2 MA

85–86

NOTETRYK
JULI 85 120 /MH

MATEMATIK 2, MATEMATISK ANALYSE

1984-85

INDHOLD

§2. Målelige afbildninger.

§3. Mål.

§4. Integral.

§5. Lebesgue målet i $\mathbb{R}^k$.

LITTERATURHENVISNINGER TIL KAPITLERNE I-III.

Der findes et utal af lærebøger i emnerne, så vi indskrænker os til at nævne nogle få, hvor yderligere henvisninger kan findes.

W. Rudin: Real and complex analysis. London 1970.

Fremragende bog, der indeholder både målteori og kompleks funktionsteori. Findes i billig udgave.

L. Gårding: Encounter with mathematics. New York 1977.

Denne bog behandler emner fra både matematik 1 og 2 på en overskuelig måde uden at gå så meget i detaljer.

Den bedste bog om metriske- og topologiske rum er nok

R. Engelking: General Topology. Warszawa 1977.

Indenfor mål- og integralteori kan anbefales

H. Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie. De Gruyter 1978.
(Den findes også i engelsk udgave).

I kompleks funktionsteori kan anbefales

E. Hille: Analytic function theory I,II. 2.udgave. New York 1976.

Indeholder mange historiske oplysninger.

G.J.O. Jameson: A first course on complex functions. London 1970.

(Kort, handy bog af lidt større omfang end dette kursus).

A.I. Markushevich: Theory of functions of a complex variable. New York 1977.

(Oprindelig 3 bind samlet i én stor bog).

Kapitel I METRISKE RUM

Metriske rum er en generel ramme for studiet af kontinuitet, der er et fundamentalt begreb i mange grene af matematik. Intuitivt er en afbildning $f: X \to Y$ kontinuert, hvis en lille ændring i argumentet $x \in X$ kun fører til en lille ændring i billedet $f(x) \in Y$. Hvis man har et mål for afstand mellem punkter (= elementer) i X og tilsvarende et mål for afstand mellem punkter i Y, har man mulighed for at tale om små ændringer, og dermed om kontinuitet. En mængde hvori man på en rimelig måde kan tale om afstand mellem punkter kaldes et metrisk rum. Det viser sig, at en række begreber, som er kendt fra plan og rum, så som indre, ydre, rand osv., kan defineres i rammen af et metrisk rum. Punkterne i et metrisk rum kan være andet end sædvanlige punkter i rummet. Det kan f.eks. være funktioner eller geometriske figurer.

§1. Metriske rum. Normerede rum.

1.1. Metrik.

Begreberne metrik og metrisk rum er indført i 1906 af den franske matematiker Maurice Fréchet (1878-1973).

DEFINITION. Lad M være en ikke tom mængde. En funktion $d: M \times M \to \mathbb{R}$ kaldes en metrik eller en afstandsfunktion i M såfremt følgende betingelser er opfyldt for vilkårlige elementer af M:

(M1) $d(x,y) \geq 0$ og $= 0$ hvis og kun hvis $x = y$,

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Er der på M udvalgt en metrik d kaldes parret (M,d) et metrisk rum. Elementerne i et metrisk rum kaldes ofte punkter.

En metrik er altså en afbildning, der til to punkter $x,y \in M$ knytter et tal $d(x,y)$, der på grund af (M2) kan omtales som afstanden mellem x og y, og denne afstand er større end nul undtagen hvis $x = y$, hvor afstanden sættes til nul. I stedet for

$d(x,y)$ skrives undertiden $\mathrm{dist}(x,y)$. Uligheden (M3) kaldes <u>trekantsuligheden</u>, idet den for 3 punkter x,y og z i planen med den sædvanlige afstand udtrykker, at siden i en trekant er højst summen af de to andre sider.

Man møder undertiden det svagere begreb <u>pseudometrik</u>, hvor man i stedet for (M1) blot kræver at $d(x,y) \geq 0$ og $d(x,x) = 0$. Det kan altså forekomme at $x \neq y$ og dog $d(x,y) = 0$.

En ret linie, en plan og rummet er med den sædvanlige betydning af ordet afstand et metrisk rum. Mere generelt: For $x = (x_1,\dots,x_k)$, $y = (y_1,\dots,y_k) \in \mathbb{R}^k$ er

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{k} (x_j-y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

en metrik i $\mathbb{R}^k$, jvfr. Mat 1. For en vilkårlig ikke tom delmængde $M \subseteq \mathbb{R}^k$ er (M,d) altså et eksempel på et metrisk rum. Metrikken (*) kaldes den <u>euklidiske</u> eller den <u>sædvanlige</u> afstand.

En ikke tom delmængde $M \subseteq \mathbb{C}$ udstyres som metrisk rum ved fastsættelsen

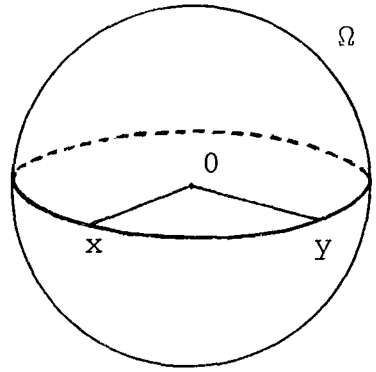
$$d(x,y) = |x-y|, \qquad x,y \in \mathbb{C}$$

idet (M1)-(M3) er konsekvenser af velkendte egenskaber ved den numeriske værdi. Identificeres $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$ på sædvanlig måde er denne afstand lig med den euklidiske afstand.

I praksis er der mange forskellige metrikker på en forelagt mængde. Som et eksempel, lad os betragte kugleoverfladen

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

i rummet.



Som afstand mellem x og y i Ω kan benyttes den euklidiske afstand $d(x,y)$. En anden mulighed er at benytte afstanden på kuglefladen mellem x og y, altså længden af den mindste storcirkelbue mellem x og y, dvs. afstandsfunktionen

$$d_\Omega(x,y) = \operatorname{Arccos}(x\cdot y)\ , \qquad x,y \in \Omega\ .$$

Udtrykt på anden måde er $d_\Omega(x,y)$ vinklen $\in [0,\pi]$ mellem vektorerne x og y. Det er intuitivt klart, at d_Ω er en metrik på Ω, kaldet den geodætiske afstand.

1.2. Normeret rum.

Et vektorrum kan ofte organiseres til et metrisk rum på en særlig måde ved hjælp af en norm. Vi møder både reelle og komplekse vektorrum, og under et vil vi tale om et vektorrum $(E,+,\mathbb{L})$ over $\mathbb{L}$ hvor $\mathbb{L}$ angiver skalarlegemet, som er enten $\mathbb{L}=\mathbb{R}$ eller $\mathbb{L}=\mathbb{C}$.

DEFINITION. Ved en norm på et vektorrum $E = (E,+,\mathbb{L})$ forstås en afbildning $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ opfyldende

(N1) $\|x\| \geq 0$ og $=0$ hvis og kun hvis $x = \underline{0}$ (nulvektoren),

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$ for alle $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{L}$,

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for alle $x,y \in E$.

Parret $(E,\|\cdot\|)$ kaldes et normeret vektorrum. I (N2) er $|\lambda|$ den numeriske værdi af tallet λ (tilhørende enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Af (N2) fås specielt $\|-x\| = \|x\|$, og hvis E er et komplekst vektorrum $\|e^{i\theta}x\| = \|x\|$ for alle $\theta \in \mathbb{R}$.

Man møder undertiden det svagere begreb seminorm, hvor man i stedet for (N1) blot kræver at $\|x\| \geq 0$. Bemærk at (N2) medfører at $\|\underline{0}\| = \|0\cdot\underline{0}\| = |0|\,\|\underline{0}\| = 0$. Det kan altså forekomme at $x \neq \underline{0}$ og dog $\|x\| = 0$.

Hvis $\|\cdot\|$ er en norm på E vil fastsættelsen

$$d(x,y) = \|x-y\|\ , \qquad x,y \in E$$

definere en metrik på E, idet (M2) er en konsekvens af (N2) og (M3) er en konsekvens af (N3), der også kaldes trekantsuligheden:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y).$$

Man taler om <u>den af normen</u> $\|\cdot\|$ <u>inducerede metrik</u> på vektorrummet.

EKSEMPEL 1. På $\mathbb{R}^k$ er følgende udtryk normer:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{k} |x_j| \qquad \text{(1-normen)},$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(2-normen eller den \underline{euklidiske norm})},$$

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|,\cdots,|x_k|) \qquad \text{(∞-normen eller \underline{maksimumsnormen})}.$$

At $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_\infty$ er normer følger umiddelbart, medens (N3) for $\|\cdot\|_2$ følger af Cauchy-Schwarz's ulighed, jvfr. Mat 1.

På $\mathbb{C}^k$ kan man ligeledes betragte normerne $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ og $\|\cdot\|_\infty$. Hvis $z = (z_1,\cdots,z_k) \in \mathbb{C}^k$ identificeres med $(x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_k,y_k) \in \mathbb{R}^{2k}$ idet $z_j = x_j+iy_j,\cdots,j=1,\cdots,k$, har man

$$\|z\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{k} |z_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{k} (x_j^2+y_j^2)\right)^{\frac{1}{2}},$$

så $\|z\|_2$ kan opfattes som den euklidiske norm på $\mathbb{R}^{2k}$.

EKSEMPEL 2. Mængden $F(M,\mathbb{R})$ af reelle funktioner $f\colon M \to \mathbb{R}$ defineret på en ikke tom mængde M er et reelt vektorrum, når addition af funktioner og multiplikation med skalarer defineres ved

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in M$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \qquad x \in M,$$

hvor $f,g\colon M \to \mathbb{R}$ og $\lambda \in \mathbb{R}$.

Analogt er mængden $F(M,\mathbb{C})$ af komplekse funktioner $f\colon M \to \mathbb{C}$ et vektorrum over $\mathbb{C}$. For $f\colon M \to \mathbb{C}$ defineres

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| \mid x \in M\}$$

og vi har $0 \le \|f\|_u \le \infty$, og $\|f\|_u = 0$ netop hvis f er nulfunktionen, altså nulvektoren i $F(M,\mathbb{C})$. Funktionen $f\colon M \to \mathbb{L}$ ($\mathbb{L} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) er <u>begrænset</u>, dvs. har begrænset værdimængde, netop hvis $\|f\|_u < \infty$. Det er klart at

$$\|\lambda f\|_u = |\lambda|\,\|f\|_u, \qquad f \in F(M,\mathbb{L}),\ \lambda \in \mathbb{L}, \ (\text{idet } a\cdot\infty = \begin{cases}\infty\,; & a>0\\ 0\,; & a=0\end{cases}),$$

og for $f,g \in F(M,\mathbb{L})$, $x \in M$ gælder

$$|(f+g)(x)| \le |f(x)|+|g(x)| \le \|f\|_u + \|g\|_u,$$

hvoraf

$$\|f+g\|_u \le \|f\|_u + \|g\|_u .$$

Heraf følger at mængden

$$B(M,\mathbb{L}) = \{f \in F(M,\mathbb{L}) \mid \|f\|_u < \infty\}$$

af begrænsede funktioner på M er et vektorrum over $\mathbb{L}$, og at $\|\cdot\|_u$ er en norm herpå, den såkaldte <u>uniforme</u> <u>norm</u>. Dermed er enhver mængde A af begrænsede funktioner på en mængde M et metrisk rum med metrikken

$$d(f,g) = \|f-g\|_u = \sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in M\}, \qquad f,g \in A .$$

Hvis M specielt er mængden $\{1,2,\cdots,k\}$ kan en funktion $f\colon \{1,\cdots,k\} \to \mathbb{L}$ opfattes som et talsæt $(f(1),\cdots,f(k))$ i $\mathbb{L}^k (= \mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k)$, og derved kan vi opfatte funktionsvektorrummet $F(M,\mathbb{L})$ som $\mathbb{L}^k$. Enhver funktion er begrænset og den uniforme norm af et element i $\mathbb{L}^k$ er

$$\|z\|_u = \max(|z_1|,\cdots,|z_k|), \qquad z \in \mathbb{L}^k,$$

hvilket er maksimumsnormen $\|z\|_\infty$ fra Eksempel 1.

