimensionalt vektorrum (V, L) , og lad $\underline{A} \in M_{n,n}(L)$ være den til f hørende matrix m.h.t. en valgt basis. Af det foregående fremgår, at det har god mening at definere det karakteristiske polynomium $P_f(t)$ for f som det karakteristiske polynomium for $\underline{A}$. Rødderne i det karakteristiske polynomium kaldes da også for f 's karakteristiske rødder, og ved rodmultipliciteten af et tal $\lambda \in \mathbb{C}$ m.h.t. f forstås rodmultipliciteten af λ m.h.t. $\underline{A}$.

For en vilkårlig skalar $\lambda \in L$ er $\text{em} \lambda$ defineret som dimensionen af kernen for $f - \lambda e$. Idet der til $f - \lambda e$ m.h.t. den valgte basis hører matrixen $\underline{A} - \lambda \underline{E}$, følger umiddelbart af kendte sætninger (sml. side 2.2.2 og side 4.2.4):

For enhver skalar $\lambda \in L$ gælder $\text{em } \lambda = n - \text{rg}(\underline{A} - \lambda \underline{E})$.

At denne sætning fremgår, at en skalar $\lambda \in L$ er en egen værdi for f , hvis og kun hvis $n - \text{rg}(\underline{A} - \lambda \underline{E}) \geq 1$, altså hvis og kun hvis $\text{rg}(\underline{A} - \lambda \underline{E}) < n$. Dette sidste er ensbetydende med, at $\underline{A} - \lambda \underline{E}$ er ikke-regulær, (sml. side 4.4.2), hvilket igen er ensbetydende med, at $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$, (sml. side 5.2.3). Vi får derfor:

Egen værdierne for f er de karakteristiske rødder for f , som tilhører L . For $L = \mathbb{C}$ er altså egen værdierne netop de karakteristiske rødder, for $L = \mathbb{R}$ er egen værdierne de eventuelle reelle karakteristiske rødder.

Vi skal dernæst vise:

For enhver skalar $\lambda \in L$ gælder $\text{em } \lambda \leq \text{rm } \lambda$.

Beris. For $\text{em } \lambda = 0$ er der intet at vise. Antag, at $\text{em } \lambda \geq 1$, og vælg en basis for V , således at de første $\text{em } \lambda$ basisvektorer udgør en basis for K_λ . Den til f hørende matrix m.h.t. en sådan basis får da formen

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} \lambda \underline{E} & \underline{B} \\ \underline{0} & \underline{C} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{E}$ er en $(\text{em } \lambda \times \text{em } \lambda)$ -enhedsmatrix. Ved successiv udvikling af $\det(\underline{A}_1 - t \underline{E})$ efter de første $\text{em } \lambda$ søjler får vi $\det(\underline{A}_1 - t \underline{E}) = (\lambda - t)^{\text{em } \lambda} \cdot q(t)$, hvor $q(t) = \det(\underline{C} - t \underline{E})$. Heraf fremgår umiddelbart, at $\text{em } \lambda \leq \text{rm } \lambda$. $\square$

Vi har tidligere fundet en "geometrisk" karakterisering af de diagonaliserbare endomorfier, (sml. side 6.1.4). Ved brug af det foregående kan vi nu få en "algebraisk" karakterisering:

Endomorfien f er diagonaliserbar, hvis og kun hvis alle dens karakteristiske rødder tilhører L og der for enhver karakteristisk rod λ gælder $rm \lambda = n - rg(A - \lambda E)$. Er f diagonaliserbar, så er de til f hørende diagonalmatricer netop de diagonalmatricer hvis diagonalelementer er de karakteristiske rødder, idet hver karakteristisk rod λ forekommer $rm \lambda$ gange.

Beris. Det vides, at summen af rodmultiplaciteterne for samtlige karakteristiske rødder er n . I det foregående er vist, at hvis λ er en egenverdi, så er λ også en karakteristisk rod, og der gælder $em \lambda = n - rg(A - \lambda E) \leq rm \lambda$. Sammenholdes dette med den tidligere karakterisering af de diagonaliserbare endomorfier, fås det ønskede. $\square$

En matrix fra $M_{n,n}(L)$ siges at være diagonaliserbar, dersom den er regulær-ækvivalent med en diagonalmatrix. Er f og A som i det foregående, så er altså A diagonaliserbar, hvis og kun hvis f er diagonaliserbar. Sætningen ovenfor kan derfor fortolkes som en sætning om matrixer:

En matrix $\underline{A} \in M_{n,n}(L)$ er diagonaliserbar, hvis og kun hvis alle dens karakteristiske rødder tilhører L og der for enhver karakteristisk rod λ gælder $\text{rm} \lambda = n - \text{rg}(\underline{A} - \lambda \underline{E})$. Er $\underline{A}$ diagonaliserbar, så er $\underline{A}$ regulær-ækvivalent med netop de diagonalmatrixer hvis diagonalelementer er de karakteristiske rødder, idet hver karakteristisk rod λ forekommer $\text{rm} \lambda$ gange.

Vi anfører endelig, at man naturligt kan definere en egenverdi for en matrix $\underline{A} \in M_{n,n}(L)$ som en karakteristisk rod for $\underline{A}$, der tilhører L , og egenverdimultipliciteten for en skalar $\lambda \in L$ m.h.t. $\underline{A}$ som tallet $n - \text{rg}(\underline{A} - \lambda \underline{E})$. Er f en endomorfi af et n -dimensionalt vektorrum (V, L) , hvortil der for et passende basisvalg hører matrixen $\underline{A}$, så er altså egenverdierne for $\underline{A}$ netop egenverdierne for f , (se side 6.2.3), og enhver skalar $\lambda \in L$ har samme egenverdimultiplicitet m.h.t. $\underline{A}$ som m.h.t. f , (se side 6.2.3).

6.3. Triagonalisering.

Lad f være en endomorfi af et n -dimensionalt vektorrum (V, L) . Vi siger, at f er triagonaliserbar, dersom der findes en basis for V m.h.t. hvilken den til f hørende matrix er en øvre trekantsmatrix. Herom gælder:

Endomorfien f er triagonaliserbar, hvis og kun hvis alle dens karakteristiske rødder tilhører L . (For $L = \mathbb{C}$ er f altså sikkert triagonaliserbar, for $L = \mathbb{R}$ er f triagonaliserbar, hvis og kun hvis enhver karakteristisk rod er reel.)

Bevis. Antag først, at f er triagonaliserbar, og lad $\underline{A} = (a_{ij})_{n,n}$ være en til f hørende øvre trekantsmatrix. Vi har da åbenbart $p_f(t) = (a_{11} - t) \cdots (a_{nn} - t)$. De karakteristiske rødder er altså netop diagonallementerne i $\underline{A}$, og dermed elementer i L . Det omvendte vises ved induktion efter n . For $n=1$ er det intet at vise. Antag, at påstanden gælder for alle dimensionsstal $\leq n-1$, og lad f være en endomorfi af et n -dimensionalt vektorrum (V, L) , således at alle f 's karakteristiske rødder tilhører L . Lad λ_1 være en af de karakteristiske rødder. Da λ_1 tilhører L , er λ_1 tillige en egen-værdi. Lad $\underline{e}_1$ være en til λ_1 hørende egenvektor, lad U være det af $\underline{e}_1$ frembragte 1-dimensionale under-rum, lad $U^\sim$ være et til U komplementært under-rum af V , og lad $(\underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$ være en basis for $U^\sim$. Sættet $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$ er da en basis for V . Lad $\underline{A} = (a_{ij})_{n,n}$ være den til f hørende matrix m.h.t. denne basis;

der gælder da $a_{11} = \lambda_1$ og $a_{i1} = 0$ for $i = 2, \dots, n$. Lad p betegne projektionen af V på $U^\sim$ langs U ; den til endomorfien $p \circ f: U^\sim \rightarrow U^\sim$ hørende matrix m.h.t. basen $(\underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$ er da $(n-1) \times (n-1)$ -matricen

$(a_{ij})_{i=2, \dots, n; j=2, \dots, n}$. Ved udvikling af $\det(A - tE)$ efter første søjle får vi derfor $P_f(t) = (\lambda_1 - t) P_{p \circ f}(t)$. Heraf fremgår umiddelbart, at enhver karakteristisk rod for $p \circ f$ tillige er karakteristisk rod for f , og dermed ifølge det givne element i L . Ifølge induktionsantagelsen er $p \circ f$ derfor diagonaliserbar. Lad $(\tilde{\underline{e}}_2, \dots, \tilde{\underline{e}}_n)$ være en basis for $U^\sim$ m.h.t. hvilken den til $p \circ f$ hørende matrix $(b_{ij})_{n-1, n-1}$ er en øvre trekantsmatrix. Den til f hørende matrix m.h.t. basen $(\underline{e}_1, \tilde{\underline{e}}_2, \dots, \tilde{\underline{e}}_n)$ bliver da af formen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & b_{11} & \dots & b_{1, n-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1, n-1} \end{pmatrix},$$

altså, som ønsket, en øvre trekantsmatrix. $\square$

Idet en matrix $\underline{A} \in M_{n,n}(L)$ siges at være triagonaliserbar, dersom den er regulær-ækvivalent med en øvre trekantsmatrix, får vi umiddelbart af sætningen ovenfor:

En matrix $\underline{A} \in M_{n,n}(L)$ er triagonaliserbar, hvis og kun hvis alle dens karakteristiske rødder tilhører L .

Lad fortsat f være en endomorfi af et n -dimensionalt vektorrum (V, L) . For hvert polynomium $p(t) = \alpha_m t^m + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$ med koefficienter fra L bestemmes da ved $p(f) = \alpha_m f^m + \dots + \alpha_1 f + \alpha_0 e$ en endomorfi $p(f)$ af (V, L) . Er $p(f) = 0$, hvor 0 betegner nulafbildningen af (V, L) , vil vi sige, at f er rod i $p(t)$. Ligeledes bestemmes for enhver matrix $\underline{A} \in M_{n,n}(L)$ ved $p(\underline{A}) = \alpha_m \underline{A}^m + \dots + \alpha_1 \underline{A} + \alpha_0 \underline{E}$ en matrix $p(\underline{A})$ tilhørende $M_{n,n}(L)$. Er $\underline{A}$ specielt den til f hørende matrix m.h.t. en valgt basis, så vil $p(\underline{A})$ være den til $p(f)$ hørende matrix m.h.t. den samme basis. Gælder $p(\underline{A}) = \underline{0}$, vil vi sige, at $\underline{A}$ er rod i $p(t)$.

Vi skal vise Hamilton-Cayley's sætning:

Endomorfien f er rod i sit karakteristiske polynomium, altså $p_f(f) = 0$.

Beris. Det er nok at vise sætningen for $L = \mathbb{C}$. Thi heraf vil følge, at der for enhver matrix $\underline{A} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ vil gælde $p_{\underline{A}}(\underline{A}) = \underline{0}$. Og da enhver reel matrix kan opfattes som en kompleks matrix, vil heraf specielt følge, at der for enhver matrix $\underline{A} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gælder $p_{\underline{A}}(\underline{A}) = \underline{0}$. Men af dette sidste følger sætningen for $L = \mathbb{R}$. — Lad derfor f være en endomorfi af et n -dimensionalt vektorrum $(V, \mathbb{C})$. Følge den første af sætningerne ovenfor er f triagonaliserbar; lad $(e_1, \dots, e_n)$ være en basis m.h.t. hvilken den til f hørende matrix $\underline{A} = (a_{ij})_{n,n}$ er en øvre trekantmatrix. Vi har da $p_f(t) = (a_{11} - t) \dots (a_{nn} - t)$. Dette giver $p_f(f) = (a_{11}e - f) \circ \dots \circ (a_{nn}e - f)$. Vi sætter nu $g_i = a_{ii}e - f$ for $i = 1, \dots, n$, og får dermed $p_f(f) = g_1 \circ \dots \circ g_n$.

Endvidere får vi

$$(1) \quad g_i(e_j) = a_{ij}e_j - a_{1j}e_1 - \dots - a_{i-1,j}e_{i-1}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Sættes $V_i = \text{span}\{e_1, \dots, e_i\}$ for $i = 1, \dots, n$, følger af (1), at der gælder $g_1(V_1) = \{0\}$ og $g_i(V_i) \subseteq V_{i-1}$ for $i = 2, \dots, n$. Idet $V_n = V$, følger videre heraf, at

$$\begin{aligned} p_f(f)(V) &= g_1 \circ \dots \circ g_n(V_n) \\ &\subseteq g_1 \circ \dots \circ g_{n-1}(V_{n-1}) \\ &\subseteq \dots \subseteq g_1(V_1) = \{0\}. \end{aligned}$$

Dette viser, at $p_f(f) = 0$. $\square$

Hamilton-Cayley's sætning kan åbenbart også formuleres som en sætning om matrixer:

Enhver matrix $A \in M_{n,n}(L)$ er rod i sit karakteristiske polynomium, altså $p_A(A) = 0$.

6.4. Jordan's normal form.

En kvadratisk matrix $\underline{B}$ siges at være en simpel Jordan-matrix, dersom den har formen

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} b & 1 & & & \\ & b & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b \end{pmatrix},$$

hvor alle ikke anførte elementer er 0. En kvadratisk matrix $\underline{C}$ siges at være en Jordan-matrix, dersom den har formen

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} \underline{B}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{B}_q \end{pmatrix},$$

hvor matrixerne $\underline{B}_j$ langs diagonalen er simple Jordan-matricer, og hvor der uden for matrixerne $\underline{B}_j$ står lutter 0'er.

Lad herefter f være en endomorfi af et n -dimensionalt komplekst vektorrum $(V, \mathbb{C})$, og lad $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ være de indbyrdes forskellige karakteristiske rødder for f .

Vi skal vise følgende sætning:

Der findes en basis for V m.h.t. hvilken den til f hørende matrix er en Jordan-matrix af formen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{B}_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \underline{B}_{1\mu_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \underline{B}_{21} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \underline{B}_{2\mu_2} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \underline{B}_{p1} \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & \underline{B}_{p\mu_p} \end{pmatrix},$$

hvor matrixerne $\underline{B}_{i\mu_i}$, $i=1, \dots, p$, $\mu_i=1, \dots, \mu_i$, er simple Jordan-matricer med λ_i i diagonalen.

Som en forberedelse viser vi først to lemma'er. I beviserne for disse inddrages dualitetsteorien som et hjælpemiddel.

Lemma 1. Lad g være en endomorfi af et endelig-dimensionalt vektorrum (U, L) . Der findes da en opspaltning af U som direkte sum af to invariante underrum U_1 og U_2 , således at $g: U_1 \rightarrow U_1$ er nilpotent, og $g: U_2 \rightarrow U_2$ er bijektiv.

Beris. Lad U' være et vektorrum over L , som er i dualitet med U , og lad h være den til g duale endomorfi af U' . Sæt

$$U_1 = \{ u \in U \mid \exists i \in \mathbb{N} : g^i(u) = 0 \}$$

og

$$U'_1 = \{ u' \in U' \mid \exists i \in \mathbb{N} : h^i(u') = 0 \}.$$

Det vises let, at U_1 og U'_1 er underrum. Det påstås, at U_1 og U'_1 er i dualitet ved restriktionen af den givne bilinearform til $U_1 \times U'_1$. På grund af den fuldstændige symmetri mellem U_1 og U'_1 er det tilstrækkeligt at vise, at der for enhver vektor $u \in U_1 \setminus \{0\}$ findes en vektor $u' \in U'_1$, således at $\langle u, u' \rangle \neq 0$. Lad u være en vektor i $U_1 \setminus \{0\}$, og lad p være det mindste naturlige tal med $g^p(u) = 0$. Vi har da $g^{p-1}(u) \neq 0$, og på grund af dualiteten mellem U og U' findes følgelig en vektor $u'_1 \in U'$ med $\langle g^{p-1}(u), u'_1 \rangle \neq 0$. Da U' har endelig dimension, vil der i følge

$$U' \supseteq h(U') \supseteq h^2(U') \supseteq \dots \supseteq h^n(U') \supseteq \dots$$

gælde lighedstegn fra et vist trin. Betegner r et naturligt tal for hvilket $h^{r+p-1}(U') = h^{r+p}(U')$, findes en vektor $u'_2 \in U'$ med $h^{r+p-1}(u'_1) = h^{r+p}(u'_2)$. Sættes derfor $u' = h^{p-1}(u'_1) - h^p(u'_2)$, fås dels $h^r(u') = 0$, altså $u' \in U'_1$, og dels

$$\begin{aligned} \langle u, u' \rangle &= \langle u, h^{p-1}(u'_1) - h^p(u'_2) \rangle \\ &= \langle u, h^{p-1}(u'_1) \rangle - \langle u, h^p(u'_2) \rangle \\ &= \langle g^{p-1}(u), u'_1 \rangle - \langle g^p(u), u'_2 \rangle \\ &= \langle g^{p-1}(u), u'_1 \rangle - \langle 0, u'_2 \rangle \\ &= \langle g^{p-1}(u), u'_1 \rangle \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

hvor vi har udnyttet, at den duale til $g^?$ er $h^?$. Hermed er vist, at U_1 og U_1' er i dualitet. Sættes nu $U_2 = (U_1')^\circ$, fås $U = U_1 \oplus U_2$, (sml. side 3.1.6). Det er klart, at U_1 er invariant ved g , og at U_1' er invariant ved h . Af det sidste følger, at også U_2 er invariant ved g , (sml. side 3.3.3). At $g: U_1 \rightarrow U_1$ er nilpotent indses på følgende måde. For $\dim U_1 = 0$ er det intet at vise. Antag derfor, at $\dim U_1 \geq 1$, og lad $(e_1, \dots, e_s)$ være en basis for U_1 . For hver basisvektor e_i findes da et $p_i \in \mathbb{N}$, således at $g^{p_i}(e_i) = 0$. Vælges P som det største af tallene p_i , gælder da åbenbart $g^P(u) = 0$ for enhver vektor $u \in U_1$. Endelig bemærkes, at da kernen for $g: U \rightarrow U$ er indeholdt i U_1 , og da U_1 og U_2 danner direkte sum, har $g: U_2 \rightarrow U_2$ kernen $\{0\}$; endomorfien $g: U_2 \rightarrow U_2$ er følgelig bijektiv. $\square$

Lemma 2. Lad g være en nilpotent endomorfi af et endelig-dimensionalt vektorrum (U, L) . Lad p være det mindste naturlige tal for hvilket g^p er nulafbildningen, og lad u_1 være en vektor i U med $g^{p-1}(u_1) \neq 0$. Sættet $(g^{p-1}(u_1), \dots, g(u_1), u_1)$ er da en basis for et invariant underrum U_1 af U , og der findes et til U_1 komplementært invariant underrum U_2 af U .

Bevis. Lad U_1 være det af vektorerne $g^{p-1}(u_1), \dots, g(u_1), u_1$ frembragte underrum. Det er klart, at U_1 er invariant. For at vise, at sættet $(g^{p-1}(u_1), \dots, g(u_1), u_1)$ er en basis for U_1 , skal det vises, at sættet er lineært uafhængigt. Lad $\alpha_{p-1} g^{p-1}(u_1) + \dots + \alpha_1 g(u_1) + \alpha_0 u_1 = 0$ være en lineær relation mellem vektorerne i sættet.

Idet g^q for $q \geq p$ er nulafbildningen, fås

$$\begin{aligned} g^{p-1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i g^i(\underline{u}_1) \right) &= \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i g^{p-1+i}(\underline{u}_1) \\ &= \alpha_0 g^{p-1}(\underline{u}_1). \end{aligned}$$

Da samtidig $g^{p-1}(\underline{0}) = \underline{0}$, får vi altså $\alpha_0 g^{p-1}(\underline{u}_1) = \underline{0}$, og dermed $\alpha_0 = 0$. Hvis $p \geq 2$, fås på tilsvarende måde

$$\begin{aligned} g^{p-2} \left(\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i g^i(\underline{u}_1) \right) &= \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i g^{p-2+i}(\underline{u}_1) \\ &= \alpha_1 g^{p-1}(\underline{u}_1) \\ &= \underline{0}, \end{aligned}$$

hvormed $\alpha_1 = 0$. Fortsættes således, fås idet $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{p-1} = 0$, som ønsket. For at vise den anden påstand vælges et vektorrum U' over L , som er i dualitet med U . Lad h være den til g duale endomorfi af U' . På grund af dualiteten findes en vektor $\underline{u}'_1 \in U'$ med $\langle g^{p-1}(\underline{u}_1), \underline{u}'_1 \rangle \neq 0$. Idet $\langle g^{p-1}(\underline{u}_1), \underline{u}'_1 \rangle = \langle \underline{u}_1, h^{p-1}(\underline{u}'_1) \rangle$, ses, at $h^{p-1}(\underline{u}'_1) \neq \underline{0}$. På den anden side er $h^p: U' \rightarrow U'$ nulafbildningen, thi h^p er den duale til nulafbildningen $g^p: U \rightarrow U$. Af sætningens første påstand følger derfor, at sættet $(h^{p-1}(\underline{u}'_1), \dots, h(\underline{u}'_1), \underline{u}'_1)$ er en basis for et invariant underrum U'_1 af U' . Det påstås, at U_1 og U'_1 er i dualitet. På grund af symmetrien mellem U_1 og U'_1 er det tilstrækkeligt at vise, at der for enhver vektor $\underline{u} = \beta_{p-1} g^{p-1}(\underline{u}_1) + \dots + \beta_1 g(\underline{u}_1) + \beta_0 \underline{u}_1$ i $U_1 \setminus \{\underline{0}\}$ findes en vektor $\underline{u}' \in U'_1$ med $\langle \underline{u}, \underline{u}' \rangle \neq 0$. Lad k være det mindste af tallene $0, 1, \dots, p-1$ for hvilket $\beta_k \neq 0$. Sættes $\underline{u}' = h^{p-1-k}(\underline{u}'_1)$, får vi, idet g^q for $q \geq p$ er nulafbildningen,

$$\begin{aligned}
\langle u, u' \rangle &= \langle u, h^{p-1-k}(u'_1) \rangle \\
&= \langle g^{p-1-k}(u), u'_1 \rangle \\
&= \langle g^{p-1-k} \left(\sum_{i=k}^{p-1} \beta_i g^i(u_1) \right), u'_1 \rangle \\
&= \beta_k \langle g^{p-1}(u_1), u'_1 \rangle + \sum_{i=k+1}^{p-1} \beta_i \langle g^{p-1-k+i}(u_1), u'_1 \rangle \\
&= \beta_k \langle g^{p-1}(u_1), u'_1 \rangle \\
&\neq 0,
\end{aligned}$$

hvormed er vist, at U_1 og U'_1 er i dualitet. Sættes nu $U_2 = (U'_1)^\circ$, er U_2 invariant ved g , (sml. side 3.3.3), og der gælder $U = U_1 \oplus U_2$, (sml. side 3.1.6). $\square$

Vi skal herefter gå over til beviset for sætningen. For $i=1, \dots, p$ sættes $g_i = f - \lambda_i e$. Det bemærkes, at et underrum af V er invariant ved f , hvis og kun hvis det er invariant ved en/enhver af afbildningerne g_i .

Vi skal først søge en opspaltning af V som direkte sum af invariante underrum,

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_p,$$

således at alle endomorfierne $g_i: U_i \rightarrow U_i$ er nilpotente. Ifølge lemma 1 findes komplementære invariante underrum U_i og $U_i^\sim$ af V , således at $g_1: U_1 \rightarrow U_1$ er nilpotent og $g_1: U_1^\sim \rightarrow U_1^\sim$ er bijektiv. Af det sidste følger, at $f: U_1^\sim \rightarrow U_1^\sim$ ikke har λ_1 som egenværdi. For $p=1$ har vi $U_1^\sim = \{0\}$. Thi ellers ville $f: U_1^\sim \rightarrow U_1^\sim$ have mindst en egenværdi $\lambda_1^\sim$; denne egenværdi ville da også være egenværdi for $f: V \rightarrow V$, hvormed

$\lambda_1 \sim \lambda_1$, i strid med en bemærkning ovenfor. For $p=1$ er altså $V=U_1$ en opspaltning af den søgte art. For $p \geq 2$ kan lemma 1 anvendes på $g_2: U_1 \sim \rightarrow U_1 \sim$, hvorefter fås, at der findes komplementære invariante underrum U_2 og $U_2 \sim$ af $U_1 \sim$, således at $g_2: U_2 \rightarrow U_2$ er nilpotent og $g_2: U_2 \sim \rightarrow U_2 \sim$ er bijektiv. Afbildningen $f: U_2 \sim \rightarrow U_2 \sim$ har således hverken λ_1 eller λ_2 som egenværdi. For $p=2$ har vi $U_2 \sim = \{0\}$. Thi ellers ville $f: U_2 \sim \rightarrow U_2 \sim$ have mindst en egenværdi $\lambda_2 \sim$; denne ville da også være egenværdi for $f: V \rightarrow V$, hvormed $\lambda_2 \sim = \lambda_1$ eller $\lambda_2 \sim = \lambda_2$, i strid med en bemærkning ovenfor. For $p=2$ er derfor $V = U_1 \oplus U_2$ en opspaltning af den søgte art. For $p \geq 3$ kan lemma 1 dernæst anvendes på $g_3: U_2 \sim \rightarrow U_2 \sim$, etc. Efter p skridt har vi da en opspaltning $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_p \oplus U_p \sim$ af V som direkte sum af invariante underrum, således at alle afbildningerne $g_i: U_i \rightarrow U_i$ er nilpotente, og således at ingen af egenværdierne $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ er egenværdi for $f: U_p \sim \rightarrow U_p \sim$. Af det sidste følger som før, at $U_p \sim = \{0\}$, og vi har dermed en opspaltning af den søgte art.

Vi skal dernæst vise, at det er muligt at spalte hvert af underrummene U_i i en direkte sum af invariante underrum,

$$U_i = U_{i1} \oplus \dots \oplus U_{ip_i},$$

således at hvert af underrummene U_{ij} har en basis m.h.t. hvilken den til $f: U_{ij} \rightarrow U_{ij}$ hørende matrix er en simpel Jordan-matrix med λ_i i diagonalen. Lad derfor i være et vilkårligt af tallene

$1, \dots, p$, og betragt endomorfien $g_i: U_i \rightarrow U_i$. Lad p_1 være det mindste naturlige tal for hvilket $g_i^{p_1}: U_i \rightarrow U_i$ er nulafbildningen, og lad u_1 være en vektor i U_i med $g_i^{p_1-1}(u_1) \neq 0$. Ifølge lemma 2 er da sættet $(g_i^{p_1-1}(u_1), \dots, g_i(u_1), u_1)$ en basis for et invariant under rum U_{i1} af U_i , og der findes et til U_{i1} komplementært invariant under rum $U_{i1}^\sim$ af U_i . Hvis U_{i1} er et ægte under rum af U_i , betragtes dernæst endomorfien $g_i: U_{i1}^\sim \rightarrow U_{i1}^\sim$. Lad p_2 være det mindste naturlige tal for hvilket $g_i^{p_2}: U_{i1}^\sim \rightarrow U_{i1}^\sim$ er nulafbildningen, og lad u_2 være en vektor i $U_{i1}^\sim$ med $g_i^{p_2-1}(u_2) \neq 0$. Ifølge lemma 2 er da sættet $(g_i^{p_2-1}(u_2), \dots, g_i(u_2), u_2)$ en basis for et invariant under rum U_{i2} af $U_{i1}^\sim$, og der findes et til U_{i2} komplementært invariant under rum $U_{i2}^\sim$ af $U_{i1}^\sim$. Er U_{i2} et ægte under rum af $U_{i1}^\sim$, kan vi dernæst anvende lemma 2 på $g_i: U_{i2}^\sim \rightarrow U_{i2}^\sim$, etc. Efter endelig mange skridt har vi da en opspaltning $U_i = U_{i1} \oplus \dots \oplus U_{ip_i}$, hvor hvert af under rummene U_{iv_i} er invariant og har en basis af formen

$$(g_i^{p_i-1}(u_{v_i}), \dots, g_i(u_{v_i}), u_{v_i}).$$

Det ses nu umiddelbart, at den til $g_i: U_{iv_i} \rightarrow U_{iv_i}$ hørende matrix m.h.t. den angivne basis har formen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Men heraf følger, at den til $f: U_{iv_i} \rightarrow U_{iv_i}$ hørende matrix får den ønskede form.

Idet vi sammenfatter det foregående, har vi:
 Der findes invariante underrum $U_{i\lambda_i}$, $i=1, \dots, p$, $\lambda_i=1, \dots, \mu_i$,
 og en basis for hvert af disse underrum, således at

$$(1) \quad V = U_{11} \oplus \dots \oplus U_{1\mu_1} \oplus \dots \oplus U_{p1} \oplus \dots \oplus U_{p\mu_p}$$

og således at de til afbildningerne $f: U_{i\lambda_i} \rightarrow U_{i\lambda_i}$ hørende matrixer m.h.t. de betragtede baser er simple Jordan-matrixer med λ_i i diagonalen. Sammenstykes derfor baserne for underrummene $U_{i\lambda_i}$ til et sæt af vektorer, fås en basis for V m.h.t. hvilken den til $f: V \rightarrow V$ hørende matrix er en Jordan-matrix af den ønskede form. Hermed er sætningen bevist.

Idet en permutation af de simple Jordan-matrixer $\underline{B}_{i\lambda_i}$ i $\underline{A}$ modsvarer den samme permutation af underrummene $U_{i\lambda_i}$ i (1) ovenfor, gælder:

Enhver matrix, som fremgår af $\underline{A}$ ved permutation af de simple Jordan-matrixer $\underline{B}_{i\lambda_i}$, er ligledes en til f hørende Jordan-matrix.

Omvendt har vi:

Enhver til f hørende Jordan-matrix fremgår af $\underline{A}$ ved permutation af de simple Jordan-matrixer $\underline{B}_{i\lambda_i}$.

I beviset for denne sætning skal vi benytte følgende skærpelse af lemma 1:

Lemma 3. Lad g være en endomorfi af et endelig-dimensionalt vektorrum (U, L) . Der findes da (en og) kun een opspaltning af U som direkte sum af to invariante underrum U_1 og U_2 , således at $g|_{U_1} \rightarrow U_1$ er nilpotent, og $g|_{U_2} \rightarrow U_2$ er bijektiv.

Beris. Lad $U = U_1 \oplus U_2$ være en vilkårlig opspaltning af den nævnte art, og lad p være det mindste naturlige tal for hvilket $g^p|_{U_1} \rightarrow U_1$ er nulafbildningen. For vilkårlige vektorer $u_1 \in U_1$ og $u_2 \in U_2$, og for ethvert naturligt tal q har vi $g^q(u_1 + u_2) = g^q(u_1) + g^q(u_2)$. For ethvert $q \geq p$ har vi derfor $g^q(u_1 + u_2) = g^q(u_2)$. Heraf følger for det første, at $(g^q)^{-1}(0) = U_1$ for alle $q \geq p$; thi $g^q(u_2)$ er kun 0 for $u_2 = 0$. For det andet følger, at $g^q(U) = U_2$ for alle $q \geq p$; thi $g^q(U_2) = U_2$. Heraf fremgik, at både U_1 og U_2 er entydigt bestemt. $\square$

Vi kan herefter gå over til beviset for sætningen. Lad $\tilde{A}$ være en til f hørende Jordan-matrix, og lad $(e_1, \dots, e_n)$ være den tilhørende basis. Da $\tilde{A}$ er en (øvre) trekantsmatrix, må $\tilde{A}$'s diagonalelementer være de karakteristiske rødder for f , idet hver karakteristisk rod λ_i forekommer $m\lambda_i$ gange. Diagonalelementerne i de i $\tilde{A}$ indgående simple Jordan-matricer er derfor også f 's karakteristiske rødder. Lad $\tilde{B}_{i, \alpha_i}$, $\alpha_i = 1, \dots, \alpha_i$, være de simple Jordan-matricer i $\tilde{A}$, som indeholder den karakteristiske rod λ_i , $i = 1, \dots, p$. (Det er i øvrigt let at se, at $\text{rg}(\tilde{A} - \lambda_i E) = n - \alpha_i$, hvorved $\alpha_i = n - \text{rg}(\tilde{A} - \lambda_i E) = e m \lambda_i$.) Lad $\alpha(i, k)$ betegne antallet af simple $(k \times k)$ -Jordan-matricer $\tilde{B}_{i, \alpha_i}$, $i = 1, \dots, p$, $k = 1, \dots, \alpha_i$. Vi vil vise, at

tallene $\alpha(i, k)$ kan bestemmes alene ud fra f , uafhængigt af basen $(e_1, \dots, e_n)$, hermed vil sætningen være vist. Lad λ_i være en vilkårlig karakteristisk rod, og sæt $g_i = f - \lambda_i E$. Lad U_1 være det underrum af V , som frembringes af de basisvektorer e_j for hvilke den j 'te søjle i $\tilde{A}$ indeholder λ_i i diagonalen. Lad U_2 være det af de øvrige basisvektorer frembragte underrum af V . Underrummene U_1 og U_2 er da komplementære. Ved betragtning af den til g_i hørende matrix $\tilde{A} - \lambda_i E$ ses endvidere, at $g_i: U_1 \rightarrow U_1$ er nilpotent, og at $g_i: U_2 \rightarrow U_2$ er bijektiv. Af lemma 3 følger derfor, at U_1 (og U_2) er bestemt uafhængigt af basen $(e_1, \dots, e_n)$. Betejgnes med $\bar{g}_i$ afbildningen $g_i: U_1 \rightarrow U_1$, er altså $\bar{g}_i$ bestemt uafhængigt af basen. Idet $\text{rg } \bar{g}_i$ er lig med antallet af 1'er i den til $\bar{g}_i$ hørende matrix m.h.t. den givne basis, ses umiddelbart, at

$$\text{rg } \bar{g}_i = 1 \cdot \alpha(i, 2) + 2 \cdot \alpha(i, 3) + \dots + (n-1) \cdot \alpha(i, n)$$

Ved betragtning af de til $\bar{g}_i^2, \dots, \bar{g}_i^{n-1}$ hørende matrixer fås på tilsvarende måde

$$\begin{array}{rcl} \text{rg } \bar{g}_i^2 & = & 1 \cdot \alpha(i, 3) + \dots + (n-2) \cdot \alpha(i, n) \\ \vdots & & \vdots \\ \text{rg } \bar{g}_i^{n-1} & = & 1 \cdot \alpha(i, n). \end{array}$$

Herefter kan $\alpha(i, n), \alpha(i, n-1), \dots, \alpha(i, 2)$ bestemmes successivt. Da der endvidere gælder

$$\text{rm } \lambda_i = 1 \cdot \alpha(i, 1) + 2 \cdot \alpha(i, 2) + \dots + n \cdot \alpha(i, n),$$

kan også $\alpha(i,1)$ bestemmes. Fordi $m\lambda_i$ og tallene α_j^i , $j=1, \dots, n-1$, er givet alene ved f , er sætningen hermed bevist.

Det bemærkes, at enhver diagonalmatrix er en Jordan-matrix, hvori de simple Jordan-matricer er (1×1) -matricer. Hvis f er diagonaliserbar, så er følgelig de til f hørende Jordan-matricer netop de til f hørende diagonalmatricer.

Som tidligere vist er enhver endomorfi af et endelig-dimensionalt komplekst vektorrum triagonaliserbar, (se side 6.3.1). Det noteres, at det foregående indeholder en væsentlig skærpelse af dette resultat.

Det foregående giver åbenbart følgende sætning om matricer:

Enhver matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ er regular-ækvivalent med en Jordan-matrix B . De med A regular-ækvivalente Jordan-matricer er netop de Jordan-matricer, som fremgår af B ved permutation af de i B indgående simple Jordan-matricer.

Bemærk, at der her ved er givet en fuldstændig beskrivelse af ækvivalensklasserne ved ækvivalensrelationen "regular-ækvivalens" i $M_{n,n}(\mathbb{C})$.

Det er klart, at hvis f er en endomorfi af et endelig-dimensionalt reelt vektorrum $(V, \mathbb{R})$, og f har ikke-reelle karakteristiske rødder, så kan der ikke til f høre nogen Jordan-matrix. Uden bevis anføres, at der findes en basis for V m.h.t. hvilken den til f hørende matrix har formen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{B}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{B}_q \end{pmatrix},$$

hvor der uden for matrixerne $\underline{B}_j$ står lutter 0'er, og hvor matrixerne $\underline{B}_j$ er kvadratiske matrixer hidrørende fra de karakteristiske rødder, således at de reelle karakteristiske rødder λ giver simple Jordan-matrixer med λ i diagonalen, mens der hidrørende fra par af konjugerede ikke-reelle karakteristiske rødder λ og $\bar{\lambda}$ får matrixer af formen

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ & & & & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

hvor $a = \operatorname{Re} \lambda$ og $b = \operatorname{Im} \lambda$, og hvor der uden for de anførte (2×2) -matrixer står lutter 0'er. Som i det komplekse tilfælde er $\underline{A}$ entydigt bestemt på nær permutation af matrixerne $\underline{B}_j$.

Det bemærkes, at hvis A er en reel Jordan-matrix, så er den i $M_{n,n}(\mathbb{R})$ regular-ækvivalent med netop de (reelle) Jordan-matricer, som fremgår af A ved permutation af de i A indgående simple Jordan-matricer. Det er nemlig helt klart, at A er regular-ækvivalent med de nævnte matricer; omvendt følger af en sætning ovenfor, at A (endda) i $M_{n,n}(\mathbb{C})$ ikke kan være regular-ækvivalent med andre.

1. Lad f være en endomorfi af et vektorrum (V, L) .
Vis, at hvis U_1 og U_2 er underrum af V , som er invariante ved f , så er også underrummene $U_1 \cap U_2$ og $U_1 + U_2$ invariante ved f .
2. Lad f og g være endomorfier af et vektorrum (V, L) . Vis, at hvis et underrum U er invariant ved f og g , så er det også invariant ved $\alpha f + \beta g$, hvor $\alpha, \beta \in L$, og ved $g \circ f$.
3. Lad $(V, \mathbb{R})$ være vektorrummet af alle vilkårligt ofte differentiable reelle funktioner af en reel variabel. Lad D være endomorfien af V , som til en funktion φ lader svare dens afledede $D\varphi$. Angiv et ægte uendelig-dimensionalt invariant underrum, et invariant underrum af dimension n , hvor $n \in \mathbb{N}$, et 2-dimensionalt invariant underrum U , således at $D: U \rightarrow U$ er bijektiv, samt et 1-dimensionalt invariant underrum U , således at $D: U \rightarrow U$ er bijektiv. Vis, at ethvert $\lambda \in \mathbb{R}$ er egen værdi for D .
4. En endomorfi f af et vektorrum (V, L) siges at være involutorisk, dersom $f^2 = e$. Lad f være en sådan afbildning, og antag, at $\dim V \geq 1$. Vis, at $K_1 \oplus K_{-1} = V$.
5. Om to endomorfier f og g af et vektorrum (V, L) forudsættes, at $g \circ f = f \circ g$. Vis, at ethvert underrum, som er egenrum for en af afbildningerne, er invariant ved den anden.

6. Lad f og g være endomorfier af et vektorrum (V, L) . Vis, at der for alle $\lambda, \mu \in L$ gælder

$$K_{f-\lambda e} = K_{\alpha f - \alpha \lambda e}, \quad \alpha \neq 0,$$

$$K_{f-\lambda e} \cap K_{g-\mu e} \subseteq K_{f+g-(\lambda+\mu)e},$$

$$K_{f-\lambda e} \cap K_{g-\mu e} \subseteq K_{g \circ f - \lambda \mu e},$$

$$K_{f-\lambda e} \subseteq K_{f^p - \lambda^p e}, \quad p \in \mathbb{N},$$

samt, dersom f er bijektiv og $\lambda \neq 0$,

$$K_{f-\lambda e} = K_{f^{-1} - \lambda^{-1} e}.$$

Udled heraf sætninger om egenverdier.

7. En endomorfi f af et 2-dimensionalt vektorrum (V, L) er bestemt ved $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_1$, hvor (e_1, e_2) er en given basis. Find afbildningens invariante under rum, egenvektorer og egenverdier.
8. En endomorfi f af et 3-dimensionalt vektorrum (V, L) er bestemt ved $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = e_1$, hvor (e_1, e_2, e_3) er en given basis. Find afbildningens invariante under rum, egenvektorer og egenverdier.
9. Lad $(V, \mathbb{R})$ være vektorrummet af alle reelle polynomier $p(t)$, og lad f være den ved $p(t) \mapsto t \cdot p(t)$ givne endomorfi af V . Bestem f 's egenverdier og egenvektorer.

10. En endomorfi f af et 4-dimensionalt vektorrum $(V, \mathbb{R})$ har m.h.t. en valgt basis matrixligningen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}.$$

Find f 's egenverdier.

11. En endomorfi f af et 3-dimensionalt vektorrum $(V, \mathbb{R})$ er bestemt ved $f(\underline{e}_1) = 2\underline{e}_3$, $f(\underline{e}_2) = \underline{e}_1 + 3\underline{e}_3$, $f(\underline{e}_3) = \underline{e}_2$, hvor $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ er en given basis for V . Find egenverdierne samt en basis for hvert af de tilhørende egenrum. Undersøg, om f er diagonaliserbar.

12. En endomorfi f af et 2-dimensionalt vektorrum $(V, \mathbb{R})$ har m.h.t. en valgt basis matrixligningen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

hvor $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestem f 's egenverdier og de tilhørende egenrum. Undersøg, om f er diagonaliserbar.

Undersøg på tilsvarende måde endomorfien g med matrixligningen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

13. En endomorfi f af et 2-dimensionalt vektorrum $(V, \mathbb{C})$ har m.h.t. en valgt basis matrixligningen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

hvor $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestem f 's egenverdier og de tilhørende egenrum. Undersøg, om f er diagonaliserbar.

14. Undersøg, om matricen $\underline{A} \in M_{4,4}(\mathbb{C})$ givet ved

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & -2 & 1 \\ -8 & 0 & 13 & -1 \end{pmatrix}$$

er diagonaliserbar.

15. Vis ved et eksempel, at to kvadratiske matricer kan have samme karakteristiske polynomium uden at være regular-ækvivalente.
16. Lad f være en automorfi af et vektorrum $(V, \mathbb{C})$ med dimension $n \in \mathbb{N}$. Udtryk det karakteristiske polynomium for f^{-1} ved det karakteristiske polynomium for f .
17. Lad f være en endomorfi af et vektorrum $(V, \mathbb{C})$ med dimension $n \in \mathbb{N}$, og lad U_1 og U_2 være komplementære invariante under rum af V . Lad f_1 hhv. f_2 betegne endomorfien $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow U_1$ hhv. $f|_{U_2} : U_2 \rightarrow U_2$. Vis, at $P_f(t) = P_{f_1}(t) \cdot P_{f_2}(t)$.

18. Lad f være en endomorfi af et vektorrum (V, L) med dimension $n \in \mathbb{N}$. Vis, at f er nilpotent, hvis og kun hvis $p_f(t) = (-t)^n$.
19. Lad f være en endomorfi af et vektorrum $(V, \mathbb{R})$ med dimension $n \in \mathbb{N}$. Vis, at hvis n er ulige, så har f mindst en egen værdi; vis, at der for $\det f > 0$ findes mindst en positiv egen værdi, og at der for $\det f < 0$ findes mindst en negativ egen værdi. Vis, at hvis n er lige og $\det f < 0$, så har f mindst en positiv og en negativ egen værdi. Vis, at hvis n er lige, så findes en endomorfi g af V med $\det g > 0$, som ingen egen værdier har.
20. Lad $p_A(t) = (-1)^n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0$ være det karakteristiske polynomium for en matrix $A \in M_{n,n}(L)$. Vis, at

$$c_{n-p} = (-1)^{n-p} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p i_1} & \dots & a_{i_p i_p} \end{vmatrix} \quad p=1, \dots, n.$$

De i summationen indgående determinanter kaldes A 's hovedunderdeterminanter af p 'te orden; det er determinanterne af de delmatricer af A , som fremgår af A ved at slette $n-p$ rækker og søjler med samme numre. Begrund, at for regulærekvivalente matricer er summen af hovedunderdeterminanterne af p 'te orden den samme. Betragt specielt tilfældene $p=n$ og $p=1$.

21. Lad $p_A(t) = (-1)^n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0$ være det karakteristiske polynomium for en matrix $A \in M_{n,n}(L)$, og lad $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ være de karakteristiske rødder for A , regnet med multiplisitet. Vis, at

$$c_{n-p} = (-1)^{n-p} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p}, \quad p = 1, \dots, n.$$

Vis, at $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$ og at $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

22. Lad f være en endomorfisme af et endelig-dimensionalt vektorrum (V, L) . Af et resultat i øv. 6 fremgår, at hvis λ er en egenverdi for f , så er λ^p en egenverdi for f^p , hvor $p \in \mathbb{N}$. Lad omvendt μ være en egenverdi for f^p . Vis, at der for $L = \mathbb{C}$ findes en egenverdi λ for f , således at $\lambda^p = \mu$. Vis ved et eksempel, at dette ikke behøver at gælde for $L = \mathbb{R}$.

23. Undersøg, om følgende par af matrixer fra $M_{3,3}(\mathbb{R})$ er regulær-ækvivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Bestem en Jordan-matrix $\underline{B} \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ og en regulær matrix $\underline{S} \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$, således at $\underline{B} = \underline{S} \underline{A} \underline{S}^{-1}$, hvor

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kap. 7. Vektorrum med indre produkt.

7.1. Indre produkt.	7.1.1 - 7.1.12
7.2. Norm.	7.2.1 - 7.2.6
7.3. Adjungeret afbildning.	7.3.1 - 7.3.3
7.4. Dualitet.	7.4.1 - 7.4.3
7.5. Normale afbildninger.	7.5.1 - 7.5.3
7.6. Selvadjungerede afbildninger	7.6.1 - 7.6.3
7.7. Ortogonale og unitære afbildninger.	7.7.1 - 7.7.9
Øvelser	7. øv 1-34

7.1. Indre produkt.

Ved et indre produkt i et vektorrum (V, L) forstås en afbildning $(\underline{u}, \underline{v}) \mapsto \underline{u} \cdot \underline{v}$ af $V \times V$ ind i L med følgende egenskaber:

$$(i) \quad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V : (\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$$

$$(ii) \quad \forall \lambda \in L \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V : (\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda (\underline{u} \cdot \underline{v})$$

$$(iii) \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V : \underline{u} \cdot \underline{v} = \overline{\underline{v} \cdot \underline{u}}$$

$$(iv) \quad \forall \underline{v} \in V : \underline{v} \neq 0 \Rightarrow \underline{v} \cdot \underline{v} > 0$$

(Overstregningen i betingelsen (iii) står for kompleks konjugering, som naturligvis falder bort for $L = \mathbb{R}$.)

Er (V, L) et vektorrum med indre produkt, har vi for alle $\lambda \in L$ og alle $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ (sml. (i) og (ii)):

$$(1) \quad \underline{w} \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \underline{w} \cdot \underline{u} + \underline{w} \cdot \underline{v}$$

$$(2) \quad \underline{u} \cdot (\lambda \underline{v}) = \overline{\lambda} (\underline{u} \cdot \underline{v})$$

Dette vises let ved brug af (i) og (iii) hhv. (ii) og (iii). Endvidere noteres, at der for alle $\underline{u}, \underline{v} \in V$ gælder

$$(3) \quad \underline{u} = 0 \vee \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = 0$$

Dette fås ved at sætte $\lambda = 0$ i (ii) og (2).