Hvis $M = \mathbb{N}$ kan vi opfatte $B(M,\mathbb{C})$ som mængden af begrænsede komplekse talfølger $z = (z_n)_{n\ge 1}$ med den uniforme norm

$$\|z\|_u = \sup\{|z_n| \mid n \in \mathbb{N}\}, \qquad z \in B(\mathbb{N},\mathbb{C}) .$$

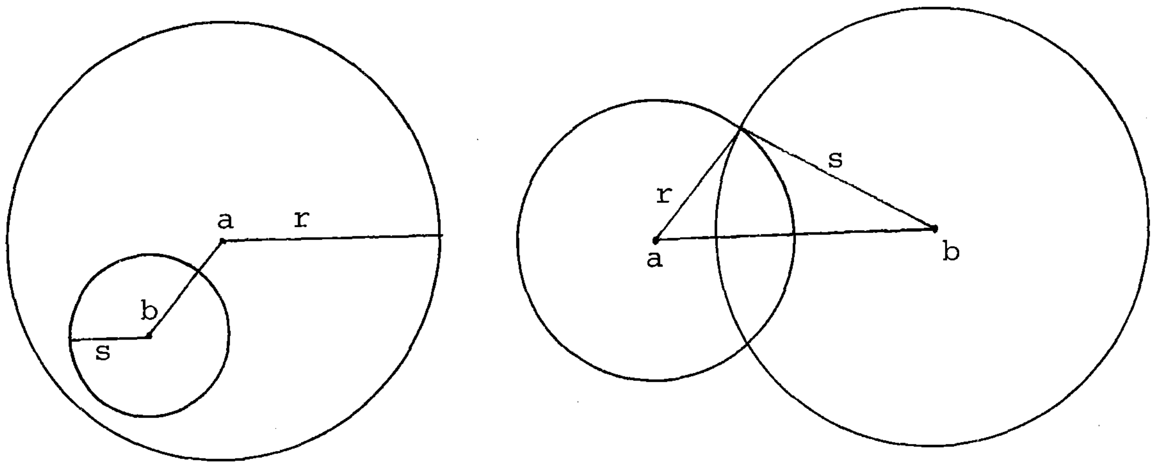
1.3. Kugler i et metrisk rum. Begrænsede mængder.

Vi vender os nu mod et vilkårligt metrisk rum (M,d) og definerer for $a \in M$, $r > 0$ kuglen med centrum a og radius r

$$K(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) < r\} .$$

Bemærk at $a \in K(a,r)$, og når $r_1 < r_2$ vil $K(a,r_1) \subseteq K(a,r_2)$. Som umiddelbar anvendelse af trekantsuligheden vil vi vise følgende

KUGLELEMMA. (i) Hvis $b \in K(a,r)$ og $0 < s \leq r-d(a,b)$ så gælder $K(b,s) \subseteq K(a,r)$.
(ii) Hvis $K(a,r) \cap K(b,s) \neq \emptyset$ så er $d(a,b) < r+s$.



Bevis. (i) Antag at $x \in K(b,s)$. Vi skal vise at $d(a,x) < r$, men det følger af trekantsuligheden

$$d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x) < d(a,b) + s \leq r .$$

(ii) Vi vælger et punkt $c \in K(a,r) \cap K(b,s)$ og udnytter igen trekantsuligheden

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) = d(a,c) + d(b,c) < r+s . \quad \square$$

For enhver ikke tom delmængde $A \subseteq (M,d)$ indføres diameteren diam A af A ved

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\} .$$

Der gælder $0 \leq \operatorname{diam} A \leq \infty$, og diameteren er 0 når A har netop et element. Mængden A kaldes begrænset, hvis den er indeholdt i en kugle. Ved hjælp af trekantsuligheden indses, at A er begrænset netop hvis $\operatorname{diam} A < \infty$. Hvis nemlig $A \subseteq K(a,r)$ gælder $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} K(a,r) \leq 2r < \infty$, og hvis $d = \operatorname{diam} A < \infty$ vil $A \subseteq K(a,d+\varepsilon)$ for ethvert $a \in A$ og $\varepsilon > 0$.

Hvis det metriske rum er $\mathbb{R}^k$ med den sædvanlige afstand er $K(a,r) =]a-r,a+r[$ i tilfældet $k = 1$, $K(a,r)$ er en åben cirkelskive i planen for $k = 2$ og endelig en sædvanlig åben kugle for $k = 3$.

EKSEMPEL. Diskret metrisk rum. En vilkårlig mængde $M \neq \emptyset$ kan altid forsynes med den såkaldte diskrete metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \neq y , \\ 0 & \text{for } x = y . \end{cases}$$

At trekantsuligheden $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ er opfyldt ses således: Hvis $x = y$ er der intet at vise, da venstre side er 0, og hvis $x \neq y$ må enten $x \neq z$ eller $y \neq z$ og dermed er venstre side 1 og højre side er enten 1 eller 2. Er M forsynet med den diskrete metrik taler vi om et diskret metrisk rum. Bemærk at

$$K(a,r) = \begin{cases} \{a\} , & \text{hvis } 0<r\leq 1 , \\ M , & \text{hvis } 1 < r . \end{cases}$$

Enhver mængde i et diskret metrisk rum er begrænset. Et diskret metrisk rum er helt uinteressant; det er kun nævnt for at gøre læseren opmærksom på definitionens rummelighed.

1.4. Konvergente følger.

Ved en punktfølge i en mængde M forstås som bekendt en afbildning $\varphi\colon \mathbb{N} \to M$. Hvis man sætter $x_n = \varphi(n)$, er det kutyme at skrive punktfølgen $(x_n)_{n\geq 1}$ eller blot (x_n), hvorved man altså nævner følgens n'te element. I et metrisk rum har det mening at tale om konvergens af punktfølger:

DEFINITION. Lad $(x_n)_{n\geq 1}$ være en punktfølge i det metriske rum (M,d) og lad $a \in M$. Vi siger at følgen konvergerer mod a, og udtrykker det i symboler ved følgende skrivemåder

$$x_n \to a\,,\quad x_n \to a \ \text{ for } \ n\to\infty\,,\quad \lim x_n = a\,,\quad \lim_{n\to\infty} x_n = a\,,$$

såfremt

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,a) = 0\,,$$

altså såfremt afstanden mellem x_n og a går mod 0. Hvis $x_n \to a$ kaldes a grænsepunkt for følgen (x_n).

Med de logiske symboler udtrykkes $x_n \to a$ således:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ d(x_n,a) \leq \varepsilon\,.$$

Hvis $x_n \to a$ vil enhver delfølge $(x_{n_p})_{p\geq 1}$ og enhver afkortet følge $(x_{n+N})_{n\geq 1}$ ligeledes gå mod a.

BEMÆRKNING. En følge har højst et grænsepunkt.

Hvis nemlig $x_n \to a$ og $x_n \to b$ kan vi til $\varepsilon > 0$ finde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ så

$$d(x_n,a) \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N_1\,,$$
$$d(x_n,b) \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad n \geq N_2\,,$$

og vælges et $n \geq \max(N_1,N_2)$ giver trekantsuligheden

$$d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) \leq 2\varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ er vilkårlig sluttes at $d(a,b) = 0$, altså at $a = b$.

EKSEMPEL. Lad det metriske rum være $\mathbb{R}^k$ med den sædvanlige metrik. En punktfølge (x_n) i $\mathbb{R}^k$ konvergerer mod $x \in \mathbb{R}^k$ hvis

$$d(x_n,x) = \left(\sum_{j=1}^{k} (x_{nj}-x_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0\,,$$

hvor $x_n = (x_{n1},\cdots,x_{nk})$, $x = (x_1,\cdots,x_k)$, altså netop hvis $(x_{nj})_{n\geq 1} \to x_j$ for hvert $j = 1,\cdots,k$.

Det er centralt at indse, at uniform konvergens af funktioner kan opfattes som punktfølge konvergens i et metrisk rum.

SÆTNING. Lad $(\mathcal{B}(M,\mathbb{L}), \|\cdot\|_u)$ betegne det normerede rum af begrænsede funktioner på M. Om en punktfølge (f_n) og en funktion f i $\mathcal{B}(M,\mathbb{L})$ gælder

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{uniformt på } M.$$

Bevis. At $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ betyder at $\| f-f_n \|_u \to 0$, altså

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N: \sup\{|f(x)-f_n(x)| \mid x \in M\} \leq \varepsilon$$

eller

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall x \in M: |f(x)-f_n(x)| \leq \varepsilon, \tag{u}$$

idet

$$|f(x)-f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in M$$

er ensbetydende med at

$$\sup\{|f(x)-f_n(x)| \mid x \in M\} \leq \varepsilon .$$

Udsagnet (u) er netop, hvad der forstås ved $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ uniformt på M. □

Opgaver til §1.

1.1. Vis, at $\bigcap_{r>0} K(a,r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K(a,\frac{1}{n}) = \{a\}$ i et metrisk rum.

1.2. Find diam A for følgende delmængder af $\mathbb{C}$ med den sædvanlige afstand

$$A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$A = \{\cos x + i \sin x \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

1.3. Vis $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ i det normerede rum $(\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$, hvor

a) $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}$

b) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$.

1.4. Vis, at der for vilkårlige fire punkter x,y,z,w i et metrisk rum (M,d) gælder

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(w,y).$$

Vis derved, at hvis $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ og $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ for punktfølger (x_n) og (y_n) i M, så vil $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$.

1.5. Tegn $K(a,r)$ i følgende metriske rum:

a) $[0,1], \mathbb{R}^2$ med den sædvanlige afstand.

b) $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$, hvor $d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty$ $(= \max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|))$.

c) $(\mathbb{R}^2, d_1)$, hvor $d_1(x,y) = \|x-y\|_1$ $(= |x_1-y_1| + |x_2-y_2|)$.

1.6. Beskriv de konvergente følger i et diskret metrisk rum.

1.7. Giv et bevis for at den geodætiske afstand d_Ω på kugleoverfladen (§1.1) er en metrik.

1.8. Vis, at der ikke findes nogen norm $\|\cdot\|$ på vektorrummet $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ af reelle talfølger $\underline{x} = (x_n)_{n\geq 1}$ med den egenskab, at der om en følge $(\underline{x}_n) = (x_{n1}, x_{n2}, \cdots) \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ gælder

$$\lim_{n\to\infty} \| \underline{x}_n \| = 0 \Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} x_{nj} = 0 .$$

Vink: Antag, at der findes en norm med den søgte egenskab og betragt følgen $(\| e_n \|^{-1} e_n)_{n\geq 1}$ hvor $e_1 = (1,0,0,\cdots)$, $e_2 = (0,1,0,\cdots),\cdots$.

1.9. For $\underline{x} = (x_n)_{n\geq 1}$ og $\underline{y} = (y_n)_{n\geq 1}$ i $F(\mathbb{N},\mathbb{R})$ sættes

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \sup\{\min(|x_n - y_n|, \tfrac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Vis, at d er en metrik på $F(\mathbb{N},\mathbb{R})$ og at $(\underline{x}_n) = (x_{n1}, x_{n2},\cdots)$ konvergerer mod $\underline{x} = (x_1, x_2,\cdots)$ i det metriske rum hvis og kun hvis $\lim_{n\to\infty} x_{nj} = x_j$ for alle $j \in \mathbb{N}$.

1.10. Ved en pseudometrik på en mængde M forstås en afbildning $d: M\times M \to \mathbb{R}$, som for alle $x,y,z \in M$ opfylder

(M1)': $d(x,y) \geq 0,\ d(x,x) = 0$,

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Vis, at hvis d er en pseudometrik på M så defineres der ved "$x \sim y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$" en ækvivalensrelation $\sim$ i M. Lad $[x]$ betegne ækvivalensklassen indeholdende x. Vis, at mængden $M/\!\sim\, = \{[x] \mid x \in M\}$ af ækvivalensklasser er et metrisk rum ved fastsættelsen

$$d([x],[y]) = d(x,y) .$$

1.11. Vis, at en følge (x_n) i et metrisk rum konvergerer mod a hvis og kun hvis enhver delfølge af (x_n) har en delfølge, der konvergerer mod a.

1.12. Lad $C^1([a,b])$ betegne mængden af kontinuert differentiable funktioner på $[a,b]$. Vis, at $f \sim \| f' \|_u$ er en seminorm, og at $f \sim \| f \| = \| f \|_u + \| f' \|_u$ er en norm på vektorrummet $C^1([a,b])$. Vis, at (f_n) konvergerer mod f i det normerede rum $(C^1[a,b], \|\cdot\|)$, hvis og kun hvis $f_n \to f$ uniformt på $[a,b]$ og $f_n' \to f'$ uniformt på $[a,b]$.

§2. Topologiske begreber i et metrisk rum.

I det følgende vil vi definere en række begreber, der knytter sig til et metrisk rum (M,d). Begreberne er velkendte i tilfældet $\mathbb{R}^k$ med den sædvanlige metrik.

2.1. Indre, ydre, rand og afslutning.

Lad A være en punktmængde i det metriske rum (M,d), altså $A \subseteq M$. Punkterne i M falder da i forhold til A i tre dele, hvor dog en eller to kan være tom: det indre af A, det ydre af A og randen af A. Præcist:

DEFINITION. Et punkt $x \in M$ kaldes et <u>indre punkt</u> i A, hvis der findes en kugle $K(x,r)$ med centrum i x, som er indeholdt i A, dvs. hvis

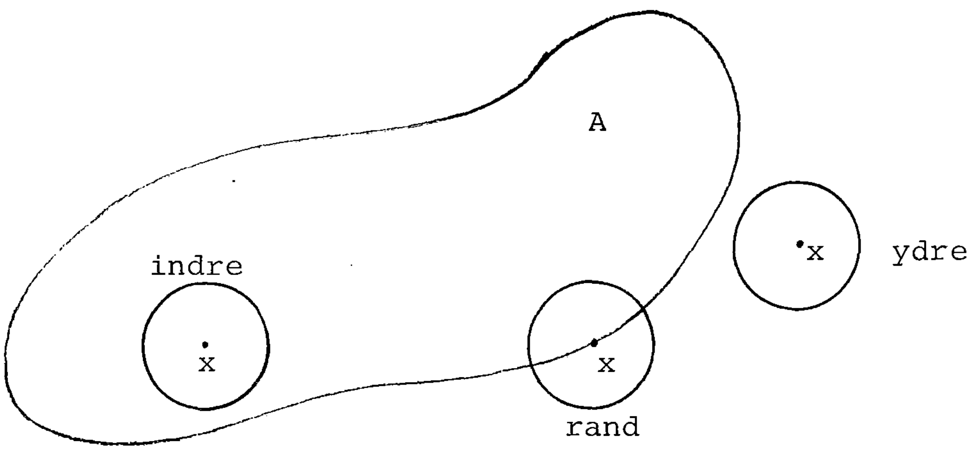
$$\exists\, r > 0 : K(x,r) \subseteq A .$$

Punktet x kaldes et <u>ydre punkt</u> for A, hvis der findes en kugle $K(x,r)$, som er disjunkt med A, dvs. hvis

$$\exists\, r > 0 : K(x,r) \cap A = \emptyset .$$

Punktet x kaldes et <u>randpunkt</u> for A, hvis det hverken er indre eller ydre punkt for A.

Ved <u>det indre</u> $\overset{\circ}{A}$ af A, <u>det ydre</u> af A og <u>randen</u> ∂A af A forstås henholdsvis mængden af indre punkter, mængden af ydre punkter og mængden af randpunkter for A.



Vi noterer:

1. Et punkt $x \in M$ er ydre punkt for A hvis og kun hvis x er indre punkt for komplementærmængden $CA = M \setminus A$.

2. $x \in \partial A \Leftrightarrow \forall r > 0: K(x,r) \cap A \neq \emptyset \wedge K(x,r) \cap CA \neq \emptyset$.

Thi højre side udtrykker at x hverken er indre eller ydre punkt for A .

3. $\partial A = \partial(CA)$, $M = \overset{\circ}{A} \cup (CA)^{\circ} \cup \partial A$.

DEFINITION. Et punkt $x \in M$ kaldes <u>kontaktpunkt</u> for mængden $A \subseteq M$, såfremt enhver kugle med centrum x indeholder mindst et punkt fra A , dvs. såfremt

$$\forall r > 0: K(x,r) \cap A \neq \emptyset .$$

Mængden $\overline{A}$ af kontaktpunkter for A kaldes <u>afslutningen</u> af A .

Et punkt $x \in A$ kaldes <u>isoleret</u> punkt af A , hvis der findes en kugle med centrum x , der ikke indeholder noget andet punkt af A , dvs. hvis

$$\exists r > 0: K(x,r) \cap A = \{x\} .$$

Indre punkter og randpunkter for A er kontaktpunkter for A , medens ydre punkter ikke er det. Altså

$$\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A = A \cup \partial A .$$

Anderledes sagt: Afslutningen $\overline{A}$ af A og det ydre $(CA)^{\circ}$ af A er komplementære

$$C\overline{A} = (CA)^{\circ} , \quad \overline{A} = C((CA)^{\circ}) .$$

Der gælder videre

$$\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A} ,$$

$$\overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \partial A = A \setminus \partial A ,$$

$$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{CA} .$$

EKSEMPEL. Lad det metriske rum være $\mathbb{R}$ med den sædvanlige afstand. Om $A = \mathbb{Q}$ gælder $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Ingen af $\mathbb{Q}$'s punkter er isolerede. Om $A = \mathbb{Z}$ gælder $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ og alle punkter i $\mathbb{Z}$ er isolerede punkter.

2.2. Åbne og afsluttede mængder.

DEFINITION. En mængde $A \subseteq M$ kaldes åben, hvis ethvert punkt $x \in A$ er indre punkt for A, dvs. hvis $\overset{\circ}{A} = A$.

En punktmængde $A \subseteq M$ kaldes afsluttet (eller lukket), hvis den indeholder alle sine kontaktpunkter, dvs. hvis $\overline{A} = A$. Bemærk at $\emptyset$ og M er både åbne og afsluttede.

SÆTNING 1. Begreberne åben og afsluttet er duale: En punktmængde $A \subseteq M$ er afsluttet (resp. åben) hvis og kun hvis komplementærmængden $\complement A$ er åben (resp. afsluttet).

Bevis. Formlen $\complement\overline{A} = (\complement A)^{\circ}$ viser, at $A = \overline{A}$ netop hvis $(\complement A)^{\circ} = \complement A$, altså at A er afsluttet, netop hvis $\complement A$ er åben. Anvendes dette på $\complement A$ i stedet for A fås, at A er åben netop hvis $\complement A$ er afsluttet. □

I det følgende bruger vi ofte sprogbrugen "en familie" eller "et system" af delmængder af en mængde i stedet for at sige en mængde af delmængder. Det er ofte bekvemt at skrive en familie af delmængder af M på formen $(A_i)_{i\in I}$. Her er underforstået, at I er en mængde kaldet indexmængden for familien, og der foreligger en afbildning $i \mapsto A_i$ af I ind i mængden af delmængder af M.

SÆTNING 2. Systemet $\mathcal{G} = \mathcal{G}(M)$ af åbne delmængder af M har følgende egenskaber:

(i) $\emptyset, M \in \mathcal{G}$;

(ii) Hvis $G_1,\dots,G_n$ er endeligt mange mængder fra $\mathcal{G}$, så tilhører fællesmængden $G_1 \cap \dots \cap G_n$ igen $\mathcal{G}$;

(iii) Hvis $(G_i)_{i\in I}$ er en vilkårlig familie af mængder fra $\mathcal{G}$, så tilhører foreningsmængden $\bigcup_{i\in I} G_i$ igen $\mathcal{G}$.

Bevis. (ii). Vi skal indse at vilkårligt $x \in G_1 \cap \cdots \cap G_n$ er indre punkt. For $i \in \{1,\cdots,n\}$ vil specielt $x \in G_i$, og da G_i er åben findes $r_i > 0$ så $K(x,r_i) \subseteq G_i$. Sættes $r = \min(r_1,\cdots,r_n)$ vil $K(x,r) \subseteq G_1 \cap \cdots \cap G_n$, hvilket viser at x er indre punkt.

(iii). Vi skal indse at vilkårligt $x \in \bigcup_{i\in I} G_i$ er indre punkt i mængden. Til sådant x findes $i_0 \in I$ så $x \in G_{i_0}$, men da G_{i_0} er åben findes $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq G_{i_0}$, men så meget mere gælder $K(x,r) \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$, hvilket viser at x er indre punkt i $\bigcup_{i\in I} G_i$. □

Ved at udnytte Sætning 1 fås et dualt udsagn om systemet $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$ af afsluttede delmængder.

SÆTNING 2'. Systemet $\mathcal{F}$ af afsluttede delmængder af M har følgende egenskaber:

(i) $\emptyset, M \in \mathcal{F}$;

(ii) Hvis $F_1,\cdots,F_n$ er endeligt mange mængder fra $\mathcal{F}$, så tilhører foreningsmængden $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ igen $\mathcal{F}$.

(iii) Hvis $(F_i)_{i\in I}$ er en vilkårlig familie af mængder fra $\mathcal{F}$, så tilhører fællesmængden $\bigcap_{i\in I} F_i$ igen $\mathcal{F}$.

En kugle $K(a,r)$ er en åben delmængde, thi af Kuglelemmaet i §1.3 ses, at hvis $x \in K(a,r)$ så vil $K(x,s) \subseteq K(a,r)$ blot $s \leq r - d(a,x)$.

Enhver endelig delmængde A er afsluttet, thi hvert $x \in \complement A$ er ydre punkt for A. Hvis nemlig $A = \{a_1,\cdots,a_n\}$, hvor $a_1,\cdots,a_n$ er forskellige, og $x \in \complement A$ sættes $r = \min\{d(x,a_i) \mid i = 1,\cdots,n\}$, og så er $K(x,r) \subseteq \complement A$. Endvidere er hvert punkt i A et isoleret punkt, thi for hvert $i = 1,\cdots,n$ gælder

$$A \cap K(a_i,r) = \{a_i\} \quad \text{når} \quad r = \min\{d(a_i,a_j) \mid i \neq j\} .$$

Fællesmængden af uendeligt mange åbne mængder er ikke altid åben . (Overvej et eksempel).

Det indre og afslutningen af en mængde kan karakteriseres på følgende måde:

SÆTNING 3. Lad $A \subseteq M$.