De distributive love (i) og (1) kan oplagt udvides til et vilkårligt (endeligt) antal addender.

Det er klart, at et indre produkt i et vektorrum (V, L) inducerer et indre produkt i ethvert underrum af V .

Et endelig-dimensionalt reelt hhv. komplekst vektorrum med indre produkt kaldes et euklidisk hhv. unitært vektorrum.

Ved normen $\|v\|$ af en vektor v i et vektorrum (V, L) med indre produkt forstås tallet $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$, (sml. (iv)). Der gælder $\|0\| = 0$, og $\|v\| > 0$ for $v \neq 0$. Idet $(\lambda v) \cdot (\lambda v) = \lambda \bar{\lambda} (v \cdot v) = |\lambda|^2 (v \cdot v)$, har vi $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ for alle $\lambda \in L$ og alle $v \in V$. En vektor v med $\|v\| = 1$ kaldes en normeret vektor eller en enhedsvektor. For $v \neq 0$ er vektoren $\frac{1}{\|v\|} v$ en normeret vektor; den siges at fremkomme ved normering af v .

Lad herefter (V, L) være et vektorrum med indre produkt.

To vektorer $u, v \in V$ siges at være (indbyrdes) ortogonale, dersom $u \cdot v = 0$; vi skriver da også $u \perp v$. Nulvektoren er ortogonal til samtlige vektorer, (sml. (3)), og er den eneste vektor med denne egenskab, (sml. (iv)). Et sæt af vektorer siges at være et ortogonalt sæt, dersom vilkårlige to af sættets vektorer er ortogonale; det tomme sæt og alle sæt bestående af een vektor er således trivielt ortogonale sæt. Et ortogonalt sæt kaldes et ortonormalt sæt, dersom enhver vektor i sættet er normeret; det tomme sæt er trivielt ortonormalt. Hvis V har endelig dimension, forstås ved en ortogonal hhv. ortonormal basis for V en basis, som er et ortogonalt hhv. ortonormalt sæt.

Ethvert ortogonalt sæt, som ikke indeholder $\underline{0}$, er lineært uafhængigt.

Bevís. For det tomme sæt er det intet at vise. Lad derfor $(x_1, \dots, x_p)$ være et ortogonalt sæt, som ikke indeholder $\underline{0}$, og lad $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = \underline{0}$ være en lineær relation mellem sætets vektorer. For et vilkårligt af tallene $i = 1, \dots, p$ gælder nu

$$\begin{aligned} (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p) \cdot x_i &= \lambda_1 (x_1 \cdot x_i) + \dots + \lambda_p (x_p \cdot x_i) \\ &= \lambda_i (x_i \cdot x_i). \end{aligned}$$

Da samtidig $\underline{0} \cdot x_i = 0$, har vi altså $\lambda_i (x_i \cdot x_i) = 0$. Idet $x_i \cdot x_i > 0$, følger heraf som ønsket, at $\lambda_i = 0$. $\square$

Som en umiddelbar konsekvens heraf har vi:

Ethvert ortonormalt sæt er lineært uafhængigt.

Vi skal dernæst vise:

Lad $(u_1, \dots, u_p)$ være et lineært uafhængigt sæt. Der findes da et ortonormalt sæt $(x_1, \dots, x_p)$, således at $\text{span}\{x_1, \dots, x_q\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_q\}$ for $q = 1, \dots, p$.

Bevís. Først bestemmes et ortogonalt sæt $(x_1, \dots, x_p)$ med den ønskede egenskab. Vi sætter $x_1 = u_1$. Sættet (x_1) er da et ortogonalt sæt med $\text{span}\{x_1\} = \text{span}\{u_1\}$. Vektorerne $x_2, \dots, x_p$ bestemmes herefter successivt efter følgende forskrift: Er $x_1, \dots, x_r$ bestemt, således at $(x_1, \dots, x_r)$ er et ortogonalt sæt med

$\text{span}\{x_1, \dots, x_q\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_q\}$ for $q=1, \dots, r$, sættes

$$(4) \quad x_{r+1} = u_{r+1} - \left(\frac{u_{r+1} \cdot x_1}{x_1 \cdot x_1} \right) x_1 - \dots - \left(\frac{u_{r+1} \cdot x_r}{x_r \cdot x_r} \right) x_r.$$

(Det bemærkes, at x_{r+1} er veldefineret; af $\text{rg}(x_1, \dots, x_r) = \dim \text{span}\{x_1, \dots, x_r\} = \dim \text{span}\{u_1, \dots, u_r\} = \text{rg}(u_1, \dots, u_r) = r$ følger, at sættet $(x_1, \dots, x_r)$ er lineært uafhængigt, og ingen af vektorerne $x_1, \dots, x_r$ er nulvektoren.)

Det påstås, at sættet $(x_1, \dots, x_{r+1})$ er ortogonelt, og at $\text{span}\{x_1, \dots, x_q\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_q\}$ for $q=1, \dots, r+1$.

For at vise det første er det tilstrækkeligt at vise, at $x_{r+1} \cdot x_l = 0$ for $l=1, \dots, r$; dette verificeres ved en simpel udregning. For at vise det andet er det tilstrækkeligt at betragte tilfældet $q=r+1$. Hertil bemærkes, at

$\text{span}\{x_1, \dots, x_r\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_r\}$ implicerer

$\text{span}\{x_1, \dots, x_r, u_{r+1}\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}\}$, og at der ved brug af (4) fås $\text{span}\{x_1, \dots, x_r, u_{r+1}\} =$

$\text{span}\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}\}$, hvilket det ønskede fremgår. Her-

med er bestemt et ortogonalt sæt $(x_1, \dots, x_p)$ med den ønskede egenskab. Specielt har vi $\text{span}\{x_1, \dots, x_p\} =$

$\text{span}\{u_1, \dots, u_p\}$, og dermed $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(u_1, \dots, u_p)$.

Følgelig er sættet $(u_1, \dots, u_p)$ lineært uafhængigt, følger heraf, at også sættet $(x_1, \dots, x_p)$ er lineært uafhængigt.

Følgelig er ingen af vektorerne $x_1, \dots, x_p$ nulvektoren, og ved normering af vektorerne i sættet $(x_1, \dots, x_p)$ fås derfor et ortonormalt sæt med den ønskede egenskab. $\square$

Sætningen ovenfor kaldes Gram-Schmidt's ortonormaliserings sætning. Metoden til successiv bestemmelse af vektorerne $x_1, \dots, x_p$ kaldes ortonormalisering.

Af det foregående fremgår umiddelbart:

Hvis V har endelig dimension, så findes en ortonormal basis for V .

Eksempel. I vektorrummet (L^n, L) defineres et indre produkt ved

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n},$$

kaldet det sædvanlige indre produkt. Den kanoniske basis bliver her ved en ortonormal basis. Åbenbart gælder

$$x_i = \underline{x} \cdot \underline{e}_i,$$

hvor $\underline{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, og

$$\|\underline{x}\|^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$$

for enhver vektor $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in L^n$. $\square$

Eksempel. I analogi med eksemplet ovenfor defineres i $(M_{n,n}(L), L)$ et indre produkt ved

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n},$$

og i $(M_{n,1}(L), L)$ et indre produkt ved

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}.$$

Er $\underline{A} = (a_{ij})$, $\underline{B} = (b_{ij})$ og $\underline{C} = (c_{ij})$ matricer fra $M_{n,n}(L)$ med $\underline{A} \underline{B} = \underline{C}$, fås åbenbart

$$c_{ij} = \underline{a}_{i-} \cdot (\overline{\underline{b}_{|j}})' = (\underline{a}_{i-})' \cdot (\overline{\underline{b}_{|j}}).$$

Er $\underline{A} \in M_{n,n}(L)$ en orthogonal hhv. unitar matrix, altså en regulær matrix med $\underline{A}\underline{A}' = \underline{A}'\underline{A} = \underline{E}$ hhv. $\underline{A}\underline{A}^* = \underline{A}^*\underline{A} = \underline{E}$, får vi derfor

$$\delta_{ij} = \underline{a}_{i-} \cdot \underline{a}_{j-} = \underline{a}_{|i} \cdot \underline{a}_{|j}.$$

Sættet af rækker hhv. søjler er følgelig et ortonormalt sæt af vektorer fra $(M_{n,n}(L), L)$ hhv. $(M_{n,n}(L), L)$. Lad omvendt $\underline{A} \in M_{n,n}(L)$ være en matrix for hvilken sættet af rækker er ortonormalt; der gælder da

$$\delta_{ij} = \underline{a}_{i-} \cdot \underline{a}_{j-}.$$

For $L = \mathbb{R}$ følger heraf $\underline{A}\underline{A}' = \underline{E}$, og for $L = \mathbb{C}$ følger $\underline{A}\underline{A}^* = \underline{E}$. Da ethvert ortonormalt sæt er lineært uafhængigt, sluttes endvidere, at $\underline{A}$ har rækkerang n , og følgelig er regulær. Følgelig gælder dette, at $\underline{A}$ er orthogonal hhv. unitar. Tilsvarende kan vises, at hvis sættet af søjler er ortonormalt, så er $\underline{A}$ orthogonal hhv. unitar. $\square$

Lad herefter (V, L) være et endelig-dimensionelt vektorrum med indre produkt. Er der givet en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ for V , så kan det indre produkt af to vektorer på simpel måde udtrykkes ved vektorernes koordinater. For $\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + \dots + u_n \underline{e}_n$ og $\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n$ fås nemlig

$$\begin{aligned} \underline{u} \cdot \underline{v} &= (u_1 \underline{e}_1 + \dots + u_n \underline{e}_n) \cdot (v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^n u_i \underline{e}_i \cdot v_j \underline{e}_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n u_i \bar{v}_j (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i,$$

altså

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 \bar{v}_1 + \dots + u_n \bar{v}_n.$$

Specielt fås

$$v_i = \underline{v} \cdot \underline{e}_i$$

og

$$\|\underline{v}\|^2 = |v_1|^2 + \dots + |v_n|^2$$

for enhver vektor $\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n$. Sammenlignes med det første eksempel oven for ses, at et sæt $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_p)$ af vektorer fra V er ortonormalt, hvis og kun hvis sættet bestående af vektorernes koordinatsæt er et ortonormalt sæt af vektorer fra $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$, — eller, ved sammenligning med det andet eksempel ovenfor, hvis og kun hvis sættet bestående af vektorernes koordinatrækker hhv. koordinatsøjler er et ortonormalt sæt i $(M_{1,n}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ hhv. $(M_{n,1}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$. At det sidste fremgår ved sammenligning med et resultat i det andet eksempel, at koordinattransformationsmatricen $\underline{S}$ hørende til overgangen fra en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ til en ortonormal basis $(\underline{\tilde{e}}_1, \dots, \underline{\tilde{e}}_n)$ er ortogonal hhv. unitar; thi søjlerne i $\underline{S}$ er koordinatsøjlerne for vektorerne i et ortonormalt sæt — nemlig $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ — m.h.t. en ortonormal basis — nemlig $(\underline{\tilde{e}}_1, \dots, \underline{\tilde{e}}_n)$. Omvendt gælder, at er der givet baser $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\underline{\tilde{e}}_1, \dots, \underline{\tilde{e}}_n)$, således at koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra den ene til den anden basis er ortogonal hhv. unitar, og den ene af de to baser er

ortonormal, så vil også den anden basis være ortonormal.

En matrix $A \in M_{n,n}(L)$ siges at være ortogonal- ækvivalent (for $L=\mathbb{R}$) hhv. unitar-ækvivalent (for $L=\mathbb{C}$) med en matrix $B \in M_{n,n}(L)$, dersom der findes en ortogonal hhv. unitar matrix $S \in M_{n,n}(L)$, således at $B = SAS^{-1}$ ($= SAS'$ hhv. $= SAS^*$). Det eftervises let, at der herved er defineret en ækvivalensrelation i $M_{n,n}(L)$. Af det foregående fremgår, at to matrixer er ortogonal-ækvivalente hhv. unitar-ækvivalente, netop når de hører til de samme endomorfier af et n -dimensionalt vektorrum (V, L) med indre produkt m.h.t. forskellige valg af ortonormale baser. Heraf fremgår i øvrigt på ny, at den betragtede relation er en ækvivalensrelation. Det bemærkes, at ortogonal - hhv. unitar-ækvivalente matrixer specielt er regulær-ækvivalente.

To ikke-tomme delmængder M_1 og M_2 af et vektorrum (V, L) med indre produkt siges at være (indbyrdes) ortogonale, dersom enhver vektor i M_1 er ortogonal til enhver vektor i M_2 ; vi skriver da $M_1 \perp M_2$. For en ikke-tom delmængde M af V defineres $M^\perp$ som mængden af vektorer i V , der er ortogonale til samtlige vektorer i M ; mængden $M^\perp$ kaldes for M 's ortogonal. For ikke-tomme delmængder M_1 og M_2 er $M_1 \perp M_2$ ensbetydende med $M_1 \subseteq M_2^\perp$ og med $M_2 \subseteq M_1^\perp$. Det eftervises let, at $M^\perp$ er et underrum, at der gælder $M \subseteq M^{\perp\perp}$ (hvor $M^{\perp\perp}$ står for $(M^\perp)^\perp$), og at $M_1 \subseteq M_2$ implicerer $M_2^\perp \subseteq M_1^\perp$. Det noteres, at ethvert underrum U danner direkte sum med sit ortogonal $U^\perp$.

For ethvert endelig-dimensionalt underrum U af V gælder $U \oplus U^\perp = V$.

Beris. For $\dim U = 0$ er det intet at vise. Antag derfor, at $\dim U = p \in \mathbb{N}$, og lad $(e_1, \dots, e_p)$ være en ortonormal basis for U . For en vilkårlig vektor $v \in V$ sætter vi

$$(5) \quad \text{pr}(v) = (v \cdot e_1) e_1 + \dots + (v \cdot e_p) e_p.$$

Vi har da $\text{pr}(v) \in U$. Endvidere har vi for $i=1, \dots, p$

$$\begin{aligned} (v - \text{pr}(v)) \cdot e_i &= v \cdot e_i - (v \cdot e_1) e_1 \cdot e_i - \dots - (v \cdot e_p) e_p \cdot e_i \\ &= v \cdot e_i - v \cdot e_i = 0, \end{aligned}$$

hvoraf følger, at $v - \text{pr}(v) \in U^\perp$. Fremstillingen $v = \text{pr}(v) + (v - \text{pr}(v))$ er altså en fremstilling af v som sum af en vektor fra U og en vektor fra $U^\perp$. Heraf følger, at $U + U^\perp = V$. Og da som tidligere bemærket ethvert underrum danner direkte sum med sit ortogonal, følger påstanden. $\square$

Af sætningen fremgår, at hvis U er et endelig-dimensionalt underrum, så er $U^\perp$ både ortogonalt og komplementært til U . Er omvendt U og U_1 underrum af V med $U \perp U_1$ og $U \oplus U_1 = V$, så gælder $U_1 = U^\perp$. Af $U \perp U_1$ følger nemlig $U_1 \subseteq U^\perp$. Og fremstilles en vektor $v \in U^\perp$ på formen $v = u + u_1$ med $u \in U$ og $u_1 \in U_1$, har vi både $v - u_1 = u$ og $v - u_1 \perp u$, og dermed $u = 0$, altså $v = u_1 \in U_1$; dette viser, at $U^\perp \subseteq U_1$. Vi har altså: Til et underrum U af V findes højst et underrum, som er både ortogonalt og komplementært til U ; findes et, må dette

være $U^\perp$, som der også kaldes U 's ortogonale komplement. Ethvert endelig-dimensionalt under- rum har et ortogonalt komplement, hvorimod et uendelig-dimensionalt underrum ikke nød- vendigvis har et ortogonalt komplement.

Er U et underrum af V , og har V endelig dimension, så er ifølge sætningen ovenfor både U og $U^{\perp\perp}$ ortogonalt komplement til $U^\perp$; der gælder derfor $U = U^{\perp\perp}$. Heraf følger, at der for enhver ikke-tom delmængde M af V gælder $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$ (hvor $M^{\perp\perp\perp}$ står for $(M^{\perp\perp})^\perp$). (gælder også hvis $\dim V = \infty$)

Er U et underrum af V , og har U et ortogo- nalt komplement, kaldes projektionen af V på U langs $U^\perp$ også for ortogonalprojektionen af V på U . Af beviset for sætningen ovenfor fremgår, at hvis U har endelig dimension, og $(e_1, \dots, e_p)$ er en orto- normal basis for U , så er ortogonalprojektionen af V på U netop den ved (5) definerede afbildning pr. (Sml. i øvrigt (4) i beviset for ortonormaliserings- sætningen: Sættes $e_j = \|x_j\|^{-1} x_j$, fås $(x_{r+1}, x_j)(x_j, x_j)^{-1} x_j = (x_{r+1}, e_j) e_j$; sættes $U_k = \text{span} \{x_1, \dots, x_k\}$, er vektoren x_{r+1} altså bestemt som x_{r+1} 's komponent efter $U_r^\perp$ m.h.t. fremstillingen $U_r \oplus U_r^\perp = U_{r+1}$.)

Bemærkning. I vektorrummet af geometriske vektorer i planen hhv. rummet er "skalarproduktet" et indre produkt. (Sml. i øvrigt side 7.7.5.)

Eksempel. Lad (V, L) være et vektorrum af dimension $n \in \mathbb{N}$. For enhver basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ defineres da ved

$$(x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n) \cdot (y_1 \underline{e}_1 + \dots + y_n \underline{e}_n) = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

et indre produkt i V . Basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ bliver her ved en ortonormal basis. (Sml. i øvrigt eksemplerne side 7.1.5-7.1.6.)

Eksempel. Mængden af følger $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^{\mathbb{N}}$ for hvilke rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ er konvergent udgør et under- rum af $(L^{\mathbb{N}}, L)$, som betegnes $l_2(L)$. For at indse dette bemærkes, at der for $x, y \in L$ gælder

$$(6) \quad 2|xy| = |x|^2 + |y|^2 - (|x| - |y|)^2 \leq |x|^2 + |y|^2,$$

og dermed

$$(7) \quad |x+y|^2 \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|xy| \leq 2(|x|^2 + |y|^2).$$

At (7) sluttes, at vi for $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_2(L)$ og $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_2(L)$ har $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} + (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_2(L)$; endvidere har vi opløst $\lambda(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_2(L)$ for $\lambda \in L$ og $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_2(L)$. Heraf fremgår, at $l_2(L)$ er et under- rum. I $l_2(L)$ defineres et indre produkt ved

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n},$$

idet man bemærker, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ er absolut konvergent ifølge (6).

Eksempel. I vektorrummet af alle reelle eller komplekse kontinuerte funktioner på et interval $[a, b]$ defineres ved

$$\varphi \cdot \psi = \int_a^b \varphi(t) \overline{\psi(t)} dt$$

et indre produkt, kaldet det sædvanlige indre produkt.

7.2. Norm.

Ved en norm i et vektorrum (V, L) forstås en afbildning $v \mapsto \|v\|$ af V ind i $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ med følgende egenskaber:

$$(i) \quad \forall u, v \in V : \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$(ii) \quad \forall \lambda \in L \quad \forall v \in V : \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

$$(iii) \quad \forall v \in V : v \neq 0 \Rightarrow \|v\| > 0$$

Betingelsen (i) kaldes trekantsuligheden. Et vektorrum, som er forsynet med en norm, kaldes et normeret vektorrum.

Sættes $\lambda = -1$ i (ii) fås, at der for alle $v \in V$ gælder $\| -v \| = \|v\|$. Sættes $\lambda = 0$ i (ii) fås $\|0\| = 0$.

Det eftervises let, at et normeret vektorrum bliver et metrisk rum ved afstandsfunktionen $\text{dist}(u, v) = \|u - v\|$.

Lad herefter (V, L) være et vektorrum med indre produkt. Vi skal vise, at der da ved

$$v \mapsto \|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

defineres en norm i (V, L) ; denne norm siges at være udsprunget af det indre produkt. Vi har allerede tidligere overvejet, at $\|0\| = 0$, og at (ii) og (iii) er opfyldt, (smlgn. side 7.1.2). For at eftervise (i), viser vi først Cauchy-Schwarz's ulighed: For alle $u, v \in V$ gælder

$$(1) \quad |u \cdot v| \leq \sqrt{u \cdot u} \cdot \sqrt{v \cdot v}.$$

Beris. For $\underline{u} = \underline{0}$ er uligheden øjensynlig opfyldt, endda med lighedstegn. Antag derfor, at $\underline{u} \neq \underline{0}$. For alle $\lambda \in L$ gælder nu

$$(2) \quad (\lambda \underline{u} + \underline{v}) \cdot (\lambda \underline{u} + \underline{v}) = \lambda \bar{\lambda} \underline{u} \cdot \underline{u} + \lambda \underline{u} \cdot \underline{v} + \bar{\lambda} \underline{v} \cdot \underline{u} + \underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0.$$

Indsættes specielt $\lambda = -\frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\underline{u} \cdot \underline{u}}$, fås

$$\frac{|\underline{u} \cdot \underline{v}|^2}{\underline{u} \cdot \underline{u}} - \frac{|\underline{u} \cdot \underline{v}|^2}{\underline{u} \cdot \underline{u}} - \frac{|\underline{u} \cdot \underline{v}|^2}{\underline{u} \cdot \underline{u}} + \underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0,$$

altså

$$(3) \quad \frac{1}{\underline{u} \cdot \underline{u}} \left(-|\underline{u} \cdot \underline{v}|^2 + (\underline{u} \cdot \underline{u})(\underline{v} \cdot \underline{v}) \right) \geq 0,$$

hvoraf det ønskede fremgår. $\square$

Det noteres, at der gælder lighedstegn i (1), hvis og kun hvis sættet $(\underline{u}, \underline{v})$ er lineært afhængigt. Er nemlig sættet lineært afhængigt, ses ved indskættelse af $\underline{u} = \mu \underline{v}$ eller $\underline{v} = \mu \underline{u}$, at lighedstegnet gælder. Gælder omvendt lighedstegnet, så har vi enten $\underline{u} = \underline{0}$, eller $(\lambda \underline{u} + \underline{v}) \cdot (\lambda \underline{u} + \underline{v}) = 0$, altså $\lambda \underline{u} + \underline{v} = \underline{0}$, med den anførte værdi af λ ; i begge tilfælde er sættet lineært afhængigt.

Vi kan nu efterviser betingelsen (i) ovenfor. Vi har

$$\begin{aligned} \|\underline{u} + \underline{v}\|^2 &= (\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} + \underline{v}) \\ &= \underline{u} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{u} + \underline{v} \cdot \underline{v} \\ &= \underline{u} \cdot \underline{u} + 2 \operatorname{Re}(\underline{u} \cdot \underline{v}) + \underline{v} \cdot \underline{v} \\ &\leq \underline{u} \cdot \underline{u} + 2 |\underline{u} \cdot \underline{v}| + \underline{v} \cdot \underline{v} \\ &\leq \underline{u} \cdot \underline{u} + 2 \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}} + \underline{v} \cdot \underline{v} \\ &= (\sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} + \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}})^2 \\ &= (\|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|)^2, \end{aligned}$$

hvor der ved den sidste vurdering er benyttet Cauchy-Schwarz's ulighed. Heraf følger (i). Det noteres, at det sidste ulighedstegn som ovenfor bemærket er et lighedstegn, hvis og kun hvis sættet (u, v) er lineært afhængigt. Er dette opfyldt, har vi enten $u = \mu v$ eller $v = \mu u$ for en skalar $\mu \in L$. Antages, at $u = \mu v$, får $\operatorname{Re}(u \cdot v) = \operatorname{Re}(\mu v \cdot v) = \operatorname{Re}(\mu)(v \cdot v)$ og $|u \cdot v| = |\mu|(v \cdot v)$. Som betingelse for, at også det første ulighedstegn er et lighedstegn, får vi derfor, at der enten gælder $v = u = 0$, eller $\operatorname{Re}(\mu) = |\mu|$, altså μ reel og ikke-negativ. Dette kan ialt sammenfattes i følgende: Lighedstegnet gælder i (i), hvis og kun hvis den ene af de to vektorer fremgår af den anden ved multiplikation med en reel ikke-negativ skalar. (Det anføres, at for en norm, som ikke udspringer af et indre produkt, kan der godt gælde lighedstegn i (i) uden at betingelsen er opfyldt.)

For to vilkårlige vektorer u og v i et vektorrum med indre produkt gælder Pythagoras's sætning:

$$u \perp v \Rightarrow \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2,$$

Dette fremgår af, at $\|u+v\|^2 = (u+v) \cdot (u+v) = u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 + u \cdot v + v \cdot u$. Heraf ses tillige, at for $L = \mathbb{R}$ gælder også det omvendte. Ved induktion fås, at er $(v_1, \dots, v_p)$ et ortogonelt sæt, så gælder

$$\|v_1 + \dots + v_p\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_p\|^2.$$

Lad (V, L) være et vektorrum med indre produkt, lad U være et underrum af V , som har et ortogonalt komplement, og lad p_U betegne ortogonalprojektionen af V på U . Det påstås da, at der for enhver vektor $x \in V$ og enhver vektor $u \in U \setminus \{p_U(x)\}$ gælder

$$\|x - p_U(x)\| < \|x - u\|;$$

ortogonalprojektionen af x kan altså karakteriseres som den vektor i U , der har mindst afstand fra x . Der gælder nemlig $x - p_U(x) \in U^\perp$, og $p_U(x) - u \in U$, og dermed $x - p_U(x) \perp p_U(x) - u$. Ved brug af Pythagoras' sætning giver dette

$$\begin{aligned} \|x - u\|^2 &= \|(x - p_U(x)) + (p_U(x) - u)\|^2 \\ &= \|x - p_U(x)\|^2 + \|p_U(x) - u\|^2, \end{aligned}$$

hvoraf påstanden fremgår. Endvidere gælder for enhver vektor $x \in V$

$$\|p_U(x)\| \leq \|x\|$$

og

$$\|p_U(x)\| = \|x\| \iff x \in U.$$

Idet $p_U(x) \perp x - p_U(x)$, får vi nemlig ved brug af Pythagoras' sætning

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|p_U(x) + (x - p_U(x))\|^2 \\ &= \|p_U(x)\|^2 + \|x - p_U(x)\|^2, \end{aligned}$$

hvoraf påstanden følger.

Vi anfører til sidst, at man i et reelt vektorrum $(V, \mathbb{R})$ med indre produkt kan definere en vinkel ϑ , hvor $0 \leq \vartheta \leq \pi$, mellem to fra 2 forskellige vektorer u og v ved

$$\vartheta = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|};$$

af Cauchy-Schwarz's ulighed følger, at ϑ er veldefineret

Bemærkning. I vektorrummet af geometriske vektorer i rummet er afbildningen $v \mapsto |v|$ en norm. Idet $|v| = \sqrt{v \cdot v}$, udspringer denne norm af skalarproduktet. (Sml. i øvrigt side 1.1.5.)

Eksempel. I (L^n, L) defineres normen ved

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|,$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

At den første og den sidste af disse afbildninger faktisk er normer indses let. Den anden udspringer af det sædvanlige indre produkt, og er derfor også en norm.

Herafter er det klart, at der i et vilkårligt vektorrum (V, L) af dimension $n \in \mathbb{N}$ efter valg af basis $(e_1, \dots, e_n)$ defineres normen ved

$$x \mapsto \|x\|_1 = \|(x_1, \dots, x_n)\|_1,$$

$$x \mapsto \|x\|_2 = \|(x_1, \dots, x_n)\|_2,$$

$$\underline{x} \mapsto \|\underline{x}\|_{\infty} = \|(x_1, \dots, x_n)\|_{\infty},$$

$$\text{hvor } \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n.$$

Eksempel. I vektorrummet af alle reelle eller komplekse kontinuerte funktioner på et interval $[a, b]$ defineres normer ved

$$\varphi \mapsto \|\varphi\|_1 = \int_a^b |\varphi(t)| dt,$$

$$\varphi \mapsto \|\varphi\|_2 = \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi \mapsto \|\varphi\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |\varphi(t)|.$$

At den første og den sidste afbildning faktisk er normer indses let. Den anden udspringer af et tidligere defineret indre produkt (seml. side 7.1.12), og er derfor også en norm.

7.3. Adjungeret afbildning.

Lad overalt i det følgende (V, L) være et vektorrum med indre produkt af dimension $n \in \mathbb{N}$. Vi skal vise:

For enhver endomorfi f af V findes en og kun en afbildning $f^*: V \rightarrow V$ med

$$(1) \quad f(\underline{u}) \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot f^*(\underline{v}), \quad \underline{u}, \underline{v} \in V,$$

og denne afbildning f^* er en endomorfi af V .

Afbildningen f^* kaldes den til f adjungerede afbildning.

Bevn. Først vises entydigheden. Antag, at både f_1^* og f_2^* opfylder (1). For enhver vektor $\underline{v} \in V$ har vi da $\underline{u} \cdot f_1^*(\underline{v}) = \underline{u} \cdot f_2^*(\underline{v})$, altså $\underline{u} \cdot (f_1^*(\underline{v}) - f_2^*(\underline{v})) = 0$, for alle vektorer $\underline{u} \in V$, hvorefter følger, at $f_1^*(\underline{v}) = f_2^*(\underline{v})$. Der gælder derfor $f_1^* = f_2^*$. For at vise eksistensen vælges en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ for V . Vi sætter da

$$(2) \quad f^*(\underline{v}) = \sum_{i=1}^n (\underline{v} \cdot f(\underline{e}_i)) \underline{e}_i$$

for $\underline{v} \in V$. Det er let at se, at den hermed definerede afbildning $f^*: V \rightarrow V$ er lineær. Endvidere gælder for $\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + \dots + u_n \underline{e}_n$ og $\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n$

$$\begin{aligned} \underline{u} \cdot f^*(\underline{v}) &= \underline{u} \cdot \sum_{i=1}^n (\underline{v} \cdot f(\underline{e}_i)) \underline{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{(\underline{v} \cdot f(\underline{e}_i))} \underline{u} \cdot \underline{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (f(\underline{e}_i) \cdot \underline{v}) u_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_{i=1}^n u_i f(\underline{e}_i) \right) \cdot \underline{v} \\
 &= f(\underline{u}) \cdot \underline{v},
 \end{aligned}$$

hvormed er vist, at f^* opfylder (1). $\square$

Lad f være en endomorfi af V , og lad A være den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$. Til den adjungerede afbildning f^* hører da den adjungerede matrix A^* m.h.t. basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$.

Beris. Af det givne følger, at $a_{ij} = f(\underline{e}_j) \cdot \underline{e}_i$. Ved anvendelse af det og af (2) fås

$$\begin{aligned}
 f^*(\underline{e}_j) &= \sum_{i=1}^n (\underline{e}_j \cdot f(\underline{e}_i)) \underline{e}_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \overline{(f(\underline{e}_i) \cdot \underline{e}_j)} \underline{e}_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \overline{a_{ji}} \underline{e}_i,
 \end{aligned}$$

hvoraf påstanden fremgår. $\square$

Lad f være en endomorfi af V , og lad U være et ved f invariant underrum af V . Det ortogonale komplement $U^\perp$ er da invariant ved den adjungerede afbildning f^* .

Beris. Da $f(\underline{u}) \in U$ for enhver vektor $\underline{u} \in U$, har vi $f(\underline{u}) \cdot \underline{v} = 0$, og dermed $\underline{u} \cdot f^*(\underline{v}) = 0$, for alle $\underline{u} \in U$ og alle $\underline{v} \in U^\perp$. Hvoraf følger, at $f^*(\underline{v}) \in U^\perp$ for alle $\underline{v} \in U^\perp$, hvormed $f^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$. $\square$

Idet vi betegner $(f^*)^*$ med f^{**} gælder

$$f^{**} = f.$$

For dannelse af adjungeret afbildning gælder endvidere

$$(f+g)^* = f^* + g^*,$$

$$(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*,$$

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*,$$

$$(f^n)^* = (f^*)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$e^* = e,$$

$$(f^{-1})^* = (f^*)^{-1},$$

$$0^* = 0,$$

hvor e er den identiske afbildning af V , og 0 er nulafbildningen af V ; i den næstsidste påstand er indeholdt, at den adjungerede til en bijektiv endomorfi igen er bijektiv. — Beviserne, som overlades til læseren, kan enten føres på grundlag af selve definitionen af adjungeret afbildning, eller ved benyttelse af, at der til adjungeret afbildning hører adjungeret matrix m.h.t. en valgt ortonormal basis.

7.4. Dualitet.

Vi skal kort gøre rede for hvorledes begreberne ortogonalitet, adjungeret afbildning m.v. kan indordnes under et dualitetssynspunkt.

Det ses umiddelbart, at et reelt vektorrum $(V, \mathbb{R})$ med indre produkt er i dualitet med sig selv ved afbildningen $(u, x) \mapsto \langle u, x \rangle = u \cdot x$. To vektorer er ortogonale, hvis og kun hvis de annullerer hinanden, og for enhver ikke-tom delmængde M af V gælder $M^\perp = M^0$. Resultaterne om ortogonal er derfor indeholdt i resultaterne om annihilator. En basis er ortonormal, hvis og kun hvis den har sig selv til dual basis.

Den adjungerede f^* til en endomorfi f af et endelig-dimensionalt reelt vektorrum $(V, \mathbb{R})$ med indre produkt er identisk med den duale afbildning f' (m.h.t. de duale par V, V og V, V). At der til adjungeret afbildning hører adjungeret matrix er indeholdt i, at der til dual afbildning hører transponeret matrix. Sætningen om, at det ortogonale komplement til et ved f invariant underrum er invariant ved f^* er indeholdt i den tilsvarende sætning om dual afbildning. Reglerne for dannelse af adjungeret afbildning er indeholdt i de tilsvarende regler for dannelse af dual afbildning.

At sætningen om naturlig isomorfi følger, at der for enhver linearform ξ på et endelig-dimensionalt reelt vektorrum $(V, \mathbb{R})$ med indre produkt findes netop en vektor $u \in V$, således at $\xi(x) = x \cdot u$ for alle $x \in V$.

For et komplekst vektorrum $(V, \mathbb{C})$ med indre produkt er afbildningen $(u, v) \mapsto u \cdot v$ ikke en bilinearform på $V \times V$, idet $u \cdot \lambda v = \overline{\lambda} u \cdot v$; vektorrummet er derfor ikke i dualitet med sig selv på samme måde som i det reelle tilfælde. En dualitet, som er nært forbundet med det indre produkt, kan fås ved begrebet konjugering. Ved en konjugering i et komplekst vektorrum $(V, \mathbb{C})$ forstås en afbildning $k: V \rightarrow V$ med følgende egenskaber:

$$\forall v \in V : k^2(v) = v$$

$$\forall u, v \in V : k(u+v) = k(u) + k(v)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall v \in V : k(\lambda v) = \overline{\lambda} k(v)$$

Bemærk, at den første betingelse sikrer, at k er bijektiv. Ethvert komplekst vektorrum har konjugeringen. For endelig-dimensionale vektorrum $(V, \mathbb{C})$ kan dette indses på følgende måde: Lad $(e_1, \dots, e_n)$ være en basis for V ; afbildningen

$$v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \mapsto k(v_1 e_1 + \dots + v_n e_n) = \overline{v_1} e_1 + \dots + \overline{v_n} e_n$$

er da en konjugering i V .

Lad herefter k være en konjugering i et komplekst vektorrum $(V, \mathbb{C})$ med indre produkt. Vektorrummet er da i dualitet med sig selv ved afbildningen $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = u \cdot k(v)$. To vektorer $u, v \in V$ er ortogonale, hvis og kun hvis u og $k(v)$ - og/eller v og $k(u)$ - annullerer hinanden. For en ikke-tom delmængde M gælder $M^\perp = (k(M))^\circ$. Resultaterne om orthogonal er derfor ikke umiddelbart indeholdt i de

tilsvarende resultater om annihilator. En basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ er ortonormal, hvis og kun hvis den har $(k(\underline{e}_1), \dots, k(\underline{e}_n))$ som dual basis.

Relationen $f(\underline{u}) \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot f^*(\underline{v})$, som karakteriserer adjungeret afbildning, går over i relationen $\langle f(\underline{u}), k(\underline{v}) \rangle = \langle \underline{u}, k(f^*(\underline{v})) \rangle$, altså $\langle f(\underline{u}), \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, k(f^*(k(\underline{v}))) \rangle$, hvorfra fremgår, at $f' = k \circ f^* \circ k$ og $f^* = k \circ f' \circ k$.

At sætningen om naturlig isomofi følger direkte, at der for enhver lineærform ξ på et endelig-dimensionalt vektorrum $(V, \mathbb{C})$ med indre produkt findes netop en vektor $\underline{u}_1 \in V$, således at $\xi(\underline{v}) = \underline{v} \cdot k(\underline{u}_1)$ for alle $\underline{v} \in V$. Sættes $\underline{u} = k(\underline{u}_1)$ fås som i det reelle tilfælde, at der findes netop en vektor $\underline{u} \in V$, således at $\xi(\underline{v}) = \underline{v} \cdot \underline{u}$ for alle $\underline{v} \in V$.

7.5. Normale afbildninger.

Lad overalt i det følgende (V, L) være et vektorrum med indre produkt af dimension $n \in \mathbb{N}$.

En endomorfi f af V siges at være normal, dersom

$$f^* \circ f = f \circ f^*.$$

Er A den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis, kommer dette ud på, at $A^*A = AA^*$. (En matrix med denne egenskab kaldes en normal matrix.)

I den følgende sætning opsummeres egenskaber ved normale endomorfier:

Lad f være en normal endomorfi af V . Da gælder:

- (1) f^* er normal.
- (2) $K_f = K_{f^*}$.
- (3) $K_f^\perp$ er invariant ved både f og f^* ; afbildningen $f^*: K_f^\perp \rightarrow K_f^\perp$ er den adjungerede til afbildningen $f: K_f^\perp \rightarrow K_f^\perp$, og $f: K_f^\perp \rightarrow K_f^\perp$ er normal.
- (4) Før alle $\lambda \in L$ er $f + \lambda e$ normal.
- (5) Før alle $\lambda \in L$ gælder $K_{f-\lambda e} = K_{f^*-\bar{\lambda}e}$.
- (6) Før alle $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ med $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gælder $K_{f-\lambda_1 e} \perp K_{f-\lambda_2 e}$.

Beris. Påstandene (1) følger af, at $f^{**} = f$. For at vise (2) bemærkes, at vi for alle $u, v \in V$ har

$$f(u) \cdot f(v) = u \cdot f^*(f(v)) = u \cdot f(f^*(v)) = f^*(u) \cdot f^*(v);$$

settes heri $u = v$, følger (2). Følge en tidligere sætning

(side 7.3.2) er K_f^{-1} invariant ved f^* og $K_{f^*}^{-1}$ invariant ved f^{**} ; idet $f^{**} = f$, fås heraf den første påstand i (3) ved brug af (2). De to sidste påstande i (3) følger af den første. Af tidligere anførte regler for dannelse af adjungeret afbildning fremgår, at der for $\lambda \in L$ gælder $(f + \lambda e)^* = f^* + \bar{\lambda} e$. Ved brug heraf fås

$$(f + \lambda e)^* \circ (f + \lambda e) = f^* \circ f + \bar{\lambda} f + \lambda f^* + \bar{\lambda} \lambda e$$

og

$$(f + \lambda e) \circ (f + \lambda e)^* = f \circ f^* + \lambda f^* + \bar{\lambda} f + \bar{\lambda} \lambda e,$$

hvoraf (4) fremgår. Påstanden (5) følger af (2) og (4). Lad endelig v_1 og v_2 være vektorer med $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ og $f(v_2) = \lambda_2 v_2$. Ved brug af (5) fås da

$$\lambda_1 v_1 \cdot v_2 = f(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot f^*(v_2) = v_1 \cdot \bar{\lambda}_2 v_2 = \bar{\lambda}_2 v_1 \cdot v_2.$$

For $\lambda_1 \neq \lambda_2$ følger heraf, at $v_1 \cdot v_2 = 0$. Heraf fås (6). $\square$

Vi skal herefter vise følgende hovedsætning:

En endomorfi f af et unitært vektorrum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ af dimension $n \in \mathbb{N}$ er normal, hvis og kun hvis der findes en orthonormal basis for V bestående af egenvektorer for f .

Beweis. Antag først, at der findes en basis af den omtalte art. Den til f hørende matrix $\underline{A}$ m.h.t. en sådan basis er da en diagonalmatrix. Idet to vilkårlige diagonalmatricer er ombyttelige, gælder derfor $\underline{A}^* \underline{A} = \underline{A} \underline{A}^*$. Men heraf følger, at f er normal. Det omvendte vises ved induktion efter n . For $n=1$ er det intet at vise. Lad derefter f være en normal

endomorfi af et n -dimensionalt unitært vektorrum $(V, \mathbb{C})$, hvor $n \geq 2$, og antag, at påstanden gælder for alle dimensionsstal $\leq n-1$. Da V er et komplekst vektorrum, har f mindst en egen værdi; lad λ være en sådan. Er $K_{f-\lambda e} = V$, har enhver ortonormal basis for V den ønskede egenskab. Ellers fremgår af (4), at $f - \lambda e$ er normal, og af (3) fremgår, at $K_{f-\lambda e}^\perp$ er invariant ved $f - \lambda e$ og at $f - \lambda e: K_{f-\lambda e}^\perp \rightarrow K_{f-\lambda e}^\perp$ er normal. Af (4) fremgår derefter, at $f: K_{f-\lambda e}^\perp \rightarrow K_{f-\lambda e}^\perp$ er normal. Idet $\dim K_{f-\lambda e}^\perp = n - \dim K_{f-\lambda} \leq n-1$, giver induktionsantagelsen, at der findes en ortonormal basis for $K_{f-\lambda e}^\perp$ bestående af egenvektorer for f . Sammenstykker denne basis med en ortonormal basis for $K_{f-\lambda}$, fås ialt en basis for V af den ønskede art. $\square$

En basis af den i sætningen omtalte art er det samme som en ortonormal basis m.h.t. hvilken den til f hørende matrix er en diagonal-matrix. Vi har derfor:

En matrix $\underline{A} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ er unitær-ækvivalent med en diagonal matrix, hvis og kun hvis den er normal, d.v.s. $\underline{A}^* \underline{A} = \underline{A} \underline{A}^*$.

Det anføres, at en normal endomorfi af et euklidisk vektorrum ikke nødvendigvis har egen værdier.

7.6. Selvadjungerede afbildninger.

Lad i det følgende (V, L) være et vektorrum med indre produkt af dimension $n \in \mathbb{N}$.

En endomorfi f af V siges at være selvadjungeret, dersom

$$f^* = f.$$

Er $\underline{A}$ den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis, kommer dette ud på, at $\underline{A}^* = \underline{A}$, altså at $\underline{A}$ er symmetrisk (for $L = \mathbb{R}$) hhv. Hermite'sk (for $L = \mathbb{C}$). Det er klart, at hvis f er selvadjungeret, så er f normal.

Vi skal vise:

En endomorfi f af et unitært vektorrum $(V, \mathbb{C})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$ er selvadjungeret, hvis og kun hvis der findes en ortonormal basis for V bestående af egenvektorer for f og alle egenverdier er reelle.

Bewis. Antag først, at der findes en basis af den omtalte art. Den til f hørende matrix $\underline{A}$ m.h.t. en sådan basis er da en diagonalmatrix med reelle diagonalelementer. Der gælder derfor $\underline{A}^* = \underline{A}$, hvorefter følger, at f er selvadjungeret. Antag omvendt, at f er selvadjungeret. Da er f specielt normal, og der findes derfor en ortonormal basis bestående af egenvektorer (smk. side 7.5.2). Den til f hørende matrix $\underline{A}$ m.h.t. en sådan basis er en diagonalmatrix. Og da f er selvadjungeret, gælder $\underline{A}^* = \underline{A}$. Men så er $\underline{A}$'s diagonalelementer, altså egenverdierne, reelle. $\square$

Sætningen kan formuleres som en sætning om matricer:

En matrix $\underline{A} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ er unitær-ækvivalent med en reel diagonal matrix, hvis og kun hvis den er Hermite'sk, d.v.s. $\underline{A}^* = \underline{A}$.

Som en konsekvens heraf har vi:

De karakteristiske rødder og koefficienterne i det karakteristiske polynomium for en Hermite'sk matrix er reelle.

Vi skal dernæst vise:

En endomorfi f af et euklidisk vektorrum $(V, \mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$ er selvadjungeret, hvis og kun hvis der findes en ortonormal basis for V bestående af egenvektorer for f .

Bevís. Antag først, at der findes en basis af den omtalte art. Den til f hørende matrix $\underline{A}$ m.h.t. en sådan basis er da en (reel) diagonal matrix. Der gælder derfor $\underline{A} = \underline{A}' (= \underline{A}^*)$, hvorefter følger, at f er selvadjungeret. Det omvendte vises ved induktion efter n . For $n=1$ er det intet at vise. Lad derefter f være en selvadjungeret endomorfi af et n -dimensionalt euklidisk vektorrum, hvor $n \geq 2$, og antag, at påstanden gælder for alle dimensionstal $\leq n-1$. Den til f hørende matrix $\underline{A}$ m.h.t. en (vilkårlig) ortonormal basis er en reel symmetrisk matrix. Den er derfor også Hermite'sk. Ifølge den sidste af sætningerne ovenfor er da alle

A 's karakteristiske rødder reelle; afbildningen f har derfor mindst en egen værdi λ . For $K_{f-\lambda e} = V$ har enhver ortonormal basis for V den ønskede egenskab. Ellers bemærkes, at $K_{f-\lambda e}^\perp$ ifølge en tidligere sætning er invariant ved $(f-\lambda e)^*$, (sml. side 7.3.2). Idet $(f-\lambda e)^* = f^* - \bar{\lambda}e^* = f - \lambda e$, er $K_{f-\lambda e}^\perp$ altså invariant ved $f - \lambda e$, og dermed også ved f . Da $f^* = f$, følger, at $f: K_{f-\lambda e}^\perp \rightarrow K_{f-\lambda e}^\perp$ er selv-adjungeret; thi er U et underrum, som er invariant ved en endomorfi g , og dens adjungerede g^* , så er $g^*: U \rightarrow U$ den adjungerede til $g: U \rightarrow U$. Følge induktionsantagelsen findes nu en ortonormal basis for $K_{f-\lambda e}^\perp$ bestående af egenvektorer for f . Sammenstykker man sådan basis med en vilkårlig ortonormal basis for $K_{f-\lambda e}$, fås ialt en ortonormal basis for V bestående af egenvektorer. $\square$

Sætningen kan formuleres som en sætning om matricer:

En matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ er ortogonal-ækvivalent med en diagonal matrix, hvis og kun hvis den er symmetrisk, d.v.s. $A' = A$.

7.7. Ortogonale og unitære afbildninger.

Lad i det følgende (V, L) være et vektorrum med indre produkt af dimension $n \in \mathbb{N}$.

En endomorfi f af V siges at være ortogonal (for $L = \mathbb{R}$) hhv. unitær (for $L = \mathbb{C}$), dersom den er bijektiv og

$$f^* = f^{-1}.$$

Er $\underline{A}$ den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis, kommer dette ud på, at $\underline{A}^* = \underline{A}^{-1}$, altså at $\underline{A}$ er en ortogonal hhv. unitær matrix. Det er klart, at hvis f er ortogonal hhv. unitær, så er f normal.

For en endomorfi f af V er følgende tre betingelser usædvanlige:

- (1) f er ortogonal hhv. unitær.
- (2) f er indre produkt bevarende, d.v.s. $f(\underline{u}) \cdot f(\underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{v}$ for alle vektorer $\underline{u}, \underline{v} \in V$.
- (3) f er normbevarende, d.v.s. $\|f(\underline{v})\| = \|\underline{v}\|$ for alle vektorer $\underline{v} \in V$.

Beris. Antag, at (1) er opfyldt. For alle $\underline{u}, \underline{v} \in V$ har vi da $f(\underline{u}) \cdot f(\underline{v}) = \underline{u} \cdot f^*(f(\underline{v})) = \underline{u} \cdot f^{-1}(f(\underline{v})) = \underline{u} \cdot \underline{v}$; der gælder altså (1) $\Rightarrow$ (2). Antag dernæst, at (2) er opfyldt. For alle vektorer $\underline{v} \in V$ har vi da $\|f(\underline{v})\| = \sqrt{f(\underline{v}) \cdot f(\underline{v})} = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}} = \|\underline{v}\|$; vi har altså (2) $\Rightarrow$ (3). Antag endelig, at (3) er opfyldt. For alle $\underline{u}, \underline{v} \in V$ gælder da $\|f(\underline{u}) - f(\underline{v})\| = \|f(\underline{u} - \underline{v})\| = \|\underline{u} - \underline{v}\|$, og dermed

$\text{dist}(f(u), f(v)) = \text{dist}(u, v)$. Afbildningen f er altså afstandsbevarende, og dermed injektiv; den er derfor også surjektiv, altså bijektiv. Endvidere har vi for vilkårlige vektorer $u, v \in V$

$$\begin{aligned} \|f(u+v)\|^2 &= f(u+v) \cdot f(u+v) \\ &= (f(u) + f(v)) \cdot (f(u) + f(v)) \\ &= f(u) \cdot f(u) + f(u) \cdot f(v) + f(v) \cdot f(u) + f(v) \cdot f(v) \\ &= \|f(u)\|^2 + f(u) \cdot f(v) + f(v) \cdot f(u) + \|f(v)\|^2 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= (u+v) \cdot (u+v) \\ &= u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 + u \cdot v + v \cdot u + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Ved benyttelse af det givne følger heraf

$$(4) \quad f(u) \cdot f(v) + f(v) \cdot f(u) = u \cdot v + v \cdot u, \quad u, v \in V.$$

Det påstår, at (4) implicerer

$$(5) \quad f(u) \cdot f(v) = u \cdot v, \quad u, v \in V.$$

For $L = \mathbb{R}$ er dette oplagt. For $L = \mathbb{C}$ giver (4) direkte, at $\text{Re}(f(u) \cdot f(v)) = \text{Re}(u \cdot v)$. Erstattes i (4) vektoren v med $i v$, får

$$-i(f(u) \cdot f(v)) + i(f(v) \cdot f(u)) = -i(u \cdot v) + i(v \cdot u).$$

Heraf følger, at

$$f(u) \cdot f(v) - \overline{f(u) \cdot f(v)} = u \cdot v - \overline{u \cdot v},$$

hvoraf videre følger, at $f_m(f(u) \cdot f(v)) = f_m(u \cdot v)$.
 Også for $L = \mathbb{C}$ gælder altså (5). Af (5) følger nu,
 at der for alle $u, v \in V$ gælder $f(u) \cdot f(f^{-1}(v)) =$
 $u \cdot f^{-1}(v)$, altså $f(u) \cdot v = u \cdot f^{-1}(v)$. Heraf fremgår,
 at $f^* = f^{-1}$, hvormed er vist, at (3) $\Rightarrow$ (1). $\square$

Vi skal derefter vise:

En endomorfi f af et unitært vektorrum $(V, \mathbb{C})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$ er unitær, hvis og kun hvis der findes en orthonormal basis for V bestående af egenvektorer for f og alle egenverdier har absolut værdi 1.

Beris. Antag først, at der findes en basis af den omtalte art. Den til f hørende matrix $\underline{A}$ m.h.t. en sådan basis er da en diagonalmatrix, hvori alle diagonalelementer har absolut værdi 1. Der gælder derfor $\underline{A}\underline{A}^* = \underline{E}$, og dermed $\underline{A}^* = \underline{A}^{-1}$, hvorefter følger, at f er unitær. Antag omvendt, at f er unitær. Da er f specielt normal, og der findes derfor en orthonormal basis bestående af egenvektorer, (sml. side 7.5.2). Og da f er normbevarende (sml. side 7.7.1), må der for enhver egen værdi λ og tilhørende egenvektor v gælde $\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, hvormed $|\lambda| = 1$. $\square$

Idet en diagonalmatrix, hvori alle diagonalelementer har absolut værdi 1, er det samme som en unitær diagonalmatrix, giver den foregående sætning følgende sætning om matrixer:

En matrix $\underline{A} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ er unitær-ækvivalent med en unitær diagonalmatrix, hvis og kun hvis den er unitær, d.v.s. $\underline{A}^* = \underline{A}^{-1}$.

Vi skal dernæst betragte en ortogonal endomorfi f af et euklidisk vektorrum $(V, \mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$. Da den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis er ortogonal, og da determinanten af en ortogonal matrix er 1 eller -1, (sml. side 5.2.4), har f determinanten 1 eller -1, (sml. øv. 5.10). Hvis $\det f = 1$, siges f at være egentlig ortogonal, og hvis $\det f = -1$, siges f at være uegentlig ortogonal. Der gælder nu:

Lad f være en ortogonal endomorfi af et euklidisk vektorrum $(V, \mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$. De eneste tal, som kan være egenverdier for f , er 1 og -1. Hvis f er egentlig ortogonal, og n er ulige, er 1 egenverdi. Hvis f er uegentlig ortogonal, er -1 egenverdi. I alle tilfælde gælder $\dim 1 = \dim 1$ og $\dim(-1) = \dim(-1)$.

Bewis. Da f er normbevarende, (sml. side 7.7.1), har vi $\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ for enhver egenverdi λ og tilhørende egenvektor x , hvorefter den første påstand fremgår. Lad derefter $\underline{A}$ være den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis. Da $\underline{A}$ er ortogonal, kan den opfattes som en unitær matrix; ifølge den foregående sætning har derfor alle $\underline{A}$'s karakteristiske rødder absolut værdi 1. Følgelig gælder $\alpha \bar{\alpha} = 1$ for enhver ikke-reel karakteristisk rod α . Og da det

karakteristiske polynomium for $\mathbb{A}$ har kun real-
 koefficienter, sluttet, at hvis α er en ikke-reel ka-
 rakteristisk rod, så er også $\bar{\alpha}$ en karakteristisk
 rod. Følgelig følger heraf, at antallet af ikke-reelle
 karakteristiske rødder, regnet med multiplicitet,
 er lige, og at produktet af dem er 1. Da pro-
 duktet af samtlige karakteristiske rødder, regnet
 med multiplicitet, er lig med $\det \mathbb{A}$, altså 1 eller
 -1 efter som f er egentlig eller uegentlig ortogo-
 nal, sluttet, at hvis f er egentlig ortogonal, så er
 $\det \mathbb{A}$ (=1) lige, og hvis f er uegentlig ortogonal, så er
 $\det \mathbb{A}$ (= -1) ulige. Heraf følger sætningens anden og
 tredje påstand. Antag endelig, at $\dim K_1 = 1$ og $\dim K_{-1} = 1$.
 Det er klart, at $f(K_1 \oplus K_{-1}) = K_1 \oplus K_{-1}$. Ved benyt-
 telse af, at f er indre produkt bevarende, sluttet
 heraf, at der også gælder $f((K_1 \oplus K_{-1})^\perp) = (K_1 \oplus K_{-1})^\perp$.
 Valges derfor en basis for hvert af underrummene
 K_1 , K_{-1} og $(K_1 \oplus K_{-1})^\perp$, fås ved sammenstyknings en
 basis for V , og den til f hørende matrix m.h.t. en
 sådan basis får formen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{E}}$ er den til $f: K_1 \rightarrow K_1$, $-\underline{\underline{E}}$ den til $f: K_{-1} \rightarrow K_{-1}$, og
 $\underline{\underline{B}}$ den til $f: (K_1 \oplus K_{-1})^\perp \rightarrow (K_1 \oplus K_{-1})^\perp$ hørende matrix.
 (Af f 's normalitet følger, at $K_1 \perp K_{-1}$, (se side 7.5.1).
 Valges derfor en ortonormal basis for hvert af under-
 rummene K_1 , K_{-1} og $(K_1 \oplus K_{-1})^\perp$, fås en ortonormal ba-
 sis for V .) Dette giver

$$\det(A - tE) = (-1-t)^{em1} (1-t)^{em(-1)} \det(B - tE).$$

Da $(K_1 \oplus K_{-1})^\perp \cap K_1 = (K_1 \oplus K_{-1})^\perp \cap K_{-1} = \{0\}$, kan hverken 1 eller -1 være egenverdi for $f: (K_1 \oplus K_{-1})^\perp \rightarrow (K_1 \oplus K_{-1})^\perp$; heraf følger, at hverken 1 eller -1 er rod i $\det(B - tE)$, hvorefter videre følger, at $em1 = rm1$ og $em(-1) = rm(-1)$. Hermed er den sidste påstand vist for $em1 \geq 1$ og $em(-1) \geq 1$. For $em1 = 0$ hwr. $em(-1) = 0$ har vi $rm1 = 0$ hwr. $rm(-1) = 0$. Er begge egenverdimultipliciteter lig med 0, er det derfor intet at vise. Og er kun den ene egenverdimultiplicitet lig med 0, vises ved et bevis analogt til det ovenstående, at også den anden egenverdimultiplicitet er lig med rodmultipliciteten. $\square$

Vi skal til sidst skaffe os et overblik over de ortogonale endomorfier af 2-dimensionale og 3-dimensionale euklidiske vektorrum.

Lad $\underline{A} = (a_{ij}) \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ være en ortogonal matrix; der gælder da

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1,$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1,$$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

Af den første af disse ligninger ses, at der findes netop eet $\alpha \in [0, 2\pi[$, således at

$$a_{11} = \cos \alpha, \quad a_{21} = \sin \alpha.$$

Af de to næste ligninger sluttes dernæst, at $\underline{A}$ enten

har formen

$$(4) \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

eller formen

$$(5) \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

I det første tilfælde har vi $\det A = 1$, i det andet $\det A = -1$. Omvendt er det oplagt, at enhver matrix af formen (4) hhv. (5) er en ortogonal matrix med determinanten 1 hhv. -1. En simpel udregning viser, at vi for alle $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$ har

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}.$$

Endvidere noteres, at enhver matrix af formen

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

har det karakteristiske polynomium $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$.

Følgelig har vi derfor (smk. øv. 5.1):

Lad f være en egentlig ortogonal endomorfi af et 2-dimensionalt euklidisk vektorrum $(V, \mathbb{R})$, og lad (e_1, e_2) være en ortonormal basis for V . Der findes da et (og kun eet) $\alpha \in [0, 2\pi[$, således at der til f m.h.t. basen (e_1, e_2) hører matricen

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Er $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ en vilkårlig anden ortonormal basis for V , så vil der til f m.h.t. denne basis høre matricen

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

eller matricen

$$\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix},$$

alt efter som (e_1, e_2) og $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ er ens eller modsat orienterede.

Lad f være en negentlig ortogonal endomorfi af et 2-dimensionalt euklidisk vektorrum $(V, \mathbb{R})$. Der findes da en ortonormal basis for V m.h.t. hvilken der til f hører matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi skal herefter betragte en ortogonal endomorfi f af et 3-dimensionalt euklidisk vektorrum $(V, \mathbb{R})$. Af en sætning ovenfor fremgår, at hvis f er egentlig hhv. uegentlig ortogonal, så har f egenverdier 1 hhv. -1. Lad U være et 1-dimensionalt underrum af V , som er frembragt af en normeret egenvektor $\underline{e}_1$ hørende til 1 hhv. -1. Underrummet $U^\perp$ er da invariant ved f , og $f: U^\perp \rightarrow U^\perp$ er en ortogonal endomorfi. Valges en ortonormal basis $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$ for $U^\perp$, så vil den til f hørende matrix m.h.t. den ortonormale basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ have formen

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

hvor der skal benyttes + hhv. - efter som f er egentlig hhv. uegentlig ortogonal. Idet determinanten er 1 hhv. -1, sluttes, at $f: U^\perp \rightarrow U^\perp$ i begge tilfælde er egentlig ortogonal. Ved anvendelse af en sætning ovenfor får vi derfor:

Lad f være en egentlig hhv. uegentlig ortogonal endomorfi af et 3-dimensionalt euklidisk vektorrum $(V, \mathbb{R})$. Der findes da en ortonormal basis for V m.h.t. hvilken den til f hørende matrix har formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{hhv.} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

7.8. Spor.

Lad $A = (a_{ij})$ være en $n \times n$ matrix med elementer fra legemet L . Vi definerer sporet af A ved

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

(Tr er en forkortelse for trace [eng. fr. lat {norsk trasen!}], medens betegnelse spor er vor germanske arv [ty. Spur]). Sporet har følgende vigtige egenskaber:

- (i) $\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B)$;
- (ii) $\text{Tr}(A') = \text{Tr}(A)$;
- (iii) $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

De første to udsagn er oplagte ud fra definitionen af sporet, og (i) udsiger at Tr er en linearform på $\mathcal{M}_n(L)$. Det tredje udsagn følger af udregningen

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \text{Tr}(BA). \end{aligned}$$

Lad nu f være en endomorfi af et n -dimensionalt vektorrum V over L . Hvis $(e_1, \dots, e_n)$ er en basis for V , i hvilken f udtrykkes ved matricen A , sættes $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(A)$. Hvis $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ er en anden basis for V og S er koordinattransformationsmatricen for skiftet fra (e_i) -basen til $(\hat{e}_i)$ -basen har f som bekendt i $(\hat{e}_i)$ -basen matricen $\hat{A} = SAS^{-1}$. Følgelig er

$$\text{Tr}(\hat{A}) = \text{Tr}(SAS^{-1}) = \text{Tr}(S^{-1}SA) = \text{Tr}(A),$$

idet vi udnytter (iii). Vi ser at $\text{Tr}(f)$ er uafhængig af

basisvalget. Af (ii) følger i øvrigt at f og f' har samme spor.

Antag nu at $L = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Der gælder da følgende sætning:

Hvis $p(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k$ er det karakteristiske polynomium for $n \times n$ -matricen A gives

$$\underline{c_n = (-1)^n}, \quad \underline{c_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A)}, \quad \underline{c_0 = \text{Det}(A)}.$$

Bevis. Idet såvel spor, determinant som karakteristisk polynomium er invariant under regulær-ækvivalens kan vi gerne antage at A er en øvre trekantsmatrix, idet vi ellers erstatter A med en regulær-ækvivalent matrix. Der gælder da at $p(t) = \prod_{k=1}^n (a_{kk} - t)$, hvoraf de tre ønskede ligninger fremgår.

Bemærk at for en øvre trekantsmatrix er diagonalelementerne netop de karakteristiske rødder, regnet med multiplicitet. Det ovenstående resultat fortæller derfor også at $\text{Tr}(A)$ og $\text{Det}(A)$ er lig med henholdsvis summen og produktet af de karakteristiske rødder.

Det er klart at man kan have $\text{Tr}(A) = 0$, men $A \neq 0$. Dette kan imidlertid ikke indtræffe hvis A er "positiv semi-definit", idet vi har følgende formel:

$$(*) \quad \underline{\text{Tr}(B^*B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ji}|^2}$$

Formlens rigtighed indses ved direkte udregning, idet det (i,i) -te element i B^*B netop er $\sum_{j=1}^n \overline{b_{ji}} b_{ji}$. Vi kan nu vise følgende sætning:

For alle A og B i $\mathcal{M}_n(L)$ sættes $A \cdot B = \text{Tr}(B^*A)$.
Herved defineres et indre produkt i $\mathcal{M}_n(L)$ således at

$$\underline{(AB) \cdot C = B \cdot (A^* C) \quad \text{og} \quad A \cdot A = A^* \cdot A^* .}$$

Bevis. Man efterviser let at $A \cdot B = \text{Tr}(B^* A)$ opfylder kravene til et indre produkt. Det eneste punkt som ikke er oplagt er at $A \cdot A = 0 \iff A = 0$. Men dette følger af formlen (*). Endelig haves

$$(AB) \cdot C = \text{Tr}(C^* AB) = \text{Tr}((A^* C)^* B) = B \cdot (A^* C),$$

samt

$$A \cdot A = \text{Tr}(A^* A) = \text{Tr}(AA^*) = A^* \cdot A^* .$$

Bemærk at den sidste ligning udsiger at involutionen:

$A \rightarrow A^*$ er en isometri af $\mathcal{M}_n(L)$, når man bruger normen $\|A\| = (A \cdot A)^{\frac{1}{2}} = \text{Tr}(A^* A)^{\frac{1}{2}}$.

Opgave: Vis at Tr er den eneste linearform ϕ på $\mathcal{M}_n(L)$ som opfylder $\phi(AB) = \phi(BA)$ for alle A og B samt $\phi(E) = n$, hvor E som sædvanlig betegner enhedsmatricen.

1. Undersøg, om der i $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ defineres et indre produkt ved, at man til $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ lader svare hhv.

$$x_1 y_2 + x_2 y_1,$$

$$x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2,$$

$$2x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2.$$

2. Lad $a_1, \dots, a_n$ være (ikke nødvendigvis forskellige) reelle tal. Angiv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at der ved

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto a_1 x_1 \bar{y}_1 + \dots + a_n x_n \bar{y}_n$$

defineres et indre produkt i $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$.

3. Vis, at der for vilkårlige vektorer u, v i et reelt vektorrum med indre produkt gælder

$$u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\| = \|u-v\|.$$

Hvilken elementargeometrisk sætning udtrykkes herved, når (u, v) er et lineært uafhængigt sæt af geometriske vektorer?

4. Vis, at der for vilkårlige vektorer u, v i et komplekst vektorrum med indre produkt gælder

$$u \perp v \Leftrightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} : \|\lambda u + \mu v\|^2 = \|\lambda u\|^2 + \|\mu v\|^2.$$

5. Vis, at der for vilkårlige vektorer u, v i et vektorrum med indre produkt gælder

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Hvilken elementargeometriske sætning udtrykkes herved, når (u, v) er et lineært uafhængigt sæt af geometriske vektorer?

6. I et 3-dimensionalt vektorrum (V, L) er valgt en ortonormal basis (e_1, e_2, e_3) . Angiv en ortonormal basis for $U^\perp$, hvor $U = \text{span}\{e_1 + e_2 + e_3\}$.
7. Vektorrummet $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ tænkes forsynet med det sædvanlige indre produkt. Bestem ved ortonormalisering en ortonormal basis for det af vektorerne $(9, 12, 0, -20)$, $(-1, -18, 0, 20)$, $(7, -24, 3, 20)$ frembragte underrum U . Bestem en ortonormal basis for $U^\perp$.
8. Lad a, b, c være vektorer i et vektorrum med indre produkt, og antag, at (a, b) er et lineært uafhængigt sæt. Find ortogonalprojektionen af c på $\text{span}\{a, b\}$.
9. Vektorrummet $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R})$ tænkes forsynet med det sædvanlige indre produkt. Find ortogonalprojektionen af vektoren $(1, 1, 1, 1, 1)$ på det af vektorerne $(2, 0, 2, 1, 0)$ og $(6, 1, 0, -3, -1)$ frembragte underrum.

10. Lad a og b være fra 2 forskellige vektorer i et reelt vektorrum med indre produkt. Bestem $t \in \mathbb{R}$ således, at $\|a + tb\|$ bliver mindst mulig.

11. Lad (V, L) være et (ikke nødvendigvis endelig-dimensionalt) vektorrum med indre produkt, og lad $(e_1, \dots, e_p)$ være et ortonormalt sæt af vektorer fra V . Vis, at for en vilkårlig vektor $v \in V$ gælder Bessel's ulighed:

$$|v \cdot e_1|^2 + \dots + |v \cdot e_p|^2 \leq \|v\|^2.$$

Vis, at Parseval's ligning

$$|v \cdot e_1|^2 + \dots + |v \cdot e_p|^2 = \|v\|^2$$

er opfyldt, hvis og kun hvis $v \in \text{span}\{e_1, \dots, e_p\}$.

12. Lad $(e_1, \dots, e_n)$ være en ortonormal basis for et vektorrum $(V, \mathbb{R})$ med indre produkt. Vinklerne ϑ_i mellem en vektor $v \in V$ og vektorerne e_i kaldes v 's retningsevinkler. Vis, at vi for $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ har $v_i = \|v\| \cos \vartheta_i$, og at der gælder $\cos^2 \vartheta_1 + \dots + \cos^2 \vartheta_n = 1$.

13. Lad $(V, \mathbb{R})$ være vektorrummet af alle kontinuerlige reelle funktioner på $[0, 1]$ forsynet med det sædvanlige indre produkt

$$\phi \cdot \psi = \int_0^1 \phi(t) \psi(t) dt,$$

og lad V_1 være underrummet af de funktioner $\phi \in V$ for hvilke

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = 0.$$

Bestem $V_1^\perp$. Lad dernæst $(W, \mathbb{R})$ være vektorrummet af alle kontinuerlige reelle funktioner på $[-1, 1]$ forsynet med det sædvanlige indre produkt

$$\varphi \cdot \psi = \int_{-1}^1 \varphi(t) \psi(t) dt,$$

og lad W_1 være underrummet af de funktioner $\varphi \in W$ for hvilke

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = 0.$$

Vis, at $W_1^\perp = \{0\}$, og begrund herved, at W_1 ikke har noget ortogonalt komplement.

14. Lad $(W, \mathbb{R})$ være som i øv. 13, og lad U være underrummet af alle lige funktioner tilhørende W . Vis, at U har et ortogonalt komplement, og angiv dette.

15. Vis, at der for vilkårlige underrum U_1 og U_2 af et vektorrum (V, L) med indre produkt gælder

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp.$$

Vis, at hvis V har endelig dimension, så gælder også

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp.$$

Vis, at hvis V har uendelig dimension, så gælder det sidste ikke for alle underrum U_1 og U_2 . (Udnytt øv. 13 og 14.)

16. En følge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ af vektorer fra et vektorrum (V, L) med indre produkt siges at være en ortonormal følge, dersom alle vektorerne i følgen er normerede, og $v_{n_1} \cdot v_{n_2} = 0$ for $n_1 \neq n_2$. Vis, at man ved normering af vektorerne i følgen

$$(1) \quad (1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots), \quad t \in [-\pi, \pi],$$

får en ortonormal følge såvel i vektorrummet $(V, \mathbb{R})$ af alle kontinuerlige reelle funktioner på $[-\pi, \pi]$ som i vektorrummet $(W, \mathbb{C})$ af alle kontinuerlige komplekse funktioner på $[-\pi, \pi]$, idet både $(V, \mathbb{R})$ og $(W, \mathbb{C})$ tænkes forsynet med det sædvanlige indre produkt. Dan den til (1) hørende ortonormal følge. Vis, at man ved normering af funktionerne i følgen

$$(2) \quad (1, e^{-it}, e^{it}, e^{-2it}, e^{2it}, \dots), \quad t \in [-\pi, \pi],$$

ligeledes får en ortonormal følge i $(W, \mathbb{C})$, og dan den tilhørende ortonormal følge. Frembringer funktionerne i (2) det samme under rum af W som funktionerne i (1)?

17. Beskriv enhedskuglene $\{v \mid \|v\|_p \leq 1\}$ for $p = 1, 2, \infty$ i vektorrummene $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ og $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

18. Vis, at afbildningen

$$(x_1, x_2) \mapsto (|x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}})^2$$

ikke er en norm i $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

19. Bestem samtlige normer i (L, L) .

20. Vis, at der for enhver vektor x i $(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ gælder

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

og

$$n^{-\frac{1}{2}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}} \|x\|_{\infty}.$$

Undersøg, hvilke lignende uligheder der gælder mellem $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ og $\|f\|_{\infty}$ i vektorrummet af alle kontinuerlige reelle funktioner på et interval $[a, b]$.

21. For vilkårlige vektorer u og v i et normeret vektorrum gælder som bekendt

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Vis, at hvis sættet (u, v) er lineært afhængigt, så gælder lighedstegnet, hvis og kun hvis den ene af vektorerne fremgår af den anden ved multiplikation med en reel skalar $\lambda \geq 0$. Vis ved et eksempel, at der kan gælde lighedstegn for et lineært uafhængigt sæt (u, v) .

22. Lad (V, L) være et normeret vektorrum. Vis, at afbildningen $v \mapsto \|v\|$ er en uniformt kontinuert afbildning af V ind i $\mathbb{R}$, idet V forsynes med metrikken $\text{dist}(u, v) = \|u - v\|$ og $\mathbb{R}$ forsynes med den sædvanlige metrik.

23. Lad (U, L) og (V, L) være normerede vektorrum; normen af en vektor $u \in U$ hhv. $v \in V$ betegnes $\|u\|_U$ hhv. $\|v\|_V$.

1° En lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ siges at være begrænset, dersom der findes et positivt reelt tal M , således at $\|f(u)\|_V \leq M \|u\|_U$ for alle $u \in U$. Vis, at f er begrænset, hvis og kun hvis afbildningen $u \mapsto \|f(u)\|_V$ af U ind i $\mathbb{R}$ er begrænset på enhedskuglen $\{u \in U \mid \|u\|_U \leq 1\}$ med M som majorant.

2° Vis, at hvis en lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ er kontinuert i 0 , hvor 0 er nulvektoren i U , så er den uniformt kontinuert på hele U , idet U og V tænkes forsynet med de ved normerne definerede metrikker. Vis dernæst, at en lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ er kontinuert, hvis og kun hvis den er begrænset.

3° Antag, at U har endelig dimension, $n \in \mathbb{N}$, og lad $(e_1, \dots, e_n)$ være en basis for U . Ved

$$\|u_1 e_1 + \dots + u_n e_n\|_1 = |u_1| + \dots + |u_n|$$

defineres da en norm $u \mapsto \|u\|_1$ i U . Vis, at der findes $k, K \in \mathbb{R}_+$, således at $k \|u\|_1 \leq \|u\|_U \leq K \|u\|_1$ for alle $u \in U$. (Udnyt bl.a., at $\{(u_1, \dots, u_n) \mid |u_1| + \dots + |u_n| \leq 1\}$ er en kompakt delmængde af $\mathbb{R}^n$.)

4° Vis, at hvis U har endelig dimension $n \in \mathbb{N}$, så er enhver lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ begrænset, og dermed kontinuert.

24. Vektorrummet $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tænkes forsynet med det sædvanlige indre produkt. Lad f være den ved

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = (x_1, x_1)$$

definerede endomorfi af $\mathbb{R}^2$. Bestem f^* . Sat

$$U = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \}.$$

Overvej, at U er invariant ved f , men ikke ved f^* . Bestem den adjungerede til endomorfien $f: U \rightarrow U$.

25. Lad $(V, \mathbb{R})$ være et 2-dimensionalt euklidisk vektorrum, lad f være en endomorfi af V , og lad

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

være den til f hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis. Vis, at f er normal, hvis og kun hvis $b = c$, eller $b = -c$ og $a = d$.

26. Lad (V, L) være et endelig-dimensionalt vektorrum med indre produkt, lad λ tilhøre L , og lad f_1, f_2, f_3 være endomorfier af V , hvor f_3 er bijektiv. Undersøg, om λf_1 , $f_1 + f_2$, $f_1 \circ f_2$ og f_3^{-1} er hhv. normale, selvadjungerede, ortogonale/unitære, dersom f_1, f_2 og f_3 er hhv. normale, selvadjungerede, ortogonale/unitære.

27. Lad $(V, \mathbb{R})$ være et euklidisk vektorrum af dimension $n \in \mathbb{N}$. Vis, at der for enhver ortogonal endomorfi f af V gælder $|\text{tr } f| \leq n$, og undersøg, for hvilke f der gælder lighedstegn.

28. Lad f være en normal endomorfi af et endelig-dimensionelt vektorrum (V, L) med indre produkt. Vis, at $f(V) = K_f^\perp$. Vis, at for ethvert $n \in \mathbb{N}$ har f^n samme rang som f .
29. Lad f være en idempotent normal endomorfi af et endelig-dimensionalt vektorrum (V, L) med indre produkt. Vis, at f er ortogonalprojektionen på $f(V)$.
30. Lad (V, L) være et vektorrum med indre produkt af dimension $n \in \mathbb{N}$. Vis, at mængden af ortogonale hhv. unitære endomorfier af V er en undergruppe af vektorrummets automorfigruppe; gruppen kaldes vektorrummets ortogonale hhv. unitære gruppe. Angiv en gruppe af matricer, som er isomorf med V 's ortogonale hhv. unitære gruppe.
31. Lad $(V, \mathbb{R})$ være et euklidisk vektorrum med dimension $n \in \mathbb{N}$. Lad $f_1, \dots, f_p$ være selvadjungerede endomorfier af V med $\dim f_i(V) \geq 1$ for $i = 1, \dots, p$. Endvidere forudsættes, at der gælder
- (1) $\dim f_1(V) + \dots + \dim f_p(V) = n$,
 - (2) $f_1 + \dots + f_p = e$.

10 Begrund, at der findes en ortonormal basis $(e_{i1}, \dots, e_{it_i})$ for $f_i(V)$, således at hver af vektorerne e_{ij} er egenvektor for f_i hørende til en egenværdi $\lambda_{ij} \neq 0$. Gør rede for, at sættet

$$(*) \quad (e_{11}, \dots, e_{1t_1}, e_{21}, \dots, e_{2t_2}, \dots, e_{p1}, \dots, e_{pt_p})$$

består af n vektorer. Vis, at sættet frembringer V .
Begrund, at sættet er en basis for V .

2° Vis, at $f_i(\underline{e}_{ij}) = \underline{e}_{ij}$, og at $f_k(\underline{e}_{ij}) = 0$ for $k \neq i$.
(Bewis og udnyt f. eks., at $f_i(\underline{e}_{ij}) = \lambda_{ij} f_1(\underline{e}_{ij}) + \dots + \lambda_{ij} f_p(\underline{e}_{ij})$.)

3° Vis, at sættet (*) er en ortonormal basis for V .

Lad $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_p$ være reelle symmetriske $(n \times n)$ -matricer, alle forskellige fra $\underline{0}_{n,n}$, med
 $n \underline{A}_1 + \dots + n \underline{A}_p = n$ og $\underline{A}_1 + \dots + \underline{A}_p = \underline{E}$.

4° Gør rede for (ved udnyttelse af det foregående), at der findes en orthogonal $(n \times n)$ -matrix $\underline{S}$, således at matricerne $\underline{S} \underline{A}_1 \underline{S}^{-1}, \dots, \underline{S} \underline{A}_p \underline{S}^{-1}$ alle er diagonalmatricer med kun 1'er og 0'er i diagonalen.

består af n vektorer. Vis, at sættet frembringer V . Begrund, at sættet er en basis for V .

2° Vis, at $f_i(\underline{e}_{ij}) = \underline{e}_{ij}$ og at $f_k(\underline{e}_{ij}) = 0$ for $k \neq i$.
(Vis og udnyt f. eks., at $f_i(\underline{e}_{ij}) = \lambda_{ij} f_1(\underline{e}_{ij}) + \dots + \lambda_{ij} f_p(\underline{e}_{ij})$.)

3° Vis, at sættet (*) er en ortonormal basis for V .

Lad $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_p$ være reelle symmetriske $(n \times n)$ -matricer, alle forskellige fra $\underline{0}_{n,n}$, med $\text{rg } \underline{A}_1 + \dots + \text{rg } \underline{A}_p = n$ og $\underline{A}_1 + \dots + \underline{A}_p = \underline{E}_{n,n}$.

4° Gør rede for (ved udnyttelse af det foregående), at der findes en ortogonal $(n \times n)$ -matrix $\underline{S}$, således at matricerne $\underline{S} \underline{A}_1 \underline{S}^{-1}, \dots, \underline{S} \underline{A}_p \underline{S}^{-1}$ alle er diagonalmatricer med kun 1'er og 0'er i diagonalen.

32. Lad (V, R) være et orienteret 3-dimensionelt euklidisk vektorrum. Vis, at hvis en alternerende 3-linearform på V antager værdien 1 på en positiv ortonormal basis, så antager den værdien 1 på enhver positiv ortonormal basis. Begrund, at der findes netop een sådan alternerende 3-linearform Φ_0 .

Lad $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ være vektorer i V , og lad f være den ved

$$\underline{v} \mapsto f(\underline{v}) = \Phi_0(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v})$$

definerede lineærfunktion på V . Gør rede for, at der findes en og kun een vektor $\underline{w} \in V$, således at

$$f(\underline{v}) = \underline{w} \cdot \underline{v}$$

for alle $\underline{v} \in V$. Vektoren $\underline{w}$ kaldes vektorproduktet (eller krydsproduktet) af $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$, og betegnes $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2$. For alle vektorer $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in V$ har vi altså

$$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_3 = \Phi_0(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3).$$

Eftervis følgende:

$$(\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2) \times \underline{v}_3 = \lambda_1 (\underline{v}_1 \times \underline{v}_3) + \lambda_2 (\underline{v}_2 \times \underline{v}_3),$$

$$\underline{v}_3 \times (\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2) = \lambda_1 (\underline{v}_3 \times \underline{v}_1) + \lambda_2 (\underline{v}_3 \times \underline{v}_2),$$

$$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = -\underline{v}_2 \times \underline{v}_1,$$

$$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 = 0,$$

$$(\underline{u}_1 \times \underline{u}_2) \cdot (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2) = (\underline{u}_1 \cdot \underline{v}_1)(\underline{u}_2 \cdot \underline{v}_2) - (\underline{u}_1 \cdot \underline{v}_2)(\underline{u}_2 \cdot \underline{v}_1),$$

$$\|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2\|^2 = \|\underline{v}_1\|^2 \|\underline{v}_2\|^2 - (\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2)^2,$$

$$\|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2\| = \|\underline{v}_1\| \|\underline{v}_2\| \sin \vartheta,$$

hvor i sidste linie $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ er $\neq 0$, og ϑ betegner vinklen mellem $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$. Vis, at $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 \neq 0$, hvis og kun hvis sættet $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ er lineært uafhængigt. Vis, at hvis sættet $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ er lineært uafhængigt, så er sættet $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_1 \times \underline{v}_2)$ en basis. Vis, at hvis sættet $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ er ortogonalt hhv. orthonormalt, så er sættet $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_1 \times \underline{v}_2)$ ortogonalt hhv. orthonormalt. Vis, at hvis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ er en positiv orthonormal basis, så gælder $\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$, $\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$, $\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2$. Bestem endelig vektorproduktet af $x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$ og $y_1 \underline{e}_1 + y_2 \underline{e}_2 + y_3 \underline{e}_3$, når $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ er en positiv orthonormal basis.

33. En endomorfi f af et euklidisk vektorrum $(V, \mathbb{R})$ siges at være antisymmetrisk, dersom $f^* = -f$. Vis, at en endomorfi f er antisymmetrisk, hvis og kun hvis $\underline{x} \cdot f(\underline{x}) = 0$ for alle $\underline{x} \in V$.
34. Vis, at hvis f er en antisymmetrisk endomorfi af et orienteret 3-dimensionalt euklidisk vektorrum $(V, \mathbb{R})$, så findes en og kun en vektor $\underline{w} \in V$, således at $f(\underline{x}) = \underline{w} \times \underline{x}$ for alle $\underline{x} \in V$.

Kap. 8. Kvadratiske former.

8.1. Symmetriske bilinearformer. 8.1.1-8.1.4

8.2. Kvadratiske former. 8.2.1-8.2.2

8.3. Normalformer for kvadratiske former 8.3.1-8.3.5

Øvelser 8. øv 1-3

8.1. Symmetriske bilinearformer.

Ved en bilinearform på et vektorrum (V, L) forstås som bekendt en afbildning $(u, v) \mapsto B(u, v)$ af $V \times V$ ind i L , således at afbildningen $u \mapsto B(u, v)$ for ethvert $v \in V$ er en linearform på V , og afbildningen $v \mapsto B(u, v)$ for ethvert $u \in V$ er en linearform på V . Vi skal i det følgende indskrænke os til at betragte bilinearformer på reelle vektorrum $(V, \mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$.

Summen af to bilinearformer på V og produktet af en skalar fra $\mathbb{R}$ og en bilinearform på V defineres på oplagt måde. Mængden af bilinearformer på V bliver herved organiseret som et vektorrum over $\mathbb{R}$. Nulvektoren er nulformen, d.v.s. afbildningen $(u, v) \mapsto 0$.

En bilinearform B på V siges at være symmetrisk hhv. antisymmetrisk, dersom der gælder $B(u, v) = B(v, u)$ hhv. $B(u, v) = -B(v, u)$ for alle $u, v \in V$. For en antisymmetrisk bilinearform B har vi specielt $B(v, v) = 0$ for alle $v \in V$. Nulformen er både symmetrisk og antisymmetrisk; ingen anden bilinearform har begge disse egenskaber.

For en vilkårlig bilinearform B på V er afbildningen

$$(u, v) \mapsto B_s(u, v) = \frac{1}{2} (B(u, v) + B(v, u))$$

en symmetrisk bilinearform på V , og afbildningen

$$(u, v) \mapsto B_a(u, v) = \frac{1}{2} (B(u, v) - B(v, u))$$

en antisymmetrisk bilinearform på V . Følgelig $B = B_s + B_a$,

kan B altså spalttes i en sum af en symmetrisk og en antisymmetrisk bilinearform. Denne opspaltning er entydig. Thi er B_s', B_s'' hkr. B_a', B_a'' symmetriske hkr. antisymmetriske bilinearformer med $B_s' + B_a' = B_s'' + B_a'' = B$, har vi $B_s' - B_s'' = B_a'' - B_a'$; idet $B_s' - B_s''$ er symmetrisk og $B_a'' - B_a'$ er antisymmetrisk, sluttet, at de begge er nulformer, hvorefter følger, at $B_s' = B_s''$ og $B_a' = B_a''$. - Bilinearformerne B_s hkr. B_a kaldes den symmetriske hkr. antisymmetriske del af B . To bilinearformer siges at være ækvivalente, hvis de har samme symmetriske del. Herved defineres en ækvivalensrelation i mængden af bilinearformer på V . Hver ækvivalensklasse indeholder netop en symmetrisk bilinearform; de øvrige bilinearformer i klassen fås ved til den symmetriske at addere en vilkårlig antisymmetrisk.

Lad B være en vilkårlig bilinearform på V , og lad der i V være valgt en basis $(e_1, \dots, e_n)$. For vilkårlige vektorer $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$ og $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ i V får da ved brug af lineariteten

$$(1) \quad B(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j B(e_i, e_j)$$

Settes $b_{ij} = B(e_i, e_j)$ for $i, j = 1, \dots, n$, og $\underline{B} = (b_{ij})_{n,n}$, kan (1) skrives

$$(2) \quad B(u, v) = \underline{u} - \underline{B} \underline{v}_1,$$

hvor $\underline{u}$ - hkr. $\underline{v}_1$ er koordinatrækken hkr. koordinatsystem for u hkr. v , og hvor $B(u, v)$ opfattes som en (1×1) -matrix. Det er let at se, at der efter valg af basis kun findes en matrix $\underline{B}$, således at

(2) er opfyldt for alle $u, v \in V$. Ligningen (2) kaldes matrixligningen for B m.h.t. den valgte basis, og $\underline{B}$ kaldes den til B hørende matrix m.h.t. den valgte basis.

Det påstår, at en bilinearform B er symmetrisk, hvis og kun hvis den til B hørende matrix $\underline{B}$ m.h.t. en valgt basis er symmetrisk. Da enhver $(n \times n)$ -matrix er symmetrisk, giver (2), at det for alle $u, v \in V$ gælder $\underline{u} - \underline{B} \underline{v} = \underline{v} - \underline{B}' \underline{u}$. Symmetri af B er derfor ensbetydende med, at $\underline{v} - \underline{B} \underline{u} = \underline{u} - \underline{B}' \underline{v}$ for alle $u, v \in V$. Men dette ses let at være opfyldt, hvis og kun hvis $\underline{B} = \underline{B}'$. - På tilsvarende måde vises, at B er antisymmetrisk, hvis og kun hvis $\underline{B}$ er antisymmetrisk.

Vi skal dernæst undersøge, hvortledes den til en bilinearform hørende matrix ændres ved basis-skift. Lad $\underline{B}$ være den til B hørende matrix m.h.t. en basis $(e_1, \dots, e_n)$, lad $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ være en ny basis, og lad $\underline{S}$ være koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra $(e_1, \dots, e_n)$ til $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$. Sammenhængen mellem koordinatsøjlerne $\underline{u}$ og $\hat{\underline{u}}$ for en vektor u m.h.t. $(e_1, \dots, e_n)$ hhv. $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ er da givet ved $\hat{\underline{u}} = \underline{S} \underline{u}$. Ved bemærkelse af dette får for vilkårlige vektorer $u, v \in V$

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \underline{u} - \underline{B} \underline{v} \\ &= (\underline{S}^{-1} \hat{\underline{u}})' \underline{B} (\underline{S}^{-1} \hat{\underline{v}}) \\ &= \hat{\underline{u}} - (\underline{S}^{-1})' \underline{B} \underline{S}^{-1} \hat{\underline{v}} \end{aligned}$$

Den til B hørende matrix $\underline{\hat{B}}$ m.h.t. basen $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ er således bestemt ved

$$\underline{\hat{B}} = (\underline{S}^{-1})' \underline{B} \underline{S}^{-1}.$$

At det sidste resultat fremgår, at matrixer hørende til samme bilinearform m.h.t. forskellige baser har samme rang. Det har derfor god mening at definere rangen $\text{rg } B$ af en bilinearform B som rangen af de til B hørende matrixer.

For en symmetrisk bilinearform B defineres nulrummet N_B som mængden af vektorer $v \in V$ for hvilke $B(u, v) = 0$ for alle vektorer $u \in V$. Lad $\underline{B}$ være den til B hørende matrix m.h.t. en valgt basis. Nulrummet består da af de vektorer, hvis koordinatsøjler $\underline{x}_1$ opfylder $\underline{u} - \underline{B} \underline{x}_1 = 0$ for alle koordinatækker $\underline{u}$, altså de vektorer, hvis koordinatsøjler $\underline{x}_1$ opfylder $\underline{B} \underline{x}_1 = \underline{0}_1$. Nulrummet N_B er altså et underrum af V med $\dim N_B = n - \text{rg } \underline{B} = n - \text{rg } B$.

8.2. Kvadratiske former.

Lad B være en bilinearform på V , hvor som for V er et reelt vektorrum af dimension $n \in \mathbb{N}$. Ved

$$v \mapsto K_B(v) = B(v, v)$$

defineres da en afbildning $K_B: V \rightarrow \mathbb{R}$; den kaldes den til B hørende kvadratiske form.

Idet den til en antisymmetrisk bilinearform hørende kvadratiske form er nulformen, dvs. afbildningen $v \mapsto 0$, hører der til ækvivalente bilinearformer samme kvadratiske form. Omvendt hører der til ikke-ækvivalente bilinearformer forskellige kvadratiske former; thi for en vilkårlig bilinearform B gælder

$$\begin{aligned} B_5(u, v) &= \frac{1}{4} (B_5(u+v, u+v) - B_5(u-v, u-v)) \\ &= \frac{1}{4} (K_B(u+v) - K_B(u-v)), \end{aligned}$$

hvilket viser, at B_5 er bestemt ved K_B . Vi har altså: Afbildningen $B \mapsto K_B$ er en bijektiv afbildning af mængden af symmetriske bilinearformer på V på mængden af kvadratiske former på V . Ved undersøgelse af kvadratiske former K_B kan det derfor antages, at B er symmetrisk; B vil da være entydigt bestemt.

En kvadratisk form K_B på V siges at være positiv definit på et underrum U af V , dersom $K_B(u) > 0$ for alle vektorer $u \in U \setminus \{0\}$ (idet der naturligvis gælder $K_B(0) = 0$), og positiv semidefinit

på U , dersom $K_B(u) \geq 0$ for alle $u \in U$. Tilsvarende defineres begreberne negativ definit og negativ semi-definit. Antager K_B både positive og negative værdier på U , siges K_B at være indefinit på U . Et underrum U siges at være et positivitetsunderrum hkr. negativitetsunderrum for K_B , dersom K_B er positiv hkr. negativ definit på U . Ved K_B 's positivitetsindex $\text{ind}_+ K_B$ forstås det største dimensionstal for noget positivitetsunderrum. Ved K_B 's negativitetsindex $\text{ind}_- K_B$ forstås tilsvarende det største dimensionstal for noget negativitetsunderrum.

Lad der i V være valgt en basis, og lad $B(u, x) = \underline{u} - \underline{B} \underline{x}$ være matrixligningen for en symmetrisk bilinearform B på V . For den tilhørende kvadratiske form får vi da (med oplagte betegnelser)

$$K_B(x) = \underline{x} - \underline{B} \underline{x} = \sum_{i=1}^n v_i \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} v_j \right) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} v_i v_j.$$

$K_B(x)$ er altså et homogent anden grads polynomium i koordinaterne $v_1, \dots, v_n$. Omvendt kan ethvert sådant polynomium på entydig måde skrives på formen $\underline{x} - \underline{B} \underline{x}$, hvor $\underline{B}$ er symmetrisk. Vi har dermed: Efter valg af basis for V kan de kvadratiske former $K_B(x)$ på V identificeres med de homogene anden grads polynomier i koordinaterne for x .

8.3. Normalformer for kvadratiske former.

Vi skal vise, at der for enhver kvadratisk form K_B på V , hvor V er et reelt vektorrum af dimension $n \in \mathbb{N}$, findes en basis for V m.h.t. hvilken det til K_B hørende homogene anden grads polynomium ikke indeholder blandede led; den kvadratiske form siges da at antage normalform for den pågældende basis, eller at være reduceret. Betingelsen for, at K_B antager normalform for en given basis er åbenbart, at den tilhørende matrix er en diagonal matrix. Idet ethvert endelig-dimensionalt vektorrum kan forsynes med et indre produkt, endda således, at en vilkårlig given basis bliver ortonormal (smk. side 7.7.17), er det ønskede resultat indeholdt i den følgende sætning; sætningen giver desuden yderligere oplysning om koefficienterne i polynomiet.

Lad B være en symmetrisk bilinearform på et euklidisk vektorrum $(V, \mathbb{R})$, lad $(e_1, \dots, e_n)$ være en ortonormal basis for V , og lad $\underline{B}$ være den til B hørende matrix m.h.t. basen $(e_1, \dots, e_n)$. Der findes da en ortonormal basis $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$, således at den til B hørende matrix $\hat{\underline{B}}$ m.h.t. basen $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ er en diagonal matrix. For enhver sådan basis $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ er diagonallementerne i $\hat{\underline{B}}$ de karakteristiske rødder for $\underline{B}$, idet hver karakteristisk rod forekommer så mange gange som rodmultiplisiteten angiver. Antallet af diagonallementer, som er hhv. positive, negative og 0 er lig med hhv. $\text{ind}_+ K_B$, $\text{ind}_- K_B$ og $\dim N_B$.