(a) Det indre $\overset{\circ}{A}$ af A er en åben mængde. Det er den største åbne delmængde af A i den forstand, at hvis $G \subseteq A$ og G er åben, så er $G \subseteq \overset{\circ}{A}$.

(b) Afslutningen $\bar{A}$ af A er en afsluttet mængde. Det er den mindste afsluttede delmængde af M omfattende A i den forstand, at hvis $A \subseteq F$ og F er afsluttet, så er $\bar{A} \subseteq F$.

Bevis. De to udsagn er duale og det ene fremgår af det andet ved overgang til komplementærmængde.

For $x \in \overset{\circ}{A}$ findes $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq A$. For hvert $y \in K(x,r)$ gælder $K(y,r-d(x,y)) \subseteq K(x,r)$ ifølge Kuglelemmaet. Altså er y også indre punkt af A, og dermed er $K(x,r) \subseteq \overset{\circ}{A}$, hvilket viser at $\overset{\circ}{A}$ er åben.

Hvis $G \subseteq A$ og G er åben vil der til $x \in G$ findes $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq G$ og følgelig også $K(x,r) \subseteq A$. Ethvert $x \in G$ er altså indre punkt af A, dvs. $G \subseteq \overset{\circ}{A}$. □

COROLLAR 1. Det ydre af en mængde A er åben og randen ∂A af A er afsluttet.

Bevis. Det ydre af A er lig med $(\complement A)^{\circ}$ og dermed åben. Formlen $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\complement A}$ viser at ∂A er fællesmængde af to afsluttede mængder og dermed afsluttet ifølge Sætning 2'. □

SÆTNING 4. Afslutningen $\bar{A}$ af A består af de punkter $x \in M$, der er grænsepunkt for en konvergent punktfølge (x_n), hvis punkter alle tilhører A.

Bevis. (a) Lad $x = \lim x_n$ hvor (x_n) er en punktfølge fra A. Da gælder $x \in \bar{A}$, thi for ethvert $r > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$ så $d(x,x_n) < r$ for $n \geq N$, og dermed er $K(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

(b) Lad $x \in \bar{A}$. Da gælder $A \cap K(x,r) \neq \emptyset$ for ethvert $r > 0$. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ kan vi altså vælge $x_n \in A \cap K(x,\frac{1}{n})$. Følgen (x_n) er da konvergent med grænsepunkt x og alle dens punkter tilhører A. □

DEFINITION. En delmængde $A \subseteq (M,d)$ kaldes overalt tæt hvis $\bar{A} = M$, altså hvis M er den mindste afsluttede mængde, der indeholder A. Da de åbne mængder er komplementære til de afsluttede gælder, at A er overalt tæt netop hvis

$$\forall \ G \in \mathcal{G}: A \cap G = \emptyset \Rightarrow G = \emptyset$$

eller i kontraponeret form

$$\forall \ G \in \mathcal{G}: G \neq \emptyset \Rightarrow A \cap G \neq \emptyset \ .$$

Et metrisk rum (M,d) kaldes separabelt, hvis der findes en tællelig*) overalt tæt delmængde A af M.

Idet $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ er $\mathbb{R}$ separabelt. Også $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{C}^k$ er separable metriske rum, idet $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^k$ og $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^k$ er overalt tætte numerable delmængder.

2.3. Topologiske begreber. Ækvivalente metrikker.

DEFINITION. En mængde U i et metrisk rum (M,d) siges at være en omegn af et punkt $x \in M$ såfremt x er indre punkt i U. Med $\mathring{U}(x)$ betegnes mængden af omegne af x.

En mængde er åben hvis og kun hvis den er omegn af alle sine punkter.

---

*) Tællelig betyder endelig eller numerabel, og en mængde kaldes numerabel, hvis den er ækvipotent med $\mathbb{N}$.

Vi noterer:

$$
\begin{aligned}
& U \text{ omegn af } x \\
\Leftrightarrow\ & x \in \overset{\circ}{U} \\
\Leftrightarrow\ & \exists\, r > 0 : K(x,r) \subseteq U \\
\Leftrightarrow\ & \exists\, G \in \mathcal{G} : x \in G \subseteq U\,.
\end{aligned}
$$

Den sidste biimplikation viser at omegnssystemet $\grave{U}(x)$ af hvert punkt er entydigt fastlagt ud fra systemet $\mathcal{G}$ af åbne mængder og dermed er omegne et <u>topologisk</u> <u>begreb</u> i den forstand, at det kun afhænger af systemet $\mathcal{G}$ af åbne mængder i det metriske rum. Følgende begreber er alle topologiske:

Indre punkt, ydre punkt, randpunkt, kontaktpunkt, isoleret punkt, afsluttet mængde, indre, ydre og rand af en mængde, følgekonvergens, overalt tæt mængde, separabilitet.

At f.eks. kontaktpunkt og følgekonvergens er topologiske begreber følger af biimplikationerne:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall U \in \grave{U}(x) : A \cap U \neq \emptyset\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall U \in \grave{U}(x)\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : x_n \in U\,,$$

som gælder fordi $K(x,r) \in \grave{U}(x)$ for alle $r > 0$, og til enhver omegn U af x findes $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq U$.

DEFINITION. To metrikker d_1, d_2 på en mængde M kaldes <u>ækvivalente</u>, hvis de fastlægger samme system af åbne mængder.

Erstattes metrikken på en mængde med en ækvivalent får vi altså samme topologiske begreber. F.eks. ændres det indre af en mængde ikke. Som eksempel på begreber, der <u>ikke</u> er topologiske, kan nævnes "kugle" og "begrænset mængde". En metrik d kan nemlig altid erstattes af den ækvivalente metrik $d_1(x,y) = \min(d(x,y),1)$ med hensyn til hvilken alle mængder er begrænsede, nemlig af diameter ≤ 1.

At d_1 opfylder trekantsuligheden ses således: Hvis $d(x,z)$ og $d(z,y)$ begge er ≤ 1 har vi

$$d_1(x,z) + d_1(z,y) = d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y) \geq d_1(x,y)\,,$$

og hvis mindst et af tallene $d(x,z)$ og $d(z,y)$ er større end 1 har vi

$$d_1(x,y) \leq 1 \leq d_1(x,z) + d_1(z,y).$$

Dermed er d_1 en metrik, og hvis $K_1(a,r)$ betegner kuglen med hensyn til metrikken d_1 gælder

$$K_1(a,r) = \begin{cases} K(a,r), & \text{for } r \leq 1 \\ M, & \text{for } r > 1, \end{cases}$$

hvilket viser at d og d_1 giver samme system af åbne mængder, altså at d og d_1 er ækvivalente.

Generelt gælder:

SÆTNING 1. <u>To metrikker</u> d_1 <u>og</u> d_2 <u>på en mængde</u> M <u>er ækvivalente hvis og kun hvis</u>

(i) $\forall a \in M\ \forall r > 0\ \exists s > 0: K_1(a,r) \supseteq K_2(a,s)$,

(ii) $\forall a \in M\ \forall r > 0\ \exists s > 0: K_2(a,r) \supseteq K_1(a,s)$,

<u>hvor</u>

$$K_i(a,r) = \{x \in M \mid d_i(a,x) < r\}, \quad i = 1,2.$$

<u>Bevis</u>. Lad $\mathcal{G}_i$, $i = 1,2$ være systemet af åbne mængder i (M,d_i). Hvis d_1 og d_2 er ækvivalente, altså hvis $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$ er specielt $K_1(a,r) \in \mathcal{G}_2$ for alle $a \in M$, $r > 0$, altså er a et indre punkt af $K_1(a,r)$ i (M,d_2), og dermed findes $s > 0$ så $K_2(a,s) \subseteq K_1(a,r)$. Betingelsen (ii) vises analogt.

Omvendt kan man af (i) slutte at $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ og tilsvarende af (ii) slutte at $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1$, så (i) og (ii) medfører at d_1 og d_2 er ækvivalente. □

SÆTNING 2. <u>Lad</u> E <u>være et vektorrum over</u> $\mathbb{L}$. <u>To normer</u> $\|\cdot\|_1$ <u>og</u> $\|\cdot\|_2$ <u>på</u> E <u>er ækvivalente i den forstand, at de tilhørende metrikker er ækvivalente, hvis og kun hvis</u>

(i) $\exists k > 0\ \forall x \in E: \|x\|_1 \leq k\|x\|_2$

(ii) $\exists \ell > 0\ \forall x \in E: \|x\|_2 \leq \ell\|x\|_1$.

Bevis. Af (i) fra Sætning 2 sluttes

$$K_1(a,r) \supseteq K_2\left(a, \frac{r}{k}\right),$$

thi hvis $\| a-x \|_2 < \frac{r}{k}$ finder man $\| a-x \|_1 \leq k \| a-x \|_2 < r$. Dette viser (i) fra Sætning 1. Omvendt kan man af denne betingelse slutte

$$(*) \qquad K_1(0,1) \supseteq K_2(0,s)$$

for passende $s > 0$. Vi påstår nu at $\| x \|_1 \leq \frac{1}{s} \| x \|_2$ for alle $x \in E$, altså at (i) fra Sætning 2 gælder med $k = \frac{1}{s}$. Antag nemlig at der fandtes $x \in E$ så

$$\| x \|_1 > \frac{1}{s} \| x \|_2 .$$

Ved udnyttelse af normbetingelsen (N2) finder vi ved division med $\| x \|_1$ at

$$1 > \frac{1}{s} \left\| \frac{x}{\| x \|_1} \right\|_2$$

eller hvis $y = x/\| x \|_1$ at $\| y \|_2 < s$. Dette viser at $y \in K_2(0,s)$, og af (*) fås $\| y \|_1 < 1$, hvilket er i strid med at (N2) ~~idet~~ giver !

$$\| y \|_1 = \left\| \frac{x}{\| x \|_1} \right\|_1 = \frac{1}{\| x \|_1} \| x \|_1 = 1 .$$

På tilsvarende måde ses at de to betingelser (ii) fra Sætningerne 1 og 2 er ensbetydende. □

EKSEMPEL. De tre normer $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ og $\| \cdot \|_\infty$ på $\mathbb{R}^k$, jvfr. Eksempel 1 i §1.2, er ækvivalente på grund af de elementære uligheder

$$\| x \|_\infty \leq \begin{cases} \| x \|_1 \leq k \| x \|_\infty \\ \| x \|_2 \leq \sqrt{k} \| x \|_\infty . \end{cases}$$

Ved diskussion af topologiske begreber i $\mathbb{R}^k$ kan vi derfor anvende den norm, der er mest bekvem i den foreliggende situation. Det er ofte nemmere at benytte $\|\cdot\|_\infty$ end $\|\cdot\|_2$.

Man kan vise, at alle normer på et endelig dimensionalt vektorrum er ækvivalente, jvfr. §6.

2.4. Topologiske rum. Som vi har indset er mange af de til et metrisk rum knyttede begrebsdannelser - nemlig de topologiske - allerede fastlagt, når systemet af åbne mængder kendes. Teorien for metriske rum kan derfor indordnes under en mere almen teori for såkaldte topologiske rum, der er indført af Felix Hausdorff (1868-1942) i 1914.

Ved en topologi på en ikke tom mængde M forstås et system $\mathcal{G}$ af delmængder af M med følgende egenskaber:

(T1) $\emptyset, M \in \mathcal{G}$;

(T2) Hvis $G_1,\dots,G_n$ er endeligt mange mængder fra $\mathcal{G}$, så tilhører fællesmængden $G_1 \cap \cdots \cap G_n$ igen $\mathcal{G}$;

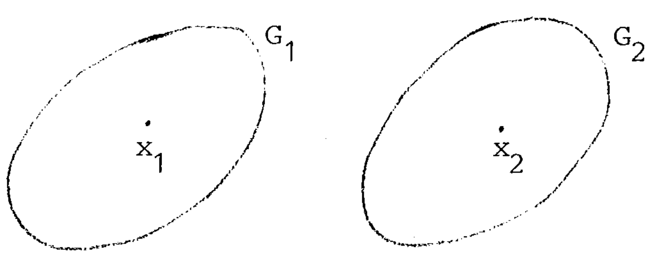
(T3) Hvis $(G_i)_{i\in I}$ er en vilkårlig familie af mængder fra $\mathcal{G}$, så tilhører foreningsmængden $\bigcup_{i\in I} G_i$ igen $\mathcal{G}$.

Et topologisk rum er en mængde M forsynet med en topologi $\mathcal{G}$ og mængderne i $\mathcal{G}$ kaldes åbne mængder.

Vi har set (§2.2 Sætn.2), at systemet af åbne mængder i et metrisk rum er en topologi. Ækvivalente metrikker er netop sådanne, der inducerer samme topologi. De fra et metrisk rum kendte topologiske egenskaber kan alle defineres i et topologisk rum.

Topologien på et metrisk rum har en speciel egenskab, Hausdorff-egenskaben:

Hvis x_1 og x_2 er forskellige punkter i M findes disjunkte mængder $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, så $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$.



Vi kan nemlig sætte $G_i = K(x_i, \frac{1}{2}d(x_1,x_2))$, $i = 1,2$.

Hausdorff indskrænkede sig til at betragte topologiske rum med Hausdorff-egenskaben, de såkaldte Hausdorff rum. Der er Hausdorff rum, hvor topologien ikke kan defineres ved en metrik. Et væsentligt problem i teorien for topologiske rum består i at karakterisere de topologier, der kan induceres af en metrik. Dette metrisationsproblem blev løst af 3 forskellige matematikere Bing, Nagata og Smirnov omkring 1950.

Opgaver til §2.

2.1. Bestem det indre, afslutningen, randen og mængden af isolerede punkter for følgende delmængder af $\mathbb{R}^2$ med den euklidiske afstand.

a) $A = \mathbb{R}^2$

b) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

c) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.

2.2. Om $G \in \mathcal{G}$, $F \in \mathcal{F}$ gælder

$$G \setminus F \in \mathcal{G}, \quad F \setminus G \in \mathcal{F}.$$

2.3. Hvis der om to metrikker d_1, d_2 på M findes konstanter $A, B > 0$ så $d_1 \leq Ad_2$, $d_2 \leq Bd_1$, så er d_1 og d_2 ækvivalente. Overvej om d_1 og d_2 kan være ækvivalente uden at der findes sådanne konstanter A og B.

2.4. Beskriv de topologiske begreber i et diskret metrisk rum.

2.5. Vis, at der for vilkårlige delmængder A,B af et metrisk rum (M,d) gælder

$$(A \cap B)^{\circ} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$(A \cup B)^{\circ} \supseteq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$$

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$$

og find eksempler der viser, at der ikke behøver at gælde = i de tre sidste inklusioner.
Vis videre, at for $A \subseteq B$ gælder $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ og $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
Vis, at der for en vilkårlig familie $(A_i)_{i \in I}$ af delmængder af M gælder

$$\overline{\bigcup_{i \in I} \overline{A}_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}, \quad \left(\bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{A}_i\right)^{\circ} = \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\circ}.$$

2.6. Lad (M,d) være et metrisk rum. Vis, at følgende betingelser om en delmængde $A \subseteq M$ og et punkt $x \in M$ er ækvivalente:

(i) $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$;

(ii) $\forall r > 0: K(x,r) \cap A$ indeholder uendelig mange punkter;

(iii) $\exists (x_n)$ fra $A \setminus \{x\}$ så $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Et punkt x med disse egenskaber kaldes et <u>fortætningspunkt</u> for A og mængden af fortætningspunkter for A betegnes A'. Vis, at $\overline{A} = A' \cup I(A)$, hvor $I(A)$ er mængden af de isolerede punkter for A. Vis, at A' er en afsluttet mængde.

2.7. Lad (M,d) være et metrisk rum. Vis, at

$$\overline{K(a,r)} \subseteq \{x \mid d(a,x) \leq r\}$$

og at mængden på højre side er afsluttet.
Giv et eksempel hvor inklusionen ovenfor er streng. Vis, at hvis (M,d) er et normeret vektorrum så gælder

$$\overline{K(a,r)} = \{x \mid d(a,x) \leq r\} \quad (= \{x \mid \|a-x\| \leq r\}).$$

2.8. Lad ℓ_1 være mængden af absolut konvergente rækker, dvs.

$$\ell_1 = \{(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_1^\infty |a_n| < \infty\}.$$

Vis, at ℓ_1 er et vektorrum ved sædvanlige regneoperationer og at

$$\|(a_n)\|_1 = \sum_1^\infty |a_n|$$

og

$$\|(a_n)\|_u = \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$\|(a_n)\|_u \leq \|(a_n)\|_1$

$\|(a_n)\|_1 \leq k\|(a_n)\|_u$ umulig:

$a = (\underbrace{1,1,\dots,1}_{m}, 0, 0, \dots)$

$m \leq k \quad \forall m.$

er normer på ℓ_1. Er de ækvivalente ?
Vis, at delmængden $A = \{(a_n) \in \ell_1 \mid \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N;\ a_n = 0\}$ af de "endelige rækker" er overalt tæt i $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ og i $(\ell_1, \|\cdot\|_u)$.

2.9. Lad der være givet et primtal p og et tal $c \in]0,1[$. Et tal $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ kan på entydig måde skrives

$$r = \frac{a}{b} p^n ,$$

hvor $a,n \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ og p går hverken op i a eller b . Vis, at der ved fastsættelsen

$$|r|_p = c^n \quad \text{for } r \text{ ovenfor, og } \quad |0|_p = 0$$

defineres en afbildning $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0,\infty[$ med egenskaberne

$$|rs|_p = |r|_p |s|_p ,$$
$$|r+s|_p \leq \max(|r|_p , |s|_p) ,$$
$$|p|_p = c .$$

Afbildningen $|\cdot|_p$ kaldes en p-adisk absolut værdi. Vis, at $d_p(r,s) = |r-s|_p$ er en metrik på $\mathbb{Q}$. Undersøg om følgerne (p^n) , (p^{-n}) , $(n!)$ er konvergente og find eventuelle grænsepunkter.
Vis, at hvis $r_n \to r \neq 0$, så er $|r_n|_p = |r|_p$ fra et vist trin, og vis derved at $K(0,1)$ er både åben og afsluttet.
Den normaliserede p-adiske absolutte værdi opnås svarende til $c = \frac{1}{p}$. Vis, at der for alle $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gælder

$$\prod_p |r|_p = \frac{1}{|r|} ,$$

hvor produktet er over alle primtal p og $|\cdot|_p$ er den normaliserede p-adiske absolutte værdi.

2.10. En familie $(A_i)_{i \in I}$ af delmængder af et metrisk rum (M,d) kaldes lokalt endelig såfremt

$$\forall x \in M \; \exists U \in \mathring{U}(x) : \{i \in I | A_i \cap U \neq \emptyset\} \text{ er endelig} ,$$

altså såfremt der til ethvert punkt $x \in M$ findes en omegn U af x, der kun har punkter fælles med A_i for endelig mange $i \in I$.
Vis, at hvis $(A_i)_{i \in I}$ er en lokalt endelig familie af afsluttede mængder, så er $\bigcup_{i \in I} A_i$ afsluttet.

2.11. Lad (x_n) være en konvergent følge med grænseværdi x i et metrisk rum (M,d). Vis, at $F = \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ er en afsluttet delmængde.

2.12. Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være en konveks mængde, dvs. for $x,y \in A$ er også liniestykket $\{\lambda x + (1-\lambda)y | \lambda \in [0,1]\}$ fra x til y indeholdt i A.
Vis, at $\overset{\circ}{A}$ og $\overline{A}$ er konvekse ($\overset{\circ}{A}$ kan være tom).

§3. Kontinuerte afbildninger.

3.1. Kontinuitet af en afbildning i et punkt.

Lad (X,d_X) og (Y,d_Y) være metriske rum. Kugler i X og Y betegnes $K_X(x,r)$ og $K_Y(y,r)$.

En afbildning $f\colon X \to Y$ kaldes kontinuert i punktet $a \in X$, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$, findes et $\delta > 0$, således at

$$f(K_X(a,\delta)) \subseteq K_Y(f(a),\varepsilon),$$

altså således at der for ethvert $x \in X$ gælder

$$d_X(x,a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(a)) < \varepsilon .$$

Skrevet med logiske symboler udtrykkes definitionen således:

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists\delta \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in X\colon d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(a)) < \varepsilon .$$

Løst sagt kræves altså, at hvis x er nær ved a, så er $f(x)$ nær ved $f(a)$.

Hvis afbildningen ikke er kontinuert i punktet a, siges den at være diskontinuert i a.

Kontinuitet kan i stedet defineres under brug af begrebet konvergent punktfølge, idet der gælder:

SÆTNING. Afbildningen $f\colon X \to Y$ er kontinuert i punktet $a \in X$, hvis og kun hvis det for enhver punktfølge (x_n) i X gælder, at når (x_n) er konvergent med grænsepunktet a, er følgen $(f(x_n))$ af billedpunkter konvergent med grænsepunktet $f(a)$.

Bevis. (1) Vi antager f kontinuert i a og $x_n \to a$ for $n \to \infty$. Til ethvert $\varepsilon > 0$ findes, da f er kontinuert i a, et $\delta > 0$, så at $d_Y(f(x),f(a)) < \varepsilon$, når $d_X(x,a) < \delta$. Til dette δ findes, da $x_n \to a$ for $n \to \infty$, et $n_0 \in \mathbb{N}$, så at $d_X(x_n,a) < \delta$ for alle $n \geq n_0$. Følgelig gælder $d_Y(f(x_n),f(a)) < \varepsilon$ for alle $n \geq n_0$. Altså gælder $f(x_n) \to f(a)$ for $n \to \infty$.

(2) Vi antager, at f ikke er kontinuert i a. Dette betyder, at der findes et $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+$, således at der for ethvert $\delta \in \mathbb{R}_+$ findes et $x \in X$ med

$$d_X(x,a) < \delta \qquad \text{og} \qquad d_Y(f(x),f(a)) \geq \varepsilon_0 .$$

Svarende til $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ vælges punkterne $x_1, x_2, x_3, \ldots$ i henhold hertil. Herved fås en punktfølge (x_n) i X, for hvilken der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$d_X(x_n,a) < \frac{1}{n} \qquad \text{og} \qquad d_Y(f(x_n),f(a)) \geq \varepsilon_0 .$$

Følgen (x_n) konvergerer altså mod a, medens følgen $(f(x_n))$ af billedpunkter ikke konvergerer mod $f(a)$. □

3.2. <u>Kontinuerte afbildninger</u>.

Idet (X,d_X) og (Y,d_Y) er metriske rum, siges en afbildning $f\colon X \to Y$ at være <u>kontinuert</u>, hvis den er kontinuert i ethvert punkt $a \in X$.

Hvis afbildningen ikke er kontinuert, siges den at være <u>diskontinuert</u>. En afbildning er altså diskontinuert, hvis den er diskontinuert i mindst et punkt. Følgende resultat viser, at kontinuitet er et topologisk begreb.

SÆTNING 1. <u>En afbildning</u> $f\colon X \to Y$ <u>er kontinuert, hvis og kun hvis originalmængden</u> $f^{-1}(G)$ <u>af enhver åben delmængde</u> G <u>af</u> Y <u>er en åben delmængde af</u> X.