Bevis. Først bemærkes, at matricerne, som hører til B m.h.t. de forskellige ortonormale baser, netop er matricerne af formen $(\underline{S}^{-1})' \underline{B} \underline{S}^{-1}$, hvor $\underline{S}$ er en orthogonal matrix, (sml. side 8.1.4). For en orthogonal matrix $\underline{S}$ gælder imidlertid $\underline{S}^{-1} = \underline{S}'$, og dermed $(\underline{S}^{-1})' = \underline{S}$. Den omtalte mængde af matricer er altså mængden af matricer, som er orthogonal-ækvivalente med $\underline{B}$. Da nu $\underline{B}$ er reel og symmetrisk, er $\underline{B}$ orthogonal-ækvivalent med netop de diagonal matricer, hvis diagonalelementer er de karakteristiske rødder for $\underline{B}$, idet hver rod λ forekommer $m\lambda$ gange, (sml. side 7.6.3 og side 6.2.4). Hermed er sætningens to første påstande beviset. Lad herefter $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ være en ortonormal basis m.h.t. hvilken matricen $\hat{\underline{B}}$ er en diagonalmatrix. Lad p hhv. q betegne antallet af positive hhv. negative diagonalelementer. Da gælder $\text{rg } \hat{\underline{B}} = p+q$, og antallet af 0'er i diagonalen bliver derfor $n - (p+q) = n - \text{rg } \hat{\underline{B}} = n - \text{rg } \underline{B} = \dim N_B$, (sml. side 8.1.4). Uden indskrænkning kan antages, at de første p diagonalelementer er positive, de næste q negative, og resten 0. Lad V_1, V_2, V_3 betegne under rummene udspændt af hhv. $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)$, $(\hat{e}_{p+1}, \dots, \hat{e}_{p+q})$ og $(\hat{e}_{p+q+1}, \dots, \hat{e}_n)$. Vi har da oplagt $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = V$, og dermed $\dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 = \dim V$, altså

$$(1) \quad p + q + \dim N_B = n.$$

Er nu U et vilkårligt positivitetsunder rum, gælder $U \cap (V_2 \oplus V_3) = \{0\}$; thi $K_B(u) > 0$ for alle $u \in U \setminus \{0\}$, og $K_B(v) \leq 0$ for alle $v \in V_2 \oplus V_3$. Heraf følger, at U danner

direkte sum med $V_2 \oplus V_3$, hvorefter videre følger, at summen af U , V_2 og V_3 er direkte; vi har dermed $U \oplus V_2 \oplus V_3 \subseteq V$, og følgelig $\dim U + \dim V_2 + \dim V_3 \leq \dim V$, altså

$$(2) \quad \dim U + q + \dim N_B \leq n.$$

Sammenholdes (1) og (2) fås $\dim U \leq p$; ethvert positivitetsunderrum har således dimension $\leq p$. Men V_1 er et positivitetsunderrum med dimension p , hvormed er vist, at $\text{ind} + K_B = p$. På tilsvarende måde indses, at $\text{ind} - K_B = q$. $\square$

Vedrørende den praktiske bestemmelse af en basis for hvilken en given kvadratisk form K_B antager normalform bemærkes følgende. Er $(V, \mathbb{R})$ et euklidisk vektorrum og er $\underline{B}$ den til den symmetriske bilinearform B hørende matrix m.h.t. en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, bestemmes $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ som en ortonormal basis bestående af egenvektorer for den (selvadjungerede) endomorfi f af V , hvis tilhørende matrix m.h.t. basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ er $\underline{B}$. Er $(V, \mathbb{R})$ uden indre produkt og er $\underline{B}$ den til B hørende matrix m.h.t. en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, indføres det indre produkt $(u_1 \underline{e}_1 + \dots + u_n \underline{e}_n) \cdot (v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n) = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, hvorefter $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ bliver en ortonormal basis. Herefter gås frem som ovenfor beskrevet.

Af sætningen ovenfor følger umiddelbart:

Lad B være en symmetrisk bilinearform på et vektorrum $(V, \mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$, og lad $\underline{B}$ være den til B hørende matrix m.h.t. en valgt basis. Da er K_B positiv definit på V , hvis og kun hvis alle $\underline{B}$'s karakteristiske rødder er positive.

Ved brug af dette resultat skal vi dernæst vise:

Lad B være en symmetrisk bilinearform på et vektorrum $(V, \mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$, og lad $\underline{B}$ være den til B hørende matrix m.h.t. en basis $(e_1, \dots, e_n)$. Da er K_B positiv definit på V , hvis og kun hvis alle delmatrixerne

$$\underline{B}_k = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} \end{pmatrix},$$

hvor $k=1, \dots, n$, har positiv determinant.

Beris. For $k=1, \dots, n$ sættes $V_k = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$. Restriktionen B_k af B til $V_k \times V_k$ er da en symmetrisk bilinearform på V_k , og den til B_k hørende matrix m.h.t. basen $(e_1, \dots, e_k)$ er netop $\underline{B}_k$.

Antag først, at K_B er positiv definit på V . Da er K_B positiv definit på hvert af underrummene V_k , og $\underline{B}_k$ har derfor ifølge den foregående sætning kun positive karakteristiske rødder. Nu gælder imidlertid for enhver kvadratisk matrix, at dens determinant er lig med produktet af de karakteristiske rødder, regnet med multiplicitet. Følgelig har vi $\det \underline{B}_k > 0$.

Antag dernæst, at $\det \underline{B}_k > 0$ for $k=1, \dots, n$. Vi skal vise ved induktion efter k , at K_B er positiv definit på V_k , og dermed specielt på $V_n = V$. At $B(e_1, e_1) = b_{11} = \det \underline{B}_1 > 0$ følger, at K_B er positiv definit på V_1 . Antag, at K_B er positiv definit på V_k , hvor $1 \leq k < n$. Der gælder da $\text{ind}_+ K_{B_{k+1}} \geq k$, thi V_k er et k -dimensionelt positivitetsunderrum for $K_{B_{k+1}}$. At $\det \underline{B}_{k+1} > 0$ følger, at 0 ikke er karakteristisk rod for $\underline{B}_{k+1}$, og at antallet af negative karakteristiske rødder for $\underline{B}_{k+1}$, regnet med multiplicitet, er lige; thi produktet af samtlige karakteristiske rødder, regnet med multiplicitet, er lig med $\det \underline{B}_{k+1}$. Heraf fremgår, at $\dim N_{B_{k+1}} = 0$ og at $\text{ind}_- K_{B_{k+1}}$ er lige (små. side 8.3.1). Da vi samtidig har $\text{ind}_+ K_{B_{k+1}} + \text{ind}_- K_{B_{k+1}} + \dim N_{B_{k+1}} = k+1$ (små. side 8.3.1), følger, at $\text{ind}_+ K_{B_{k+1}} = k+1$. Hermed er vist, at K_B er positiv definit på V_{k+1} , hvormed induktionsbeviset er fuldført. $\square$

1. Lad B være en symmetrisk bilinearform på et vektorrum $(V, \mathbb{R})$ af dimension $n \in \mathbb{N}$, og lad $(e_1, \dots, e_n)$ være en basis m.h.t. hvilken K_B antager normalform, $K_B(x) = \mu_1 x_1^2 + \dots + \mu_n x_n^2$. Vis, at antallet af koefficienter μ_i , som er hhv. positive, negative og 0, er lig med hhv. $\text{ind}_+ K_B$, $\text{ind}_- K_B$ og $\dim N_B$. Vis, at der findes en basis m.h.t. hvilken K_B antager en normalform, hvor enhver af koefficienterne μ_i er enten 1, -1 eller 0.

2. Lad $(V, \mathbb{R})$ være et 3-dimensionelt euklidiske vektorrum. En kvadratisk form K_B på V er m.h.t. en ortonormal basis (e_1, e_2, e_3) givet ved

$$K_B(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2.$$

Bestem matricen $\underline{B}$ for den tilhørende symmetriske bilinearform B . Bestem $\text{rg } B$, $\text{ind}_+ K_B$ og $\text{ind}_- K_B$. Bestem en ortonormal basis $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ m.h.t. hvilken K_B antager normalform. Lad $\underline{S}$ betegne koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra (e_1, e_2, e_3) til $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$. Bestem $\underline{S}$ og $\underline{S}^{-1}$. Verificér ved udregning, at $(\underline{S}^{-1})' \underline{B} \underline{S}^{-1}$ er en diagonalmatrix med $\underline{B}$'s karakteristiske rødder som diagonalelementer.

3. Lad $(V, \mathbb{R})$ være et vektorrum af endelig dimension $n \geq 2$, og lad $(e_1, \dots, e_n)$ være en basis for V . En kvadratisk form K_B på V er m.h.t. den valgte basis givet ved

$$K_B(x) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Bestem matricen $\underline{B}$ for den tilhørende symmetriske bilinearform B . Bestem ind- K_B , ind- K_B og rg B . (Betrægt f.eks. det $(n-1)$ -dimensionale underum $U = \{v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \mid v_1 + \dots + v_n = 0\}$, og udnyt, at $(v_1 + \dots + v_n)^2 = v_1^2 + \dots + v_n^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} v_i v_j$.)

Kap. 9. Affin geometri.

9.1. Affine rum.	9.1.1 - 9.1.5
9.2. Affine underrum.	9.2.1 - 9.2.4
9.3. Affin afhængighed og uafhængighed.	9.3.1 - 9.3.6
9.4. Affine afbildninger.	9.4.1 - 9.4.11
9.5. Affine funktioner og hyperplaner.	9.5.1 - 9.5.7
9.6. Konvekse mængder.	9.6.1 - 9.6.8
9.7. Kvadratter.	9.7.1 - 9.7.10
Øvelser	9. øv. 1-34

9.1. Affine rum.

Lad A være en ikke-tom mængde, hvis elementer kaldes punkter og betegnes $P, Q, \dots$, lad $(V, \mathbb{R})$ være et endelig-dimensionalt reelt vektorrum og lad $(P, Q) \mapsto \varphi(P, Q)$ være en afbildning af $A \times A$ på V . Vi siger da, at A er et affint rum med V som vektorrum og φ som vektorafbildning, dersom følgende to betingelser er opfyldt:

- (i) For ethvert punkt $P \in A$ og enhver vektor $\underline{v} \in V$ findes et og kun eet punkt $Q \in A$, således at $\varphi(P, Q) = \underline{v}$.
- (ii) For vilkårlige punkter $P, Q, R \in A$ gælder $\varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R)$.

Er A et affint rum med V som vektorrum og φ som vektorafbildning, vil vi ofte skrive $\underline{PQ}$ i stedet for $\varphi(P, Q)$. Betingelserne (i) og (ii) får da følgende form:

- (i) For ethvert punkt $P \in A$ og enhver vektor $\underline{v} \in V$ findes et og kun eet punkt $Q \in A$, således at $\underline{PQ} = \underline{v}$.
- (ii) For vilkårlige punkter $P, Q, R \in A$ gælder $\underline{PQ} + \underline{QR} = \underline{PR}$.

Som betegnelse for et affint rum A med vektorrum V og vektorafbildning φ bruges (A, V, φ) , (A, V) eller blot A .

Betingelsen (ii) kaldes indskudsreglen. Betingelsen (i) er åbenbart ensbetydende med følgende: For ethvert punkt $P \in A$ er afbildningen $Q \mapsto \vec{PQ} = \underline{PQ}$ en bijektiv afbildning af A på V .

Lad P være et punkt i et affint rum A , og lad $\underline{v}$ være en vektor i det tilhørende vektorrum V . Ifølge (i) findes der netop eet punkt $Q \in A$, således at $\underline{PQ} = \underline{v}$. Om dette punkt Q siges,

- at det fremkommer ved afsætning af $\underline{v}$ fra P ;
- at det er endepunkt for $\underline{v}$, når $\underline{v}$ afsættes fra P ;
- at det har $\underline{v}$ som stedsvektor ud fra P .

Vi skal vise følgende simple konsekvenser af (i)-(ii):

For vilkårlige punkter i et affint rum gælder:

$$(1) \quad P = Q \Leftrightarrow \underline{PQ} = \underline{0}.$$

$$(2) \quad \underline{PQ} = -\underline{QP}.$$

$$(3) \quad \underline{P_1Q_1} = \underline{P_2Q_2} \Leftrightarrow \underline{P_1P_2} = \underline{Q_1Q_2}. \quad (\text{"Parallelogram-sætningen".})$$

Bevis. Ifølge (ii) har vi $\underline{PP} + \underline{PR} = \underline{PR}$, hvorved $\underline{PP} = \underline{0}$. Heraf og af (i) følger dernæst, at $P \neq Q$ implicerer $\underline{PQ} \neq \underline{0}$. Hermed er (1) bevist. Ved anvendelse af (ii) og (1) får vi $\underline{PQ} + \underline{QP} = \underline{PP} = \underline{0}$, hvoraf (2) fremgår. Ved anvendelse af (ii) får endelig $\underline{P_1Q_1} - \underline{P_2Q_2} = (\underline{P_1P_2} + \underline{P_2Q_1}) - (\underline{P_2Q_1} + \underline{Q_1Q_2}) = \underline{P_1P_2} - \underline{Q_1Q_2}$, hvoraf (3) fremgår. $\square$

Ved dimensionen $\dim A$ af et affint rum (A, V) forstås dimensionen af vektorrummet V . Et affint rum af dimension 1 hhv. 2 kaldes en linje hhv. plan.

Et affint rum, hvis vektorrum er et euklidisk vektorrum, kaldes et euklidisk affint rum. Ved brug af norm-egenskaber samt (1) og (2) vises let, at der i et euklidisk affint rum defineres en metrik ved $\text{dist}(P, Q) = \| \underline{PQ} \| = \sqrt{\underline{PQ} \cdot \underline{PQ}}$.

Lad (A, V) være et affint rum af dimension $n \geq 1$. Ved et (affint) koordinatsystem i A forstås et sæt $(O; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, hvor O er et punkt i A , og $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ er en basis for V . Punktet O kaldes koordinatsystemets begyndelsespunkt, vektorerne $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ kaldes koordinatsystemets grundvektorer. Er A specielt et euklidisk affint rum, og $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ en ortogonal hhv. ortonormal basis for V , kaldes koordinatsystemet et ortogonalt eller retvinklet koordinatsystem hhv. ortonormalt eller sædvanligt retvinklet koordinatsystem.

Er $(O; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ et affint koordinatsystem i et affint rum (A, V) , så har for hvert punkt $P \in A$ stedvektoren $\underline{OP}$ for P ud fra O en og kun een fremstilling som linearkombination af vektorerne i basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$,

$$\underline{OP} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n.$$

Talsettet $(x_1, \dots, x_n)$ kaldes for punktet P 's (affine) koordinatsæt m.h.t. det betragtede koordinatsystem. Tallet x_i kaldes for P 's i 'te koordinat.

Det noteres, at koordinatsættet for et punkt er identisk med koordinatsættet for punktets stedvektor ud fra begyndelsepunktet.

Lad $(O; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\hat{O}; \hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ være to affine koordinatsystemer i et affint rum (A, V) . Lad P være et punkt i A , som m.h.t. de to koordinatsystemer har koordinatsøjlerne $\underline{x}_1$ hhv. $\hat{\underline{x}}_1$. Lad punkt O 's koordinatsøjle m.h.t. koordinatsystemet $(\hat{O}; \hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ betegnes $\hat{\underline{a}}_1$, og koordinattransformationsmatricen hørende til overgangen fra basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ til basen $(\hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ i V betegnes $\underline{\underline{S}}$, søges et udtryk for forbindelsen mellem $\underline{x}_1$ og $\hat{\underline{x}}_1$. Først bemærkes, at der gælder

$$(4) \quad \hat{\underline{O}}P = \hat{\underline{O}}O + \underline{O}P.$$

Om vektorerne $\hat{\underline{O}}P$ og $\hat{\underline{O}}O$ vides, at de m.h.t. basen $(\hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ har koordinatsøjlerne $\hat{\underline{x}}_1$ hhv. $\hat{\underline{a}}_1$. Om vektoren $\underline{O}P$ vides, at den m.h.t. basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ har koordinatsøjlen $\underline{x}_1$; dens koordinatsøjle m.h.t. basen $(\hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ er derfor $\underline{\underline{S}}\underline{x}_1$, (sml. side 4.3.1). Følgelig får vi ved indsættelse i (4)

$$\hat{\underline{x}}_1 = \hat{\underline{a}}_1 + \underline{\underline{S}}\underline{x}_1,$$

hvormed den ønskede relation er etableret. Det noteres, at $\hat{\underline{a}}_1$ og $\underline{\underline{S}}$ er entydigt bestemt.

Bemærkning. I den her givne definition af begrebet affint rum er forlangt om vektorrummet, at det er endelig-dimensionalt og reelt. Fra faldes disse to krav fås "endelig- eller uendelig-dimensionale, reelle eller komplekse affine rum". Store dele af teorien kan umiddelbart udvides til også at omfatte sådanne affine rum.

Bemærkning. De fra den elementære geometri kendte begreber "planen" og "rummet" er (med de egenskaber, som begreberne tilføjes) euklidiske affine rum af dimension 2 hhv 3, med vektorrummet af geometriske vektorer i planen hhv. rummet (med skalarproduktet som indre produkt) som vektorrum og vektorafbildningen $(P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ}$.

Eksempel. Ethvert (endelig-dimensionalt reelt) vektorrum V kan på naturlig måde organiseres som et affint rum med sig selv som vektorrum, nemlig ved vektorafbildningen $(u, v) \mapsto v - u$.

9.2. Affine underrum.

En ikke-tom delmængde A_0 af et affint rum (A, V, φ) siges at være et affint underrum, dersom for det første $\varphi(A_0 \times A_0)$ er et underrum af V , og for det andet A_0 er et affint rum med $\varphi(A_0 \times A_0)$ som vektorrum og $\varphi: A_0 \times A_0 \rightarrow \varphi(A_0 \times A_0)$ som vektorafbildning. Vektorrummet $V_0 = \varphi(A_0 \times A_0)$ kaldes da for A_0 's retning.

Lad (A, V, φ) være et affint rum og lad (A_0, V_0) være et affint underrum. Der gælder da

$$A_0 = \{Q \in A \mid \varphi(P_0, Q) \in V_0\}$$

for ethvert punkt $P_0 \in A_0$.

Bewis. Lad først Q være et punkt i A_0 . Vi har da $(P_0, Q) \in A_0 \times A_0$, og dermed $\varphi(P_0, Q) \in \varphi(A_0 \times A_0) = V_0$. Hermed er den ene inklusion vist. Lad dernæst Q være et punkt i A med $\varphi(P_0, Q) \in V_0$. Da (i) er opfyldt for (A_0, V_0) , findes et (og kun et) punkt $R \in A_0$ med $\varphi(P_0, R) = \varphi(P_0, Q)$. Men ved anvendelse af (i) - på (A, V) - sluttet heraf, at $R = Q$, og dermed, at $Q \in A_0$. Hermed er den anden inklusion vist. $\square$

Lad (A, V, φ) være et affint rum, lad P_0 være et punkt i A , og lad V_0 være et underrum af V .
Mængden

$$A_0 = \{Q \in A \mid \varphi(P_0, Q) \in V_0\}$$

er da et affint underrum med retningen V_0 , som indeholder P_0 .

Beris. Af $Q \in V_0$ følger, at $P_0 \in A_0$. Dernæst vises, at $\varphi(A_0 \times A_0) = V_0$. Lad x være en vektor i V_0 , og lad Q være bestemt ved $\varphi(P_0, Q) = x$. Vi har da $Q \in A_0$, og $x = \varphi(P_0, Q) \in \varphi(A_0 \times A_0)$. Hermed er den ene inklusion vist. Lad omvendt Q_1 og Q_2 være punkter i A_0 . Følgelig $\varphi(Q_1, Q_2) = \varphi(Q_1, P_0) + \varphi(P_0, Q_2) = -\varphi(P_0, Q_1) + \varphi(P_0, Q_2)$, dvs., at $\varphi(Q_1, Q_2)$ er sum af to vektorer fra V_0 , og derfor selv en vektor fra V_0 . Heraf følger den anden inklusion. Vi skal endelig vise, at A_0 er et affint underrum med retningen V_0 . Her til skal vises, at (i) og (ii) side 9.1.1 er opfyldt for A_0, V_0 . Det er trivielt, at (ii) er opfyldt. Lad derfor P være et punkt i A_0 , og x en vektor i V_0 , det skal der vises, at der findes netop et punkt $Q \in A_0$ med $\varphi(P, Q) = x$. Følgelig (i) er opfyldt for (A, V) findes netop et punkt $Q \in A$ med $\varphi(P, Q) = x$, det skal vises, at $Q \in A_0$. Her til bemærkes, at $\varphi(P, P) \in V_0$, idet $P \in A_0$, og at $\varphi(P, Q) \in V_0$, idet $\varphi(P, Q) = x$. Da nu $\varphi(P_0, Q) = \varphi(P_0, P) + \varphi(P, Q)$, dvs., at $\varphi(P_0, Q)$ er sum af to vektorer fra V_0 , og derfor selv en vektor fra V_0 . Men heraf følger, at $Q \in A_0$. $\square$

Ved anvendelse af disse to sætninger skal vi her efter vise:

Er (A_i, V_i) , $i \in I$, affine underrum af et affint rum (A, V) , og er $\bigcap A_i$ ikke-tomt, så er $\bigcap A_i$ et affint underrum med retningen $\bigcap V_i$.

Beris. Lad P_0 være et punkt i $\bigcap A_i$. For hvert af de affine underrum A_i gælder da, at punkterne i A_i fremkommer ved afsætning af vektorerne i V_i

fra P_0 . Punkterne i ΠA_i fremkommer derfor ved afsetning af vektorerne i ΠV_i fra P_0 . Heraf følger påstanden, idet ΠV_i er et underrum af V . $\square$

At den foregående sætning fremgår umiddelbart, at for enhver ikke-tom delmængde M af et affint rum er fællesmængden af alle affine underrum, som indeholder M , et affint underrum, som indeholder M . Det kaldes det af M udspændte eller frembragte affine underrum, og betegnes $\text{aff} M$.

Lad (A_0, V_0) være et affint underrum af et affint rum (A, V) , lad O være et punkt i A , og lad $(P_0; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r)$ være et affint koordinatsystem i A_0 . Idet punkterne i A_0 fremkommer ved afsetning af vektorerne i V_0 fra P_0 , har vi

$$\begin{aligned} A_0 &= \{ P \in A \mid \underline{P_0}P = t_1 \underline{e}_1 + \dots + t_r \underline{e}_r, \quad t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ P \in A \mid \underline{OP} = \underline{OP_0} + t_1 \underline{e}_1 + \dots + t_r \underline{e}_r, \quad t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R} \}, \end{aligned}$$

hvor der ved den sidste omskrivning er benyttet indskudsreglen. Vi siger, at der ved

$$\underline{OP} = \underline{OP_0} + t_1 \underline{e}_1 + \dots + t_r \underline{e}_r, \quad t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R},$$

er givet en parameterfremstilling af (A_0, V_0) .

Et affint underrum (A_0, V_0) af et affint rum (A, V) kaldes en hyperplan i A , dersom $\dim A_0 = \dim A - 1$.

Lad (A_1, V_1) og (A_2, V_2) være affine underrum af et affint rum (A, V) . Vi siger da, at A_1 og A_2 er parallelle, dersom enten $V_1 \subseteq V_2$ eller $V_2 \subseteq V_1$. Vi siger, at A_1 og A_2 er komplementære, dersom $V_1 \oplus V_2 = V$. Og er (A, V) et euklidisk affint rum, siger vi, at A_1 og A_2 er ortogonale, dersom $V_1 \perp V_2$.

Er (A_0, V_0) en hyperplan i et euklidisk affint rum (A, V) , forstås ved en normal til A_0 et til A_0 ortogonalt 1-dimensionalt affint underrum, altså et affint underrum med retningen $V_0^\perp$. En vektor $\underline{v} \in V_0^\perp \setminus \{0\}$ kaldes en normalvektor til A_0 .

Er (A_1, V_1) og (A_2, V_2) linier (div. 1-dimensionale affine underrum) i et euklidisk affint rum (A, V) , defineres vinklen ϑ mellem dem ved

$$\vartheta = \text{Arc cos } \left| \frac{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2}{\|\underline{v}_1\| \|\underline{v}_2\|} \right|,$$

hvor $\underline{v}_1 \in V_1 \setminus \{0\}$ og $\underline{v}_2 \in V_2 \setminus \{0\}$.

Eksempel. De affine underrum af et vektorrum, som på naturlig måde er organiseret som et affint rum med sig selv som vektorrum (smk. side 9.1.5), er netop sideunderrummene i vektorrummet.

9.3. Affin afhængighed og uafhængighed.

Lad (A, V) være et affint rum. Er $P_0, \dots, P_r \in A$ og $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, bestemmes for hvert punkt $O \in A$ en vektor $\underline{v} \in V$ ved

$$\underline{v} = \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP}_i.$$

For $\lambda_0 + \dots + \lambda_r = 0$ bliver $\underline{v}$ uafhængig af O , idet vi da for et vilkårligt punkt $\hat{O} \in A$ har

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{\hat{O}P}_i &= \left(\sum_{i=0}^r \lambda_i \right) \underline{\hat{O}O} + \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP}_i \\ &= \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP}_i. \end{aligned}$$

Det følgende har derfor god mening: Et sæt $(P_0, \dots, P_r)$ af punkter fra A siges at være affint afhængigt, dersom der findes $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ med $(\lambda_0, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0)$ og $\lambda_0 + \dots + \lambda_r = 0$, således at

$$(1) \quad \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP}_i = \underline{0}$$

for et (og dermed ethvert) punkt $O \in A$. Er sættet $(P_0, \dots, P_r)$ ikke affint afhængigt, siges det at være affint uafhængigt. Dette kommer altså ud på, at $(0, \dots, 0)$ er det eneste sæt $(\lambda_0, \dots, \lambda_r)$ med $\lambda_0 + \dots + \lambda_r = 0$ for hvilket (1) er opfyldt. Det bemærkes, at et sæt bestående af eet punkt altid er affint uafhængigt.

Et sæt $(P_0, \dots, P_r)$ bestående af mindst to punkter fra et affint rum er affint afhængigt, hvis og kun hvis vektorsættet $(\underline{P_0P_1}, \dots, \underline{P_0P_r})$ er lineært afhængigt.

Beris. Hvis punktsættet er affint afhængigt, findes $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, som ikke alle er 0, og som har sum 0, således at

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{p_0 p_i} = \underline{0},$$

og dermed

$$(2) \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i \underline{p_0 p_i} = \underline{0}.$$

Da mindst eet af tallene $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ er forskelligt fra 0, og summen er lig med 0, kan $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ikke alle være 0; af (2) fremgår derfor, at vektorsættet er lineært afhængigt. Hvis omvendt vektorsættet er lineært afhængigt, findes $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, således at (2) er opfyldt. Sættes $\lambda_0 = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_r)$, fås $\lambda_0 + \dots + \lambda_r = 0$ og

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{p_0 p_i} &= \lambda_0 \underline{p_0 p_0} + \sum_{i=1}^r \lambda_i \underline{p_0 p_i} \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i \underline{p_0 p_i} \\ &= \underline{0}, \end{aligned}$$

hvoraf fremgår, at punktsættet er affint afhængigt. $\square$

Af sætningen ovenfor fremgår umiddelbart:

Et affint rum A har dimension n , hvis og kun hvis $n+1$ er det maksimale antal punkter i noget affint uafhængigt sæt af punkter fra A .

Er $P_0, \dots, P_r$ punkter fra et affint rum A og er $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, bestemmes for hvert punkt $O \in A$ et punkt $P \in A$ ved

$$(3) \quad \underline{OP} = \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP_i}.$$

For $\lambda_0 + \dots + \lambda_r = 1$ bliver P uafhængigt af O ; thi af

$$\underline{\hat{O}P} = \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{\hat{O}P_i}$$

følger

$$\begin{aligned} \underline{\hat{O}P} &= \sum_{i=0}^r \lambda_i (\underline{\hat{O}O} + \underline{OP_i}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^r \lambda_i \right) \underline{\hat{O}O} + \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP_i} \\ &= \underline{\hat{O}O} + \underline{OP} = \underline{\hat{O}P}, \end{aligned}$$

hvormed $\hat{P} = P$. Dette leder til følgende definition:
Et punkt $P \in A$ siges at være en affin kombination af punkterne $P_0, \dots, P_r$ med koefficienterne $\lambda_0, \dots, \lambda_r$, dersom $\lambda_0 + \dots + \lambda_r = 1$ og (3) er opfyldt for et (og dermed ethvert) punkt O . Vi vil da også skrive

$$P = \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i.$$

Antag, at et punkt P i et affint rum er en affin kombination af punkter $P_0, \dots, P_r$. Koefficienterne i fremstillingen er da entydigt bestemt, hvis og kun hvis sættet $(P_0, \dots, P_r)$ er affint uafhængigt.

Bevis. Lad O være et punkt i det affine rum, og lad

$$(4) \quad \underline{OP} = \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP}_i$$

være en fremstilling af P som affin kombination af $P_0, \dots, P_r$. Er sættet $(P_0, \dots, P_r)$ affint afhængigt, findes $\mu_0, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}$, som ikke alle er 0, således at $\mu_0 + \dots + \mu_r = 0$ og

$$\sum_{i=0}^r \mu_i \underline{OP}_i = \underline{0}.$$

Ved

$$\underline{OP} = \sum_{i=0}^r (\lambda_i + \mu_i) \underline{OP}_i$$

er da bestemt en fra (4) forskellig fremstilling af P som affin kombination af $P_0, \dots, P_r$. Er omvendt

$$\underline{OP} = \sum_{i=0}^r \nu_i \underline{OP}_i$$

en fra (4) forskellig fremstilling, så har vi

$$\sum_{i=0}^r (\lambda_i - \nu_i) \underline{OP}_i = \underline{0},$$

hvor koefficienterne $\lambda_0 - \nu_0, \dots, \lambda_r - \nu_r$ ikke alle er 0, men har sum 0; sættet $(P_0, \dots, P_r)$ er da affint afhængigt. $\square$

Et sæt $(P_0, \dots, P_r)$ bestående af mindst to punkter fra et affint rum er affint afhængigt, hvis og kun hvis mindst eet af punkterne i sættet er en affin kombination af de øvrige.

Beris. Lad O være et punkt i det affine rum. Hvis sættet er affint afhængigt, findes $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, som ikke alle er 0, og som har sum 0, således at

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP_i} = \underline{0}.$$

Antag f.eks., at $\lambda_0 \neq 0$; da gælder

$$\sum_{i=1}^r \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\right) = 1$$

$$\sum_{i=1}^r \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\right) \underline{OP_i} = \underline{OP_0}.$$

Punktet P_0 er altså en affin kombination af $P_1, \dots, P_r$. Hvis omvendt P_0 er en affin kombination af $P_1, \dots, P_r$, så findes $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ med sum 1, således at

$$\underline{OP_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \underline{OP_i}.$$

Sættes $\lambda_0 = -1$, får $\lambda_0 + \dots + \lambda_r = 0$ og

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP_i} = \underline{0};$$

sættet $(P_0, \dots, P_r)$ er altså affint afhængigt. $\square$

For enhver ikke-tom delmængde M af et affint rum (A, V) er $\text{aff} M$ identisk med mængden af punkter i A , som er affine kombinationer af punkter i M .

Beris. Lad V_0 være $\text{aff} M$'s retning, og lad P_0 være et punkt i M . Sæt

$$K = \{ \underline{P_0 P} \in V \mid P \in M \}.$$

Det er klart, at $K \subseteq V_0$, og dermed, at $\text{span} K \subseteq V_0$. P_0^0

den anden side fås ved afsætning af vektorerne i $\text{span } K$ fra P_0 et affint underrum af A , som indeholder M , og dermed også $\text{aff } M$; der gælder derfor også $V_0 \subseteq \text{span } K$, og altså $V_0 = \text{span } K$. Er nu $P \in A$ en affin kombination af punkter i M , findes $P_1, \dots, P_r \in M$, og $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ med sum 1, således at

$$\underline{P_0}P = \sum_{i=1}^r \lambda_i \underline{P_0}P_i.$$

Da vektorerne $\underline{P_0}P_1, \dots, \underline{P_0}P_r$ tilhører K , sluttet at $\underline{P_0}P$ tilhører V_0 , hvormed $P \in \text{aff } M$. Lad omvendt P være et punkt i $\text{aff } M$. Vi har da $\underline{P_0}P \in V_0$, og der findes følgelig $P_1, \dots, P_r \in M$ og $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, således at

$$\underline{P_0}P = \sum_{i=1}^r \lambda_i \underline{P_0}P_i.$$

Sættes $\lambda_0 = 1 - (\lambda_1 + \dots + \lambda_r)$, fås $\lambda_0 + \dots + \lambda_r = 1$ og

$$\underline{P_0}P = \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{P_0}P_i,$$

hvoraf fremgår, at P er en affin kombination af punkterne $P_0, \dots, P_r \in M$. $\square$

9.4. Affine afbildninger.

En afbildning f af et affint rum (A, U) ind i et affint rum (B, V) siges at være en affin afbildning, dersom der findes en lineær afbildning $\hat{f}$ af U ind i V , således at

$$(1) \quad \hat{f}(\underline{PQ}) = \underline{f(P)f(Q)}$$

for alle $P, Q \in A$. Det er klart, at $\hat{f}$ da er entydigt bestemt; den kaldes den til f hørende lineære afbildning.

Bemærk, at der for en given vilkårlig afbildning $f: A \rightarrow B$ findes en (og da kun een) ikke nødvendigvis lineær afbildning $\hat{f}: U \rightarrow V$ med egenskaben (1), hvis og kun hvis

$$\underline{PQ} = \underline{RS} \Rightarrow \underline{f(P)f(Q)} = \underline{f(R)f(S)}$$

for alle $P, Q, R, S \in A$.

Lad (A, U) og (B, V) være affine rum, og lad $g: U \rightarrow V$ være en lineær afbildning. For hvert $O_1 \in A$ og hvert $O_2 \in B$ findes da en og kun een affin afbildning $f: A \rightarrow B$ med $f(O_1) = O_2$ og $\hat{f} = g$.

Bewis. For at indse entydigheden bemærkes, at er f en affin afbildning med de angivne egenskaber, må der for alle $P \in A$ gælde $\underline{O_2 f(P)} = \underline{f(O_1)f(P)} = \hat{f}(\underline{O_1 P}) = g(\underline{O_1 P})$. Billedpunktet $f(P)$ er således bestemt som det punkt i B , der fremkommer ved afsætning af vektoren $g(\underline{O_1 P})$ fra O_2 . For at vise eksistensen betragtes den afbildning f , som

fører et punkt $P \in A$ over i det punkt i B , som fremkommer ved afsætning af vektoren $g(\underline{O_1P})$ fra O_2 ; vi har altså $\underline{O_2f(P)} = g(\underline{O_1P})$ for alle $P \in A$. Om denne afbildning f gælder da for det første $f(O_1) = O_2$, thi $\underline{O_2f(O_1)} = g(\underline{O_1O_1}) = g(\underline{0}) = \underline{0}$. Endvidere gælder

$$\begin{aligned} g(\underline{PQ}) &= g(\underline{PO_1} + \underline{O_1Q}) = g(\underline{PO_1}) + g(\underline{O_1Q}) \\ &= -g(\underline{O_1P}) + g(\underline{O_1Q}) = -\underline{O_2f(P)} + \underline{O_2f(Q)} \\ &= \underline{f(P)O_2} + \underline{O_2f(Q)} = \underline{f(P)f(Q)} \end{aligned}$$

for alle $P, Q \in A$, hvorefter fremgår, at f er en affin afbildning med $\hat{f} = g$. $\square$

Lad (A, U) og (B, V) være affine rum, hvor $\dim A = n \geq 1$. For hvert affint uafhængigt sæt $(P_0, \dots, P_n)$ af $n+1$ punkter fra A og ethvert sæt $(Q_0, \dots, Q_n)$ af $n+1$ punkter fra B findes da en og kun en affin afbildning $f: A \rightarrow B$ med $f(P_i) = Q_i$ for $i = 0, \dots, n$.

Beris. Først bemærkes, at en affin afbildning med de i sætningen angivne egenskaber er det samme som en affin afbildning f med $f(P_0) = Q_0$ og $\hat{f}(\underline{P_0P_i}) = \underline{Q_0Q_i}$ for $i = 1, \dots, n$. Da sættet $(\underline{P_0P_1}, \dots, \underline{P_0P_n})$ er en basis for U (små. side 9.3.1), findes netop en linear afbildning $g: U \rightarrow V$ med $g(\underline{P_0P_i}) = \underline{Q_0Q_i}$ for $i = 1, \dots, n$ (små. side 2.1.2). Følge den foregående sætning findes derfor netop en affin afbildning $f: A \rightarrow B$ med $f(P_0) = Q_0$ og $\hat{f}(\underline{P_0P_i}) = \underline{Q_0Q_i}$ for $i = 1, \dots, n$. Hermed er sætningen bevist. $\square$

Lad f være en afbildning af et affint rum (A, U) ind i et affint rum (B, V) . Følgende tre betingelser er da ensbetydende:

(2) f er en affin afbildning.

(3) f bevarer affine kombinationer, d.v.s. $P = \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i$ implicerer $f(P) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i)$.

(4) $\underline{PQ} = \lambda \underline{RS}$ implicerer $\underline{f(P)f(Q)} = \lambda \underline{f(R)f(S)}$.

Beris. Antag, at (2) er opfyldt, lad $P_0, \dots, P_r$ være punkter i A , og lad $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ være reelle tal med sum 1. Punktet $P = \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i$ er da bestemt ved, at $\underline{OP} = \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP_i}$ for et vilkårligt punkt $O \in A$. Ved brug af (2) får vi da

$$\begin{aligned} \underline{f(O)f(P)} &= \hat{f}(\underline{OP}) = \hat{f}\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP_i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^r \lambda_i \hat{f}(\underline{OP_i}) = \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{f(O)f(P_i)}, \end{aligned}$$

altså $f(P) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i)$. Hermed er vist, at (2) medfører (3). Antag dernæst, at (3) er opfyldt, lad P, Q, R, S være punkter i A , og lad λ være et reelt tal, således at $\underline{PQ} = \lambda \underline{RS}$. Vi har da

$$\begin{aligned} \underline{PP} = \underline{0} &= \underline{PQ} - \lambda \underline{RS} = \underline{PQ} - \lambda \underline{RP} - \lambda \underline{PS} \\ &= \underline{PQ} + \lambda \underline{PR} - \lambda \underline{PS}; \end{aligned}$$

punktet P er altså en affin kombination af punkterne Q, R og S med koefficienterne $1, \lambda$ og $-\lambda$. Ved brug af (3) får vi derfor

$$\begin{aligned}\underline{0} &= \underline{f(P)f(P)} \\ &= \underline{f(P)f(Q)} + \lambda \underline{f(P)f(R)} - \lambda \underline{f(P)f(S)},\end{aligned}$$

og dermed

$$\begin{aligned}\underline{f(P)f(Q)} &= -\lambda \underline{f(P)f(R)} + \lambda \underline{f(P)f(S)} \\ &= \lambda (-\underline{f(P)f(R)} + \underline{f(P)f(S)}) \\ &= \lambda \underline{f(R)f(S)}.\end{aligned}$$

Herved er vist, at (3) medfører (4). Antag endelig, at (4) er opfyldt. Vi har da specielt $\underline{PQ} = \underline{RS}$ implicerer $\underline{f(P)f(Q)} = \underline{f(R)f(S)}$, hvorefter fremgår, at der ved $\hat{f}(\underline{PQ}) = \underline{f(P)f(Q)}$ defineres en afbildning $\hat{f}: U \rightarrow V$. Det skal vises, at $\hat{f}$ er lineær. Først vises, at $\hat{f}(u_1 + u_2) = \hat{f}(u_1) + \hat{f}(u_2)$ for alle $u_1, u_2 \in U$. Er P, Q og R punkter i A med $u_1 = \underline{PQ}$ og $u_2 = \underline{QR}$, har vi

$$\begin{aligned}\hat{f}(u_1 + u_2) &= \hat{f}(\underline{PQ} + \underline{QR}) = \hat{f}(\underline{PR}) \\ &= \underline{f(P)f(R)} = \underline{f(P)f(Q)} + \underline{f(Q)f(R)} \\ &= \hat{f}(\underline{PQ}) + \hat{f}(\underline{QR}) \\ &= \hat{f}(u_1) + \hat{f}(u_2)\end{aligned}$$

Dermed vises, at $\hat{f}(\lambda u) = \lambda \hat{f}(u)$ for alle $u \in U$ og $\lambda \in \mathbb{R}$. Er P, Q, R og S punkter i A med $u = \underline{RS}$ og $\lambda u = \underline{PQ}$, og dermed $\underline{PQ} = \lambda \underline{RS}$, fås ved brug af (3)

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda u) &= \hat{f}(\underline{PQ}) = \underline{f(P)f(Q)} \\ &= \lambda \underline{f(R)f(S)} = \lambda \hat{f}(\underline{RS}) = \lambda \hat{f}(u),\end{aligned}$$

herved er vist, at (4) medfører (2). $\square$

Man efterviser let følgende:

Lad (A, U) og (B, V) være affine rum, og lad $f: A \rightarrow B$ være en affin afbildning. For hvert affint underum (B_0, V_0) af B med $f^{-1}(B_0) \neq \emptyset$ er $f^{-1}(B_0)$ et affint underum af A med retningen $\hat{f}^{-1}(V_0)$, og for hvert affint underum (A_0, U_0) af A er $f(A_0)$ et affint underum af B med retningen $\hat{f}(U_0)$.

Man efterviser ligeledes let følgende:

Er $f: A \rightarrow B$ og $g: B \rightarrow C$ affine afbildninger, så er den sammensatte afbildning $g \circ f: A \rightarrow C$ ligeledes affin, og $\hat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$.

En affin afbildning $f: A \rightarrow B$ er bijektiv, hvis og kun hvis den tilhørende lineare afbildning $\hat{f}$ er bijektiv. Hvis f er bijektiv, så er den omvendte afbildning $f^{-1}: B \rightarrow A$ ligeledes affin, og $\hat{f^{-1}} = \hat{f}^{-1}$.

Lad (A, U) og (B, V) være affine rum, og lad $(O_1; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ hkr. $(O_2; \underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ være et affint koordinatsystem i A hkr. B . Lad videre $f: A \rightarrow B$ være en affin afbildning. For et vilkårligt punkt $P \in A$ har vi

$$\begin{aligned} \underline{O_2} f(P) &= \underline{O_2} f(O_1) + \underline{f(O_1)} f(P) \\ (5) \quad &= \underline{O_2} f(O_1) + \hat{f}(\underline{O_1} P). \end{aligned}$$

Betegnes nu med $\underline{B}$ den til $\hat{f}$ hørende matrix m.h.t. baserne $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ hkr. $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$, med $\underline{B_1}$

punktet P 's koordinatsøjle m.h.t. koordinatsystemet $(O_1; e_1, \dots, e_n)$, og med $\underline{a}_1$ punktet $f(O_1)$'s koordinatsøjle m.h.t. koordinatsystemet $(O_2; f_1, \dots, f_m)$, så er punktet $f(P)$'s koordinatsøjle $\underline{x}_1$ m.h.t. koordinatsystemet $(O_2; f_1, \dots, f_m)$ ifølge (5) bestemt ved

$$\underline{x}_1 = \underline{a}_1 + \underline{A} \underline{u}_1.$$

Denne relation kaldes den affine afbildnings matrix-ligning m.h.t. de betragtede koordinatsystemer.

En bijektiv affin afbildning af et affint rum A på sig selv kaldes en affin transformation af A . Mængden af affine transformationer af A er en gruppe med sammensætning som komposition; gruppen kaldes A 's affine gruppe.

En affin transformation af et affint rum A kaldes en translation, hvis den tilhørende lineære afbildning er den identiske afbildning. Ved hjælp af parallelogramsætningen findes let, at en affin transformation f af A er en translation, hvis og kun hvis $\underline{P}f(P) = \underline{Q}f(Q)$ for alle $P, Q \in A$. Vektoren $\underline{P}f(P)$ kaldes da translationsvektoren. Mængden af translationer af A er en kommutativ undergruppe af A 's affine gruppe.

En afstandsbevarende affin transformation af et euklidisk affint rum kaldes en kongruens. Mængden af kongruenser af et euklidisk affint rum er en undergruppe af rummets affine gruppe.

En affin transformation f af et euklidisk affint rum (A, V) er en kongruens, hvis og kun hvis $\hat{f}$ er en ortogonal endomorfi af V .

Beris. Følge definitionen af metrikken i et euklidisk affint rum (side 9.1.3) er f en kongruens, hvis og kun hvis $\|PQ\| = \|\underline{f(P)f(Q)}\|$ for alle $P, Q \in A$. Idet $\underline{f(P)f(Q)} = \hat{f}(\underline{PQ})$ ses, at f er en kongruens, hvis og kun hvis $\hat{f}$ er en normbevarende endomorfi af V . Dette sidste vides imidlertid at være ensbetydende med, at $\hat{f}$ er ortogonal (sml. side 7.7.1). $\square$

En kongruens f af et euklidisk affint rum (A, V) siges herefter at være egentlig hhv. uegentlig efter som den tilhørende lineare afbildning $\hat{f}$ er en egentlig hhv. uegentlig ortogonal endomorfi af V (sml. side 7.7.4). Det ses, at den identiske afbildning af A er en egentlig kongruens, at den inverse til en egentlig hhv. uegentlig kongruens er egentlig hhv. uegentlig, at den sammensatte af to kongruenser af samme art er egentlig, og at den sammensatte af to kongruenser af forskellig art er uegentlig. Specielt noteres, at mængden af egentlige kongruenser af et euklidisk affint rum er en undergruppe af rummets affine gruppe.

Vi skal endelig vise følgende sætning (hvorat fremgår, at kongruenserne af et euklidisk affint rum netop er de afstandsbevarende afbildninger af rummet ind i sig selv):

Enhver afstandsbevarende afbildning f af et euklidisk affint rum (A, V) ind i sig selv er en affin transformation af A , - og dermed en kongruens.