<u>Bevis</u>. (1) Antag, at f er kontinuert, og lad G være en åben delmængde af Y. For ethvert punkt $a \in f^{-1}(G)$ gælder $f(a) \in G$. Da G er åben, findes et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, så at $K_Y(f(a),\varepsilon) \subseteq G$. Da f er kontinuert i a, findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så at $f(K_X(a,\delta)) \subseteq K_Y(f(a),\varepsilon)$. Følgelig gælder $K_X(a,\delta) \subseteq f^{-1}(G)$. Mængden $f^{-1}(G)$ er altså åben i X.

(2) Antag, at $f^{-1}(G)$ er åben for enhver åben delmængde G af Y. For ethvert punkt $a \in X$ og ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gælder da, at $f^{-1}(K_Y(f(a),\varepsilon))$ er åben. Der findes altså et $\delta \in \mathbb{R}_+$, så at $K_X(a,\delta) \subseteq f^{-1}(K_Y(f(a),\varepsilon))$. Følgelig er $f(K_X(a,\delta)) \subseteq K_Y(f(a),\varepsilon)$. Altså er f kontinuert i punktet a. □

Analog til Sætning 1 er

SÆTNING 1'. <u>En afbildning</u> $f: X \to Y$ <u>er kontinuert, hvis og kun hvis originalmængden</u> $f^{-1}(F)$ <u>af enhver afsluttet delmængde</u> F <u>af</u> Y <u>er en afsluttet delmængde af</u> X.

<u>Bevis</u>. (1) Antag, at f er kontinuert, og lad F være en afsluttet delmængde af Y. Da er $G = Y \setminus F$ åben og følgelig $f^{-1}(G)$ åben. Men $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(G)$. Altså er $f^{-1}(F)$ afsluttet.

(2) Antag, at $f^{-1}(F)$ er afsluttet for enhver afsluttet delmængde F af Y. For enhver åben delmængde G af Y er $F = Y \setminus G$ afsluttet og følgelig $f^{-1}(F)$ afsluttet. Men $f^{-1}(G) = X \setminus f^{-1}(F)$. Altså er $f^{-1}(G)$ åben. Følgelig er f kontinuert. □

Som anvendelse af ovenstående resultater ser man, at hvis $f: (X,d) \to \mathbb{R}$ er kontinuert så er mængderne

$$\{x \in X | f(x) > a\}, \quad \{x \in X | a < f(x) < b\}$$

åbne i X, og mængderne

$$\{x \in X | f(x) \leq a\}, \quad \{x \in X | a \leq f(x) \leq b\}$$

er afsluttede i X.

Følgende resultat anvendes ofte:

SÆTNING 2. <u>Lad</u> $f,g: X \to Y$ <u>være kontinuerte afbildninger</u>. <u>Hvis</u> $f(x) = g(x)$ <u>for alle</u> x <u>i en overalt tæt delmængde</u> $A \subseteq X$, <u>så</u> er $f = g$.

<u>Bevis</u>. For vilkårligt $x \in X$ findes en følge (x_n) fra A så $x_n \to x$ fordi $x \in \bar{A} = X$, jvfr. Sætning 4 i §2.2. Da $f(x_n) = g(x_n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ ifølge forudsætningen, kan vi af Sætningen i §3.1 slutte at

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

Da $x \in X$ var vilkårlig er $f = g$. □

SÆTNING 3. Hvis (X,d_X), (Y,d_Y), (Z,d_Z) er metriske rum og $f: X \to Y$ og $g: Y \to Z$ er kontinuerte, er den sammensatte afbildning $g \circ f: X \to Z$ ligeledes kontinuert.

Bevis. For enhver delmængde C af Z er $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. Hvis C er åben, er $g^{-1}(C)$ åben og følgelig $f^{-1}(g^{-1}(C))$ åben. □

BEMÆRKNING. Der gælder naturligvis også en punktvis version:

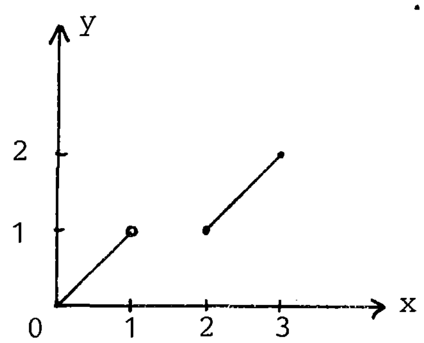
Hvis f er kontinuert i $x_0 \in X$ og g er kontinuert i $y_0 = f(x_0)$, så er $g \circ f$ kontinuert i x_0.

Beviset føres f.eks. ved hjælp af Sætningen i §3.1.

Derimod vil den omvendte afbildning til en bijektiv kontinuert afbildning i almindelighed ikke være kontinuert.

Lad X og Y være mængderne $[0,1[\cup [2,3]$ og $[0,2]$ med den sædvanlige metrik $d(x,y) = |x-y|$, og lad $f: X \to Y$ være den ved

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0,1[\\ x-1 & \text{for } x \in [2,3] \end{cases}$$



bestemte afbildning. Da er f kontinuert og bijektiv, men f^{-1} er diskontinuert i punktet 1, idet $1-\frac{1}{n} \to 1$ i Y, men $f^{-1}(1-\frac{1}{n}) = 1-\frac{1}{n}$ konvergerer ikke mod $f^{-1}(1) = 2$.

En bijektiv afbildning $f: (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ så både f og f^{-1} er kontinuerte kaldes en homeomorfi.

Ved en homeomorfi bevares alle topologiske begreber. F.eks. gælder om $a \in A \subseteq X$, at a er indre punkt i A, hvis og kun hvis $f(a)$ er indre punkt i $f(A)$.

Vi nævner uden bevis følgende dybtliggende sætning fra 1911 af den hollandske matematiker L.E.J. Brouwer (1881-1966).

SÆTNING 4. Lad $X \subseteq \mathbb{R}^k$ være en åben delmængde med den sædvanlige metrik d. Hvis $f: X \to \mathbb{R}^k$ er kontinuert og injektiv, så er $Y = f(X)$ en åben delmængde af $\mathbb{R}^k$ og f er en homeomorfi af (X,d) på (Y,d).

3.3. Lipschitz afbildning. Isometri.

En afbildning $f\colon X \to Y$ af det metriske rum (X,d_X) ind i det metriske rum (Y,d_Y) kaldes en Lipschitz afbildning med (Lipschitz) konstant C, hvis der for alle $x_1,x_2 \in X$ gælder

$$d_Y(f(x_1),f(x_2)) \leq C\, d_X(x_1,x_2)\,.$$

(Rudolf Lipschitz. Tysk matematiker 1832-1903). Hvis $C = 1$ kaldes f afstandsformindskende. En Lipschitz afbildning er kontinuert, idet man til $\varepsilon > 0$ kan vælge $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$.

Afbildningen f kaldes en isometri, hvis der for vilkårlige punkter $x_1,x_2 \in X$ gælder

$$d_Y(f(x_1),f(x_2)) = d_X(x_1,x_2)\,.$$

En isometri er injektiv. Hvis en isometri desuden er surjektiv er den inverse afbildning $f^{-1}\colon Y \to X$ ligeledes en isometri. En surjektiv isometri er således en homeomorfi.

Der gælder følgende forbløffende sætning, vist af de polske matematikere Mazur og Ulam i 1932.

SÆTNING 1. Lad E_1 og E_2 være normerede reelle vektorrum. En surjektiv isometri $f\colon E_1 \to E_2$ med $f(0) = 0$ er automatisk lineær.

Det vil føre for vidt at komme ind på beviset.

I tilfældet $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^k$ med den euklidiske afstand er forudsætningen om surjektivitet automatisk opfyldt, og beviset let:

SÆTNING 2. Lad $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ være en isometri med hensyn til den euklidiske afstand. Så findes en vektor $a \in \mathbb{R}^k$ og en ortogonal matrix A så at

$$f(x) = a + Ax \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^k\,.$$

(Man har altså, at f er en euklidisk isomorfi $x \rightsquigarrow Ax$ efterfulgt af en translation $x \rightsquigarrow x+a$).

Bevis. Sæt $g(x) = f(x) - a$, hvor $a := f(0)$. Idet

$$\| g(x_1)-g(x_2) \| = \| f(x_1)-f(x_2) \| = \| x_1-x_2 \|$$

er g en isometri og $g(0) = 0$. Heraf følger

$$\| g(x) \| = \| g(x)-g(0) \| = \| x-0 \| = \| x \| \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^k ,$$

og da skalarproduktet $x_1 \cdot x_2$ af to vektorer er givet ved

$$x_1 \cdot x_2 = \tfrac{1}{2}(\| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 - \| x_1-x_2 \|^2)$$

finder vi

$$g(x_1) \cdot g(x_2) = \tfrac{1}{2}(\| g(x_1) \|^2 + \| g(x_2) \|^2 - \| g(x_1)-g(x_2) \|^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(\| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 - \| x_1-x_2 \|^2) = x_1 \cdot x_2 .$$

Dette udtrykker, at g bevarer skalarproduktet. Betegner $e_1,\dots,e_k$ den sædvanlige ortonormale basis i $\mathbb{R}^k$ gælder $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ og derfor også $g(e_i) \cdot g(e_j) = \delta_{ij}$ så $g(e_1),\dots,g(e_k)$ er ligeledes en ortonormal basis. Skrives $g(x)$ som linearkombination af disse vektorer

$$g(x) = \lambda_1 g(e_1) + \dots + \lambda_k g(e_k)$$

er koefficienterne λ_i givet ved $\lambda_i = g(x) \cdot g(e_i) = x \cdot e_i = x_i$, hvis $x = (x_1,\dots,x_k)$. Hvis A betegner den matrix, der har $g(e_1),\dots,g(e_k)$ som søjler, er A en ortogonal matrix, og ligningerne $\lambda_i = x_i$, $i = 1,\dots,k$ viser, at $g(x) = Ax$, hvor det sidste er matrix produktet af A og x skrevet som en søjle. Vi har hermed vist, at g er en euklidisk isomorfi, og at $f(x) = a+g(x) = a+Ax$. □

På talrummet $\mathbb{L}^k$, $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, betragtes maksimum normen

$$\| x \|_\infty = \max\{ |x_1|,\dots,|x_k| \} \quad \text{for} \quad x = (x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{L}^k .$$

Den j'te <u>koordinatfunktion</u> eller <u>projektion</u>

$$\pi_j : \mathbb{L}^k \to \mathbb{L}$$

er defineret ved $\pi_j(x_1,\cdots,x_k) = x_j$, $j = 1,\cdots,k$. Idet der for $x = (x_1,\cdots,x_k)$ og $y = (y_1,\cdots,y_k)$ i $\mathbb{L}^k$ gælder

$$|\pi_j(x)-\pi_j(y)| = |x_j-y_j| \leq \|x-y\|_\infty$$

er π_j afstandsformindskende og dermed kontinuert.

En afbildning $f: (M,d) \to \mathbb{L}^k$ af et metrisk rum (M,d) ind i talrummet $\mathbb{L}^k$ har de k <u>koordinatfunktioner</u> $f_j = \pi_j \circ f: (M,d) \to \mathbb{L}$, $j = 1,\cdots,k$ og man har

$$f(x) = (f_1(x),\cdots,f_k(x)), \qquad x \in M.$$

Vedrørende kontinuitet gælder:

f <u>er kontinuert hvis og kun hvis hver koordinatfunktion</u> f_j <u>er kontinuert</u>.