Bevis. Først bemærkes, at der for vilkårlige vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ i et reelt vektorrum med indre produkt gælder

$$\begin{aligned}\|\underline{u} - \underline{v}\|^2 &= (\underline{u} - \underline{v}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) \\ &= \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 - 2 \underline{u} \cdot \underline{v},\end{aligned}$$

og dermed

$$(6) \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = \frac{1}{2} (\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 - \|\underline{u} - \underline{v}\|^2).$$

Lad O, P og Q være punkter i A . Anvendes (6) med $\underline{u} = \underline{OP}$ og $\underline{v} = \underline{OQ}$, fås

$$\underline{OP} \cdot \underline{OQ} = \frac{1}{2} (\text{dist}(O, P)^2 + \text{dist}(O, Q)^2 - \text{dist}(P, Q)^2),$$

og anvendes (6) med $\underline{u} = \underline{f(O)f(P)}$ og $\underline{v} = \underline{f(O)f(Q)}$, fås

$$\underline{f(O)f(P)} \cdot \underline{f(O)f(Q)} = \frac{1}{2} (\text{dist}(f(O), f(P))^2 + \text{dist}(f(O), f(Q))^2 - \text{dist}(f(P), f(Q))^2).$$

Da f er afstandsbevarende, har vi således

$$(7) \quad \underline{OP} \cdot \underline{OQ} = \underline{f(O)f(P)} \cdot \underline{f(O)f(Q)}$$

for alle $O, P, Q \in A$. Lad nu $(O; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ være et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i A , og lad punkterne $P_1, \dots, P_n \in A$ være bestemt ved, at $\underline{OP}_1 = \underline{e}_1, \dots, \underline{OP}_n = \underline{e}_n$. Endvidere sættes $\hat{O} = f(O)$ og $\hat{\underline{e}}_1 = \hat{O}f(P_1), \dots, \hat{\underline{e}}_n = \hat{O}f(P_n)$. Af (7) fremgår da, at også $(\hat{O}; \hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ er et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i A . Ved anvendelse af (7) fås endvidere, at for ethvert

punkt $P \in A$ er punktet $f(P)$'s koordinatsøjle $\underline{\hat{u}}_1$ m.h.t. det sidste koordinatsystem identisk med P 's koordinatsøjle $\underline{u}_1$ m.h.t. det første koordinatsystem; vi har nemlig (sml. side 7.7.7)

$$\begin{aligned} u_i &= \underline{O}P \cdot \underline{e}_i = \underline{O}P \cdot \underline{O}P_i \\ &= \underline{f(O)f(P)} \cdot \underline{f(O)f(P_i)} \\ &= \underline{\hat{O}f(P)} \cdot \underline{\hat{e}}_i \\ &= \hat{u}_i, \quad i=1, \dots, n. \end{aligned}$$

Lad herefter g være den entydigt bestemte affine afbildning af A ind i A med $g(O) = \hat{O}$ ($=f(O)$), hvis tilhørende lineære afbildning $\hat{g}: V \rightarrow V$ er den, hvortil der hører matricen $\underline{\hat{E}}_{n,n}$, idet originalvektorer henføres til basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og billedvektorer henføres til basen $(\underline{\hat{e}}_1, \dots, \underline{\hat{e}}_n)$. Da $\underline{\hat{E}}_{n,n}$ er regulær, er $\hat{g}$ bijektiv (sml. side 4.2.5), og g dermed en affin transformation af A (sml. side 9.4.5). Henføres originalpunkter til koordinatsystemet $(O; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og billedpunkter til koordinatsystemet $(\hat{O}; \underline{\hat{e}}_1, \dots, \underline{\hat{e}}_n)$, får g matriceligningen

$$\underline{x}_1 = \underline{O}_1 + \underline{\hat{E}} \underline{x}_1.$$

Sammenholder dette med det ovenfor beviste fremgår, at $f=g$, hvorved sætningen er bevist. $\square$

Til sidst anføres, at man naturligt kan definere en isomorfi af et affint rum på et andet som en bijektiv affin afbildning af det ene rum på det andet. Findes en sådan, siges de to rum at være isomorfe. Er talen om to euklidiske affine rum, forlanges yderligere, at den tilhørende lineære afbildning bevarer det indre produkt. I begge tilfælde gælder, at eksistensen af en isomorfi er ensbetydende med, at de to rum har samme dimension.

Bemærkning. I elementære fremstillinger af plan- og rumgeometri er det grundlag, hvorpå teorien udvikles, ofte meget ufuldstændigt. Et tilfredsstillende grundlag *) fås ved at sige, at plan- hhv. rumgeometri er studiet af euklidiske affine rum af dimension 2 hhv. 3. Det skal her til bemærkes,

- at "planen" hhv. "rummet" (med de egenskaber, som disse begreber tilføjes) er euklidiske affine rum af dimension 2 hhv. 3,

- at alle den elementære geometris begreber kan indpasses i den euklidiske affine geometri, og at alle sætninger i den euklidiske affine geometri, som er modstykker til (gyldige) elementære-geometriske sætninger, herved bliver gyldige,

*) Dog mangler endnu bevis for eksistens af $\mathbb{R}$, og en af den elementære geometri uafhængig indførelse af de trigonometriske funktioner.

— samt at euklidiske affine rum (som ovenfor anført) er isomorfe, hvis og kun hvis de har samme dimension.

Det pointeres, at den ovenfor angivne grundlag for plan- og rumgeometri ikke er det eneste acceptable. Der er muligt — men omstændeligt — at bringe det i elementære fremstillinger antydede grundlag i orden, hvorefter teorien kan udvikles efter kendte retningslinier.

9.5. Affine funktioner og hyperplaner.

Legemet $\mathbb{R}$ kan som bekendt opfattes som et 1-dimensionalt reelt vektorrum, og dermed som et affint rum med sig selv som vektorrum og vektorafbildningen $(a, b) \mapsto \underline{ab} = b - a$. Ved en affin funktion på et affint rum (A, V) forstås herefter en affin afbildning af (A, V) ind i $\mathbb{R}$, idet $\mathbb{R}$ opfattes som et affint rum således som beskrevet; den tilhørende lineære afbildning er da en lineærform på V .

Mængden af affine funktioner på et affint rum (A, V) er et underrum i vektorrummet $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ af alle afbildninger af A ind i $\mathbb{R}$.

Beris. Det skal vises, at er f og g affine funktioner på A , og er λ et reelt tal, så er også λf og $f+g$ affine funktioner på A . Lad P og Q være vilkårlige punkter i A ; vi har da

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (\lambda \hat{f})(\underline{PQ}) &= \lambda \hat{f}(\underline{PQ}) = \lambda \underline{f(P)f(Q)} \\
 &= \lambda (f(Q) - f(P)) = \lambda f(Q) - \lambda f(P) \\
 &= (\lambda f)(Q) - (\lambda f)(P) \\
 &= \underline{(\lambda f)(P) (\lambda f)(Q)}
 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (\hat{f} + \hat{g})(\underline{PQ}) &= \hat{f}(\underline{PQ}) + \hat{g}(\underline{PQ}) = \underline{f(P)f(Q)} + \underline{g(P)g(Q)} \\
 &= (f(Q) - f(P)) + (g(Q) - g(P))
 \end{aligned}$$

$$= (f(Q) + g(Q)) - (f(P) + g(P))$$

$$= (f+g)(Q) - (f+g)(P)$$

$$= \underline{(f+g)(P) - (f+g)(Q)}.$$

Af (1) fremgår, at λf er en affin afbildning med $\widehat{\lambda f} = \lambda \widehat{f}$, og af (2) fremgår, at $f+g$ er en affin afbildning med $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$. $\square$

Enhver konstant reel funktion på et affint rum (A, V) er en affin funktion; den tilhørende lineære afbildning er nulformen på V . Omvendt er enhver affin funktion, hvis tilhørende lineære afbildning er nulformen, konstant. For en sådan affin funktion f har vi $f^{-1}(\alpha) = A$ for eet $\alpha \in \mathbb{R}$ og $f^{-1}(\alpha) = \emptyset$ for ethvert andet $\alpha \in \mathbb{R}$. For ikke-konstante affine funktioner har vi:

Lad (A, V) være et affint rum, lad f være en ikke-konstant affin funktion på A , og lad α være et reelt tal. Vi har da:

(3) Originalmængden $f^{-1}(\alpha)$ er en hyperplan i A .

(4) For ethvert $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ og ethvert $c \in \mathbb{R}$ gælder

$$f^{-1}(\alpha) = (\mu f + c)^{-1}(\mu \alpha + c).$$

(5) Er g en (ikke-konstant) affin funktion på A og β et reelt tal, således at $f^{-1}(\alpha) = g^{-1}(\beta)$, så findes entydigt bestemte $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ og $c \in \mathbb{R}$, således at $g = \mu f + c$ og $\beta = \mu \alpha + c$.

Beris. Da f ikke er konstant, er $\hat{f}$ ikke nulfor-
men. Vi har derfor $\hat{f}(V) = \mathbb{R}$, og dermed $f(A) = \mathbb{R}$.
Originalmængden $f^{-1}(\alpha)$ er følgelig ikke-tom. Lad
 P_0 være et punkt i $f^{-1}(\alpha)$; for ethvert punkt $P \in A$
har vi da $\hat{f}(\underline{P_0 P}) = \underline{f(P_0)f(P)} = f(P) - f(P_0) = f(P) - \alpha$, hvil-
ket viser, at

$$(6) \quad f^{-1}(\alpha) = \{P \in A \mid \underline{P_0 P} \in K_{\hat{f}}\}.$$

Idet $\dim K_{\hat{f}} = \dim V - \dim \hat{f}(V) = \dim V - 1 = \dim A - 1$,
fremgår heraf, at $f^{-1}(\alpha)$ er en hyperplan, - og (3) er
bevist. Påstanden (4) er oplagt. Antag herefter, at
 $f^{-1}(\alpha) = g^{-1}(\beta)$. Lad P_0 være et punkt i $f^{-1}(\alpha)$, og der-
med også i $g^{-1}(\beta)$. Vi har da (sml. (6))

$$f^{-1}(\alpha) = \{P \in A \mid \underline{P_0 P} \in K_{\hat{f}}\}$$

og

$$g^{-1}(\beta) = \{P \in A \mid \underline{P_0 P} \in K_{\hat{g}}\}.$$

Heraf fremgår, at $K_{\hat{f}} = K_{\hat{g}}$. Lad U være et til $K_{\hat{f}}$
(= $K_{\hat{g}}$) komplementært (1-dimensionalt) under rum
af V , og lad u_0 være en vektor i $U \setminus \{0\}$. Enhver
vektor $x \in V$ har da en entydig fremstilling af for-
men $x = k + t u_0$, hvor $k \in K_{\hat{f}} = K_{\hat{g}}$ og $t \in \mathbb{R}$. Dette giver
 $\hat{f}(x) = \hat{f}(k) + t \hat{f}(u_0) = t \hat{f}(u_0)$ og $\hat{g}(x) = \hat{g}(k) + t \hat{g}(u_0) = t \hat{g}(u_0)$.

Vi sætter nu

$$\mu = \frac{\hat{g}(u_0)}{\hat{f}(u_0)};$$

idet $u_0 \notin K_{\hat{f}} = K_{\hat{g}}$, er μ veldefineret og forskellig fra
0. Herefter får vi $\hat{g}(x) = t \hat{g}(u_0) = t \mu \hat{f}(u_0) = \mu (t \hat{f}(u_0)) =$
 $\mu \hat{f}(x)$, hvoraf fremgår, at $\hat{g} = \mu \hat{f}$. For et vilkårligt
punkt $P \in A$ har vi nu

$$\begin{aligned}\hat{g}(\underline{P_0P}) &= \underline{g(P_0)g(P)} = g(P) - g(P_0) \\ &= g(P) - \beta\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}(\mu f^{\hat{}})(\underline{P_0P}) &= \underline{(\mu f)(P_0)(\mu f)(P)} \\ &= (\mu f)(P) - (\mu f)(P_0) \\ &= (\mu f)(P) - \mu f(P_0) \\ &= (\mu f)(P) - \mu \alpha,\end{aligned}$$

og dermed, idet vi udmytter, at $\hat{g} = \mu f^{\hat{}}$,

$$(g - \mu f)(P) = \beta - \mu \alpha.$$

Som det spøgte μ og c kan herefter bruges det fundne μ og $c = \beta - \mu \alpha$. For at vise entydigheden bemærkes, at $\mu_1 f + c_1 = \mu_2 f + c_2$ implicerer $(\mu_1 - \mu_2) f = c_2 - c_1$. Da f er ikke-konstant, følger, at $\mu_1 = \mu_2$, og dermed også, at $c_1 = c_2$. $\square$

Vi skal dernæst vise:

For enhver hyperplan (A_0, V_0) i et affint rum (A, V) findes en (ikke-konstant) affin funktion f på A og et $\alpha \in \mathbb{R}$, således at $A_0 = f^{-1}(\alpha)$.

Beris. Lad $(e_1, \dots, e_{n-1})$ være en basis for V_0 , og lad e_n være en vektor i V , således at sættet $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ er en basis for V . Lad g være den ved

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \longmapsto x_n$$

definerede afbildning af V ind i $\mathbb{R}$. Det ses umid-

delbart, at g er en linearform på V med V_0 som kerne. Lad P_0 være et punkt i A_0 , og lad α være et reelt tal. Der findes da (sml. side 9.4.1) netop en affin funktion f på A med $f(P_0) = \alpha$ og $f' = g$. Det påstås, at $f^{-1}(\alpha) = A_0$. Er P et punkt i $f^{-1}(\alpha)$, har vi $g(\underline{P_0P}) = f'(\underline{P_0P}) = \underline{f(P_0)f(P)} = f(P) - f(P_0) = \alpha - \alpha = 0$, altså $\underline{P_0P} \in V_0$, og dermed $P \in A_0$. Og er P et punkt i A_0 , har vi $\underline{P_0P} \in V_0$, og dermed $0 = g(\underline{P_0P}) = f'(\underline{P_0P}) = \underline{f(P_0)f(P)} = f(P) - f(P_0) = f(P) - \alpha$, altså $f(P) = \alpha$. $\square$

Ved brug af de to foregående sætninger skal vi herefter vise:

Lad (A, V) være et affint rum, og lad der i A være valgt et affint koordinatsystem $(O; e_1, \dots, e_n)$. Da gælder:

- (7) Mængden af punkter i A , hvis koordinatsæt $(x_1, \dots, x_n)$ tilfredsstiller en ligning af formen

$$(*) \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = a_0,$$

hvor $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, er en hyperplan i A . (Vi siger, at $(*)$ er en ligning for hyperplanen.)

- (8) Er $(*)$ en ligning for en hyperplan A_0 i A , så er også enhver ligning, som fås ved at multiplicere $a_0, a_1, \dots, a_n$ med samme tal $\mu \neq 0$, en ligning for A_0 , og enhver ligning for A_0 kan fås på denne måde.

- (9) Enhver hyperplan i A har en ligning af formen $(*)$ med $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$.

Betegn med f den ikke-konstante affine funktion på A , som har matrixligningen

$$(v_1) = (0) + (a_1 \cdots a_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

så er mængden af punkter i A , hvis koordinatsæt tilfredsstiller (*), identisk med $f^{-1}(a_0)$; (7) følger derfor af (3). Den første påstand i (8) er oplagt (men følger i øvrigt også af (4)). Har A_0 foruden (*) også ligningen

$$b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n = b_0,$$

og betegnes med g den affine funktion på A , som har matrixligningen

$$(v_1) = (0) + (b_1 \cdots b_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

så har vi $f^{-1}(a_0) = g^{-1}(b_0) (= A_0)$. Af (5) følger derfor, at der findes reelle tal $\mu \neq 0$ og c , således at $g = \mu f + c$ og $b_0 = \mu a_0 + c$. Idet $f(0) = g(0) = 0$, har vi $c = 0$, og dermed $g = \mu f$ og $b_0 = \mu a_0$. Idet $g = \mu f$ implicerer $(b_1, \dots, b_n) = \mu(a_1, \dots, a_n)$, følger den anden påstand i (8) heraf. Endelig bemærkes, at ifølge den foregående sætning er enhver hyperplan A_0 af formen $f^{-1}(\alpha)$, hvor f er en ikke-konstant affine funktion. Har f matrixligningen

$$(v_1) = (c_1) + (c_{11} \cdots c_{1n}) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

så er $c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n = \alpha - c_1$ en ligning for A_0 . $\square$

Vi skal til sidst vise:

Lad (A, V) være et euklidisk affint rum, lad $(0; e_1, \dots, e_n)$ være et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i A , og lad (A_0, V_0) være en hyperplan i A med ligningen

$$(9) \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = a_0.$$

Vektoren $v \in V$ med koordinatsættet $(a_1, \dots, a_n)$ m.h.t. basen $(e_1, \dots, e_n)$ er da en normal vektor for A_0 .

Bewis. Det skal vises, at $v \cdot u = 0$ for enhver vektor $u \in V_0$. Lad u være en vektor i V_0 , lad P og Q være punkter i A_0 med $u = \underline{PQ}$, og lad $(y_1, \dots, y_n)$ hhv. $(z_1, \dots, z_n)$ være koordinatsættet for P hhv. Q . Idet $\underline{PQ} = \underline{PO} + \underline{OQ} = \underline{OQ} - \underline{OP}$, har $\underline{PQ}$ koordinatsættet $(z_1 - y_1, \dots, z_n - y_n)$, og vi får følgende

$$v \cdot u = a_1(z_1 - y_1) + \dots + a_n(z_n - y_n).$$

Påstanden følger da af, at både $(y_1, \dots, y_n)$ og $(z_1, \dots, z_n)$ tilfredsstiller (9). $\square$

9.6. Konvekse mængder.

Lad P_0 og P_1 være to forskellige punkter i et affint rum (A, V) . Det af $\{P_0, P_1\}$ frembragte affine underrum er da 1-dimensionalt, altså en linie (sml. side 9.3.2). Denne linie er identisk med mængden af punkter i A , som er affine kombinationer af P_0 og P_1 (sml. side 9.3.5), altså med mængden af punkter P af formen $P = (1-t)P_0 + tP_1$, $t \in \mathbb{R}$. Vi sætter nu

$$[P_0, P_1] = \{P \in A \mid \exists t \in [0, 1] : P = (1-t)P_0 + tP_1\}.$$

Mængden $[P_0, P_1]$ kaldes et liniestykke, og punkterne P_0 og P_1 kaldes liniestykkets endepunkter. Endvidere sætter vi $[P_0, P_0] = \{P_0\}$. En delmængde K af A siges herefter at være konveks, dersom det for vilkårlige punkter $P_0, P_1 \in K$ gælder, at $[P_0, P_1] \subseteq K$. Det noteres, at den tomme mængde, enhver mængde bestående af et punkt og ethvert affint underrum (herunder A) er en konveks mængde. Af definitionen fremgår umiddelbart:

Er K_i , $i \in I$, konvekse delmængder af et affint rum (A, V) , så er også fellesmængden $\bigcap K_i$ konveks.

At sætningen følger specielt, at for enhver delmængde M af A er fellesmængden af alle konvekse mængder, som indeholder M , en konveks mængde, som indeholder M . Denne konvekse mængde kaldes M 's konvekse hylster (eller den af M udspændte eller frembragte konvekse mængde), og betegnes $\text{conv } M$.

Et punkt P i et affint rum (A, V) siges at være en konvex kombination af punkterne $P_0, \dots, P_r \in A$ med koefficienterne $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, dersom P er en affin kombination af $P_0, \dots, P_r$ med koefficienterne $\lambda_0, \dots, \lambda_r$, og alle koefficienterne $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ er ≥ 0 .

Lad K være en konvex delmængde af et affint rum (A, V) . Ethvert punkt $P \in A$, som er konvex kombination af punkter $P_0, \dots, P_r \in K$, tilhører da K .

Beris. Beviset føres ved induktion efter r . For $r=0$ er påstanden trivial, for $r=1$ følger den af definitionen af konvexitet. Lad der for r være ≥ 2 , antag, at ethvert punkt, som er konvex kombination af højst r punkter fra K , tilhører K , og lad

$$(1) \quad P = \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i$$

være en konvex kombination af punkter $P_0, \dots, P_r \in K$.

Sæt

$$\mu = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i.$$

Vi har da $\mu \geq 0$ og $\mu + \lambda_r = 1$. For $\mu = 0$ reduceres (1) til $P = 1 P_r$, og der er intet at vise. For $\mu > 0$ har vi

$$\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_i}{\mu} = 1$$

og

$$\frac{\lambda_i}{\mu} \geq 0, \quad i=0, \dots, r-1.$$

Sæt

$$Q = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_i}{\mu} P_i.$$

Ifølge induktionsantagelsen har vi da $Q \in K$. Da K

er konveks, følger, at vi også har $\mu Q + (1-\mu)P_r \in K$.
Men for et vilkårligt punkt $O \in A$ har vi

$$\begin{aligned}\mu \underline{OQ} + (1-\mu) \underline{OP}_r &= \mu \underline{OQ} + \lambda_r \underline{OP}_r \\ &= \mu \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda_i}{\mu} \underline{OP}_i + \lambda_r \underline{OP}_r \\ &= \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP}_i \\ &= \underline{OP},\end{aligned}$$

altså $\mu Q + (1-\mu)P_r = P$, hvor med $P \in K$. $\square$

For enhver delmængde M af et affint rum (A, V) er $\text{conv } M$ identisk med mængden af punkter i A , som er konvekse kombinationer af punkter i M .

Beris. Lad M' være mængden af punkter i A , som er konvekse kombinationer af punkter i M . Vi skal da vise, at $M' = \text{conv } M$. Fordet $\text{conv } M$ er en konveks mængde, som indeholder M , fremgår af den foregående sætning, at $M' \subseteq \text{conv } M$. For at vise den modsatte inklusion vises, at M' indeholder M og er konveks. Det første er oplagt. Lad derfor

$$P = \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i, \quad Q = \sum_{j=0}^s \mu_j Q_j$$

være punkter i M' , - hvor altså punkterne P_i og Q_j alle tilhører M , tallene λ_i og μ_j alle er ≥ 0 , og såvel λ_i 'erne som μ_j 'erne har sum 1. Det skal da vises, at $(1-t)P + tQ \in M'$ for ethvert $t \in [0, 1]$. For et vilkårligt punkt $O \in A$ har vi

$$(1-t)\underline{OP} + t\underline{OQ} = (1-t) \sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP}_i + t \sum_{j=0}^s \mu_j \underline{OQ}_j$$

$$= \sum_{i=0}^r (1-t) \lambda_i \underline{O} P_i + \sum_{j=0}^s t \mu_j \underline{O} Q_j.$$

Idet tallene $(1-t) \lambda_i$ og $t \mu_j$ alle er ≥ 0 og har sum 1, ses, at punktet $(1-t)P + tQ$ er en konvex kombination af punkterne $P_0, \dots, P_r, Q_0, \dots, Q_s \in M$ med koefficienterne $(1-t) \lambda_0, \dots, (1-t) \lambda_r, t \mu_0, \dots, t \mu_s$, og dermed er et punkt i M' . $\square$

Vi skal skærpe den foregående sætning til Carathéodory's sætning:

For enhver delmængde M af et affint rum (A, V) er $\text{conv } M$ identisk med mængden af punkter i A , som er konvexe kombinationer af punkter i affint uafhængige sæt af punkter i M .

Beris. Det er tilstrækkeligt at vise, at hvis et punkt $P \in A$ er en konvex kombination af $r+1$ punkter $P_0, \dots, P_r \in M$ med koefficienter $\lambda_0, \dots, \lambda_r$, således at sættet $(P_0, \dots, P_r)$ er affint afhængigt, så kan P fremstilles som konvex kombination af r af punkterne $P_0, \dots, P_r$. Når sættet $(P_0, \dots, P_r)$ er affint afhængigt, findes $\mu_0, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}$, som ikke alle er 0, men som har sum 0, således at der for et vilkårligt punkt $\underline{O} \in A$ gælder

$$\sum_{i=0}^r \mu_i \underline{O} P_i = \underline{O}.$$

Mindst een af koefficienterne μ_i er > 0 , og mængden

$$B = \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} \mid \mu_i > 0 \right\}$$

er derfor ikke-tom. Uden indskrænkning kan an-

tages, at $\frac{\lambda_r}{\mu_r} \in B$ og at $\frac{\lambda_r}{\mu_r} \leq \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ for ethvert $\frac{\lambda_i}{\mu_i} \in B$. Vi har da

$$\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i \geq 0, \quad i=0, \dots, r-1.$$

Endvidere har vi

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{r-1} (\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i) &= \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i \\ &= (1 - \lambda_r) - \frac{\lambda_r}{\mu_r} (-\mu_r) \\ &= 1 \end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{r-1} (\lambda_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_i) \underline{OP}_i &= \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i \underline{OP}_i - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i \underline{OP}_i \\ &= (\underline{OP} - \lambda_r \underline{OP}_r) - \frac{\lambda_r}{\mu_r} (-\mu_r \underline{OP}_r) \\ &= \underline{OP}. \end{aligned}$$

Punktet P er altså en konvex kombination af $P_0, \dots, P_{r-1}$ med koefficienterne $\lambda_0 - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_0, \dots, \lambda_{r-1} - \frac{\lambda_r}{\mu_r} \mu_{r-1}$. Hermed er sætningen bevist. $\square$

Som bekendt har et affint rum (A, V) dimension n , hvis og kun hvis $n+1$ er det maksimale antal punkter i noget affint uafhængigt sæt af punkter i A (sml. side 9.3.2). Af det foregående fremgår derfor:

For enhver delmængde M af et n -dimensionelt affint rum (A, V) er $\text{conv } M$ identisk med mængden af punkter i A , som er konvekse kombinationer af højst $n+1$ punkter i M .

Ved et simpleks i et affint rum (A, V) forstås en mængde af formen $\text{conv} \{P_0, \dots, P_r\}$, hvor $(P_0, \dots, P_r)$ er et affint uafhængigt sæt. Punkterne

$P_0, \dots, P_r$ kaldes da for simpleksets hjørner. Et simpleks med $r+1$ hjørner kaldes også et r -simpleks eller et r -dimensionalt simpleks. Et 0-simpleks er en mængde indeholdende eet punkt, et 1-simpleks er et linieestykke. Et 2-simpleks kaldes en trekant, et 3-simpleks kaldes et tetraeder.

Ethvert punkt P i et simpleks med hjørner $P_0, \dots, P_r$ har en og kun een fremstilling som konveks kombination af simpleksets hjørner (smb. side 9.6.3 og 9.3.3). Det tilhørende koefficient sæt $(\lambda_0, \dots, \lambda_r)$ kaldes punktet P 's barycentriske koordinatsæt (m.h.t. sættet $(P_0, \dots, P_r)$ af hjørner).

Efter indførelse af begrebet simpleks kan Carathéodorys sætning også formuleres således:

For enhver delmængde M af et affint rum (A, V) er $\text{conv } M$ identisk med foreningsmængden af alle simplekser, hvis hjørner tilhører M .

Med henblik på en anvendelse nedenfor viser vi dernæst:

Lad $(P_0, \dots, P_r)$ være et sæt bestående af mindst $n+2$ punkter i et n -dimensionelt affint rum (A, V) . Der findes da komplementære delmængder I_1 og I_2 af $I = \{0, \dots, r\}$, således at mængderne $\text{conv} \{P_i \mid i \in I_1\}$ og $\text{conv} \{P_i \mid i \in I_2\}$ har mindst et punkt fælles.

Bewis. Af det givne følger, at sættet $(P_0, \dots, P_r)$ er affint afhængigt. Der findes derfor $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$,

som ikke alle er 0, men som har sum 0, således at

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i \underline{OP}_i = \underline{0}$$

for et vilkårligt punkt $O \in A$. Sat $I_1 = \{i \in I \mid \lambda_i \geq 0\}$ og $I_2 = \{i \in I \mid \lambda_i < 0\}$. Vi har da

$$\sum_{i \in I_1} \lambda_i \underline{OP}_i = \sum_{i \in I_2} (-\lambda_i) \underline{OP}_i,$$

hvor såvel alle koefficienter λ_i på venstre side som alle koefficienter $-\lambda_i$ på højre side er ≥ 0 . Sættes

$$\sum_{i \in I_1} \lambda_i = \mu,$$

har vi også

$$\sum_{i \in I_2} (-\lambda_i) = \mu$$

og $\mu > 0$. Vi får da

$$\sum_{i \in I_1} \frac{\lambda_i}{\mu} \underline{OP}_i = \sum_{i \in I_2} \frac{-\lambda_i}{\mu} \underline{OP}_i,$$

altså

$$\sum_{i \in I_1} \frac{\lambda_i}{\mu} P_i = \sum_{i \in I_2} \frac{-\lambda_i}{\mu} P_i.$$

Dette punkt vil da tilhøre både $\text{conv}\{P_i \mid i \in I_1\}$ og $\text{conv}\{P_i \mid i \in I_2\}$. $\square$

Vi kan nu vise Helly's sætning:

Lad der i et n -dimensionelt affint rum (A, V) være givet mindst $n+1$ konvexe mængder $K_0, \dots, K_r$. Hvis vilkårlige $n+1$ af mængderne K_i har en ikke-tom fællesmængde, så har de alle en ikke-tom fællesmængde.

Basis. Brevet føres ved induktion efter r . For $r=n$ er påstanden trivial. Antag derfor, at $r > n$, og at sætningen gælder for r eller færre konvekse mængder. Lad $K_0, \dots, K_r$ være $r+1$ konvekse mængder, hvortil vilkårlige $n+1$ har en ikke-tom fællesmængde. For hvert $i \in \{0, \dots, r\}$ har da specielt vilkårlige $n+1$ af mængderne $K_0, \dots, K_{i-1}, K_{i+1}, \dots, K_r$ en ikke-tom fællesmængde. Ved brug af induktionsantagelsen sluttet da, at $K_0 \cap \dots \cap K_{i-1} \cap K_{i+1} \cap \dots \cap K_r$ er ikke-tom; lad P_i være et punkt i mængden. Ifølge den foregående sætning findes heretter komplementære delmængder I_1 og I_2 af $\{0, \dots, r\}$, således at mængderne $\text{conv}\{P_i \mid i \in I_1\}$ og $\text{conv}\{P_i \mid i \in I_2\}$ har (mindst) et punkt Q fælles. For ethvert $i \in \{0, \dots, r\}$ har vi nu $P_0, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_r \in K_i$, og dermed enten $\text{conv}\{P_i \mid i \in I_1\} \subseteq K_i$ eller $\text{conv}\{P_i \mid i \in I_2\} \subseteq K_i$. Heraf følger, at $Q \in K_i$. Punktet Q tilhører altså alle mængderne $K_0, \dots, K_r$, og fællesmængden $K_0 \cap \dots \cap K_r$ er folgelig ikke-tom. $\square$

9.7. Kvadrikker.

Lad (A, V) være et euklidisk affint rum af dimension $n \geq 2$. Lad der videre være givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O; \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ i A samt et reelt anden grads polynomium i n variable,

$$(1) \quad F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n c_i x_i + d$$

Vi skal betragte mængden K af punkter i A , hvis koordinatsæt $(x_1, \dots, x_n)$ m.h.t. det givne koordinatsystem tilfredsstiller ligningen

$$(2) \quad F(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

En sådan mængde K kaldes en kvadrisk i A ; den siges at have ligningen (2) i det givne koordinatsystem.

Ved overgang til et nyt sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(\hat{O}; \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ kan de gamle koordinater $x_1, \dots, x_n$ til et punkt P udtrykkes som første grads polynomier i de nye koordinater $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ for P , (sml. side 9.1.4). Indsættes disse udtryk for $x_1, \dots, x_n$ i $F(x_1, \dots, x_n)$, fås et polynomium $F_1(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ af højst anden grad. Lad K_1 betegne mængden af punkter i A , hvis nye koordinater $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ tilfredsstiller ligningen

$$F_1(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = 0.$$

Det er da klart, at $K \subseteq K_1$. Det påstår, at $K = K_1$. For at indse dette bemærkes, at det også er muligt at udtrykke de nye koordinater $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ som første grads

polynomier i de gamle koordinater $x_1, \dots, x_n$, og at man ved indsættelse af disse udtryk for $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ i $F_1(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ får $F(x_1, \dots, x_n)$. Heraf følger, at $K_1 \subseteq K$, hvormed påstanden er bevist. Vi sammenfatter:

Lad der i et euklidisk affint rum (A, V) af dimension $n \geq 2$ være givet to sædvanlige retvinklede koordinatsystemer, kaldet det gamle og det nye. Lad K være en kvadrant i A med ligningen $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ i det gamle koordinatsystem. Indsættes i denne ligning de gamle koordinater $x_1, \dots, x_n$ udtrykt som første grads polynomier i de nye koordinater $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$, fås en ligning for K i det nye koordinatsystem.

Ved udnyttelse af teorien for kvadratiske former skal vi herefter vise følgende:

Lad K være en kvadrant i et euklidisk affint rum (A, V) af dimension $n \geq 2$. Der findes da et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i A m.h.t. hvilket K har en ligning af en af følgende tre normalformer, hvor $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, γ og δ alle er $\neq 0$:

$$(G) \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + \delta = 0.$$

$$(P) \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + \gamma x_{r+1} = 0.$$

$$(K) \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 = 0.$$

Beris. Lad K have ligningen (2) m.h.t. et sadvanligt retvinklet koordinatsystem $(0; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$.
Ved

$$x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n \mapsto \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

er da bestemt en kvadratisk form K_B på V . (Matricen $\underline{B} = (b_{ij})$ for den tilhørende symmetriske bilinearform B er bestemt ved, at $b_{ii} = a_{ii}$ for $i = 1, \dots, n$ og $b_{ij} = b_{ji} = a_{ij}$ for $1 \leq i < j \leq n$.) Ifølge en tidligere sætning (side 8.3.1) findes da en ortonormal basis $(\hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ i V m.h.t. hvilken K_B antager normalform,

$$K_B(x_1 \hat{\underline{e}}_1 + \dots + x_n \hat{\underline{e}}_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2,$$

(hvor koefficienterne α_i er de karakteristiske rødder for $\underline{B}$.) Uden indskrænkning kan antages, at $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ er de fra 0 forskellige koefficienter. M.h.t. koordinatsystemet $(0; \hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ har K da en ligning af formen

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n \hat{c}_i x_i + \hat{d} = 0,$$

hvilket kan omskrives til

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \left(x_i + \frac{\hat{c}_i}{2\alpha_i} \right)^2 + \sum_{i=r+1}^n \hat{c}_i x_i + \hat{d}_1 = 0,$$

hvor $\hat{d}_1 = \hat{d} - \sum_{i=1}^r \hat{c}_i^2 (4\alpha_i)^{-1}$.

Er nu $r = n$, eller $r < n$ og $\hat{c}_{r+1} = \dots = \hat{c}_n = 0$, betegnes med $\hat{O}$ det punkt, som m.h.t. koordinatsystemet $(0; \hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ har koordinatsættet

$$\left(-\frac{\hat{c}_1}{2\alpha_1}, \dots, -\frac{\hat{c}_r}{2\alpha_r}, 0, \dots, 0 \right).$$

m.h.t. koordinatsystemet $(\hat{O}; \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ vil K da have ligningen

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + \hat{a}_r = 0,$$

altså en ligning af formen (C) eller (K).

Er derimod $r < n$ og $\hat{e}_i \neq 0$ for mindst et $i \geq r+1$, vælges et nyt sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(\hat{O}; \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r, \tilde{e}_{r+1}, \dots, \tilde{e}_n)$ på følgende måde. Vi sætter

$$c = \left(\sum_{i=r+1}^n \hat{e}_i^2 \right)^{1/2}$$

og

$$\sum_{i=r+1}^n \frac{\hat{e}_i}{c} \hat{e}_i = \tilde{e}_{r+1}.$$

Sættet $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r, \tilde{e}_{r+1})$ er da ortonormalt, og kan derfor suppleres til en ortonormal basis

$(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r, \tilde{e}_{r+1}, \dots, \tilde{e}_n)$ for V . Koordinattransformationsmatricen $\underline{\underline{S}}$ hørende til overgangen fra basen $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ til basen $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r, \tilde{e}_{r+1}, \dots, \tilde{e}_n)$ er orthogonal, og den j te søjle i $\underline{\underline{S}}^{-1}$ er koordinatsøjlen for den nye j te basisvektor m.h.t. den gamle basis. Af det første følger, at $\underline{\underline{S}} = (\underline{\underline{S}}^{-1})'$, og ved brug af det andet følger derefter, at $\underline{\underline{S}}$ har formen

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{E}}_{r,r} & \underline{\underline{O}}_{r,n-r} \\ \underline{\underline{O}}_{n-r,r} & \underline{\underline{I}}_{n-r,n-r} \end{pmatrix},$$

hvor den første række i $\underline{\underline{I}}_{n-r,n-r}$ er

$$\left(\frac{\hat{e}_{r+1}}{c} \quad \dots \quad \frac{\hat{e}_n}{c} \right).$$

Heraf fremgår, at K i koordinatsystemet $(O; \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r, \tilde{e}_{r+1}, \dots, \tilde{e}_n)$ har ligningen

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \left(x_i + \frac{\hat{c}_i}{2\alpha_i} \right)^2 + c x_{r+1} + \hat{d}_1 = 0,$$

hvilket kan omskrives til

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \left(x_i + \frac{\hat{c}_i}{2\alpha_i} \right)^2 + c \left(x_{r+1} + \frac{\hat{d}_1}{c} \right) = 0.$$

Betegnes derfor med $\hat{O}$ det punkt, som m.h.t. koordinatsystemet $(O; \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r, \tilde{e}_{r+1}, \dots, \tilde{e}_n)$ har koordinatsættet

$$\left(-\frac{\hat{c}_1}{2\alpha_1}, \dots, -\frac{\hat{c}_r}{2\alpha_r}, -\frac{\hat{d}_1}{c}, 0, \dots, 0 \right),$$

har K i koordinatsystemet $(\hat{O}; \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r, \tilde{e}_{r+1}, \dots, \tilde{e}_n)$ ligningen

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + c x_{r+1} = 0,$$

altså en ligning af formen (P). $\square$

Et punkt P siges at være et centrum for en kvadrisk K , dersom det for ethvert punkt $Q_1 \in K$ gælder, at også det ved $\underline{PQ}_2 = -\underline{PQ}_1$ bestemte punkt Q_2 tilhører K .

En kvadrisk K kan ikke både have et centrum, som tilhører K , og et centrum, som ikke tilhører K .

Beris. Lad K have ligningen (2) m.h.t. et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Antag, at punkterne $P_0 \in K$ og $P_1 \notin K$ med koordinatsættene $(y_1, \dots, y_n)$ hhv. $(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)$ begge er centre for K . Punktet P_2

med koordinatsættet $(y_1 + 2z_1, \dots, y_n + 2z_n)$ vil da tilhøre K , idet $P_0 \in K$ og P_1 er et centrum. Da P_0 er et centrum, sluttes dernæst, at også punktet P_2 med koordinatsættet $(y_1 - 2z_1, \dots, y_n - 2z_n)$ tilhører K . Heraf fås ielt, at polynomiet

$$p(t) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} (y_i + tz_i)(y_j + tz_j) + \sum_{i=1}^m c_i (y_i + tz_i) + d$$

har tre rødder, nemlig $-2, 0$ og 2 , og følgelig er nulpolynomiet. Men heraf følger videre, at hele linien bestemt ved P_0 og P_1 er indeholdt i K , i strid med, at $P_1 \notin K$. $\square$

En kvadratisk K , som har en ligning af normalformen (P), har intet centrum.

Beris. Antag, at punktet P med koordinatsættet $(y_1, \dots, y_n)$ er et centrum. Lad z_r være et vilkårligt reelt tal. Det er da oplagt muligt at bestemme et reelt tal z_{r+1} , således at punktet Q_1 med koordinatsættet $(y_1, \dots, y_{r-1}, y_r + z_r, y_{r+1} + z_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_n)$ tilhører K . Da P er et centrum, vil også punktet Q_2 med koordinatsættet $(y_1, \dots, y_{r-1}, y_r - z_r, y_{r+1} - z_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_n)$ tilhøre K . Vi har derfor

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i y_i^2 + \alpha_r z_r^2 + 2\alpha_r y_r z_r + \gamma(y_{r+1} + z_{r+1}) = 0$$

og

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i y_i^2 + \alpha_r z_r^2 - 2\alpha_r y_r z_r + \gamma(y_{r+1} - z_{r+1}) = 0.$$

Heraf følger, at

$$\sum \alpha_i y_i^2 + \alpha_r z_r^2 + \delta y_{r+1} = 0.$$

Idet z_r er valgt vilkårligt, og $\alpha_r \neq 0$, giver dette en modstrid. $\square$

Det bemærkes nu, at hvis en kvadratisk har en ligning af formen (K) hhv. (G), så har den et centrum, som tilhører hhv. ikke tilhører kvadratten, nemlig begyndelsespunktet. Af de to foregående sætninger fremgår derfor følgende:

En kvadratisk har en ligning af formen (G), hvis og kun hvis den har mindst et centrum, og intet centrum tilhører kvadratten. — Sådanne kvadratiske kaldes (egentlige) centrumskvadratiske.

En kvadratisk har en ligning af formen (P), hvis og kun hvis den intet centrum har. — Sådanne kvadratiske kaldes paraboliske kvadratiske.

En kvadratisk har en ligning af formen (K), hvis og kun hvis den har mindst et centrum og ethvert centrum tilhører kvadratten. — Sådanne kvadratiske kaldes keglekvadratiske.

Vi skal til sidst give en skematisk oversigt over kvadratiske i euklidisk affine rum af dimension 2 ("keglesnit") og dimension 3 ("keglesnit-flader"). Vi skal her omskrive ligningerne til de gangse former.

Keglesnit.Centrums kvadratiske:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Ellipse}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Hyperbel}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \emptyset$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{To parallelle linier}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \emptyset$$

Parabolske kvadratiske:

$$x^2 = py \quad \text{Parabel}$$

Kegle kvadratiske:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{Punkt}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{To skærende linier}$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 0 \quad \text{Linie}$$

Keglesnitsflader:Centrums kvadratiske:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hyperboloide med 1 net

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hyperboloide med 2 net

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Elliptisk cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hyperbolisk cylinder

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ø

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

To parallelle planer

$$-\frac{x^2}{a^2} = 1$$

Ø

Paraboliske kvadratiske:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

Elliptisk paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

Hyperbolisk paraboloid

$$x^2 = py$$

Parabolisk cylinder

Keglekvadratter:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{Punkt}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{Keglesmitskegle}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{Linie}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{To skærende planer}$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 0 \quad \text{Plan}$$

9.8. Kwadriker.

Disse noter er en sammenskrivning af Mat 1, 1962-63
AG III 13.1 og Mat 1x (1969-70) (kap. 9.7).

Generel teori om kvadriker.

Vi betragter $\mathbb{R}^n$ både som vektorrum og som en punktmængde.

Vi har, at til ethvert ordnet par af punkter i $\mathbb{R}^n$ er der knyttet en vektor i $\mathbb{R}^n$ og givet et punkt P_0 og en vektor $\underline{v}$ da findes netop et punkt P så $\underline{P_0P} = \underline{v}$ (hvor $\underline{P_0P}$ betegner den vektor, der er bestemt ved punkterne P_0, P).

For en præcisere fremstilling henvises til kapitel 9.1.

I dette kapitel vil vi kun betragte ortonormale baser. Et retvinklet koordinatsystem i $\mathbb{R}^n$ består af et punkt $O \in \mathbb{R}^n$ (hvorfra vektorerne tænkes afsat) og en ortonormal basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ for $\mathbb{R}^n$. $(O; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$.

Vi siger, at et punkt P har koordinaterne $(x_1, \dots, x_n)$ med hensyn til $(O; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ hvis $OP = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n$,

Ved en kvadrik Q forstås en mængde af punkter, hvis koordinatsæt netop er løsningerne til en ligning af formen

$$(1) \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq n} c_i x_i + d = 0,$$

hvor a_{ij} , $1 \leq i \leq j \leq n$, c_i , $1 \leq i \leq n$, og d er reelle tal og ikke alle a_{ij} er 0.

Vi bemærker, at blot en mængde Q i ét koordinatsystem kan fremstilles ved en ligning af formen (1), da vil Q i ethvert koordinatsystem være fremstillet ved en ligning af samme form.

Lad nemlig $(O; \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ og $(\hat{O}; \hat{\underline{e}}_1, \dots, \hat{\underline{e}}_n)$ være to koordinatsystemer. Lad P have koordinatsættene $(x_1, \dots, x_n)$ og $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ med hensyn til disse to koordinatsystemer.

Hvis $\underline{0}\hat{0} = \hat{a}_1\hat{e}_1 + \dots + \hat{a}_n\hat{e}_n$ og $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n) \underline{S}$ fås let $\underline{\hat{x}}_1 = \underline{\hat{a}}_1 + \underline{S} \underline{x}_1$ eller $\underline{x}_1 = -\underline{S}^{-1}\underline{\hat{a}}_1 + \underline{S}^{-1}\underline{\hat{x}}_1$.

Lad $\hat{F}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ være det polynomium som fremgår af $F(x_1, \dots, x_n)$ ved at indsætte udtrykkene for $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$.

For ethvert punkt P fås nu samme tal hvad enten man indsætter $x_1, \dots, x_n$ i $F(x_1, \dots, x_n)$ eller $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ i $F(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$.

Specielt fås tallet 0 for de samme punkter. Det er klart, at $F(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ er et polynomium af højst anden grad og af anden grad netop når $F(x_1, \dots, x_n)$ er det.

Lad der nu være valgt et sædvanligt retvinklet koordinatsystem for $\mathbb{R}^n$. Vi betragter en kvadrik Q med en ligning af formen (1).

Lad $\underline{B} = (b_{ij})$ $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, være den symmetriske matrix bestemt ved $b_{ii} = a_{ii}$ $b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}a_{ij}$.

Ligningen for Q kan nu skrives

$$(2) \quad \underline{x} - \underline{B} \underline{x}_1 + \underline{c} - \underline{x}_1 + d = 0$$

Hvis vi lader B betegne den symmetriske bilinear form på $\mathbb{R}^n$, hvis tilhørende matrix med hensyn til basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ er B og L den linearform på $\mathbb{R}^n$, som er defineret ved $L(\underline{x}) = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i x_i$ ($\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n$), da har vi $P \in Q$ netop når

$$(3) \quad B(\underline{x}, \underline{x}) + L(\underline{x}) + d = 0, \text{ hvor } OP = \underline{x}.$$

I følge side 8.3.1. findes der en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^n$ $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$, så den til B hørende kvadratiske form K_B antager normalform, d.v.s.

$$K_B(x_1\hat{e}_1 + \dots + x_n\hat{e}_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x_i^2$$

(α_i , $1 \leq i \leq n$, er de karakteristiske rødder for $\underline{B}$).

Ved eventuel omnummering, antages det, at $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ er forskellige fra 0 og $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$.

Med hensyn til $(0; \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ har Q ligningen

$$(4) \quad \sum_{1 \leq i \leq r} \alpha_i x_i^2 + \sum_{r+1 \leq i \leq n} \hat{c}_i x_i + \hat{d} = 0$$

eller

$$\sum_{1 \leq i \leq r} \alpha_i (x_i + \frac{\hat{c}_i}{2\alpha_i})^2 + \sum_{r+1 \leq i \leq n} \hat{c}_i x_i + \hat{d}_1 = 0$$

$$\text{hvor } \hat{d}_1 = d - \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{\hat{c}_i^2}{4\alpha_i}.$$

Hvis $r = n$ eller $\hat{c}_{r+1} = \dots = \hat{c}_n = 0$ har Q ligningen

$$(5) \quad \sum_{1 \leq i \leq r} \alpha_i x_i^2 + \hat{d}_1 = 0 \quad \text{med hensyn til koordinatsystemet } (\hat{0}, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n), \text{ hvor } \hat{0} \text{ har koordinaterne } (-\frac{\hat{c}_1}{2\alpha_1}, \dots, -\frac{\hat{c}_r}{2\alpha_r}, 0, \dots, 0) \text{ m.h.t. } (0; \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n).$$

Antag nu, $r < n$ og der findes et i $r+1 \leq i \leq n$ med $\hat{c}_i \neq 0$.

$$\text{Sæt } c = (\sum_{r+1 \leq i \leq n} \hat{c}_i^2)^{\frac{1}{2}} \text{ og}$$

$$\sum_{r+1 \leq i \leq n} \frac{\hat{c}_i}{c} \hat{e}_i = \widetilde{e}_{r+1}$$

$(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r, \widetilde{e}_{r+1})$ er et ortonormalt sæt af vektorer og kan derfor suppleres til en ortonormalbasis for R^n , lad os sige $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r, \widetilde{e}_{r+1}, \dots, \widetilde{e}_n)$.

Hvis $\hat{L}$ betegner linearform givet ved

$$\hat{L}(x_1\hat{e}_1 + \dots + x_n\hat{e}_n) = \sum_{r+1 \leq i \leq n} \hat{c}_i x_i \quad \text{fås} \quad \hat{L}(\widetilde{e}_{r+1}) = c; \\ \hat{L}(\widetilde{e}_j) = 0, \quad r+1 < j \leq n, \quad \text{idet } 0 = \widetilde{e}_j \cdot \widetilde{e}_{r+1} = \sum_i \frac{\hat{c}_i}{c} y_i \quad \text{hvor}$$

$\tilde{e}_j = y_{r+1}\hat{e}_{r+1} + \dots + y_n\hat{e}_n$. I koordinatsystemet $(0, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r, \tilde{e}_{r+1}, \dots, \tilde{e}_n)$ har Q ligningen

$$\sum_{r+1 \leq i \leq n} \alpha_i (x_i + \frac{\hat{c}_i}{2\alpha_i})^2 + c(x_{r+1} + \frac{\hat{d}_1}{c}) = 0$$

Lad $\hat{O}$ have koordinaterne $(-\frac{\hat{c}_1}{2\alpha_1}, \dots, -\frac{\hat{c}_r}{2\alpha_r}, -\frac{\hat{d}_1}{c}, 0, \dots, 0)$ med hensyn til koordinatsystemet $(0, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r, \tilde{e}_{r+1}, \dots, \tilde{e}_n)$ har da ligningen

$$(6) \quad \sum_{1 \leq i \leq r} \alpha_i x_i^2 + cx_{r+1} = 0 \text{ med}$$

hensyn til koordinatsystemet $(\hat{O}; \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r, \tilde{e}_{r+1}, \dots, \tilde{e}_n)$.

Vi har nu vist, at en kvadrik ved passende valg af koordinatsystem kan fremstilles ved en ligning af en af følgende tre normalformer:

$$(C) \quad \sum_{1 \leq i \leq r} \alpha_i x_i^2 + \delta = 0; \delta \neq 0, \alpha_i \neq 0, 1 \leq i \leq r.$$

$$(K) \quad \sum_{1 \leq i \leq r} \alpha_i x_i^2 = 0; \alpha_i \neq 0, 1 \leq i \leq r.$$

$$(P) \quad \sum_{1 \leq i \leq r} \alpha_i x_i^2 + \gamma x_{r+1} = 0; \gamma \neq 0, \alpha_i \neq 0, 1 \leq i \leq r.$$

Bemærkning. Hvis vi sætter $N_B = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall u \in \mathbb{R}^n: B(x, u) = 0\}$ (N_B kaldes nulrummet for B) ses det let af beviset, at en kvadrik Q med en ligning af formen (3) har en normalform af typen (C) eller (K) netop når $N_B \subseteq L^{-1}(0)$ (denne betingelse er translationsinvariant).

Antag $N_B \subseteq L^{-1}(0)$ og Q 's ligning er af formen (3) m.h.t. $(0, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$. Q 's ligning vil i koordinatsystemet $(\hat{O}, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ være af formen $B(\underline{x}, \underline{x}) + \hat{d} = 0$ og altså fås, at Q 's ligning i $(0, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ er af formen $B(\underline{x} - \underline{a}, \underline{x} - \underline{a}) + \hat{d} = 0$ hvor $\underline{O}\hat{O} = \underline{a}$.

Et punkt P siges at være centrum for en kvadrik Q hvis $Q_1 \in (Q)$ medfører at punktet Q_2 bestemt ved $\underline{PQ}_1 = -\underline{PQ}_2$ tilhører (Q) .

Det ses, at en kvadrik Q med en normalform (Q) af typen (C) har et centrum, som ej tilhører Q .

En sådan kvadrik kaldes en centrumskvadrik. En kvadrik Q med en normalform af typen (K) har et centrum, som tilhører (Q) en sådan kvadrik kaldes en keglekvadrik.

Vi skal om lidt se, at en kvadrik med en normalform af typen (P) intet centrum har.

En sådan kvadrik kaldes en parabolisk kvadrik.

Sætning. Lad Q være en kvadrik og S et side-underrum i $\mathbb{R}^n$. (S er altså en mængde af punkter, hvis stedvektorer er af formen $\underline{u} + U$, hvor U er et underrum, S kan altså identificeres med $\mathbb{R}^p$, $p = \dim U$).

Da er $(Q) \cap S$ enten en kvadrik i S , hele S , en hyperplan i S eller tom.

Bevis. Hvis $(Q) \cap S$ ej tom, vælg da $R \in (Q) \cap S$, og vælg koordinatsystemet med begyndelsespunkt R . Her-ved er problemet reduceret til at finde fællesmængden mellem et underrum U og en kvadrik Q . Lad Q have en ligning af formen (3) .

Hvis $B(\underline{u}, \underline{u}) \neq 0$ for alle $\underline{u} \in U$ er $(Q) \cap S$ netop de punkter, hvis stedvektorer $\underline{u}$ opfylder $I(\underline{u}) + d = 0$. Denne mængde er forudsat ikke tom, derfor er den enten en hyperplan i U eller hele U .

Hvis $B(\underline{u}, \underline{u}) \neq 0$ for et $\underline{u} \in U$, da vil de punkter P , hvis stedvektor, $\underline{u}$, tilhører U og opfylder ligningen

$$B(\underline{u}, \underline{u}) + (\underline{u}) + c = 0$$

igen være en kvadrik indeholdt i U .

Hvis sideunderrummet S er indeholdt i Q siges S at være en frembringer på Q .

Eksempler. $\emptyset$ er kvadrik for enhver dimension n . For eksempel kan $\emptyset$ have ligningen $x_1^2 + 1 = 0$.

Hvis $n = 1$ bliver de mulige kvadrikligninger $bx_1^2 + cx_1 + d = 0$, og de mulige kvadrikker er enten 2 punkter, 1 punkt eller den tomme mængde. Løsninger til en ligning af formen $cx_1 + d = 0$ er enten hele $\mathbb{R}$ eller et punkt.

Hvis Q er en keglekvadrik med en normalform af typen (K) , kan Q 's ligning med passende valg af begyndelsespunkt skrives

$$B(\underline{x}, \underline{x}) = 0$$

Man ser, at $(\underline{0}) \in Q$ og at hvis $\underline{x} \in Q$, $\underline{x} \neq \underline{0}$, da vil $t\underline{x} \in Q$, $t \in \mathbb{R}$ altså hele linien gennem $\underline{0}$ og $\underline{x}$ tilhøre Q . Hvis Q består af mere end $\underline{0}$ da vil Q være en foreningsmængde af en samling frembringerlinier gennem $\underline{0}$.

Sætning. En kvadrik Q kan ikke både have et centrum, som tilhører Q og et centrum, som ikke til-

hører (Q) .

Bevis. Lad et koordinatsystem være valgt. Antag $P_0 \in Q$ og $P_1 \notin Q$ er centrer for Q .

Lad P_0 have koordinaterne $(y_1, \dots, y_n)$ og P_1 koordinaterne $(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)$.

Da P_1 er centrum vil også punktet P_2 med koordinaterne $(y_1 + 2z_1, \dots, y_n + 2z_n)$ tilhøre Q . Endvidere vil punktet P_3 med koordinaterne $(y_1 - 2z_1, \dots, y_n - 2z_n)$ tilhøre Q .

Sætningen følger nu af sætningen på side 6 og eksemplet.

Sætning. En parabolisk kvadrik Q har intet centrum.

Bevis. Lad koordinatsystemet være valgt således, at Q 's ligning er af formen

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + \gamma x_{r+1} = 0$$

og antag endvidere, at punktet P med koordinatsættet $(y_1, \dots, y_n)$ er centrum for (Q) .

Et punkt Q_{z_r} med koordinatsættet $(y_1, \dots, y_{r-1}, y_r + z_r, y_{r+1} + z_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_n)$ tilhører Q netop når

$$(7) \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i y_i^2 + \alpha_r z_r^2 + 2\alpha_r z_r + \gamma(y_{r+1} + z_{r+1}) = 0$$

Heraf ses, at for ethvert valg af z_r findes netop et z_{r+1} så Q_{z_r} tilhører Q .

Da P er centrum vil punktet med koordinatsættet
 $(y_1, \dots, y_{r-1}, y_r - z_r, y_{r+1} - z_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_n)$

tilhøre (Q) og vi får

$$(8) \quad \sum_{1 \leq i \leq r} \alpha_i y_i^2 + \alpha_r z_r^2 - 2\alpha_r z_r + \gamma(y_{r+1} - z_{r+1}) = 0$$

Ved hjælp af (7) og (8) fås

$$(9) \quad 2\sum_{1 \leq i \leq r} \alpha_i y_i^2 + 2\alpha_r z_r^2 + 2\gamma y_{r+1} = 0$$

for ethvert z_r ; men dette er umuligt.

Korollar. De kvadrikligninger, som fremstiller
den tomme mængde er netop ligningerne

$B(\underline{x} - \underline{a}, \underline{x} - \underline{a}) + c = 0$, hvor $c \neq 0$, hvor B
er en definit eller semidefinit kvadratisk form af sam-
me fortegn som c .

Bevis. Da $\emptyset$ har ethvert punkt som centrum er
 $\emptyset$ ikke parabolisk. Vi kan derfor (i følge en tidligere
bemærkning) efter en translation opnå, at $\emptyset$'s lig-
ning kan skrives $B(\underline{y}, \underline{y}) + c = 0$. Heraf fås påstanden.

Sætning. Hvis O er centrum for en ikke tom
kvadrik Q vil enhver ligning for Q være af formen
 $B(\underline{x}, \underline{x}) + c = 0$, hvor vektorerne regnes ud fra O .

Bevis. Lad $B(\underline{x}, \underline{x}) + L(\underline{x}) + c = 0$ være en ligning
for Q .

Vi skal vise, at $L(\underline{x}) = 0$ for alle $\underline{x}$.

Antag $B(\underline{x}_0, \underline{x}_0) \neq 0$. Vælg $\underline{p}$ så $B(\underline{p}, \underline{p}) + L(\underline{p}) + c = 0$.

Betragt linien: $\underline{x} = \underline{p} + t\underline{x}_0$. $\underline{x} \in Q$ tilhører Q netop
når $t^2 B(\underline{x}_0, \underline{x}_0) + 2t B(\underline{p}, \underline{x}_0) + L(\underline{x}_0) = 0$. Man ser,

at for netop en værdi, t_0 , af t ($t_0 \neq 0$) vil $p + t_0 \underline{x}_0 \in Q$.

Da O var centrum vil $B(\underline{x}, \underline{x}) - L(\underline{x}) + c = 0$ også være en ligning for Q . Heraf fås

$$t_0^2 B(\underline{x}_0, \underline{x}_0) + 2t_0 B(p, \underline{x}_0) - t_0 L(\underline{x}_0) = 0$$

følgelig $L(\underline{x}_0) = 0$.

Hvis L ej er nulformen, er $L^{-1}(0)$ en hyperplan og $B(\underline{x}_0, \underline{x}_0)$ er derfor 0 for $\underline{x}_0 \notin L^{-1}(0)$. Men da $\underline{x} \mapsto B(\underline{x}, \underline{x})$ er en kontinuert afbildning som er 0 på en tæt mængde er B identisk nul; modstrid.

Tangentplan. Lad et begyndelsespunkt O i $\mathbb{R}^n$ være valgt.

Vi betragter en kvadrikkligning

$$(Q) \quad B(\underline{x}, \underline{x}) + L(\underline{x}) + c = 0 \quad \text{for en kvadrik } Q.$$

Lad p være et punkt på Q . De punkter $\underline{x}$, som opfylder ligningen

$$(P) \quad B(\underline{x}, p) + \frac{1}{2} L(\underline{x}) + \frac{1}{2} L(p) + c = 0$$

er en ikke tom mængde, idet p tilhører denne.

Hvis $B(\underline{x}, p) + \frac{1}{2} L(\underline{x})$ er identisk nul, vil ethvert punkt i $\mathbb{R}^n$ tilfredsstille (P). Ellers vil de punkter, som opfylder (P) danne en hyperplan H . I dette sidste tilfælde kaldes p et regulært punkt. H kaldes kvadrik-kens tangentplan og p røringspunktet for H . I det første tilfælde kaldes p et singulært punkt.

Hvis vi i stedet for at regne vektorer ud fra O regner vektorer ud fra et nyt pkt. $\hat{O}$, vil kvadrikkens ligning ændres og derfor vil også ligningen (P) ændres.

Men vi vil nu vise, at mængden af løsninger til disse to ligninger er den samme punktmængde.

Lad $\underline{0} = \underline{a}$, kvadrikkens ligning bliver da med $\hat{0}$ som begyndelsespunkt.

(10) $B(\underline{x}+\underline{a}, \underline{x}+\underline{a}) + L(\underline{x}+\underline{a}) + c = 0$ og den tilsvarende ligning (P) bliver

$$(P_a) \quad B(\underline{x}, \underline{p}-\underline{a}) + \frac{1}{2}(2B(\underline{x}, \underline{a}) + L(\underline{x})) + B(\underline{a}, \underline{a}) + L(\underline{a}) + c = 0$$

Nu ses det let at $\underline{x}$ tilfredsstiller (P) netop når $\underline{x} - \underline{a}$ tilfredsstiller P_a .

Sætningen kan udnyttes på den måde, at vi kan regne vektorer ud fra P, hvor $\underline{OP} = \underline{p}$ og $\underline{p} \in Q$.

Lad os altså antage, at $\underline{0} \in Q$, heraf fås, at (Q)'s ligning er af formen

$$B(\underline{x}, \underline{x}) + L(\underline{x}) = 0 \quad \text{og den tilsvarende ligning}$$

$$(P) \quad L(\underline{x}) = 0.$$

Heraf fås, at $\underline{0}$ er singulært punkt, netop når L er nulformen og følgelig er Q en keglekvadrik med $\underline{0}$ som toppunkt.

Hvis L ej er nulformen er $\underline{0}$ ikke centrum for Q (Q's ligning ville da være $B(\underline{x}, \underline{x}) + c = 0$).

Nu fås, at singulære punkter kun kan forekomme på keglekvadrikker. Og de singulære punkter er netop symmetriscetrene.

Af den sidste karakterisering ses det, at begrebet singulært punkt kun afhænger af kvadrikken og ikke den ligning ved hvilken man kan fremstille den.

Lad nu $\underline{0}$ være et regulært punkt på kvadrikken Q med ligning $B(\underline{x}, \underline{x}) + L(\underline{x}) = 0$.

Hvis $\underline{f}(t)$, $0 \leq t \leq a$ er en kurve på Q (og $\underline{f}(0) = \underline{0}$) som er differentiabel i 0 , da er $D\underline{f}(0)$ en vektor i Q 's tangenthyperplan gennem $\underline{0}$. (Tegn selv en figur.)

Bevis. Vi har $\frac{\underline{f}(t) - \underline{f}(0)}{t - 0} = \frac{\underline{f}(t)}{t} \rightarrow D\underline{f}(0)$, $t \rightarrow 0$.

Da $\underline{f}(t) \in Q$ fås for $t \neq 0$

$$t^2 B\left(\frac{\underline{f}(t)}{t}, \frac{\underline{f}(t)}{t}\right) + t L\left(\frac{\underline{f}(t)}{t}\right) = 0 \quad \text{eller}$$

$$t B\left(\frac{\underline{f}(t)}{t}, \frac{\underline{f}(t)}{t}\right) + L\left(\frac{\underline{f}(t)}{t}\right) = 0 \quad \text{følgelig}$$

$$0 \cdot B(D\underline{f}(0), D\underline{f}(0)) + L(D\underline{f}(0)) = 0. \quad \text{Heraf påstanden.}$$

Sætning. Hvis p er et regulært punkt på en kvadrik, da vil enhver fra p udgående halvlinie i tangenthyperplanen være tangent retning i p for en kurve på kvadrikken gennem p .

Bevis. Vi kan antage, at $p = \underline{0}$ og kvadrikken ligning bliver nu $B(\underline{x}, \underline{x}) + L(\underline{x}) = 0$. Tangenthyperplanen bliver $L^{-1}(0) = H$. Lad $\underline{0} \neq \underline{z} \in H$, vi skal nu se, at $\underline{z}$ er tangentretning for en kurve på Q , gennem $\underline{0}$.

Hvis $B(\underline{z}, \underline{z}) = 0$, da kan $t \mapsto t\underline{z}$ bruges.

Hvis $B(\underline{z}, \underline{z}) \neq 0$, betragt da $K(\underline{z}) = \{\underline{x} | B(\underline{x}, \underline{z}) = 0\}$.

$\dim K(\underline{z}) = n-1$. Heraf fås, da $\underline{z} \in H$, $\underline{z} \notin K(\underline{z})$, at $K(\underline{z}) \not\subseteq H$. Vælg $\underline{x}_0 \in K(\underline{z})$, $\underline{x}_0 \notin H$. $\text{Span}(\underline{x}_0, \underline{z})$ er et

2-dimensionalt underrum U .

Vi søger $U \cap Q$. $\underline{x} \in U \cap Q$ netop når der findes $s, t \in \mathbb{R}$ så $\underline{x} = s\underline{z} + t\underline{x}_0$ og

$$(11) \quad t^2 B(\underline{x}_0, \underline{x}_0) + s^2 B(\underline{z}, \underline{z}) + t L(\underline{x}_0) = 0$$

Da $B(\underline{z}, \underline{z}) \neq 0$ er (11) ensbetydende med

$$s^2 = \frac{-t L(\underline{x}_0) - t^2 B(\underline{x}_0, \underline{x}_0)}{B(\underline{z}, \underline{z})}$$

Hvis $t \rightarrow 0$ således at $\frac{-t L(\underline{x}_0)}{B(\underline{z}, \underline{z})}$ er positiv vil der findes en omegn af nul så $\frac{-t L(\underline{x}_0) - t^2 B(\underline{x}_0, \underline{x}_0)}{B(\underline{z}, \underline{z})}$ er positiv. D.v.s. vi kan finde to værdier af s så $\underline{x} = s\underline{z} + t\underline{x}_0$ tilhører Q . Lad os vælge den positive af dem, s er altså en funktion $s(t)$ af t , og vi ser at $\frac{t}{s(t)} \rightarrow 0$ $t \rightarrow 0$.

Vi har $\underline{x}(t) = s(t)\underline{z} + t\underline{x}_0 \in Q$. $\underline{x}(t)$'s retning er den samme som $\frac{1}{s(t)}\underline{x}(t) = \underline{z} + \frac{t}{s(t)}\underline{x}_0$. For $t \rightarrow 0$ vil tangentretningen gå mod $\underline{z}$. (det kan anbefales selv at tegne en skitse til ovenstående.)

Af sætningen følger, at tangenthyperplanen i et regulært punkt af en kvadrik kun afhænger af kvadrikken og ikke af kvadrikkens ligning.

Ved tangent til en kvadrik i et regulært punkt forstås en linie gennem punktet beliggende i punktets tangenthyperplan.

Lad Q være en centrumskvadrik med ligningen

$$(Q) \quad B(\underline{x}, \underline{x}) - c = 0.$$

Kvadrikken med ligningen $B(\underline{x}, \underline{x}) = 0$ siges at frem-

stille den tilhørende asymptote kegle.

Der gælder følgende:

Sætning. Hvis $\underline{a}$ er et regulært punkt på asymptotekeglen, så er linien $s\underline{a}$, $s \in \mathbb{R}$ asymptote til en kurve på Q .

Bevis. $c = 0$; da klart, idet linien $s\underline{a}$ kan bruges. For $c \neq 0$ er $\underline{a}$ et regulært punkt; derfor findes et $\underline{b}$ så $B(\underline{a}, \underline{b}) \neq 0$.

Det 2-dimensionale underrum $U = \text{Span}(\underline{a}, \underline{b})$ betragtes. Fællesmængden med Q søges. Vi har $\underline{x} = s\underline{a} + t\underline{b} \in Q$ netop når

$$2st B(\underline{a}, \underline{b}) + t^2 B(\underline{b}, \underline{b}) + c = 0, \quad \text{idet } B(\underline{a}, \underline{a}) = 0.$$

Hvis $B(\underline{b}, \underline{b}) \neq 0$, ses det, at for ethvert s findes netop ét t så $\underline{x}(s) = s\underline{a} + t\underline{b} \in Q$. Når $s \rightarrow \infty$, vil $t(s) \rightarrow 0$ og $\underline{x}(s)$ er en kurve på Q med $s\underline{a}$ som asymptote.

Hvis $B(\underline{b}, \underline{b}) \neq 0$ er ligningen til at bestemme t for givet s en andengradslikning i t med diskriminant $s^2 B(\underline{a}, \underline{b})^2 - c B(\underline{b}, \underline{b})$. Heraf fås, at for $s \geq s_0$ (s_0 valgt passende) findes to værdier af t så $\underline{x}(s) = s\underline{a} + t\underline{b} \in Q$. For $s \rightarrow \infty$ $s \geq s_0$ vil summen af de to "t-værdier" numerisk gå mod uendelig, mens produktet er konstant. Vælges den kurve $\underline{x}(s)$ svarende til den numerisk mindste værdi af t , ses det at denne har $s\underline{a}$ som asymptote.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hyperbel

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ø

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

2 parallelle linier

$$-\frac{x^2}{a^2} = 1$$

Ø

$$x^2 = py$$

parabel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

punkt

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

2 skærende linier

$$\frac{x^2}{a^2} = 0$$

linie.

Keglesnitsflader.

Centrumskvadriker:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hyperboloide med 1 net

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hyperboloide med 2 net

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Elliptisk cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hyperbolsk cylinder

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ø

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

To parallelle planer

$$-\frac{x^2}{a^2} = 1$$

Ø

Parabolske kvadriker:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

Elliptisk paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

Hyperbolsk paraboloid

$$x^2 = py$$

Parabolsk cylinder

Keglekvadriker:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Punkt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Keglesnitskegle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Linie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

To skærende planer

$$\frac{x^2}{a^2} = 0$$

Plan

Rettelser til 9.8. (Kvadriker).

Side 9.8.3. 1^2 : $\hat{\underline{x}}_1 = \hat{\underline{a}}_1 + \underline{S}\underline{x}_1$ eller $\underline{x}_1 = -\underline{S}^{-1}\hat{\underline{a}}_1 + \underline{S}^{-1}\hat{\underline{x}}_1$. Skal være

$$\hat{\underline{x}}_1 = -\hat{\underline{a}}_1 + \underline{S}\underline{x}_1 \text{ eller } \underline{x}_1 = \underline{S}^{-1}\hat{\underline{a}}_1 + \underline{S}^{-1}\hat{\underline{x}}_1.$$

1^7 ; Skal være $\hat{F}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$.

1^9 : $\hat{F}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ i stedet for $F(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$

1_7 : $\underline{B}$ i stedet for B .

1_4 : $OP = \underline{X}$ skal være $\underline{OP} = \underline{x}$.

Side 9.8.4. 1^6 : $\sum_{r+1 \leq i \leq n} \hat{c}_i x_i$ skal være $\sum_{1 \leq i \leq n} \hat{c}_i x_i$

Side 9.8.6. 1_4 : Hvis $B(\underline{u}, \underline{u}) = 0$ i stedet for Hvis $B(\underline{u}, \underline{u}) \neq 0$.

Side 9.8.7. 1^4 : $B(\underline{u}, \underline{u}) + (\underline{u}) + c = 0$ skal være $B(\underline{u}, \underline{u}) + L(\underline{u}) + c = 0$.

Side 9.8.9. 1_1 : Tilføj efter Man ser: hvis $2B(\underline{p}, \underline{x}_0) + L(\underline{x}_0) \neq 0$.

Side 9.8.10. 1^5 : Tilføj efter $L(\underline{x}_0) = 0$ følgende: Hvis $2B(\underline{p}, \underline{x}_0) + L(\underline{x}_0) = 0$

da mødes $\underline{p} + t\underline{x}_0$ og Q kun i ét punkt ($\underline{p}$) og derfor

mødes $-\underline{p} - t\underline{x}_0$ og Q kun i $-\underline{p}$. Derfor er

$B(\underline{p} + t\underline{x}_0, \underline{p} + t\underline{x}_0) - L(\underline{p} + t\underline{x}_0) + c$ kun 0 for $t=0$, heraf fås,

at $2B(\underline{p}, \underline{x}_0) - L(\underline{x}_0) = 0$, følgelig er $L(\underline{x}_0) = 0$.

Side 9.8.11. 1^7 : Formlen (P_a) skal være $B(\underline{x}, \underline{p}-\underline{a}) + \frac{1}{2}(2B(\underline{x}, \underline{a}) + L(\underline{x}))$
 $+ B(\underline{p}-\underline{a}, \underline{a}) + \frac{1}{2}L(\underline{p}-\underline{a}) + B(\underline{a}, \underline{a}) + L(\underline{a}) + c = 0$.

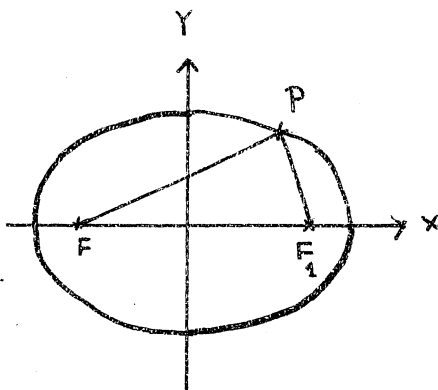
Side 9.8. 13 1_2 : $B(\underline{x}, \underline{x}) + c = 0$ i stedet for $B(\underline{x}, \underline{x}) - c = 0$.

9.9. Sætninger om kvadrikker i planen.

Følgende resultater skal opfattes som en sammenfatning af kendte sætninger.

Ellipsen.

Vi betragter en kvadrik Q med en ligning af formen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, i et retvinklet koordinatsystem.



Q kaldes en ellipse. Antag $b \leq a$. e bestemmes ud fra $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$ og $0 \leq e \leq 1$ entydigt.

e kaldes ellipsens excentricitet.

Punkterne F og F_1 med koordinaterne $(-ea, 0)$ og $(ea, 0)$ kaldes ellipsens brændpunkter. Lad P være et punkt i planen; man kan vise ved en lille regning at

$P \in Q$ netop når $|PF| + |PF_1| = 2a$. Hvor $|PF|$ betegner den positive afstand mellem P og F . Hvis $P \in Q$ kaldes linierne

PF og PF_1 for brændstrålerne til P .

Som kurve i planen kan ellipsen fremstilles ved

$$x = a \cos v \quad y = b \sin v \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Ellipsens ledelinier: Linierne med ligning $x = \frac{a}{e}$
 $x = -\frac{a}{e}$ kaldes ellipsens ledelinier.

Man kan let vise, at et punkt $P \in Q$ netop er forholdet mellem afstanden til linien $x = \frac{a}{e}$ og punktet F_1 er e .
 (Afstande regnes positive)

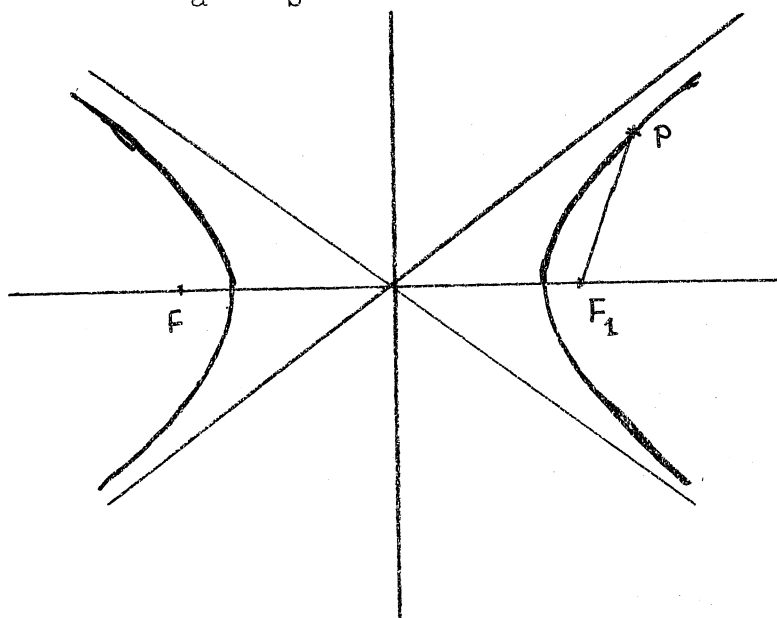
Hvis (x_0, y_0) er et punkt på Q har tangenten i (x_0, y_0) ligningen

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

Hyperblen.

Vi betragter en kvadrik Q med en ligning af formen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{i et retvinklet koordinatsystem.}$$



Q kaldes en hyperbel. e bestemmes entydigt ved $e \geq 1$

$$e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}.$$

e kaldes hyperblens excentricitet. Punkterne F og F_1 med koordinaterne $(-ea, 0)$ og $(ea, 0)$ kaldes hyperblens brændpunkter.

Der gælder følgende:

Lad P være et punkt i planen. $P \in Q$ netop når

$$||PF| - |PF_1|| = 2a.$$

Hvis $P \in Q$ kaldes linierne PF og PF_1 for brændstrålerne til P .

Hyperblens ledelinier. Linierne med ligning

$$x = \frac{a}{e} \text{ og } x = -\frac{a}{e} \text{ kaldes hyperblens ledelinier.}$$

Man viser let, at et punkt $P \in Q$ netop når afstanden mellem P og F_1 divideret med P 's afstand til linien $x = \frac{a}{e}$ er e ($e \geq 1$).

Hyperblens ^sasomptotekegle er bestemt ved $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

De 2 linier $ay + bx = 0$ og $ay - bx = 0$ kaldes hyperblens asymptoter.

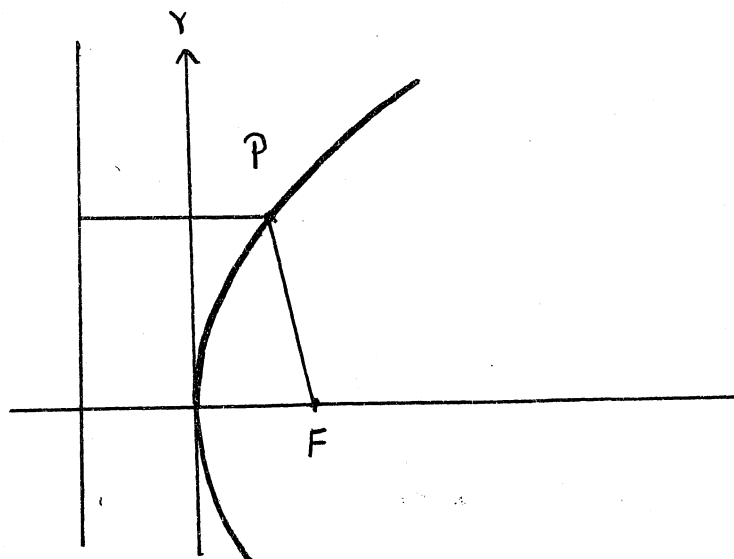
Hvis $(x_0, y_0) \in Q$ er tangent i dette punkt givet ved ligningen:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Parablen.

Vi betragter en kvadrik Q med en ligning af formen

$y^2 - px = 0$ i et retvinklet koordinatsystem.



Punktet F med koordinaterne $(\frac{p}{4}, 0)$ kaldes parablens brændpunkt.

Man kan vise, at et punkt P tilhører Q netop når afstanden fra P til F er lig med P 's afstand til linien $x = -\frac{p}{4}$.

Hvis $P \in Q$ kaldes liniestykket PF for brændstrålen.

p kaldes parablens parameter og vi har en parameterfremstilling af Q ved $x = \frac{t^2}{p}$ $y = t$.

Hvis $(x_0, y_0) \in Q$ er tangenten i Q givet ved $2yy_0 = p(x+x_0)$.

1. Vis, at hvis to parallelle affine underrum af et affint rum har en ikke-tom fællesmængde, så er det ene indeholdt i det andet.
2. Vis, at to komplementære affine underrum af et affint rum har netop eet punkt fælles.
3. Lad M være en ikke-tom delmængde af et affint rum (A, V) . Vis, at M er et affint underrum, hvis og kun hvis enhver linie i A , hvis fællesmængde med M indeholder mindst to punkter, er indeholdt i M .
4. Lad (A_1, V_1) og (A_2, V_2) være affine underrum af et affint rum (A, V) . Vis, at hvis A_1 og A_2 har en ikke-tom fællesmængde, så gælder

$$(*) \dim \text{aff}(A_1 \cup A_2) = \dim A_1 + \dim A_2 - \dim(A_1 \cap A_2).$$
 Vis dernæst, at hvis A_1 og A_2 er disjunkte, så gælder

$$\dim \text{aff}(A_1 \cup A_2) = \dim A_1 + \dim A_2 - \dim(V_1 \cap V_2) + 1.$$
 (Vink: Anvend (*) på A_1 og $\text{aff}(\{P\} \cup A_2)$, hvor $P \in A_1$.)
5. Lad $(P_0, \dots, P_r)$ være et sæt af $r+1$ punkter fra et affint rum. Vis, at $\dim \text{aff}\{P_0, \dots, P_r\} \leq r$, og at der gælder lighedstegn, hvis og kun hvis sættet er affint afhængigt.

6. Lad (A, V) være et affint rum af dimension 4, og lad der i A være valgt et affint koordinatsystem. Lad $P_0: (0, 1, 0, 0)$, $P_1: (2, 1, 0, -1)$, $P_2: (1, 1, 1, 1)$, $P_3: (1, 1, -3, -5)$, $P_4: (-1, 1, 9, 14)$ være punkter i A med de angivne koordinatsæt. Vis, at aff $\{P_0, \dots, P_4\}$ er en plan. Bestem et affint uafhængigt delset (P'_0, P'_1, P'_2) , og fremstil de øvrige punkter i sættet som affine kombinationer af punkterne P'_0, P'_1 og P'_2 .

7. Lad (A, V) være et affint rum af dimension $n \geq 1$. Er der valgt en orientering i V (sml. 5 øv. 1), siges (A, V) at være orienteret. Er (A, V) orienteret, siges et affint uafhængigt sæt $(P_0, \dots, P_n)$ af $n+1$ punkter fra A at være positivt eller negativt efter som basen $(\underline{P_0P_1}, \dots, \underline{P_0P_n})$ er positiv eller negativ.

Uafhængigt af valg af orientering siges to affint uafhængige $(n+1)$ -sæt $(P_0, \dots, P_n)$ og $(Q_0, \dots, Q_n)$ af punkter fra A at være ens eller modsat orienterede efter som baserne $(\underline{P_0P_1}, \dots, \underline{P_0P_n})$ og $(\underline{Q_0Q_1}, \dots, \underline{Q_0Q_n})$ er ens eller modsat orienterede (sml. 5 øv. 1). Vis, at hvis $(P_0, \dots, P_n)$ er et affint uafhængigt sæt, og $p \in S_{n+1}$, så er sætterne $(P_0, \dots, P_n)$ og $(P_{p(0)}, \dots, P_{p(n)})$ ens eller modsat orienterede efter som p er en lige eller ulige permutation.

8. Lad V være et (endelig-dimensionalt reelt) vektorrum, som på den naturlige måde er organiseret som affint rum. For vektorer $x_0, \dots, x_r$ og skalarer $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ med sum 1 kan $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_r x_r$ på to måder fortolkes som et punkt i V . Overvej, at der ved de to fortolkninger bestemmes samme punkt.
9. Bevis sætningerne side 9.4.5.
10. Vis, at hvis mængden af fixpunkter for en affin afbildning af et affint rum (A, V) ind i sig selv er ikke-tom, så er den et affint underrum af A .
11. Lad (A, V) være et 3-dimensionalt affint rum, og lad der i A være valgt et affint koordinatsystem. Lad P_i og Q_i , $i=0,1,2,3,4$, være punkter i A med koordinatsæt som følger:
 $P_0: (1,0,0)$, $P_1: (1,1,0)$, $P_2: (1,0,1)$, $P_3: (0,1,1)$, $P_4: (1,1,1)$,
 $Q_0: (0,0,1)$, $Q_1: (2,0,1)$, $Q_2: (2,0,1)$, $Q_3: (0,0,3)$, $Q_4: (4,0,1)$.
Vis, at der findes en og kun en affin afbildning $f: A \rightarrow A$ med $f(P_i) = Q_i$ for $i=0,1,2,3,4$. Angiv matrixligningen for f . Angiv en parameterfremstilling for $f(A)$. Bestem mængden af fixpunkter.

12. Lad (A, V) være et 2-dimensionalt affint rum, lad (A_1, V_1) være et 1-dimensionalt affint under-
rum af A , og lad P_0 og Q_0 være forskellige punk-
ter i $A \setminus A_1$. Vis, at der findes en og kun en
affin afbildning $f: A \rightarrow A$ med $f(P) = P$ for alle
 $P \in A_1$, og $f(P_0) = Q_0$. Afbildningen kaldes en affi-
nitel med linien A_1 som akse. Tegn en
figur, og konstruer for et vilkårligt punkt P
billedpunktet $f(P)$.
13. Lad (A_1, V_1) være et affint underrum af
et affint rum (A, V) , og lad V_2 være et til
 V_1 komplementært underrum af V . Vis, at
der for ethvert punkt $P \in A$ findes et og kun
et punkt $P_1 \in A_1$, således at $\underline{PP_1} \in V_2$. Vis, at
afbildningen $P \mapsto P_1$ er en affin afbildning
af A ind i A_1 , den kaldes projektionen på A_1
med retrungen V_2 . Lad videre P_2 være det
punkt, som fremkommer ved afsetning
af $\underline{PP_1}$ fra P_1 . Vis, at afbildningen $P \mapsto P_2$ er
en affin afbildning af A på A , den kaldes
spejlingen i A_1 med retrungen V_2 .
14. Lad (A, V) være et 2-dimensionalt euklidisk
affint rum, og lad f være en egentlig kongru-
ens af A med mindst et fixpunkt. Begrund,
at der findes et sædvanligt retvinklet koordinat-
system $(O; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ i A m.h.t. hvilket f 's matrix-
ligning får formen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

hvor $\alpha \in [0, 2\pi[$. Vis, at hvis f er forskellig fra den identiske afbildning, så er O eneste fikspunkt. Udregn for et vilkårligt punkt $P \neq O$ vinklen mellem $\underline{OP}$ og $\underline{Of(P)}$. Lad P_1 og P_2 være bestemt ved $\underline{OP}_1 = \underline{e}_1$ og $\underline{OP}_2 = \underline{e}_2$, og lad der i A være valgt den orientering, hvorved (O, P_1, P_2) bliver et positivt sæt (sml. øv. 7). Begrund, at f kan kaldes drejningen α om punktet O i positiv retning, og drejningen $-\alpha$ om punktet O i negativ retning.

15. Vis, at enhver egentlig kongruens af et 2-dimensionelt euklidisk affint rum er en drejning om et punkt (sml. øv. 14) eller en translation. (Den identiske afbildning er både en drejning og en translation.)

16. Lad f være en egentlig kongruens med mindst et fikspunkt af et 2-dimensionelt euklidisk affint rum (A, V) . Begrund, at der findes et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ m.h.t. hvilket f 's matrix ligning får formen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Bestem mængden af fikspunkter. Vis, at f er spejlingen i en linie (A_1, V_1) med retningen $V_1^\perp$ (sml. øv. 13).

17. Vis, at enhver uegentlig kongruens af et 2-dimensionalt euklidisk affint rum (A, V) er en spejling i en linie (A_1, V_1) med retningen $V_1^\perp$ efterfulgt af en translation med translationsvektor $\underline{t} \in V_1$. (For $\underline{t} = \underline{0}$ får specielt en spejling; for $\underline{t} \neq \underline{0}$ kaldes afbildningen en glidespejling.)

18. Lad (A, V) være et 3-dimensionalt euklidisk affint rum, og lad f være en (egentlig eller uegentlig) kongruens af A med mindst et fixpunkt. Begrund, at der findes et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ i A m.h.t. hvilket f 's matrixligning får formen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

med $\alpha \in [0, 2\pi[$, dersom f er egentlig, og formen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

med $\alpha \in [0, 2\pi[$, dersom f er uegentlig. Bestem i begge tilfælde mængden af fixpunkter. Lad P_1, P_2 og P_3 være bestemt ved $\underline{OP}_1 = \underline{e}_1$, $\underline{OP}_2 = \underline{e}_2$ og $\underline{OP}_3 = \underline{e}_3$, og lad der i A være valgt den orientering, hvorved (O, P_1, P_2, P_3) bliver et positivt sæt (små. av. 7). Begrund, at hvis f er egentlig, så kan den kaldes drejningen α om linien bestemt ved O og P_3 i positiv retning, og drejningen $-\alpha$ om linien bestemt ved O og P_1 .

i negativ retning. Overvej, at hvis f er uegentlig, så kan sammensættes af spejlingen i planen bestemt ved O , P_2 og P_3 med retningen $\text{span}\{\xi, \beta\}$ (sml. øv. 13), efterfulgt af drejningen α om linien bestemt ved O og P_1 i positiv retning; en sådan afbildning kaldes en drejespejling.

19. Vis, at enhver egentlig kongruens af et 3-dimensionelt euklidisk affint rum (A, V) er en drejning om en linie (A_1, V_1) (sml. øv. 18), efterfulgt af en translation med translationsvektor $\pm \xi \in V_1$. (Er drejningen hhv. translationen specielt den identiske afbildning, får en translation hhv. drejning; hvis begge drejningen eller translationen er den identiske afbildning, kaldes afbildningen en skruining langs linien (A_1, V_1) .)
20. Vis, at enhver egentlig kongruens af et 3-dimensionelt euklidisk affint rum (A, V) er en spejling i en plan (A_1, V_1) med retningen $V_1^\perp$, efterfulgt af enten en translation med translationsvektor $\pm \xi \in V_1$ eller en drejning om en linie med retningen $V_1^\perp$.
21. Lad (A, V) være et affint rum af dimension $n \geq 1$, lad $f_1, \dots, f_m$ være ikke-konstante affine funktioner på A , og lad $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ være skalarer. Vis, at $\dim \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(\alpha_i) = n - \text{rg}(f_1, \dots, f_m)$, dersom $\bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(\alpha_i) \neq \emptyset$.

22. Lad M være en ikke-tom delmængde af et affint rum (A, V) , og sæt

$$K = \{P \in M \mid \forall Q \in M : [P, Q] \subseteq M\}.$$

Vis, at K er konveks. (Mængden K kaldes M 's konvekse kerne.)

23. Lad V være et (endelig-dimensionelt reelt) normeret vektorrum. Vis, at såvel den åbne som den afsluttede enhedskugle er konvekse mængder.

24. Lad $f: A \rightarrow B$ være en affin afbildning. Vis, at for enhver konveks mængde $K \subseteq A$ er $f(K)$ en konveks delmængde af B , og at for enhver konveks mængde $K \subseteq B$ er $f^{-1}(K)$ en konveks delmængde af A .

25. Lad K være en ikke-tom konveks delmængde af et affint rum (A, V) , og lad P være et punkt i A . Vis, at $\text{conv}(\{P\} \cup K) = \bigcup_{Q \in K} [P, Q]$.

26. Lad K_1 og K_2 være konvekse delmængder af et (endelig-dimensionelt reelt) vektorrum V . Vis, at $K_1 + K_2$ er konveks.

27. Bevis følgende skærpeelse af Carathéodory's sætning: Lad M være en delmængde af et affint rum, og lad P_0 være et punkt i M . Det konvekse hulstør af M er da identisk med foreningsmængden af alle simplekser, der har P_0 som hjørne, og hvis hjørner alle tilhører M .

28. Lad $M = \{P_0, \dots, P_r\}$ være en endelig delmængde af et affint rum. Ved en massefordeling på M med masse m forstås en afbildning $f: M \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ med $f(P_0) + \dots + f(P_r) = m > 0$. Ved tyngdepunktet for en massefordeling f på M med masse m forstås punktet

$$P = \sum_{i=0}^r \frac{f(P_i)}{m} P_i.$$

Bestem mængden af tyngdepunkter for massefordelinger på M . Angiv en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at to forskellige massefordelinger på M med samme masse altid har forskellige tyngdepunkter.

29. Lad $a_1, \dots, a_k$ være indbyrdes forskellige reelle tal, lad $b_1, \dots, b_k$ være vilkårlige reelle tal, og lad $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ være positive reelle tal. Vis, at hvis der for vilkårlige $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, k\}$ findes en affin funktion f på $\mathbb{R}$, således at $|f(a_i) - b_i| < \varepsilon_i$ for $i = i_1, i_2, i_3$, så findes en affin funktion f på $\mathbb{R}$, således at $|f(a_i) - b_i| < \varepsilon_i$ for $i = 1, \dots, k$. (Vink: Udnyt Hebbes sætning.)

30. Lad K være en konvex delmængde af et affint rum (A, V) af dimension $n \geq 1$, lad $f_1, \dots, f_k$ være affine funktioner på A , og lad $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ være reelle tal. Vis, at hvis $K \subseteq \bigcup_{i=1}^k f_i^{-1}([-\infty, \alpha_i])$ og $k \geq n+1$, så findes $i_1, \dots, i_{n+1} \in \{1, \dots, k\}$ med $K \subseteq \bigcup_{v=1}^{n+1} f_{i_v}^{-1}([-\infty, \alpha_{i_v}])$. (Vink: Udnyt Hebbes sætning.)

31. Skitser keglesnitsfladerne.

32. I et euklidiske affint rum af dimension 2 er tre kvadratter givet ved deres ligninger m.h.t. et sædvanligt retvinklet koordinatsystem som følger:

$$5x_1^2 + 7x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - 32 = 0,$$

$$x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 3x_2 - 1 = 0,$$

$$x_1^2 + 3x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - 2x_1 = 0.$$

Bestem for hver af de tre kvadratter arten og en ligning på normalform.

33. I et euklidiske affint rum af dimension 3 er to kvadratter givet ved deres ligninger m.h.t. et sædvanligt retvinklet koordinatsystem som følger:

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + x_1 + x_2 + x_3 - \frac{3}{8} = 0,$$

$$x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_1 - 2x_2 = 0.$$

Bestem for hver af de to kvadratter arten og en ligning på normalform.

34. Lad $(P_0, \dots, P_r)$ være et affint uafhængigt sæt af punkter fra et affint rum (A, V) . Ved $(P_0; \underline{P_0P_1}, \dots, \underline{P_0P_r})$ er da bestemt et affint koordinatsystem i $A_1 = \text{aff}\{P_0, \dots, P_r\}$. Mængden af punkter i A_1 , hvis koordinater $x_1, \dots, x_r$ m.h.t. dette koordinatsystem alle tilhører $[0, 1]$, kaldes det af sættet $(P_0, \dots, P_r)$ udspændte parallellotop, og betegnes $[P_0, \dots, P_r]$. (For $r=1$ er parallellotopet $[P_0, P_1]$ det samme som linjestykket $[P_0, P_1]$. For $r=2$ h.v. $r=3$ kaldes parallellotopet også et rektangel h.v. parallellepipedum.) Vis, at $[P_0, \dots, P_r] = [P_{p(0)}, \dots, P_{p(r)}]$ for alle permutationer $p \in S_{r+1}$. Vis, at $[P_0, \dots, P_r]$ er det konvekse hulster af en mængde bestående af 2^r punkter, hvoriblandt $P_0, \dots, P_r$.