Et tilsvarende udsagn gælder om kontinuitet i et enkelt punkt.

<u>Bevis</u>. Hvis f er kontinuert er de sammensatte afbildninger $f_j = \pi_j \circ f$ kontinuerte, $j = 1,\cdots,k$. Hvis omvendt $f_1,\cdots,f_k$ alle er kontinuerte i punktet $a \in M$, og $\varepsilon > 0$ er givet, så findes $\delta_1,\cdots,\delta_k > 0$ så der for hvert $j = 1,\cdots,k$ gælder

$$d(x,a) < \delta_j \Rightarrow |f_j(x)-f_j(a)| < \varepsilon .$$

Med $\delta = \min(\delta_1,\cdots,\delta_k)$ gælder da

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|_\infty = \max\{|f_j(x)-f_j(a)| \mid j = 1,\cdots,k\} < \varepsilon .$$

□

Tilsvarende er $f: (M,d) \to \mathbb{C}$ kontinuert hvis og kun hvis $\mathrm{Re} f$ og $\mathrm{Im} f$ er kontinuerte.

3.4. <u>Kontinuitet af regneoperationerne</u>.

SÆTNING 1. <u>De ved</u>

$\varphi_1: (x_1,x_2) \curvearrowright x_1+x_2$, $\varphi_2: (x_1,x_2) \curvearrowright x_1-x_2$, $\varphi_3: (x_1,x_2) \curvearrowright x_1x_2$

definerede afbildninger af $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$ og den ved $\varphi_4: (x_1,x_2) \to \frac{x_1}{x_2}$ definerede afbildning af $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ind i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ ind i $\mathbb{C}$ er kontinuerte.

Bevis. Idet vi i $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ benytter den ved maksimumsnormen $\|(x_1,x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ bestemte metrik, kan påstandene for $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ bevises samtidigt.

Kontinuiteten af summen følger af, at der for vilkårlige $a = (a_1,a_2)$ og $x = (x_1,x_2)$ gælder

$$|\varphi_1(x)-\varphi_1(a)| = |x_1-a_1+x_2-a_2| \le |x_1-a_1| + |x_2-a_2|$$
$$\le 2\max\{|x_1-a_1|, |x_2-a_2|\} = 2\|x-a\|_\infty .$$

Tilsvarende følger kontinuiteten af differensen af, at

$$|\varphi_2(x)-\varphi_2(a)| = |x_1-a_1-x_2+a_2| \le |x_1-a_1| + |x_2-a_2|$$
$$\le 2\max\{|x_1-a_1|, |x_2-a_2|\} = 2\|x-a\|_\infty .$$

Ved produktet har vi, idet vi sætter $x-a = y = (y_1,y_2)$,

$$\varphi_3(x)-\varphi_3(a) = (a_1+y_1)(a_2+y_2) - a_1a_2 = a_1y_2 + y_1a_2 + y_1y_2 .$$

For $\|x-a\| = \|y\|_\infty < \delta \le 1$ gælder altså

$$|\varphi_3(x)-\varphi_3(a)| < (|a_1|+|a_2|+1)\delta ,$$

hvilket viser kontinuiteten i det vilkårlige punkt a, idet vi for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vælge et $\delta \in]0,1]$, så at $(|a_1|+|a_2|+1)\delta < \varepsilon$.

Ved kvotienten skal kontinuiteten eftervises i et vilkårligt punkt $a = (a_1,a_2)$, hvor $a_2 \neq 0$. Idet vi atter sætter $x-a = y = (y_1,y_2)$, og nøjes med at betragte sådanne x, for hvilke $\|x-a\|_\infty = \|y\|_\infty < |a_2|$, og følgelig $x_2 = a_2+y_2 \neq 0$, har vi

$$\varphi_4(x) - \varphi_4(a) = \frac{a_1+y_1}{a_2+y_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{(a_1+y_1)a_2-a_1(a_2+y_2)}{(a_2+y_2)a_2} = \frac{y_1a_2-a_1y_2}{(a_2+y_2)a_2} .$$

For $\|x-a\|_\infty = \|y\|_\infty < \delta \leq \frac{1}{2}|a_2|$ gælder altså

$$|\varphi_4(x)-\varphi_4(a)| < \frac{(|a_1|+|a_2|)\delta}{\frac{1}{2}|a_2||a_2|},$$

hvilket viser kontinuiteten i a, idet vi for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vælge et $\delta \in \,]0,\frac{1}{2}|a_2|]$, så at

$$\frac{(|a_1|+|a_2|)\delta}{\frac{1}{2}|a_2|^2} < \varepsilon\,. \qquad \square$$

SÆTNING 2. <u>Den ved</u> $x \curvearrowright \|x\|$ <u>bestemte afbildning af et normeret rum</u> $(E,+,\mathbb{L})$ <u>er afstandsformindskende og dermed kontinuert. Specielt er</u> $x \curvearrowright |x|$ <u>kontinuert af</u> $\mathbb{R}$ <u>eller</u> $\mathbb{C}$ <u>ind i</u> $\mathbb{R}$.

<u>Bevis</u>. Ifølge (N3) gælder $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$ hvoraf $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$. Ved ombytning af x og y ses at $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$. $\square$

Benyttes karakteriseringen af kontinuitet ved konvergente punktfølger, og det faktum, at en punktfølge $((x_n,y_n))$ i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{C}^2$ er konvergent med grænsepunktet (x,y), hvis og kun hvis talfølgen (x_n) er konvergent med grænseværdien x og talfølgen (y_n) er konvergent med grænseværdien y, ser vi, at kontinuiteten af regneoperationerne er ensbetydende med følgende (velkendte) sætning om regning med konvergente talfølger:

<u>Hvis de reelle eller komplekse talfølger</u> (x_n) <u>og</u> (y_n) <u>er konvergente med grænseværdierne</u> x <u>og</u> y, <u>er talfølgerne</u> (x_n+y_n), (x_n-y_n), (x_ny_n) <u>konvergente med grænseværdierne</u> $x+y$, $x-y$, xy. <u>Hvis</u> y <u>og hvert</u> y_n <u>er</u> $\neq 0$, <u>er talfølgen</u> $\frac{x_n}{y_n}$ <u>konvergent med grænseværdien</u> $\frac{x}{y}$.

Vi ser endvidere:

<u>Hvis den reelle eller komplekse talfølge</u> (x_n) <u>er konvergent med grænseværdien</u> x, <u>er talfølgen</u> $(|x_n|)$ <u>konvergent med grænseværdien</u> $|x|$.

3.5. Kontinuerte reelle og komplekse funktioner.

Idet (M,d) betegner et metrisk rum kaldes en kontinuert afbildning $f\colon M \to \mathbb{R}$ eller $f\colon M \to \mathbb{C}$ en kontinuert reel eller kompleks funktion på M. Mængden af kontinuerte reelle funktioner på M betegnes $C(M,\mathbb{R})$ og mængden af kontinuerte komplekse funktioner $C(M,\mathbb{C})$. Hvis det af sammenhængen fremgår, hvilket af de to tilfælde talen er om, benyttes også den kortere betegnelse $C(M)$.

SÆTNING 1. Mængden $C(M,\mathbb{C})$ af kontinuerte komplekse funktioner på det metriske rum M udgør en (kommutativ) ring, der har mængden $C(M,\mathbb{R})$ af kontinuerte reelle funktioner som delring. Et element f i $C(M,\mathbb{C})$ har et reciprokt element, hvis (og naturligvis kun hvis) $f(x) \neq 0$ for alle $x \in M$.

Bevis. Problemet er at bevise, at f_1+f_2, f_1-f_2, f_1f_2, samt $\frac{f_1}{f_2}$ (hvis f_2 ikke antager værdien 0) er kontinuerte, hvis $f_1,f_2\colon M \to \mathbb{C}$ er kontinuerte. Dette følger af sætningen om sammensætning af kontinuerte afbildninger og sætningen om regneoperationernes kontinuitet, idet det bemærkes, at afbildningen $x \mapsto (f_1(x),f_2(x))$ af M ind i $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ er kontinuert. □

Vi bemærker endvidere, at hvis f er kontinuert, er også funktionen $|f|$, sammensat af $x \mapsto f(x)$ og $|\cdot|$, kontinuert. Hvis $f_1,f_2\colon M \to \mathbb{R}$ er kontinuerte følger heraf, at også funktionerne $f_1\vee f_2 = \max\{f_1,f_2\}$ og $f_1\wedge f_2 = \min\{f_1,f_2\}$ er kontinuerte. Der gælder nemlig

$$(f_1\vee f_2) = \max(f_1(x),f_2(x)) = \tfrac{1}{2}(f_1(x)+f_2(x)) + \tfrac{1}{2}|f_1(x)-f_2(x)|,$$

og

$$(f_1\wedge f_2) = \min(f_1(x),f_2(x)) = \tfrac{1}{2}(f_1(x)+f_2(x)) - \tfrac{1}{2}|f_1(x)-f_2(x)|.$$

Hvis en følge $f_n\colon M \to \mathbb{L}$ af kontinuerte funktioner konvergerer punktvis mod en funktion $f\colon M \to \mathbb{L}$, altså hvis

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\colon\ |f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon,$$

kan man i almindelighed ikke slutte, at f er kontinuert, jvfr.

Mat 1. (Som et kuriosum kan nævnes, at Cauchy i sin lærebog Cours d'analyse (1821) hævder, at grænsefunktionen er kontinuert. I et brev fra 1826 gør Abel opmærksom på fejlen, der nok skyldes, at begreberne ikke har været tilstrækkeligt præciserede). Hvis konvergensen derimod er <u>uniform</u>, altså hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall x \in X: \ |f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon ,$$

er <u>grænsefunktionen</u> f <u>kontinuert</u>.

Mere almindeligt gælder

SÆTNING 2. <u>Lad</u> (f_n) <u>være en uniformt konvergent følge af funktioner på et metrisk rum</u> (M,d) <u>med grænsefunktion</u> f. <u>Dersom hver funktion</u> f_n <u>er kontinuert i punktet</u> $x_0 \in M$, <u>er</u> f <u>kontinuert i</u> x_0.

<u>Bevis</u>. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi skal bestemme $\delta > 0$, så der for $x \in K(x_0,\delta)$ gælder $|f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$. Da (f_n) konvergerer uniformt mod f på M, kan vi bestemme $N \in \mathbb{N}$, så der for alle $x \in M$ gælder

$$|f(x)-f_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} .$$

Udnyttes dernæst, at f_N er kontinuert i x_0, kan vi bestemme $\delta > 0$, så der for $x \in K(x_0,\delta)$ gælder

$$|f_N(x)-f_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} .$$

For $x \in K(x_0,\delta)$ gælder altså

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(x_0)| + |f_N(x_0)-f(x_0)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon . \quad \square$$

Opgaver til §3.

3.1. Lad (X,d_X) og (Y,d_Y) være metriske rum og lad $\grave{U}(a)$ betegne systemet af omegne af $a \in X$. Vis, at $f\colon X \to Y$ er kontinuert i $a \in X$ hvis og kun hvis

$$\forall\, V \in \grave{U}(f(a))\colon f^{-1}(V) \in \grave{U}(a).$$

Vis, at f er kontinuert hvis og kun hvis

$$\forall A \subseteq X\colon f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}\ .$$

3.2. Lad (X,d_X) og (Y,d_Y) være metriske rum. Vis, at hvis d_X er den diskrete metrik, så er enhver afbildning $f\colon X \to Y$ kontinuert. Vis omvendt, at hvis $f\colon X \to Y$ er en kontinuert injektiv afbildning og d_Y er diskret, så er d_X ækvivalent med den diskrete metrik.