Lad ϕ være en ikke-triviel alternerende n -linearform på V , hvor $n = \dim V$. Ved volumenet $\text{vol}[P_0, \dots, P_n]$ af et parallellotop $[P_0, \dots, P_n]$ i A forstås da tallet $\phi(\underline{P_0P_1}, \dots, \underline{P_0P_n})$. (Bemærk, at $\text{vol}[P_0, \dots, P_n]$ ikke alene afhænger af ϕ , men også af den rækkefølge, punkterne $P_0, \dots, P_n$ indtages.) Gør rede for, at $\text{vol}[P_0, \dots, P_n] \neq 0$. Gør rede for, at volumenforholdet

$$\frac{\text{vol}[P_0, \dots, P_n]}{\text{vol}[Q_0, \dots, Q_n]}$$

for to parallellotoper er uafhængigt af ϕ . Gør rede for, at hvis f er en affin transformation af A , og $[P_0, \dots, P_n]$ er et parallellotop i A , så

bestemmer også sættet $(f(P_0), \dots, f(P_n))$ et parallel-
lotop $[f(P_0), \dots, f(P_n)]$ i A . Bestem volumen-
forholdet

$$\frac{\text{vol}[f(P_0), \dots, f(P_n)]}{\text{vol}[P_0, \dots, P_n]},$$

og gør rede for, at det ikke alene er afhængig-
igt af ϕ , men også af det betragtede paral-
lелotop $[P_0, \dots, P_n]$; tallet kaldes f 's volumen-
forhold.

1. Lad (V, L) være et vektorrum. Vi har sat $\operatorname{rg} V =$ det største antal vektorer, der danner et lineært uafhængigt system, og vi sætter (midlertidigt) $\dim V =$ det mindste antal vektorer, der danner et frembringssystem. Bemærk, at $\dim V < \infty$ netop hvis V er endeligt frembragt.
- (a) Et minimalt frembringssystem, er et frembringssystem, som ikke indeholder noget mindre frembringssystem. Vis, at et sådant system er en basis for V (og omvendt), og slut heraf, at hvis $\dim V < \infty$, da har V en basis.
- (b) Et maksimalt frit system i V er et lineært uafhængigt system, der ikke er indeholdt i noget større lineært uafhængigt system. Vis, at et sådant system er en basis (og omvendt), og slut heraf, at hvis $\operatorname{rg} V < \infty$, da har V en basis.
- (c) Vis, at hvis en basis indeholder $|\text{basis}|$ elementer, da gælder
- $$\dim V \leq |\text{basis}| \leq \operatorname{rg} V,$$
- og slut heraf, at der altid gælder
- $$\dim V \leq \operatorname{rg} V.$$
- (d) Lad $M \subseteq V$ være en delmængde. Et maksimalt frit system fra M er et lineært uafhængigt system af vektorer fra M , der ikke er indeholdt i noget større lineært uafhængigt system af vektorer fra M . Vis, at et sådant system er en basis for $\operatorname{Span}(M)$, og slut heraf, at hvis $\operatorname{rg} V < \infty$, da gælder følgende: Hvis $(v_i, i \in I)$ er et system af vektorer i V , og hvis $(u_1, \dots, u_p)$ er et lineært uafhængigt sæt i V , så at u 'erne suppleret med alle v 'erne er et frembringssystem for V , da kan u 'erne suppleres med visse v 'er til en basis for V .

©. Vis, at hvis et maksimalt frit system fra M indeholder $| \text{maks. frit syst. fra } M |$ elementer, da gælder

$\dim \text{Span}(M) \leq | \text{maks. frit syst. fra } M | \leq \text{rg } M \leq \text{rg Span}(M)$,
og slut heraf, at der altid gælder

$$\dim \text{Span}(M) \leq \text{rg } M \leq \text{rg Span}(M).$$

Ⓕ Vis, at udskiftningssætningen medfører, at
 $\dim V \geq \text{rg } V$,

og forstærk derved ovenstående resultater.

2. Lad T være en endelig mængde. Angiv en basis for vektorrummet $F(T, L)$ og bestem dette vektorrums dimension.

3. Lad G være en gruppe, og lad L^* være den multiplikative gruppe i legemet L (altså $L^* = L \setminus \{0\}$, med multiplikation som komposition). En L -karakter er en homomorfie $\chi: G \rightarrow L^*$. Vi kan opfatte mængden af L -karakterer som en delmængde i vektorrummet $F(G, L)$ af alle afbildninger $\varphi: G \rightarrow L$. Vis, at mængden af L -karakterer er en lineært uafhængig delmængde af $F(G, L)$, og slut heraf at
 $|\{L\text{-karakterer}\}| \leq |G|$.

Vink. Antag, at der fandtes lineære relationer mellem karaktererne, og betragt en, der involverer det mindst mulige antal karakterer.

4. Lad F_0 være mængden af afbildninger $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

som opfylder: $\varphi(t) \neq 0$ gælder kun for endelig mange $t \in \mathbb{R}$. Vis, at F_0 er et underrum i $F = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, og vis, at F_0 ikke har nogen numerabel basis.

5* Vis, at vektorrummet L^N af alle følger $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ ikke har en numerabel basis.

1-2/6 6. (Fortsættelse af 1. øv 36). Vis, at $\underline{v}_i \mapsto (0, \dots, \underline{v}_i, \dots, 0)$ definerer en isomorfi $V_i \cong W_i$. Antag at $V_1, \dots, V_m$ er underrum i vektorrummet (V, L) . Find en "naturlig" lineær afbildning $\kappa: V_1 \times \dots \times V_m \rightarrow V$, og bestem κ 's billede. Hvad betyder det, at κ er surjektiv? injektiv? bijektiv? Vis, i tilfældet $n=2$, at $\underline{v} \mapsto (\underline{v}, -\underline{v})$ definerer en isomorfi $V_1 \cap V_2 \cong \text{Ker}(\kappa)$, og slut heraf Grassmann's dimensionsformel ved hjælp af dimensionsformlen for en lineær afbildning.

1-2/11 7. Lad $(\tilde{V}, \mathbb{C})$ være den komplekse udvidelse af et reelt vektorrum $(V, \mathbb{R})$, jfr. 1. øv 2. Vis, at den ved $k: (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \mapsto (\underline{v}_1, -\underline{v}_2)$ bestemte afbildning $k: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ er en konjugering, d.v.s. at der gælder: $k^2 = 1_{\tilde{V}}$, $k(\underline{u} + \underline{v}) = k(\underline{u}) + k(\underline{v})$, $k(\lambda \underline{v}) = \bar{\lambda} k(\underline{v})$, for $\underline{u}, \underline{v} \in \tilde{V}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Vis, at den ved $\underline{v} \mapsto (\underline{v}, 0)$ bestemte afbildning $V \rightarrow \tilde{V}$ er injektiv og $\mathbb{R}$ -linear. Identificeres V med sit billede kan hver vektor $\underline{\tilde{v}} \in \tilde{V}$ entydigt skrives $\underline{\tilde{v}} = \underline{v}_1 + i \underline{v}_2$, $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$, og der gælder $\underline{\tilde{v}} \in V \Leftrightarrow k(\underline{\tilde{v}}) = \underline{\tilde{v}}$.

Lad $f: V \rightarrow W$ være en $\mathbb{R}$ -lineær afbildning, hvor W er et vektorrum over $\mathbb{R}$. Vis, at $\underline{v}_1 + i \underline{v}_2 \mapsto f(\underline{v}_1) + i f(\underline{v}_2)$ bestemmer en $\mathbb{C}$ -lineær afbild-

ning $\tilde{f}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{W}$. $\tilde{f}$ kaldes den komplekse udvidelse af f .

8. Et frembringersystem i den endelige gruppe G er en delmængde $T \subseteq G$ med den egenskab at ethvert $s \in G$ har en fremstilling $s = t_1 \cdots t_r$, hvor $r \geq 0$, og $t_1, \dots, t_r$ er (ikke nødvendigvis forskellige) elementer af T . Definer minimalt frembringersystem og dim G som i opgave 1. Vis, at et frembringersystem for S_n bestående af transpositioner mindst har $n-1$ elementer, og vis, at $(1,2), (1,3), \dots, (1,n)$ er et minimalt frembringersystem. Lad c_i , $i=1, \dots, n$ betegne cyklen $c_i = (1,2, \dots, i)$, og vis, at $c_{i-2} = c_{i-1} c_i^{-2} c_{i-1} c_i$, $i=3, \dots, n$, og slut heraf ved induktion, at $\{c_{n-1}, c_n\}$ er et frembringersystem for S_n , og dermed, at $\dim S_n = 2$, $n \geq 3$. Vis, at transpositionerne $(1,2), (3,4), (5,6)$ frembringer en (kommutativ) undergruppe G i S_6 , med $|G|=8$, og $\dim G = 3$.

9. Betragt vektorrummet (P, L) af polynomier med koefficienter fra L ($=\mathbb{R}$ eller $=\mathbb{C}$), med underrummene P_n af polynomier af grad $\leq n$. Vis, at hvis f er et polynomium af grad ≥ 0 , da defineres ved $\varphi \mapsto \varphi f$ en injektiv, lineær afbildning: $P \rightarrow P$. Vi sætter $Uf = \{\varphi f \mid \varphi \in U\}$ (= billedmængden ved denne afbildning) når $U \subseteq P$.
- ② Vis, at hvis f har grad $n \geq 0$, da er

$P_d f \cap P_{m-1} = \{0\}$, og slut heraf, at

$$P_d = P_{d-m} f \oplus P_{m-1} \quad \text{for } d \geq m-1,$$

og dernæst, at

$$P = P f \oplus P_{m-1}.$$

(Eftigdig division med rest).

(b) En endelig mængde $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq P$ kaldes primisk, hvis $P f_1 + \dots + P f_r = P$. Vis, at dette er tilfældet hvis og kun hvis der findes $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in P$, så at $\varphi_1 f_1 + \dots + \varphi_r f_r = 1$. Vis, at hvis $L = \mathbb{R}$, da er $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq P$ primisk netop hvis $\{f_1, \dots, f_r\}$ opfattet som en mængde af polynomier med koefficienter fra $\mathbb{C}$ er primisk [Vink: definer "realdelen" af et komplekst polynomium]. Vis, at $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ er primisk hvis og kun hvis både $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ og $\{g, f_2, \dots, f_r\}$ er primiske, og slut under brug af algebraens fundamental sætning, at $\{f_1, \dots, f_r\}$ er primisk netop hvis f 'erne ikke har nogen fælles rod i $\mathbb{C}$.

(c) Givet et polynomium $f = \varphi_1 \dots \varphi_r$ af grad n , hvor φ 'erne er parvis primiske, og φ_i har grad n_i . Sæt $f_i = \frac{f}{\varphi_i} = \varphi_1 \dots \varphi_{i-1} \varphi_{i+1} \dots \varphi_r$ af grad $n - n_i$. Vis, at $\{f_1, \dots, f_r\}$ er primisk, og slut nu under brug af (a), at der gælder $P = P_{m_1-1} f_1 + \dots + P_{m_r-1} f_r + P f$, og dermed $P_d \subseteq P_{m_1-1} f_1 + \dots + P_{m_r-1} f_r + P_{d-n} f$ for $d \geq m-1$. Forstærk dette til

$$P_d = P_{m_1-1} f_1 \oplus \dots \oplus P_{m_r-1} f_r \oplus P_{d-n} f, \quad d \geq m-1.$$

specielt

$$P_{m-1} = P_{m_1-1} f_1 \oplus \dots \oplus P_{m_r-1} f_r.$$

(d) Antag, at $\varphi_i = (t - \lambda_i)^{n_i}$, og vis, at opspaltningerne i (c) medfører, at

$$f_{i,v} = \frac{f}{\varphi_i^v} \quad i=1, \dots, r \quad v=1, \dots, n_i \quad \text{og} \quad f, t f, \dots, t^{d-n} f$$

udgør en basis for $\mathcal{P}_{d,n-1}$, $d \geq n-1$. [Vink: udnyt, at $1, \varphi_i, \varphi_i^2, \dots, \varphi_i^{n_i-1}$ er en basis for $\mathcal{P}_{n_i-1}$]. Vis, at de rationale funktioner

$$\frac{1}{(t-\lambda_i)^v} \quad i=1, \dots, r \quad \text{og} \quad t^k \quad k=0, \dots, d-n$$

$v=1, \dots, n_i$

danner en basis for de rationale funktioner af formen $\frac{h}{f}$, med h af grad $\leq d$. ($d \geq n-1$).

© Hvilket resultat fås i tilfældet, hvor $f = (t-\lambda_1)^{n_1} \dots (t-\lambda_r)^{n_r} (t^2+2a_1t+b_1)^{m_1} \dots (t^2+2a_s t+b_s)^{m_s}$. [Vink: udnyt, at der for polynomiet $\varphi_i = (t^2+2at+b)$, af grad 2m gælder, at $1, t, \varphi, t\varphi, \dots, \varphi^{m-1}, t\varphi^{m-1}$ er en basis for $\mathcal{P}_{2m-1}$].

Algebraens fundamentalsetning udsiger, at ethvert polynomium $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$, med $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ kan skrives $f = (t-\lambda_1)^{n_1} \dots (t-\lambda_r)^{n_r}$. Dette medfører i tilfældet $L = \mathbb{R}$, at ethvert polynomium f kan skrives på den i © omtalte måde.

10. Vis, at der ved $(\Delta f)(t) = f(t+1) - f(t)$ bestemmes en lineær afbildning $\Delta: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, og bestem Δ 's kerne. Vis, at underrummet $\mathcal{U}_\Delta \subseteq \mathcal{P}$ bestående af polynomier f med $f(a) = 0$ er et komplement til Δ 's kerne. Vis, at polynomierne $(i): t \mapsto \binom{t}{i} = \frac{t(t-1)\dots(t-i+1)}{i!}$ $i \geq 1$ sammen med $(0) = 1$ er basis for $\mathcal{P}$, bestem $\Delta((i))$, og slut dernæst, at Δ er surjektiv. Vis, at der findes netop en lineær afbildning $\Sigma_\Delta: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}_\Delta$ som opfylder $\Delta \circ \Sigma_\Delta = 1_{\mathcal{P}}$, og bestem $\Sigma_0((i))$. Vis, at for $n \in \mathbb{N}$ gælder $(\Sigma_0 f)(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$. Vis, at der findes polynomier p_r , $r=0, 1, 2, \dots$ så at $p_r(n) = 1^r + 2^r + \dots + n^r$ for $n \in \mathbb{N}$, og bestem p_1, p_2 og p_3 .

11. Lad U være mængden af talfølger

$$(*) \quad u_0, u_1, u_2, \dots,$$

hvor $u_i \in \mathbb{R}$ for $i \in \mathbb{N}_0$, og hvor

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \text{for } n \geq 2.$$

Vis, at U er et underrum i vektorrummet $(V, \mathbb{R})$ bestående af alle talfølger $(*)$ med $u_i \in \mathbb{R}$ for $i \in \mathbb{N}_0$.

Vis, at $\dim U = 2$.

Find samtlige kvotientrækker

$$1, q, q^2, \dots$$

i U , og vis, at de udgør en basis for $(U, \mathbb{R})$

Fibonaccifølgen

$$f_0, f_1, f_2, \dots$$

er defineret ved

$$f_0 = f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Vis formelen

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

og vis herved, at

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

Hvilke følger i U er begrænsede?

Matematik 1x

Skriftlig prøve til hjemmerigning i 4 timer

Alle hjælpemidler er tilladt

Sættet består af 4 opgaver

Opgave nr. 1.

Lad $N = \{p \in S_n \mid p \circ (12) = (12) \circ p\}$, $n \geq 2$.

1° Vis, at N er en undergruppe i S_n .

2° Vis, at $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a & b & \dots & p(n) \end{pmatrix} \in N$, hvis og kun hvis $\{a, b\} = \{1, 2\}$.

3° Vis, at N har orden $(n-2)! \cdot 2$.

Opgave nr. 2.

Lad V være et n -dimensionalt vektorrum over $\mathbb{R}$. En endomorfi $f: V \rightarrow V$ kaldes en involution, hvis $f^2 = e$, hvor $e: V \rightarrow V$ er den identiske afbildning.

1° Lad f være en vilkårlig endomorfi af V .

Vis, at mængderne

$$V_+ = \{v \in V \mid f(v) = v\}, \quad V_- = \{v \in V \mid f(v) = -v\}$$

er underrum i V .

2° Vis, at $V = V_+ \oplus V_-$, hvis og kun hvis f er en involution.

3° Antag, at f er en involution. Vis, at der findes en basis $(e_1, \dots, e_n)$ for V , så at den til f m.h.t. denne basis hørende matrix har formen $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.

Opgave nr. 3.

- 1° Vis, at matricen $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & s & t \\ -s & 1 & u \\ -t & -u & 1 \end{pmatrix}$, $s, t, u \in \mathbb{R}$ er regulær, og bestem $\underline{A}^{-1}$.
- 2° Lad $\underline{S}$ være en kvadratisk matrix med reelle koefficienter, så at matricen $\underline{E} + \underline{S}$ er regulær. Vis, at $\underline{S}$ kommuterer med $(\underline{E} + \underline{S})^{-1}$, altså at $\underline{S}(\underline{E} + \underline{S})^{-1} = (\underline{E} + \underline{S})^{-1}\underline{S}$.
- 3° Antag yderligere, at $\underline{S}$ er antisymmetrisk. Vis, at matricen $(\underline{E} - \underline{S})(\underline{E} + \underline{S})^{-1}$ er ortogonal.
- 4° Bestem $(\underline{E} - \underline{S})(\underline{E} + \underline{S})^{-1}$ når $\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & s & t \\ -s & 0 & u \\ -t & -u & 0 \end{pmatrix}$, $s, t, u \in \mathbb{R}$.

Opgave nr. 4.

Lad $\underline{A} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ være matricen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

og lad $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være den ved $\underline{x}_1 \mapsto \underline{A}\underline{x}_1$ givne afbildning.

- 1° Find f 's rang, og angiv en basis for f 's kerne.
- 2° Find for $i=1, 2$ og 3 en løsning til matrixligningen $\underline{A}\underline{x}_1 = \underline{e}_i$, hvor $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 3° Find en matrixfremstilling for en lineær afbildning $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, som opfylder, at $f \circ g$ er den identiske afbildning.

11. Lad U og W være underrum i vektorrummet V , og lad $\pi: V \rightarrow V/U$ være restklasseafbildningen. Vis, at $\pi^{-1}(\pi(W)) = W+U$, og find en naturlig isomorfi $(W+U)/U \cong \pi(W)$. Vis, at kernen for den ved $w \mapsto \pi(w)$ bestemte afbildning $W \rightarrow \pi(W)$ er $W \cap U$ og find nu en isomorfi

$$W/W \cap U \cong (W+U)/U$$

Antag nu, at $W \supseteq U$, og find en isomorfi $V/W \cong (V/U)/\pi(W)$. Identificerer vi $\pi(W)$ med W/U (jfr. det ovenfor fundne), kan denne isomorfi skrives

$$V/W \cong (V/U)/(W/U)$$

12. Lad $V, V', \langle, \rangle$ være et dualt par, og lad V_1 og V_2 være underrum i V . Vis relationerne

$$(V_1 + V_2)^\circ = V_1^\circ \cap V_2^\circ$$

$$(V_1 \cap V_2)^\circ \supseteq V_1^\circ + V_2^\circ$$

Vis, at $=$ gælder i den sidste relation når V har endelig dimension.

13. Vis, at vektorrummene F og F_0 fra suppl. 6.4 er i dualitet ved bilinearformen $\langle, \rangle: F \times F_0 \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved $\langle f, \varphi \rangle = \sum_{t \in \mathbb{R}} f(t) \varphi(t)$.

Betragt $U = F_0$ som underrum i F , og vis, at $U^{\circ\circ} = F \supset U$.

14. Lad V være et vektorrum over $\mathbb{C}$. V "består" altså af en mængde V_0 + en addition : $V_0 \times V_0 \rightarrow V_0$ betegnet $(u, v) \mapsto u + v$ + en multiplikation med skalar : $\mathbb{C} \times V_0 \rightarrow V_0$ betegnet $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, så at visse aksiomer er opfyldte. Vis, at vi kan definere et nyt vektorrum $\bar{V}$ over $\mathbb{C}$ ved som mængde at bruge V_0 , som addition at bruge additionen i V og som multiplikation med skalar at bruge afbildningen $(\lambda, v) \mapsto \bar{\lambda}v$. [som f. eks. betegnes $(\lambda, v) \mapsto \lambda_k v$; $\bar{V}$ kaldes V 's konjugerede vektorrum]. Overvej, at en delmængde $M \subseteq V_0$ er et frembringersystem (resp. et lin. uafh. syst., resp. en basis, resp. et underrum, ...) i V , hvis og kun hvis M er et frembringersystem (resp.) i $\bar{V}$. Specielt er altså $\dim V = \dim \bar{V}$. Lad nu $f: V \rightarrow W$ være en lineær afbildning. f er da en afbildning (af en speciel type) mellem de underliggende mængder $V_0 \rightarrow W_0$, og kan derfor også opfattes som en afbildning $\bar{V} \rightarrow \bar{W}$. Vis, at denne afbildning er lineær. Denne afbildning kaldes f 's konjugerede afbildning og betegnes $\bar{f}$. Antag nu at f i baser $\bar{f}$ i V og W beskrives ved matricen $\underline{A} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, og vis, at $\bar{f}$ i de samme baser (opfattet som baser for de konjugerede rum) beskrives ved matricen $\underline{\bar{A}} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Skønt $\dim V = \dim \bar{V}$, er der normalt ikke noget naturligt valg af en isomorfi $V \rightarrow \bar{V}$.

Lad $(V, \mathbb{C})$ være den komplekse udvidelse af et reelt vektorrum. Vis, at konjugering (Suppl. øv 7) er en (lineær) isomorfi $k: V \xrightarrow{\sim} \bar{V}$.
 Vis, at et indre produkt $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ i et vektorrum V over $\mathbb{C}$ kan opfattes som en dualitet $V \times \bar{V} \rightarrow \mathbb{C}$.

15. For en lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ med kerne $\text{Ker}(f)$ gælder dimensionsformlen
- $$\dim \text{Ker}(f) + \dim f(U) = \dim U.$$

Oftest har man mere nytte af følgende

Opskrift: "Man tager en basis $(v_1, \dots, v_m)$ for $f(U)$, man "løfter" den til vektorer $(u_1, \dots, u_m)$ i U [d.v.s. man vælger vektorer u_i i U , så $u_i \xrightarrow{f} v_i$], og man supplerer disse vektorer med en basis $(w_1, \dots, w_p)$ for $\text{Ker}(f)$. Man har da en basis $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_p)$ for U ."

Prøv denne opskrift.

16. Læs omhyggeligt følgende bevis for sætningen om Jordans normalform:

② Lemma. Lad $g: V \rightarrow V$ være en endomorfi i et endeligdimensionalt vektorrum. Der findes en opspaltning $V = U \oplus W$ i invariante under- rum, så at g er nilpotent på U og bijektiv i W .

Bevis: 7. følges $V \supseteq g(V) \supseteq g^2(V) \supseteq \dots$ af

invariante under rum må der gælde = fra et vist trin. Af $g^{v+1}(V) = g^v(V)$ følger, at g er bijektiv (= surjektiv) på $g^v(V)$. Hvis $\underline{v} \in \text{Ker}(g^v) \cap g^v(V)$, har vi $g^v(\underline{v}) = \underline{0}$, og dermed $\underline{v} = \underline{0}$, da g er injektiv på $g^v(V)$. Altså er $\text{Ker}(g^v) \cap g^v(V) = \{\underline{0}\}$, og da $\dim V = \dim \text{Ker}(g^v) + \dim g^v(V)$, slutter vi, at $V = \text{Ker}(g^v) \oplus g^v(V)$.

(b) Soetning Lad $f: V \rightarrow V$ være en endomorfi af et endeligdimensionalt vektorrum over $\mathbb{C}$ med egenverdierne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Der findes en opspaltning $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ i invariante under rum, så at $f - \lambda_i e$ er nilpotent på U_i .

Bewis. Vi har

$$\begin{aligned} V &= U_1 \oplus W_1 && \left(\begin{array}{l} \textcircled{a} \text{ anvendt på } f - \lambda_1 e: V \rightarrow V \text{ med } f - \lambda_1 e \\ \text{nilpotent på } U_1, f - \lambda_1 e \text{ bijektiv på } W_1 \end{array} \right) \\ &= U_1 \oplus U_2 \oplus W_2 && \left(\begin{array}{l} \textcircled{a} \text{ anvendt på } f - \lambda_2 e: W_1 \rightarrow W_1 \text{ med } f - \lambda_2 e \\ \text{nilpotent på } U_2, f - \lambda_2 e \text{ bijektiv på } W_2 \end{array} \right) \\ &= \vdots \\ &= U_1 \oplus \dots \oplus U_r \oplus W_r && \left(\begin{array}{l} \textcircled{a} \text{ anvendt på } f - \lambda_r e: W_{r-1} \rightarrow W_{r-1} \text{ med } \\ f - \lambda_r e \text{ nilpotent på } U_r, f - \lambda_r e \text{ bijektiv på } W_r \end{array} \right) \end{aligned}$$

Na er $f - \lambda_i e$ specielt injektiv på W_i , og dermed også injektiv på $W_n \subseteq W_i$. Intet af tallene $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ er derfor egenverdi for $f: W_n \rightarrow W_n$. Her af følger (da legemet er $\mathbb{C}$) at $W_n = \{\underline{0}\}$.

(c) Jordans normalform for en nilpotent endomorfi $h: U \rightarrow U$. Påstanden er, at der findes en basis (en "Jordanbasis for h ") i hvilken h beskrives ved en blokmatrix:

$$\begin{pmatrix} \underline{B}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underline{B}_p \end{pmatrix}$$

hvor hver blok $\underline{B}_i$ har formen $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$.

At en basis er en Jordانبasis for h betyder at den kan deles i grupper: $(\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k; \underline{v}_0, \dots, \underline{v}_\ell; \underline{w}_0, \dots, \underline{w}_m; \dots)$ [svarende til hver af blokkene] så at

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_k \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} \underline{u}_1 \xrightarrow{h} \underline{u}_0 \xrightarrow{h} \underline{0} \\ \underline{v}_\ell \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} \underline{v}_1 \xrightarrow{h} \underline{v}_0 \xrightarrow{h} \underline{0} \\ \underline{w}_m \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} \underline{w}_1 \xrightarrow{h} \underline{w}_0 \xrightarrow{h} \underline{0} \\ \vdots \end{array} \right.$$

At der til hver nilpotent endomorfi $h: U \rightarrow U$ findes en Jordانبasis vises nu ved induktion efter $\dim U$. h definerer en surjektiv lineær afbildning: $U \rightarrow h(U)$. Hvis $h(U) = \{\underline{0}\}$, altså $h = 0$ er påstanden trivial. Hvis $h(U) \neq \{\underline{0}\}$, er $\dim U > \dim h(U)$! Antag derfor, at vi har fundet en Jordانبasis som i (*) for den nilpotente endomorfi $h: h(U) \rightarrow h(U)$. Ifølge "opskriften" får vi en basis for U ved at "løfte" basen for $h(U)$ og supplere med en basis for $\text{Ker}(h)$. Vi "løfter" nu vektorerne i (*) ved at vælge $\underline{u}_{k+1}, \underline{v}_{\ell+1}, \underline{w}_{m+1}, \dots$ i U , så at $\underline{u}_{k+1} \xrightarrow{h} \underline{u}_k, \underline{v}_{\ell+1} \xrightarrow{h} \underline{v}_\ell, \underline{w}_{m+1} \xrightarrow{h} \underline{w}_m, \dots$, og ved som "løftning" af de øvrige vektorer i (*) at vælge den vektor i (*) der står umiddelbart til venstre. De "løftede" vektorer har nu

index > 0 . Vi skal supplere med en basis for $\text{Ker}(h)$. Vi har allerede de lineært uafhængige vektorer $u_0, v_0, w_0, \dots$ i denne kerne, og vi supplerer disse vektorer med vektorer $x_0, y_0, \dots$ til en basis for $\text{Ker}(h)$. Den således bestemte basis for U er klart en Jordانبasis:

$$\begin{array}{ccccccc}
 u_{k+1} & \xrightarrow{h} & u_k & \xrightarrow{h} & \dots & \xrightarrow{h} & u_1 & \xrightarrow{h} & u_0 & \xrightarrow{h} & 0 \\
 v_{l+1} & \xrightarrow{h} & v_l & \xrightarrow{h} & \dots & \xrightarrow{h} & v_1 & \xrightarrow{h} & v_0 & \xrightarrow{h} & 0 \\
 w_{m+1} & \xrightarrow{h} & w_m & \xrightarrow{h} & \dots & \xrightarrow{h} & w_1 & \xrightarrow{h} & w_0 & \xrightarrow{h} & 0 \\
 \vdots & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & x_0 & \xrightarrow{h} & 0 \\
 & & & & & & & & y_0 & \xrightarrow{h} & 0 \\
 & & & & & & & & \vdots & &
 \end{array}$$

[I $\square$ står de "løftede" vektorer; udenfor står en basis for kernen]

(d) Jordans normalform for en endomorfi $f: V \rightarrow V$. Vi betragter opspaltningen $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ fra (b). $f - \lambda_i e$ er nilpotent på U_i , så vi kan finde en Jordانبasis for $f - \lambda_i e$ på U_i . Nu er $f = \lambda_i e + (f - \lambda_i e)$ så $f: U_i \rightarrow U_i$ beskrives i denne basis ved en Jordanmatrix med λ_i i hoveddiagonalen. Forener de for hvert i fundne vektorer i U_i får en basis for $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ i hvilken f beskrives ved en Jordanmatrix.

© Normalformen for endomorfien f er entydig, bortset fra permutation af blokkene.
 Lad der være givet en basis for V i hvilken f er bestemt ved en Jordannatrix. For hvert $\lambda \in \mathbb{C}$, og $i = 1, 2, \dots$ betegner vi med $\alpha(i, \lambda)$ det antal gange i -blokken

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \left\} i\right.$$

forekommer i denne Jordannatrix. Påstanden er, at disse tal $\alpha(i, \lambda)$ kan bestemmes alene ud fra endomorfien f . Hvis λ ikke er egenverdi for f , har vi tydeligvis $\alpha(i, \lambda) = 0$ for alle i . Antag nu, at λ er en egenverdi, og sæt $\alpha(i, \lambda) = \alpha_i$. En passende permutation af vektorerne i den givne basis vil permutere blokkene i Jordannatricen, og vil altså ikke ændre α_i 'erne. Vi kan derfor for overskuelighedens skyld antage, at Jordannatricen "begynder" (overst til venstre) med alle de blokke, der har λ i diagonalen. I den givne basis beskrives $f - \lambda e$ altså ved en blokmatrix $\begin{pmatrix} \underline{N} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{S} \end{pmatrix}$ hvor

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} \underline{N}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underline{N}_i & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & & \underline{N}_i \end{pmatrix} \quad \left\} \alpha_i \text{ gange} \quad \underline{N}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \left\} i\right.$$

og hvor $\underline{S}$ er en regulær matrix (øvre trekantsmatrix med diagonalelementer $\lambda_j - \lambda \neq 0$). $(f - \lambda e)^k$ beskrives nu ved matrixen $\begin{pmatrix} \underline{N}^k & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{S}^k \end{pmatrix}$ og

$$\underline{N}^k = \begin{pmatrix} \underline{N}_i^{k-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underline{N}_i^{k-1} \end{pmatrix} \quad \left\} \alpha_i \text{-gange} \quad \text{og} \quad \underline{N}_i^k = \underline{0} \quad \text{når} \quad k \geq i.$$

Følgelig er $\text{rg}(f - \lambda e)^k = \sum_i \alpha_i \text{rg} \underline{N}_i^k + \text{rg} \underline{S}^k$. Her er

$$\text{rg} \underline{N}_i^k = \begin{cases} i - k & \text{når } k \leq i \\ 0 & \text{når } k > i \end{cases} \quad \text{og} \quad \text{rg} \underline{S}^k = \text{rg} \underline{S} \quad \text{da } \underline{S} \text{ er regulær.}$$

Betragtes følgen $n_k = \text{rg}(f - \lambda e)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

har vi altså $n_k = \sum_{i>k} \alpha_i (i-k) + nq \underline{S}$. Følgen af 1^{ste}-differencer i følgen $n_0, n_1, n_2, \dots$ er altså følgen

$$n_k - n_{k+1} = \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \dots \quad k=0, 1, \dots$$

og 2^{den}-differencerne i følgen $n_0, n_1, n_2, \dots$ bliver altså $\alpha_{k+1}, k=0, 1, \dots$. Vi har vist:

Sætter vi (for et fast $\lambda \in \mathbb{C}$) $n_k = nq (f-\lambda e)^k$ og $\alpha_i = \alpha(i, \lambda)$, da gælder: Følgen $n_0, n_1, n_2, \dots$ har udseendet

$$n_0 > n_1 > \dots > n_{p-1} > n_p = n_{p+1} = \dots$$

og 2^{den}-differencerne i denne følge er netop følgen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$.

Ⓟ Opspaltningerne i ⓐ og ⓑ er entydige.

Bevis. Hvis $V = U \oplus W$ er en opspaltning som i ⓐ, da er $U \subseteq \text{Ker}(g^v)$ for alle "store" v , og $W = g(W) = \dots = g^v(W) \subseteq g^v(V)$, da g specielt er surjektiv på W . Altså $U \subseteq \text{Ker}(g^v)$, $W \subseteq g^v(V)$ for alle "store" v . Da $V = \text{Ker}(g^v) \oplus g^v(V)$ for alle "store" v , følger det, at $U = \text{Ker}(g^v)$, $W = g^v(V)$ for alle store v .

Hvis $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ er en opspaltning som i ⓑ, bemærker vi, at $(f-\lambda_1 e) \circ \dots \circ (f-\lambda_r e)$ er nilpotent på $U_2 \oplus \dots \oplus U_r$, og injektiv og dermed bijektiv på U_1 . Af entydigheden fra ⓐ følger nu, at U_1 er entydig, og ved permutation, at U_i 'erne er entydige.

17. Lad $(\tilde{V}, \mathbb{C})$ være den komplekse udvidelse af et vektorrum $(V, \mathbb{R})$, og betragt V som en delmængde af $\tilde{V}$. For $\tilde{v} \in \tilde{V}$ sætter vi $\frac{1}{2}(\tilde{v} + k(\tilde{v})) = \text{Re}(\tilde{v})$, og $\frac{1}{2i}(\tilde{v} - k(\tilde{v})) = \text{Im}(\tilde{v})$. Vis, at $\text{Re}(\tilde{v})$ og $\text{Im}(\tilde{v})$ er reelle (d.v.s. $\in V$), og at $\tilde{v} = \text{Re}(\tilde{v}) + i \text{Im}(\tilde{v})$.

- (a) Lad $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ være en basis for $(V, \mathbb{R})$. Vis, at disse vektorer også er en basis for $(\tilde{V}, \mathbb{C})$. Vis, at hvis en endomorfi $f: V \rightarrow V$ i basen $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ beskrives ved matricen $\underline{A} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, så vil den komplekse udvidelse $\tilde{f}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ i basen $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ være beskrevet ved den samme matrix $\underline{A} \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \subseteq M_{n,n}(\mathbb{C})$.
- (b) Lad $W \subseteq \tilde{V}$ være et komplekst underrum, som opfylder $W = k(W)$. Vis, at W har en (kompleks) basis bestående af vektorer fra V (reelle vektorer).
- (c) Lad $W \subseteq \tilde{V}$ være et komplekst underrum, som opfylder $W \cap k(W) = \{0\}$, og lad $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r$ være en (kompleks) basis for W . Vis, at vektorerne $\operatorname{Re}(\underline{w}_1), \operatorname{Im}(\underline{w}_1), \dots, \operatorname{Re}(\underline{w}_r), \operatorname{Im}(\underline{w}_r)$ er en (kompleks) basis for $W + k(W)$.
- (d) Lad $f: V \rightarrow V$ være en endomorfi, og sæt $W_\lambda = \operatorname{Ker}(\tilde{f} - \lambda e) \subseteq \tilde{V}$, for $\lambda \in \mathbb{C}$. Vis, at $k(W_\lambda) = W_{\bar{\lambda}}$. Slut heraf: Hvis en (og dermed alle!) matricer hørende til f er komplekst diagonaliserbar, da findes en (reel) basis for V , i hvilken der til f hører en matrix af formen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_t & & \\ & & & \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \begin{pmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ -\beta_s & \alpha_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

her kommer diagonal elementerne λ_i fra egenrødderne, dvs. de reelle rødder i $p_f(t)$ og blokkene $\begin{pmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ -\beta_s & \alpha_s \end{pmatrix}$ kommer fra par af komplekst konjugerede rødder $\alpha_v \pm i\beta_v$ i $p_f(t)$.

18. Lad $(V, \mathbb{R}, \cdot)$ være et reelt vektorrum med indre produkt. Vis, at der ved

$$(\underline{v}' + i\underline{v}'') \cdot (\underline{u}' + i\underline{u}'') = [(\underline{v}' \cdot \underline{u}') + (\underline{v}'' \cdot \underline{u}'')] + i[\underline{v}'' \cdot \underline{u}' - \underline{v}' \cdot \underline{u}'']$$

$\underline{v}', \underline{v}'', \underline{u}', \underline{u}'' \in V$, defineres et indre produkt i $(\tilde{V}, \mathbb{C})$.

Den komplekse udvidelse af et Euklidisk vektorrum er altså på naturlig måde et unitært vektorrum.

- (a) Lad $f: V \rightarrow V$ være en endomorfi. Vis, at $\tilde{f}^* = \tilde{f}^*$, og slut, at der gælder

$$f \text{ er normal} \Leftrightarrow \tilde{f} \text{ er normal}$$

$$f \text{ er selvadjungeret} \Leftrightarrow \tilde{f} \text{ er selvadjungeret}$$

$$f \text{ er ortogonal} \Leftrightarrow \tilde{f} \text{ er ortogonal.}$$

- (b) Lad $W \subseteq \tilde{V}$ være et komplekst underrum, som opfylder, at W og $k(W)$ er ortogonale, og lad $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r$ være en ortonormal basis for W . Vis, at vektorerne $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re}(\underline{w}_1), \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Im}(\underline{w}_1), \dots, \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re}(\underline{w}_r), \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Im}(\underline{w}_r)$ er en ortonormal basis for $W + k(W)$.

- (c) Vis, at en normal endomorfi $f: V \rightarrow V$ i en passende ortonormal basis for V kan beskrives ved en matrix af formen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_s & & & & \\ & & & & \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \begin{pmatrix} \alpha_t & \beta_t \\ -\beta_t & \alpha_t \end{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

[Sammenlign med suppl. øv 17(d)]
Slut heraf:

- (d) En selvadjungeret endomorfi $f: V \rightarrow V$ kan i en passende ortonormal basis beskrives ved en diagonal matrix. Og
- (e) En ortogonal endomorfi $f: V \rightarrow V$ kan i en passende ortonormal basis beskrives ved en matrix af formen

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 & \sin \vartheta_1 \\ -\sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{pmatrix} \\ & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & \begin{pmatrix} \cos \vartheta_t & \sin \vartheta_t \\ -\sin \vartheta_t & \cos \vartheta_t \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

[Bruyt at en matrix som i © er ortogonal netop når $\lambda_v^2 = 1$, $\alpha_v^2 + \beta_v^2 = 1$].

19. Vis, at $\underline{A} \mapsto \|\underline{A}\|_\infty = \sup_{i,j} |a_{ij}|$ defineres en norm i vektorrummet $M_{m,n}(L)$. (L er $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Vektorrummene $M_{m,n}(\mathbb{R})$ og $M_{m,n}(\mathbb{C})$ bliver herved metriske rum. Lad T være et metrisk rum. En afbildning $\underline{F}: T \rightarrow M_{m,n}(L)$ er klart helt bestemt ved sine $m \cdot n$ koordinatfunktioner $F_{ij}: T \rightarrow L$. Vis, at $\underline{F}$ er kontinuert netop når alle koordinatfunktionerne $F_{ij}: T \rightarrow L$ er kontinuerte. Vis, at hvis $\underline{F}$ er kontinuert, og $\underline{S} \in M_{p,m}(L)$, så er også den ved $\underline{S}\underline{F}: t \mapsto \underline{S}\underline{F}(t)$ bestemte afbildning $: T \rightarrow M_{p,n}(L)$ kontinuert.
- (a) Lad $\underline{A} \in GL_n(\mathbb{C})$ ($\in M_{n,n}(\mathbb{C})$). Der findes

da en regulær matrix $\underline{\underline{S}} \in GL_n(\mathbb{C})$, så at $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{S}}^{-1}$ er en øvre trekantmatrix, med diagonalelementerne $b_{ii} \neq 0$. Skriv nu hvert b_{ii} på formen $b_{ii} = r_i e^{i\vartheta_i}$, hvor $r_i > 0$, $\vartheta_i \in \mathbb{R}$. Lad (for $0 \leq t \leq 1$) $\underline{\underline{B}}(t)$ være den ved

$$b_{\nu\mu}(t) = \begin{cases} \frac{r_\nu}{t + (1-t)r_\nu} e^{it\vartheta_\nu} & \nu = \mu \\ t b_{\nu\mu} & \nu \neq \mu \end{cases}$$

Vis, at $\underline{\underline{B}}(t) \in GL_n(\mathbb{C})$, at $t \mapsto \underline{\underline{B}}(t)$ er kontinuert, at $\underline{\underline{B}}(0) = \underline{\underline{E}}$ og at $\underline{\underline{B}}(1) = \underline{\underline{B}}$. Den ved $\underline{\underline{F}}: t \mapsto \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{B}}(t) \underline{\underline{S}}$ bestemte afbildning $[0,1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ er altså kontinuert, og opfylder $\underline{\underline{F}}(0) = \underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{F}}(1) = \underline{\underline{A}}$. Vi har vist: $GL_n(\mathbb{C})$ er en kurvesammenhængende delmængde af $M_{n,n}(\mathbb{C})$. Vis, at $GL_n(\mathbb{R})$ ikke er kurvesammenhængende.

(b) Vis, at $SL_n(\mathbb{C})$, $U(n)$ og $SU(n)$ er kurvesammenhængende.

(c) Gør rede for at en basis $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ i et vektorrum med indre produkt kontinuert kan overføres i en ortonormal basis (kig på Gram-Schmidt's ortonormalisering), og slut heraf, at enhver matrix $\underline{\underline{A}} \in GL_n(\mathbb{R})$ kan kurveforbindes inden for $GL_n(\mathbb{R})$ med en ortogonal matrix.

(d) Vis, at $O^+(n) = SO(n, \mathbb{R})$ er kurvesammenhængende. [Benyt normalformen fra Suppl. øv 18© og udnyt, at $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi & \sin \pi \\ -\sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix}$]

(e) Vis, at $GL_m^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_m(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ er kurvesammenhængende, og vis, at $SL_m(\mathbb{R})$ er kurvesammenhængende.

(20) Lad V være et unitært vektorrum, og lad $f_1, \dots, f_p$ være normale endomorfier, og antag, at f 'erne kommuterer, d.v.s. at $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$. Vis, at der findes en ortonormal basis for V , i hvilken alle f 'erne beskrives ved diagonal-matricer. [Vink: For $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ sættes $V_{\lambda_1, \dots, \lambda_p} = \text{Ker}(f_1 - \lambda_1 e) \cap \dots \cap \text{Ker}(f_p - \lambda_p e)$. Vis, at under-rummen $V_{\lambda_1, \dots, \lambda_p} \subseteq V$ er ortogonale, og (f.eks. ved induktion) at deres sum er hele V].

(21) (a) Lad G være en endelig gruppe af orden n , med elementerne $\{e = s_1, s_2, \dots, s_n\}$, og betragt det n -dimensionale vektorrum $F = \text{Af}(G, \mathbb{C})$ af alle afbildninger $G \rightarrow \mathbb{C}$. Vis, at der ved

$$\varphi \cdot \psi = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} \varphi(t) \overline{\psi(t)}$$

defineres et indre produkt i F . Lad $\delta_i \in F$ være den ved $\delta_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{når } t = s_i \\ 0 & \text{når } t \neq s_i \end{cases}$ bestemte afbildning.

Vis, at $(\frac{1}{\sqrt{n}} \delta_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \delta_n)$ er en ortonormal basis for F .

(b) For $s \in G$ og $\varphi \in F$ betegner vi med $\tau_s \varphi$ det ved $\tau_s \varphi : t \mapsto \varphi(ts)$ bestemte element i F .

Vis, at $\tau_s : F \rightarrow F$ er unitær, og at $\tau_{ss'} = \tau_s \circ \tau_{s'}$.

(C) Antag nu, at G er kommutativ, og dermed, at τ 'erne kommuterer. Der findes folgelig en ortonormal basis $(\chi_1, \dots, \chi_n)$ for F i hvilken hver af endomorfierne τ_s , $s \in G$ beskrives ved en diagonal matrix. For $s \in G$, $i = 1, \dots, n$ har vi altså

$$(*) \quad \tau_s(\chi_i) = \lambda_i(s)\chi_i \quad \text{med } \lambda_i(s) \in \mathbb{C},$$

og da τ_s er unitær, gælder $|\lambda_i(s)| = 1$. Slut nu, at der gælder $|\lambda_i(s)| = 1$, $s \in G$, $i = 1, \dots, n$, specielt $|\lambda_i(e)| = 1$. Uden at ændre ortonormaliteten og relationen $(*)$ kan vi derfor antage, at $\lambda_i(e) = 1$,

$i = 1, \dots, n$. Vis, at dette medfører, at $\chi_i = \lambda_i$ er en $\mathbb{C}$ -karakter på G , og at funktionerne χ_i , $i = 1, \dots, n$ er samtlige $\mathbb{C}$ -karakterer på G (jfr. suppl. 00 3).

Alltså: En kommutativ gruppe af orden n har netop n $\mathbb{C}$ -karakterer $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$, og disse er en ortonormal basis for $A \otimes \mathbb{C}(G, \mathbb{C})$,

$$\text{dvs} \quad \sum_{s \in G} \chi(s) \overline{\psi(s)} = \begin{cases} n & \text{når } \chi = \psi \\ 0 & \text{når } \chi \neq \psi. \end{cases}$$

Disse relationer er ensbetydende med at matricen $\{\frac{1}{\sqrt{n}} \chi_i(s_j)\}$ er unitær. Slut heraf, at de medfører,

$$\text{at} \quad \sum_{\chi} \chi(s) \overline{\chi(t)} = \begin{cases} n & \text{når } s = t \\ 0 & \text{når } s \neq t. \end{cases}$$

Vis, at produktet $\chi\psi: t \mapsto \chi(t)\psi(t)$ af to $\mathbb{C}$ -karakterer χ og ψ igen er en $\mathbb{C}$ -karakter, og slut, at $\{\mathbb{C}\text{-karakterer}\}$ er en gruppe af orden n . Den betegnes ofte $\hat{G}$. Find en naturlig homomorfi $G \rightarrow \hat{\hat{G}}$, og vis, at den er en isomorfi.

22. På side 5.3.3. er vist, hvordan man kan bestemme den inverse til en regulær matrix $\underline{A}$, idet der gælder

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}} \left((-1)^{i+j} \det \underline{A}_{ij} \right)'$$

Matrixen $((-1)^{i+j} \det \underline{A}_{ij})'$ kan naturligvis dannes for enhver matrix $\underline{A} \in M_{m,n}(L)$, og den betegnes ofte $\underline{A}^J$. Det er ofte nyttigt at vide, at der for enhver matrix $\underline{A} \in M_{m,n}(L)$ gælder

$$\underline{A} \underline{A}^J = \underline{A}^J \underline{A} = (\det \underline{A}) \underline{E}.$$

Vis, at dette følger af udregningerne side 5.3.2 - 5.3.3.

23. Lad V være et n -dimensionalt vektorrum over L . Vis, at mængden $\text{Alt}^p(V)$ af alternerende p -former (i det følgende kaldet p -former) er et underrum i vektorrummet $\text{Alt}(V \times \dots \times V, L)$ af alle afbildninger $V \times \dots \times V \rightarrow L$. $\text{Alt}^1(V)$ er V 's dualvektorrum V^* , og vi sætter ofte $\text{Alt}^0(V) = L$.

- ② Lad $f \in \text{Alt}^1(V)$, $\varphi \in \text{Alt}^p(V)$ og definér en afbildning $f \wedge \varphi : \overbrace{V \times \dots \times V}^{p+1} \rightarrow L$ ved

$$f \wedge \varphi : (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{p+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} f(\underline{v}_i) \varphi(\underline{v}_1, \dots, \cancel{\underline{v}_i}, \dots, \underline{v}_{p+1})$$

($\varphi(\underline{v}_1, \dots, \cancel{\underline{v}_i}, \dots, \underline{v}_{p+1})$ betyder $\varphi(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_{p+1})$).

Vis, at $f \wedge \varphi \in \text{Alt}^{p+1}(V)$. Vis, at $f \wedge (f \wedge \varphi) = 0 \in \text{Alt}^{p+2}(V)$.

- ③ Ved induktion kan vi til p linearformer $(f_1, \dots, f_p)$ knytte en p -form

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_p = f_1 \wedge (f_2 \wedge \dots \wedge f_p),$$

kaldet det ydre produkt af linearformerne $(f_1, \dots, f_p)$.

Vis, at den herved definerede afbildning

$$V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \text{Alt}^p(V)$$

er alternerende (d.v.s. den er lineær i hver variabel, og opfylder, at $f_1 \wedge \dots \wedge f_p = 0$ når et $f_i = f_j$ for $i \neq j$).

© Lad $f_1, \dots, f_n$ være en basis for V^* , og lad $e_1, \dots, e_n$ være den duale basis for V (bestemt ved $f_i(e_j) = \delta_{ij}$). Lad I, J være to delmængder af $\{1, \dots, n\}$ med p elementer: $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ med $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$, $J = \{j_1, \dots, j_p\}$ med $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$.

Vis, at

$$(f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p})(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \begin{cases} 1 & \text{når } I = J \\ 0 & \text{når } I \neq J. \end{cases}$$

Plut heraf: p -formerne

$$f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$$

er en basis for $\text{Alt}^p(V)$. [Benyt, at en p -form er helt bestemt ved sine værdier på $(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$, $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$, og at det foregående viser, at disse kan foreskrives vilkårligt]. Bestem $\dim \text{Alt}^p(V)$, $p = 0, 1, \dots$ og fremhæv tilfældet $p = n$.

24. Tilføjelser til Kap. 7, øv. 32.

Tilføj efter øvelsens linie 7: Vis, at der for alle $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in V$ gælder:

$$(*) \quad \det(u_i \cdot v_j) = \varphi_0(u_1, u_2, u_3) \varphi_0(v_1, v_2, v_3).$$

[Vink: For faste $u_1, u_2, u_3 \in V$ er den ved

$$(v_1, v_2, v_3) \mapsto \det(u_i \cdot v_j)$$

bestemte afbildning $V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ alternerende, altså af formen $\lambda \varphi_0$, hvor proportionalitetsfaktoren $\lambda = \lambda(u_1, u_2, u_3)$ naturligvis afhænger af u_1, u_2, u_3 , altså

$$\det(u_i \cdot v_j) = \lambda(u_1, u_2, u_3) \varphi_0(v_1, v_2, v_3).$$

Hvis (v_1, v_2, v_3) er en positiv ortonormal basis, finder vi $\lambda(u_1, u_2, u_3) = \det(u_i \cdot v_j)$, hvoraf fremgår, at $\lambda: V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ er alternerende, og da $\lambda(v_1, v_2, v_3) = \det(v_i \cdot v_j) = \det \underline{E} = 1$, må vi have $\lambda = \varphi_0$].

Tilføj efter øvelsens linie 24: [Vink: Anvend $(*)$ på sætterne $(u_1, u_2, v_1 \times v_2)$ og $(v_1, v_2, v_1 \times v_2)$]

Tilføj "positiv" for "basis" i øvelsens linie 31.

Tilføj efter øvelsen: Vis også relationerne fra EV øv. 28 og øv. 30.

25. Lad V være et n -dimensionalt vektorrum over $\mathbb{R}$ og lad B være en regulær symmetrisk bilinearform på V , som i en given basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ beskrives ved matricen $\underline{B}$. Vis, at $\text{sign}(\det \underline{B}) = (-1)^{\text{ind}_+ B}$.

② Sæt $\underline{B}_v = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,v}$, og $d_v = \det \underline{B}_v$, $v=1,\dots,n$ og antag, at tallene $d_1, \dots, d_n$ alle er $\neq 0$. Vis, at $\text{ind}_+ B = (\text{antallet af fortegnsskift i følgen } 1, d_1, d_2, \dots, d_n)$

[Vink: Sæt $V_v = \text{Span}\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_v\}$, $B_v = B$'s restriktion til V_v , $p_v = \text{ind}_+ B_v$ og $q_v = \text{ind}_- B_v$, $v=1,\dots,n$. $\underline{B}_v$ er da matricen hørende til B_v , og der gælder

$$0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$$

$$0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n.$$

I følge antagelsen er B_v 'erne regulære, og der gælder folgelig $p_v + q_v = v$ og $\text{sign}(d_v) = (-1)^{q_v}$. Heraf følger påstanden let.]

⑥ I et tilfælde, hvor antagelsen i ② ikke er opfyldt (men stadig B regulær) kan $\text{ind}_+ B$ bestemmes ved "perturbationsmetoden", idet der løst sagt gælder:

En tilstrækkelig lille ændring af koefficienterne i $\underline{B}$ vil ikke indre ind_+ og ind_- , og efter en lille, passende ændring af koefficienterne i $\underline{B}$ vil antagelsen i ② være opfyldt. Mere præcist:

Lad $\underline{E}$ være en symmetrisk matrix, hvis elementer alle er $\in \{0,1\}$ og sæt $\underline{B}_\varepsilon = \underline{B} + \varepsilon \underline{E}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Vis, at

$$\begin{aligned} \text{ind}_+ \underline{B}_\varepsilon &\geq \text{ind}_+ \underline{B} \\ \text{ind}_- \underline{B}_\varepsilon &\geq \text{ind}_- \underline{B} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{når } \varepsilon \text{ er tilstrækkelig} \\ \text{tæt ved } 0. \end{array}$$

[Vink: Vælg et indre produkt (og dermed en metrik)]

i V. Lad B_ϵ være den symmetriske bilinearform på V, der i den givne basis beskrives ved $\underline{B}_\epsilon$. Lad U være et positivitetsrum for B og sæt $K = \{u \in U \mid \|u\| = 1\}$. Der gælder da: $B > 0$ på K , og vi skal vise, at også $B_\epsilon > 0$ på K , når ϵ er tilstrækkelig tæt ved 0. Hertil udnyttes, at den ved $(u, \epsilon) \mapsto B_\epsilon(u, u)$ bestemte afbildning $K \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert, med værdi > 0 i ethvert $(u, 0)$, $u \in K$, i forbindelse med at K er kompakt]

Bemærk dernæst, at disse uligheder må være "ligheder" når $\underline{B}$ er regulær.

Vis endelig, at vi til den givne matrix $\underline{B}$ altid kan bestemme $\underline{E}$, så at $\underline{B}_\epsilon$ opfylder antagelsen i ② når ϵ er tilstrækkelig tæt ved 0, $\epsilon \neq 0$. [Vink:

Vi kan faktisk altid bruge $\underline{E} = \underline{E}$].

Eksempel: Bestem $\text{ind}_+ \underline{B}$ og $\text{ind}_- \underline{B}$ for $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[Brug f.x. $\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$]

26. Lad (A, V) være et affint rum. For fast $P \in A$ er $Q \mapsto \underline{PQ}$ en bijektiv afbildning $A \rightarrow V$; den inverse afbildning betegnes ofte $v \mapsto P + v$, og for en delmængde $U \subseteq V$ betegner $P + U$ billedet ved denne afbildning, altså $P + U = \{P + v \mid v \in U\} = \{Q \mid \underline{PQ} \in U\}$. Lad nu $B \subseteq A$ være en delmængde, lad $U \subseteq V$ være et underrum, og lad $P \in B$. Vis, at følgende betingelser er ækvivalente: (i) B er et affint underrum med retning U . (ii) $\{\underline{PQ} \mid Q \in B\} = U$ (iii) $B = P + U$.

27. Lad K være en kvadratisk i et euklidisk affint rum (A, V) og lad $B \subseteq A$ være et affint underrum. Vis, at $K \cap B$ er en kvadratisk i B .

Opgaver om kvadratiske former.

1. Lad V være et vektorrum af endelig dimension og f, g to linearformer på V . Vis, at $B(\underline{u}, \underline{v}) = f(\underline{u}) \cdot g(\underline{v})$ er en bilinearform på V og find rangen af B .
2. Antag, at B er en bilinearform på vektorrummet V og $\text{rg} B = 1$. Vis, at der findes to linearformer på V så $B(\underline{u}, \underline{v}) = f(\underline{u}) \cdot g(\underline{v})$.
3. Lad K_B være en kvadratisk form på vektorrummet V . Vis, at mængden af vektorer $\underline{v}$ med $K_B(\underline{v}) = 0$ er et underrum netop når den kvadratiske form K_B ikke er indefinit.
4. Undersøg hvornår matricen $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ er positiv (negativ) definit.
5. Bestem positivitets- og negativitetsindex for den kvadratiske form K_B bestemt ved $K_B(\underline{v}) = 3v_1^2 + 3v_2^2 + 2v_1v_2 + 2v_2v_3$.
6. Lad $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ være en ortonormal basis for vektorrummet V og lad $K_B(\underline{v}) = \underline{v} \underline{A} \underline{v}$ være en kvadratisk form. Vis, at $\text{tr}(\underline{A}) = 0$ netop når der findes en ortogonal matrix $\underline{S}$ så $\underline{S}' \underline{A} \underline{S}$ har lutter nuller i diagonalen.

Opgaver om kvadriker.

1. Vis, at $N \cap H$ er invariant ved translation, hvor $N = N_B$ og $H = L^{-1}(0)$ for kvadriken med ligning $B(\underline{x}, \underline{x}) + L(\underline{x}) + c = 0$. Slut heraf, at relationen $N \subseteq H$ er invariant ved translation.
2. Vis, at planen med ligningen $2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -8$ er tangentplan til kvadriken med ligningen

$4x_1^2 + x_2^2 - 9x_3^2 = 16$ og find røringspunktet.

3. Vis, at ligningen $3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 20x_2 - 33 = 0$ fremstiller en hyperbel og find dennes centrum. Angiv et ortonormalt koordinatsystem i hvilket hyperblens ligning er på normalform.

4. Lad $B_2(\underline{x}, \underline{x})$ være en kvadratisk form i planen, således at $B_2(\underline{x}, \underline{x}) = 1$ og $B_2(\underline{x}, \underline{x}) = -1$ er ligninger for to hyperbler. Lad $\underline{a}$ og $\underline{b}$ være to vektorer som opfylder følgende:

$$B_2(\underline{a}, \underline{a}) = 1, B_2(\underline{b}, \underline{b}) = -1 \text{ og } B_2(\underline{a}, \underline{b}) = 0.$$

Vis, at hyperblernes tangenter i disse to punkter skærer hinanden på en af de fælles asymptoter.

Lad $B_3(\underline{x}, \underline{x})$ være en kvadratisk form i rummet, således at $B_3(\underline{x}, \underline{x}) = 1$ og $B_3(\underline{x}, \underline{x}) = -1$ er ligninger for to hyperboloider. Lad $\underline{a}$ og $\underline{b}$ være to vektorer som opfylder følgende:

$$B_3(\underline{a}, \underline{a}) = 1, B_3(\underline{b}, \underline{b}) = -1 \text{ og } B_3(\underline{a}, \underline{b}) = 0.$$

Vis, at hyperboloidernes tangentplaner i disse to punkter skærer hinanden i en tangent til asymptotekeglen $B_3(\underline{x}, \underline{x}) = 0$.

5. Lad kvadrikken Q med ligningen $B(\underline{x}, \underline{x}) + L(\underline{x}) + c = 0$ være en parabolisk kvadrik. Vis at nulrummet for B er det underrum som er udspændt af vektorerne $\underline{x}_0$, for hvilke det gælder, at enhver ret linie med retning $\underline{x}_0$ har netop ét punkt fælles med Q .

Kap. 9*. Affin geometri.

9*.1.	Affine rum	9*.1.1 - 9*.1.4
9*.2.	Affine afbildninger	9*.2.1 - 9*.2.5
9*.3.	Konvekse mængder.	9*.3.1 - 9*.3.4
9*.4.	Konvekse mængder i euklidiske rum	9*.4.1 - 9*.4.7

Supplerende øvelser

9*.øv. 1-6

9*.1. Affine rum.

Teorien for abstrakte endeligt dimensionale rum er udviklet til beskrivelse af de egenskaber ved $\mathbb{R}^k$ som ikke afhænger af valget af en basis. På tilsvarende måde kan man udvikle en teori for abstrakte affine rum til beskrivelse af de egenskaber ved $\mathbb{R}^k$ som end ikke afhænger af valget af nulpunkt; herunder store dele af den klassiske plan - og rum geometri. For vore formål vil det dog være tilstrækkeligt at udvikle teorien konkret. Vi skal altså for et givet vektorrum $(V, \mathbb{R})$, af dimension $k < \infty$, undersøge sådanne egenskaber som udnytter vektorrumsstrukturen, men ikke afhænger af de indgående begrebers relation til neutralelementet.

Ved en affin kombination af elementer $v_1, \dots, v_n$ i V forstås et udtryk $\sum_i \lambda_i v_i$, hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er et reelt talsæt med sum 1. Et affint rum er en delmængde A af V som med vilkårlige vektorer $v_1, \dots, v_n$ i A også indeholder enhver affin kombination af disse vektorer. Vi siger også at A er et affint underrum af V .

Eksempel. Lad $V = \mathbb{R}^2$ og for α og β i $\mathbb{R}$ sæt

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \alpha x + \beta\}.$$

Hvis (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ er punkter i A og $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er reelle tal med sum 1, så gælder

$$\alpha(\sum \lambda_i x_i) + \beta = \sum \lambda_i (\alpha x_i + \beta) = \sum \lambda_i y_i,$$

hvoraf vi ser at $\sum \lambda_i (x_i, y_i) \in A$. Altså er A et affint

rum i $\mathbb{R}^2$. Geometrisk repræsenterer punkterne i A en ret linie (med hældning α) som skærer Y -aksen i β . Må man se at A kun er et lineært underrum af $\mathbb{R}^2$ når $\beta = 0$.

Sætning. Til enhver mængde M i V findes et mindste affint rum $\text{aff}(M)$ i V som indeholder M , og $\text{aff}(M)$ er præcis mængden af affine kombinationer af punkter fra M .

Bevis. Mængden Ω af affine rum som indeholder M er ikke tom, idet V selv er et affint rum. Fællesmængden af affine rum er igen et affint rum og vi kan derfor sætte $\text{aff}(M) = \bigcap A_\omega$, $A_\omega \in \Omega$. Lad B betegne mængden ^{af} affine kombinationer af punkter fra M . Da vil $B \subset \text{aff}(M)$. Hvis vi kan vise at B er et affint rum vil derfor $B \equiv \text{aff}(M)$, idet det er klart at $M \subset B$ (ethvert punkt v er en affin kombination $v = 1 \cdot v$). Lad nu for $i = 1, \dots, n$ punkterne $v_i = \sum_j \lambda_{ij} v_{ij}$, $1 \leq j \leq n_i$, være affine kombinationer af punkter v_{ij} fra M , og lad $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ være reelle tal med sum 1. Da er

$$v = \sum_i \lambda_i v_i = \sum_i \lambda_i \sum_j \lambda_{ij} v_{ij} = \sum_{i,j} (\lambda_i \lambda_{ij}) v_{ij}.$$

Idet $\sum_j \lambda_{ij} = 1$ for ethvert i , vil $\sum_{i,j} (\lambda_i \lambda_{ij}) = 1$, hvorefter vi ser at $v \in B$.

Sætning. En delmængde A af V er et affint rum hvis $(1-\lambda)u + \lambda v \in A$ for alle u og v i A og alle λ i $\mathbb{R}$.

Bevis. Antag at vi har vist at A indeholder enhver affin kombination af ethvert sæt $v_1, \dots, v_{n-1}$ af $n-1$ af sine elementer. Hvis $v_1, \dots, v_n$ tilhører A og $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ har

sum 1 kan vi gerne antage at $\lambda_n \neq 1$. Sæt $\lambda'_i = (1-\lambda_n)^{-1}\lambda_i$ for $1 \leq i \leq n-1$, og bemærk at $v = \sum \lambda'_i v_i$ er en affin kombination. Ifølge forudsætningen vil derfor $v \in A$. Men

$$\sum \lambda_i v_i = (1-\lambda_n)v + \lambda_n v_n \in A.$$

Sætningen følger nu ved induktion efter n .

Sætning. For ethvert punkt u i et affint rum A vil $A - u$ være et (lineært) underrum af V . Omvendt vil for ethvert (lineært) underrum U af V og ethvert u i V mængden $u + U$ være et affint underrum af V .

Bevis. Hvis v, w tilhører A og λ, μ tilhører $\mathbb{R}$ haves

$$\lambda(v-u) + \mu(w-u) = \lambda v + \mu w + (1-\lambda-\mu)u - u \in A - u,$$

hvormed $A - u$ er et lineært underrum. Omvendt, hvis v, w tilhører U vil

$$(1-\lambda)(u+v) + \lambda(u+w) = u + ((1-\lambda)v + \lambda w) \in u + U,$$

hvormed $u + U$ er et affint underrum ifølge foregående sætning.

Bemærk at det (lineære) underrum $A - u$ hørende til det affine rum A ikke afhænger af vektoren u .

Man ser af ovenstående sætning at de affine underrum af V præcis er sideunderrummene hørende til V 's lineære underrum (se 1.6). Det er nu klart hvad vi skal mene med dimensionen af et affint rum, og at vi kan sige at to affine rum A_1 og A_2 er komplementære (henholdsvis ortogonale hvis V har et indre produkt) hvis de tilhørende (lineære) underrum er det. Et affint rum af dimension 1 kaldes en ret linie. Et affint underrum A_2 af et affint rum A_1 kaldes en hyperplan i A_1 hvis $\dim(A_1) - \dim(A_2) = 1$. Som noget nyt har vi begrebet parallellitet: A_1 og A_2 er parallelle hvis $U_1 \subseteq U_2$ eller $U_2 \subseteq U_1$, hvor $U_i = A_i - u_i$ og $u_i \in A_i$, $i = 1, 2$.

Lad $v_0, \dots, v_n$ være punkter i et affint rum $A \subset V$. Vi siger at $(v_0, \dots, v_n)$ er affint afhængige hvis der findes et ikke-trivielt talsæt $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ med sum 0 således at $\sum \lambda_i v_i = \vec{0}$. I modsat fald er $v_0, \dots, v_n$ affint uafhængige. Vi overlader til læseren at vise at et sæt $v_0, \dots, v_n$ er affint afhængigt hvis og kun hvis sættet $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ er lineært afhængigt. Heraf følger at A 's dimension er lig med det største antal affint uafhængige vektorer i A minus 1.

9*.2. Affine afbildninger.

En afbildning $f: A \rightarrow B$ mellem affine underrum af endeligt dimensionale vektorrum V og W kaldes affin hvis

$$f(\sum \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i f(v_i)$$

for enhver affin kombination $\sum \lambda_i v_i$ af elementer fra A .

Sætning. Til enhver affin afbildning $f: A \rightarrow B$ findes en lineær afbildning $g: V \rightarrow W$ og en vektor w_0 således at $f(v) = w_0 + g(v)$ for ethvert v i A .

Bevis. Vælg et u i A og sæt $U = A - u$. Ifølge sætningen 9*.1.3 er U et lineært underrum af V og vi definerer $h: U \rightarrow W$ ved for ethvert v i A at sætte $h(v-u) = f(v) - f(u)$. For v, w i A fås da

$$\begin{aligned} h(\lambda(v-u) + \mu(w-u)) &= h(\lambda v + \mu w + (1-\lambda-\mu)u - u) \\ &= f(\lambda v + \mu w + (1-\lambda-\mu)u) - f(u) = \lambda f(v) + \mu f(w) + (1-\lambda-\mu)f(u) - f(u) \\ &= \lambda(f(v) - f(u)) + \mu(f(w) - f(u)) = \lambda h(v-u) + \mu h(w-u), \end{aligned}$$

hvilket viser at h er en lineær afbildning.

Vi vælger nu en basis $e_1, \dots, e_p$ for U og supplerer den med $e_{p+1}, \dots, e_k$ til en basis for V . Der findes da netop én lineær afbildning $g: V \rightarrow W$ således at $g(e_i) = h(e_i)$ for $1 \leq i \leq p$ og $g(e_i) = 0$ for $p+1 \leq i \leq k$. Sættes $w_0 = f(u) - g(u)$ have for ethvert v i A

$$\begin{aligned} f(v) &= w_0 + f(v) - f(u) + g(u) = w_0 + h(v-u) + g(u) \\ &= w_0 + g(v-u) + g(u) = w_0 + g(v). \end{aligned}$$

Korollar. Hvis $f: A \rightarrow B$ og $g: B \rightarrow C$ er affine afbildninger mellem affine rum, da er $g \circ f: A \rightarrow C$ en affin afbildning. Hvis B_0 er et affint underrum af B da er $f^{-1}(B_0)$ et affint underrum af A .

Korollar. Mængden af affine afbildninger fra et affint rum A ind i et vektorrum W er (med de sædvanlige punktvis operationer) et vektorrum.

Af speciel interesse er de reelle affine funktioner på et affint rum A , idet disse er nært knyttet til hyperplanerne i A . Bemærk at en reel affin funktion enten er konstant eller surjektiv.

Sætning. Hvis $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ er en surjektiv, affin funktion så vil for ethvert reelt α mængden $B = f^{-1}(\alpha)$ være en hyperplan i A . Hvis omvendt B er en hyperplan i A og $\alpha \in \mathbb{R}$ findes en surjektiv affin funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ således at $B = f^{-1}(\alpha)$.

Bevis. Idet alle sideunderrum hørende til samme lineære underrum har samme dimension (per definition) kan vi gerne antage at A er et lineært underrum, at f er lineær og at $\alpha = 0$. Men da er B en hyperplan i A ifølge dimensionsformlen (2.2.2.).

Hvis omvendt B er en hyperplan i A vælger vi u i B og sætter $U = A - u$ og $W = B - u$. Da er U og W lineære underrum af V og $\dim W + 1 = \dim U$ ifølge forudsætningen. Lad $e_1, \dots, e_{p-1}$ være en basis for W og supplér denne med e_p til en basis for U og videre med $e_{p+1}, \dots, e_k$ til en

basis for V . Lad g være den lineære funktion som er nul på alle e_i undtagen for $i = p$ hvor $g(e_p) = 1$. Sæt $\lambda_0 = \alpha - g(u)$ og $f = \lambda_0 + g$. Da er

$$f(B) = \lambda_0 + g(u+W) = \lambda_0 + g(u) = \alpha.$$

Hvis omvendt $v \in A$ og $f(v) = \alpha$ så vil $g(v-u) = 0$, og da $v-u \in U$ betyder dette at

$$v-u \in \text{Span}(e_1, \dots, e_{p-1}) = W$$

hvormed $v \in B$. Altså er $B = f^{-1}(\alpha)$.

Mængden af bijektive affine afbildninger af et affint rum A på sig selv er en gruppe under sammensætning og kaldes A 's affine gruppe. Hvis $U = A - u$ for et u i A er det klart at ethvert element f i A 's affine gruppe har formen $f = \lambda_0 + g$ hvor g er en isomorfi af U og derfor kan vælges til også at være en isomorfi af V . Hvis g er den identiske afbildning siger vi at f er en translation. Dette sker, som man let overbeviser sig om, netop hvis vektoren $v_0 = f(u) - u$ ikke afhænger af u , hvorved $f(u) = v_0 + u$. Vi siger at v_0 er translationsvektoren. Bemærk at linien gennem 0 og v_0 er parallel med A .

Vi antager nu at V er udstyret med et indre produkt og den deraf udsprungne norm, $\| \cdot \|$. Vi siger at en affin afbildning $f: A \rightarrow A$ er en kongruens hvis $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$ for alle u og v i A . Dette medfører naturligvis at f tilhører A 's affine gruppe.

Sætning. En affin afbildning $f: A \rightarrow A$ er netop en kongruens hvis den kan bringes på formen $f = \lambda_0 + g$ hvor g er en ortogonal afbildning af V på sig selv.

Bevis. Hvis $f = \lambda_0 + g$, hvor g er ortogonal, haves

$$\|f(u) - f(v)\|^2 = \|g(u-v)\|^2 =$$

$$g(u-v) \cdot g(u-v) = (u-v) \cdot (u-v) = \|u-v\|^2.$$

Hvis omvendt f er en kongruens og $f = \lambda_0 + g$ haves for ethvert par u, v i A

$$\|g(v-u)\| = \|g(v) - g(u)\| = \|f(v) - f(u)\| = \|v-u\|.$$

Altså er restriktionen af g til $U = A-u$ en normbevarende isomorfi. Ifølge 7.7.1 er derfor $g|_U$ en ortogonal afbildning. Ved eventuelt at ændre g på U 's ortogonale komplement, noget som ikke ændrer gyldigheden af formelen $f = \lambda_0 + g$ på A , kan vi antage at g er ortogonal på hele V .

Den følgende sætning karakteriserer kongruenserne af A som de afstandsbevarende afbildninger af A på sig selv. Sådanne er altså nødvendigvis affine.

Sætning. Enhver afstandsbevarende afbildning f af et affint rum A ind i sig selv er en kongruens.

Bevis. Lad g være en afbildning af et lineært rum U ind i sig selv således at $g(v) \cdot g(w) = v \cdot w$ for alle v og w i U . Hvis $e_1, \dots, e_n$ er en ortonormal basis for U , og $\hat{e}_i = g(e_i)$ vil $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ være en ortonormal basis for U . Derfor gælder for ethvert v i U

$$\begin{aligned} g(v) &= \sum (g(v) \cdot \hat{e}_i) \hat{e}_i = \sum (g(v) \cdot g(e_i)) \hat{e}_i \\ &= \sum (v \cdot e_i) \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Heraf ses at g er lineær, og derfor en ortogonal afbildning på U .

Betragt nu en afstandsbevarende afbildning f af A ind i sig selv. Vælg et u i A og sæt $U = A - u$. Definer $g: U \rightarrow U$ ved $g(v-u) = f(v) - f(u)$. Ifølge forudsætningen er da

$$\|g(v-u)\| = \|f(v) - f(u)\| = \|v-u\|.$$

For vilkårlige vektorer a og b i U gælder

$$2a \cdot b = \|a-b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2.$$

Idet g er en isometri fås derfor $g(a) \cdot g(b) = a \cdot b$ og ifølge den første halvdel af beviset er g derfor ortogonal på U . Da $f(v) = g(v-u) + f(u)$ for ethvert v i A følger det at f er en affin afbildning og dermed en kongruens.

9*.3. Konvekse mængder.

Ved en konveks kombination af elementer $v_1, \dots, v_n$ i et reelt vektorrum V forstås et udtryk $\sum \lambda_i v_i$ hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er et sæt af positive (d.v.s. ≥ 0) tal med sum 1. En delmængde K af V er konveks hvis den med vilkårlige elementer $v_1, \dots, v_n$ i K også indeholder enhver konveks kombination af disse. Ved i beviserne for sætningerne 9*.1.2 og 9*.1.3 at erstatte ordene "affin kombination" med "konveks kombination" fås følgende resultater:

Sætning. Til enhver mængde M i V findes en mindste konveks mængde $\text{konv}(M)$ i V som indeholder M , og $\text{konv}(M)$ er præcis mængden af konvekse kombinationer af punkter fra M .

Sætning. En delmængde K af V er konveks hvis $(1-\lambda)u + \lambda v \in K$ for alle u og v i K og ethvert λ i $\mathbb{R}$ med $0 \leq \lambda \leq 1$.

Bemærk at den foregående sætnings geometriske indhold er at K er konveks hvis den med vilkårlige to punkter også indeholder liniestykket som forbinder dem.

Det næste resultat skyldes Carathéodory og indeholder en betydelig skærpelse af definitionen af $\text{konv}(M)$.

Sætning. For enhver mængde M er $\text{konv}(M)$ identisk med mængden af konvekse kombinationer af affint uafhængige punkter i M (se 9*.1.4.).

Bevis. Lad $v = \sum \lambda_i v_i$, $1 \leq i \leq n$ være en konveks kombination af punkter fra M og antag at disse er affint afhængige. Da er $\sum \mu_i v_i = 0$ hvor $\mu_1, \dots, \mu_n$ er et ikke-trivielt talsæt med sum 0. Følgelig kan vi antage at $\mu_n > 0$, og vi kan også gerne antage at $\lambda_n \mu_n^{-1} \leq \lambda_i \mu_i^{-1}$ for ethvert $\mu_i > 0$. Vi har da

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_n \mu_n^{-1} \mu_i \geq 0 \quad \text{for } 1 \leq i \leq n-1$$

og endvidere er

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_n \mu_n^{-1} \mu_i = (1 - \lambda_n) - \lambda_n \mu_n^{-1} (-\mu_n) = 1.$$

Endelig har vi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_n \mu_n^{-1} \mu_i v_i \\ &= (v - \lambda_n v_n) - \lambda_n \mu_n^{-1} (-\mu_n v_n) = v. \end{aligned}$$

Vi har således fået udtrykt v som en konveks kombination af $n-1$ punkter fra M og ved gentagen anvendelse af dette ræsonnement må vi tilsidst ende med affint uafhængige punkter fra M .

Korollar. Hvis M er indeholdt i et affint rum af dimension n , så vil ethvert punkt i $\text{konv}(M)$ være en konveks kombination af $n+1$ eller færre punkter fra M .

Et n -simpleks er en mængde af formen

$$\text{konv}\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$$

hvor $v_0, \dots, v_n$ er et affint uafhængigt sæt. Punkterne

$v_0, \dots, v_n$ kaldes for simpleksets hjørner. Et 0-simpleks består af ét punkt, et 1-simpleks er et interval, et 2-simpleks er en trekant og et 3-simpleks er et tetraeder.

For ethvert punkt v i et n -simpleks med hjørner $v_0, \dots, v_n$ er fremstillingen $v = \sum \lambda_i v_i$ entydig. Tallene $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ kaldes v 's barycentriske koordinater. Hvis λ_i repræsenterer massen ophængt i punktet v_i , $i = 0, \dots, n$ så vil simpleksets barycenter være $v = \sum \lambda_i v_i$.

Til senere brug viser følgende

Lemma. Lad $v_0, \dots, v_m$ være punkter i et n -dimensionalt affint under rum A af V , således at $m \geq n+1$. Ved eventuel omnummerering kan da opnås at der findes et r så

$$\text{konv}\{v_0, \dots, v_r\} \cap \text{konv}\{v_{r+1}, \dots, v_m\} \neq \emptyset.$$

Bevis. Sættet $v_0, \dots, v_m$ er affint afhængigt ifølge 9*.1.4 hvormed $\sum \lambda_i v_i = 0$ for et ikke-trivielt talsæt $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ med sum 0. Ved eventuel omnummerering kan vi antage at $\lambda_i \geq 0$ for $i \leq r$ og $\lambda_i \leq 0$ for $i > r$. Sættes $\mu = \sum \lambda_i$, $i \leq r$ fås $\mu = \sum -\lambda_i$, $i > r$, hvormed

$$\sum_{i=0}^r \mu^{-1} \lambda_i v_i = \sum_{i=r+1}^m -\mu^{-1} \lambda_i v_i \in \text{konv}\{v_0, \dots, v_r\} \\ \cap \text{konv}\{v_{r+1}, \dots, v_m\}.$$

Vi kan nu vise Helly's sætning.

Sætning. Lad der i et n -dimensionalt affint under rum A af V være givet mindst $n+1$ konvekse mængder $K_0, \dots, K_m$. Hvis vilkårlige $n+1$ af mængderne K_i har en ikke-tom fællesmængde så har de alle en ikke-tom fællesmængde.

Bevis. Beviset føres ved induktion efter m . For $m = n$ er udsagnet trivielt og vi antager nu at $m > n$ og at udsagnet er vist for alle tal $< m$. For ethvert i med $0 \leq i < m$ findes derfor et punkt v_i i $\bigcap_{j \neq i} K_j$. Under brug af det foregående lemma findes et r og et punkt v så

$$v \in \text{konv}\{v_0, \dots, v_r\} \cap \text{konv}\{v_{r+1}, \dots, v_m\}$$

$$\subset \left(\bigcap_{j > r} K_j \right) \cap \left(\bigcap_{j \leq r} K_j \right) = \bigcap K_j.$$

9*.4. Konvekse mængder i euklidiske vektorrum.

Vi antager at V er udstyret med et indre produkt og den afledede norm. Idet vektoraddition er en kontinuert operation er det let at indse at afslutningen af en konveks mængde er konveks. Derimod er det ikke nødvendigvis rigtigt at $\text{konv}(M)$ er afsluttet selv om M er det. Vi får derfor brug for betegnelsen $\overline{\text{konv}(M)}$ for afslutningen af $\text{konv}(M)$. Det er klart at $\overline{\text{konv}(M)}$ er den mindste afsluttede konvekse mængde som indeholder M .

Sætning. Lad M være en kompakt mængde i V . Da er $\text{konv}(M)$ også kompakt og derfor afsluttet.

Bevis. Sæt $k = \dim V$ og betragt produktmængden $N = M^{k+1} \times [0,1]^{k+1}$. Da er N kompakt og det samme er derfor tilfældet for den afsluttede delmængde N_0 af punkter $(\{u_i\}, \{\lambda_i\})$ i N for hvilke $\sum \lambda_i = 1$. Vi definerer en kontinuert funktion $f: N_0 \rightarrow V$ ved

$$f(\{u_i\}, \{\lambda_i\}) = \sum \lambda_i u_i.$$

Ifølge korollaret fra 9*.3.2 er da $\text{konv}(M) = f(N_0)$ og derfor kompakt som et kontinuert billede af en kompakt mængde.

Sætning. Lad K være en afsluttet konveks mængde og til u i $V \setminus K$ sæt $\alpha = \inf\{\|u-v\| \mid v \in K\}$. Der findes da netop ét punkt v_0 i K så $\|u-v_0\| = \alpha$.

Bevis. Lad $K_\beta(u)$ betegne den afsluttede kugle med radius β og centrum u . For $\beta > \alpha$ er $K_\beta(u) \cap K$ kom-

pakt og ikke tom. Følgelig er også $K_\alpha(u) \cap K \neq \emptyset$.

Hvis både v og w tilhører $K_\alpha(u) \cap K$ fås, idet denne mængde er konveks, at $\frac{1}{2}(v+w) \in K_\alpha(u) \cap K$. Men hvis $v \neq w$ er $u - v$ og $u - w$ ikke parallelle, hvormed

$$\begin{aligned}\alpha &= \|u - \tfrac{1}{2}(v+w)\| = \|\tfrac{1}{2}(u-v) + \tfrac{1}{2}(u-w)\| \\ &< \tfrac{1}{2}\|u-v\| + \tfrac{1}{2}\|u-w\| = \alpha.\end{aligned}$$

Dette er en modstrid, og altså består $K_\alpha(u) \cap K$ netop af ét punkt $\{v_0\}$.

Lad f være en affin funktion på et affint under rum A af V og for et givet α sæt

$$K = \{v \in A \mid f(v) \geq \alpha\}.$$

Da er K en konveks mængde. Thi hvis $f(u) \geq \alpha$ og $f(v) \geq \alpha$ så vil

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) = \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \geq \alpha$$

hvis $0 \leq \lambda \leq 1$. Vi siger at K er et (afsluttet) halvrum af A . Idet en hyperplan i et affint rum netop har formen $\{v \in A \mid f(v) = \alpha\}$ ifølge 9*.2.2. kan et halvrum altså geometrisk opfattes som de punkter som ligger på den ene side af en hyperplan.

Sætning. For enhver mængde M i V er $\overline{\text{konv}}(M)$ netop fællesmængden af de afsluttede halvrum som indeholder M .

Bevis. Lad K betegne fællesmængden af de afsluttede halvrum som indeholder M . Da er K afsluttet og konveks og

følgelig er $\overline{\text{konv}}(M) \subset K$.

Tag nu et $u \in V \setminus \overline{\text{konv}}(M)$ og lad v_0 være det punkt i $\overline{\text{konv}}(M)$ som ligger nærmest ved u . Betragt hyperplanen A gennem v_0 med $v_0 - u$ som normal, og lad H være det afsluttede halvrum bestemt ud fra A således at $u \notin H$. Hvis $v \in \overline{\text{konv}}(M) \setminus H$ så ville liniestykket mellem u_0 og v tilhøre $\overline{\text{konv}}(M)$ og for punkter w på dette liniestykke gælder $\|w - u\| < \|v_0 - u\|$ i modstrid med definitionen af v_0 . (Dette indses lettest ved betragtning af det 2-dimensionale affine rum udspændt af u, v_0 og v). Altså må der gælde $\overline{\text{konv}}(M) \subset H$, specielt $M \subset H$, og da $u \notin H$ slutter vi at $u \notin K$. Dette viser at $K \subset \overline{\text{konv}}(M)$ hvormed $K = \overline{\text{konv}}(M)$.

En konveks mængde som er en fællesmængde af et endeligt antal halvrum kaldes et konvekst polyeder. Hvis punkterne $\{v_0, \dots, v_n\}$ er affint uafhængige vil der for ethvert i præcist være ét halvrum i $\text{aff}\{v_0, \dots, v_n\}$ som indeholder v_i og hvis tilsvarende hyperplan er udspændt af de øvrige punkter. Heraf ses at et n -simpleks er fællesmængden af $n+1$ halvrum i det n -dimensionale affine rum udspændt af dets hjørner. Specielt er ethvert simpleks et konvekst polyeder.

Hvis K er en delmængde af et affint rum A så vil A som delrum af V være et metrisk rum (isomorft med $\mathbb{R}^n$ hvis $n = \dim A$). Vi kan derfor tale om det indre af K og om randen af K relativt til A . For eksempel vil randen af et liniestykke i $\mathbb{R}^2$ være mængden selv, medens randen relativt til linien hvorpå liniestykket ligger vil bestå af endepunkterne.

Lemma. Lad K være en konveks mængde i et affint under-
rum A af V og u et punkt på randen af K relativt til
 A . Der findes da et halvrum H bestemt ved en hyperplan B
i A således at $K \subset H$ og $u \in B$.

Bevis. Vi kan uden indskrænkning antage at K er afslut-
tet. Idet u ligger på randen af K findes u_n i $A \setminus K$
således at $\|u - u_n\| < \frac{1}{n}$. Ifølge sætningen på 9*.4.2. findes
da et halvrum H_n i A således at $K \subset H_n$ og $u_n \notin H_n$.
Normalerne $\{a_n\}$ til hyperplanerne $\{A_n\}$ som bestemmer halvrum-
mene ligger i en kompakt mængde (enhedssfæren i V) og ved om-
fornødent at passere til en delfølge kan vi derfor antage at
 $\{a_n\}$ konvergerer mod en enhedsvektor a . Hvis v_n er det
punkt på B_n som ligger mellem u og u_n så vil
 $(v - v_n) \cdot a_n \geq 0$ for ethvert v i K idet vi antager at
 a_n "peger ind i H_n ". Følgelig vil $(v - u) \cdot a \geq 0$ for ethvert
 v i K hvilket viser at K ligger i halvrummet H bestemt
ved hyperplanen B gennem u med a som normal.

Sætning. Lad u være et punkt i en konveks mængde K .
Følgende betingelser er ækvivalente:

- (i) Hvis $u = \lambda v + (1 - \lambda)w$ med v, w i K og $0 < \lambda < 1$
så vil $u = v = w$.
- (ii) Mængden $K \setminus \{u\}$ er konveks.
- (iii) For ethvert affint rum A som indeholder u vil u
ligge på randen af $K \cap A$ relativt til A .

Bevis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Hvis v, w tilhører $K \setminus \{u\}$ så vil
 $\lambda v + (1 - \lambda)w$ tilhøre K for $0 \leq \lambda \leq 1$ men kan ifølge forud-
sætningen aldrig være lig med u . Altså er $K \setminus \{u\}$ konveks.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Hvis u er et indre punkt af $K \cap A$ relativt til A så vil $u+w \in K \cap A$ og $u-w \in K \cap A$ for passende små vektorer w . Men da er u en konveks kombination af punkter fra $K \setminus \{u\}$, og $K \setminus \{u\}$ er derfor ikke konveks.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Hvis $u = \lambda v + (1-\lambda)w$ med $v, w \in K$ og $0 < \lambda < 1$ så vil linien gennem v og w være et affint underrum A af V for hvilket u er et indre punkt af $K \cap A$ relativt til A .

Punkter i en konveks mængde K som opfylder betingelserne i ovenstående sætning kaldes extreme. Mængden af ekstreme punkter af K betegnes med $E(K)$. En konveks mængde behøver ikke at have nogen ekstreme punkter. Dette vil for eksempel være tilfældet hvis K er en åben mængde eller mere specielt hvis $K = V$. På den anden side vil hjørnerne i et simpleks og, mere generelt, hjørnerne i et konvekst polyeder klart være ekstremale punkter. Som før er det begrebet kompakthed der er afgørende for eksistensen af ekstremale punkter. Vi får brug for følgende:

Lemma. Lad K være en konveks mængde og B en hyperplan således at K er indeholdt i halvrummet H bestemt ud fra B . Da vil ethvert ekstremalt punkt af den konvekse mængde $K \cap B$ være ekstremalt i K .

Bevis. Hvis u er ekstremalt i $K \cap B$ og $u = \lambda v + (1-\lambda)w$ med $0 < \lambda < 1$ og $v, w \in K$ da må både v og w ligge i B , idet vi ellers ville have det indre punkt u af liniestykket $[v, w]$ beliggende på randen af H , men v og w i det indre af H , hvilket er umuligt. Men så

er u en konveks kombination af punkter fra $K \cap B$ hvormed $u = v = w$ ifølge forudsætningen. Altså er u ekstremalt i K .

Sætning. Lad K være en kompakt konveks mængde og lad $E(K)$ betegne mængden af ekstremale punkter i K . Da er $K = \text{konv}(E(K))$.

Bevis. Da K er kompakt vil ethvert punkt i K være en konveks kombination af to randpunkter. Det er altså nok at vise at ethvert randpunkt u af K er en konveks kombination af ekstremale punkter fra K . Ifølge Lemmaet på 9*.4.4. findes en hyperplan B i det affine rum $A = \text{aff}(K)$, som går gennem u således at K er indeholdt i halvrummet H bestemt ved B . Ved brug af det foregående lemma er det derfor nok at vise at u er en konveks kombination af ekstremale punkter fra $K \cap B$.

Idet $\dim(\text{aff}(K \cap B)) < \dim(\text{aff}(K))$ kan vi nu bevise sætningen ved induktion efter dimensionen af $\text{aff}(K)$, da udsagnet er oplagt hvis dimensionen er 1.

Til slut skal vi undersøge sammenhængen mellem konvekse mængder og normbegrebet. Udgangspunktet er det faktum at for enhver norm $\|\cdot\|$ på V vil enhedskuglen (på grund af trekantsuligheden) være en konveks mængde i V . Vi ser dog at kuglen er en symmetrisk konveks mængde idet $\|v\| = \|-v\|$. Omvendt haves:

Sætning. Lad K være en kompakt, symmetrisk, konveks mængde i V , som indeholder 0 som indre punkt. For ethvert v i V sættes

$$\|v\| = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \alpha^{-1}v \in K\}.$$

Da er $\|\cdot\|$ en norm på V med K som enhedskugle.

Bevis. Da K er symmetrisk er det klart at $\|-v\| = \|v\|$ for ethvert v i V . Det er også oplagt ud fra definitionen at $\|\lambda v\| = \lambda\|v\|$ for ethvert $\lambda \geq 0$. For at vise trekantsuligheden vælger vi for u og v i V positive tal α, β således at $\alpha^{-1}u \in K$, $\beta^{-1}v \in K$ og $\alpha \leq \|u\| + \varepsilon$, $\beta \leq \|v\| + \varepsilon$ for et givet $\varepsilon > 0$. Da gælder

$$\alpha(\alpha+\beta)^{-1}(\alpha^{-1}u) + \beta(\alpha+\beta)^{-1}(\beta^{-1}v) = (\alpha+\beta)^{-1}(u+v) \in K.$$

Følgelig er

$$\|u+v\| \leq \alpha+\beta \leq \|u\| + \|v\| + 2\varepsilon.$$

Da ε var vilkårligt, er trekantsuligheden vist.

Undervejs har vi (stiltiende) brugt kompaktheden af K til at sikre at $\|v\| = 0$ kun indtræffer når $v = 0$; og vi har brugt at 0 er et indre punkt til at sikre at $\|v\| < \infty$ for ethvert v i V .

Supplerende øvelser.

1. En mængde A kaldes et abstrakt affint rum hvis der findes et endeligt dimensionalt vektorrum V over $\mathbb{R}$ og en afbildning $\varphi: A \times A \rightarrow V$ som opfylder:

- (i) For ethvert s i A og v i V findes netop ét punkt t i A således at $\varphi(s, t) = v$.
- (ii) For vilkårlige punkter r, s og t i A gælder

$$\varphi(r, s) + \varphi(s, t) = \varphi(r, t)$$

Vis, at der for ethvert punkt s_0 i A findes en vektorrumstruktur på A som har s_0 som nulvektor og en lineær isomorfi $f: V \rightarrow A$ således at

$$f(\varphi(s_0, t)) = t \text{ for ethvert } t \text{ i } A.$$

Vis, at ethvert vektorrum V kan opfattes som et abstrakt affint rum ved at sætte $\varphi(u, v) = v - u$.

2. Vis påstanden om affin afhængighed på side 9*.1.4.

3. Giv en parameterfremstilling for $\mathbb{R}$'s affine gruppe og vis at den kan indlejres som en undergruppe af $GL(2, \mathbb{R})$.

4. Lad M være den afsluttede delmængde af $\mathbb{R}^2$ bestående af punkter (x, y) således at $x > 0$ og $xy = 1$, eller $x \geq 0$ og $y = 0$. Vis, at $\text{konv}(M)$ ikke er afsluttet.

5. Lad K være den kompakte konvekse mængde i $\mathbb{R}^3$ udspændt af liniestykket $\{x = 0, y = 0, -1 \leq z \leq 1\}$ og cirklen $\{(x-1)^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$. Vis, at $E(K)$ ikke er afsluttet.

6. Vis ved et eksempel at udsagnet i Helly's sætning er forkert, hvis der uendeligt mange mængder.