3.3. Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en C^1-funktion med begrænset differentialkvotient. Vis, at f er en Lipschitz afbildning med konstant $C = \sup\{|f'(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$.

3.4. Vis, at $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ givet ved $f(x) = (x,|x|)$ er en isometri, når $\mathbb{R}^2$ er udstyret med maksimum normen. Hvad viser dette om Mazur-Ulam's sætning ?

3.5. En familie $\mathcal{B}$ af åbne mængder i et metrisk rum (Y,d_Y) kaldes en <u>basis</u> for systemet $\mathcal{G}$ af åbne mængder, hvis enhver ikke tom åben mængde er foreningsmængde af mængder fra $\mathcal{B}$. Vis, at mængden af kugler er en basis. Vis også, at hvis A er overalt tæt i Y, så er familien

$$\mathcal{B} = \{K(a,\tfrac{1}{n}) \mid a \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$$

en basis.
Vis, at $f\colon X \to Y$ er kontinuert blot $f^{-1}(G) \in \mathcal{G}(X)$ for alle $G \in \mathcal{B}$, hvor $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathcal{G}(Y)$.

3.6. Afstanden fra et punkt x til en ikke tom mængde A i et metrisk rum (M,d) defineres ved

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}.$$

Vis, at funktionen $x \rightsquigarrow d(x,A)$ af (M,d) ind i $\mathbb{R}$ er afstandsformindskende og dermed kontinuert.
Vis, at $d(x,A) = 0$ hvis og kun hvis $x \in \overline{A}$.
Vis, at enhver afsluttet mængde er fællesmængde af en følge af åbne mængder.
Vis, at $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ er kontinuert i $x_0 \in X$ hvis og kun hvis der for alle delmængder $A \subseteq X$ gælder

$$d_X(x_0,A) = 0 \Rightarrow d_Y(f(x_0),f(A)) = 0.$$

3.7. Lad (M,d) være et metrisk rum. Vis, at der til et par F_1,F_2 af afsluttede, disjunkte og ikke tomme delmængder findes en kontinuert funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ med egenskaberne

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{for } x \in F_1, \\ f(x) &= 1 && \text{for } x \in F_2, \\ 0<f(x)&<1 && \text{for } x \in M\setminus(F_1 \cup F_2). \end{aligned}$$

Vink. Sæt $f(x) = \dfrac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$.

Vis, at der findes åbne disjunkte mængder G_1,G_2 i M så $F_1 \subseteq G_1$ og $F_2 \subseteq G_2$.

3.8. Lad (M,d) være et metrisk rum. Mængden af bijektive afbildninger $f\colon M \to M$ udgør en gruppe ved sammensætning som komposition, M's transformationsgruppe. Vis, at mængden af homeomorfier og mængden af isometrier af M udgør undergrupper af M's transformationsgruppe.

§4. Konstruktioner med metriske rum.

4.1. Delrum.

Lad (M,d) være et metrisk rum og lad M' være en ikke tom delmængde af M. Så er restriktionen af d til $M' \times M'$ naturligvis også en metrik på M', og vi kan derfor betragte det metriske rum (M',d), som kaldes det metriske delrum af M. Vi siger at M' er forsynet med den inducerede eller nedarvede metrik.

Til det metriske rum (M,d) er altså knyttet en skare af nye metriske rum (M',d), hvor $\emptyset \neq M' \subseteq M$. Dermed kan vi tale om topologiske begreber i rummet (M',d), f.eks. om systemet $\mathcal{G}(M')$ af åbne mængder i M', og systemet $\mathcal{F}(M')$ af afsluttede mængder i M'. Mængderne i $\mathcal{G}(M')$ (resp. $\mathcal{F}(M')$) kaldes åbne (resp. afsluttede) relativt til M'.

SÆTNING. Med betegnelserne ovenfor gælder

(a) $\mathcal{G}(M') = \{M' \cap G \mid G \in \mathcal{G}(M)\}$.

(b) $\mathcal{F}(M') = \{M' \cap F \mid F \in \mathcal{F}(M)\}$.

(c) For $A \subseteq M'$ gælder der om afslutningen $\overline{A}^{M'}$ af A i (M',d) at

$$\overline{A}^{M'} = M' \cap \overline{A}.$$

Bevis. (a) Lad $K_{M'}(a,r)$ være kuglen i (M',d) med centrum i $a \in M'$ og radius $r > 0$. Så er

$$K_{M'}(a,r) = \{x \in M' \mid d(a,x) < r\} = M' \cap K(a,r).$$

Heraf ses, at $M' \cap G \in \mathcal{G}(M')$ for alle $G \in \mathcal{G}(M)$, thi for $a \in M' \cap G$ vil $a \in G$, og derfor findes $r > 0$ så $K(a,r) \subseteq G$, og altså $K_{M'}(a,r) \subseteq M' \cap G$.

Antag omvendt, at $G' \in \mathcal{G}(M')$. Til hvert $x \in G'$ findes $r_x > 0$ så $K_{M'}(x,r_x) \subseteq G'$. Mængden

$$G = \bigcup_{x \in G'} K(x,r_x)$$

er åben i M iflg. §2.2, Sætning 2 (iii), og der gælder

$$M' \cap G = \bigcup_{x \in G'} K_{M'}(x, r_x) = G' .$$

(b) Hvis $F \in \mathcal{F}(M)$ er $G = M \setminus F \in \mathcal{G}(M)$. Sættes $F' = M' \cap F$ og $G' = M' \cap G$ er $F' = M' \setminus G'$. Da G' er åben relativt til M' ifølge (a), er F' relativt afsluttet. Hvis omvendt $F' \subseteq M'$ er relativt afsluttet er $G' = M' \setminus F'$ relativt åben. Følgelig findes en åben mængde G i M så at $G' = M' \cap G$. Sættes $F = M \setminus G$ er F afsluttet og $F' = M' \cap F$.

(c) For $A \subseteq M'$ er $M' \cap \bar{A} \in \mathcal{F}(M')$. Da $\bar{A}^{M'}$ er den mindste mængde i $\mathcal{F}(M')$ der omfatter A (§2.2 Sætn. 3) fås $\bar{A}^{M'} \subseteq M' \cap \bar{A}$. På den anden side findes (ifølge (b)) $F \in \mathcal{F}(M)$ så $\bar{A}^{M'} = M' \cap F$, altså $A \subseteq F$. Men så er $\bar{A} \subseteq F$, og derfor har vi $\bar{A}^{M'} = M' \cap F \supseteq M' \cap \bar{A}$. □

Af ovenstående ses, at hvis M' er åben i M, så er $\mathcal{G}(M') \subseteq \mathcal{G}(M)$ og

$$\mathcal{G}(M') = \{G \in \mathcal{G}(M) \mid G \subseteq M'\} .$$

På den anden side kan $\mathcal{G}(M') \subseteq \mathcal{G}(M)$ kun gælde, hvis M' er åben i M, idet $M' \in \mathcal{G}(M')$.

EKSEMPEL. Lad $M = \mathbb{R}$ have den sædvanlige metrik og lad $M' = [0,\infty[$. Så er $[0,a[$ åben relativt til $[0,\infty[$ og $[0,a]$ afsluttet relativt til $[0,\infty[$ for alle $a > 0$. Sættes $M' =]0,\infty[$ er $]0,a[$ åben relativt til $]0,\infty[$ og $]0,a]$ afsluttet relativt til $]0,\infty[$ for alle $a > 0$.

<u>Inklusionsafbildningen</u> $i = i_{M',M} : M' \to M$ givet ved $i(x) = x$, når $\emptyset \neq M' \subseteq M$, er kontinuert, idet

$$i^{-1}(G) = M' \cap G$$

for $G \in \mathcal{G}(M)$. Afbildningen er endda isometrisk.

Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum, og lad $\emptyset \neq X' \subseteq X$. Hvis $f: X \to Y$ er kontinuert i et punkt $a \in X'$, er også <u>restriktionen</u> $f|X' : X' \to Y$ kontinuert i a idet $f|X' = f \circ i_{X',X}$.

Hvis $f(X) \subseteq Y' \subseteq Y$ kan vi betragte f som afbildning $f: X \to Y'$. Man ser, at $f: X \to Y'$ er kontinuert i $a \in X$ hvis og kun hvis $f: X \to Y$ er kontinuert i a.

4.2. Produktrum.

Er (M_1,d_1) og (M_2,d_2) to metriske rum, kan produktmængden $M_1 \times M_2$ gøres til et metrisk rum på følgende måde: For $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in M_1 \times M_2$ er

$$(*) \qquad d(x,y) := \max(d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2))$$

en metrik på $M_1 \times M_2$. Betingelserne (M1) og (M2) er oplagte og (M3) eftervises således: Lad $z = (z_1,z_2) \in M_1 \times M_2$ være et tredie punkt. Så giver trekantsuligheden for d_1 at

$$d_1(x_1,y_1) \leq d_1(x_1,z_1) + d_1(z_1,y_1) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

og analogt

$$d_2(x_2,y_2) \leq d_2(x_2,z_2) + d_2(z_2,y_2) \leq d(x,z) + d(z,y),$$

og dermed er

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Metrikken (*) kaldes produktmetrikken af d_1 og d_2 og $(M_1 \times M_2, d)$ kaldes det metriske produktrum af (M_1,d_1) og (M_2,d_2). Konstruktionen udvides let til et produkt af n metriske rum.

Hvis $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik, er det metriske produktrum lig med $\mathbb{R}^2$ med den af maksimumsnormen bestemte metrik.

SÆTNING. Lad $(M_1 \times M_2, d)$ være det metriske produktrum af (M_1, d_1) og (M_2, d_2). Så gælder

(a) For $G_1 \in \mathcal{G}(M_1)$, $G_2 \in \mathcal{G}(M_2)$ er $G_1 \times G_2 \in \mathcal{G}(M_1 \times M_2)$.

(b) For $F_1 \in \mathcal{F}(M_1)$ og $F_2 \in \mathcal{F}(M_2)$ er $F_1 \times F_2 \in \mathcal{F}(M_1 \times M_2)$.

(c) For $A_1 \subseteq M_1$, $A_2 \subseteq M_2$ er $(A_1 \times A_2)^{\circ} = \overset{\circ}{A}_1 \times \overset{\circ}{A}_2$ og $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$.

(d) En punktfølge $x_n = (x_{n1}, x_{n2})$, $n = 1, 2, \cdots$ i $M_1 \times M_2$ konvergerer mod $x = (x_1, x_2)$ hvis og kun hvis (x_{n1}) konvergerer mod x_1 i M_1 og (x_{n2}) konvergerer mod x_2 i M_2.

Beviset bygger på at for $x = (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ og $r > 0$ gælder

$$K(x,r) = K_1(x_1,r) \times K_2(x_2,r) ,$$

hvor $K(x,r)$ er kuglen i produktrummet og $K_i(x_i,r)$ er kuglen i (M_i, d_i), $i = 1,2$. Beviset overlades som en øvelse til læseren. Det bemærkes, at formlen $(A_1 \times A_2)^{\circ} = \overset{\circ}{A}_1 \times \overset{\circ}{A}_2$ naturligvis skal forstås således, at $(A_1 \times A_2)^{\circ}$ er det indre i rummet $M_1 \times M_2$, $\overset{\circ}{A}_1$ er det indre i M_1 og $\overset{\circ}{A}_2$ det indre i M_2. Det ville blive for tungt at lade dette fremgå af symbolerne.

Projektionsafbildningerne

$$\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1 \quad \text{og} \quad \pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$$

defineret ved

$$\pi_1(x_1, x_2) = x_1 , \quad \pi_2(x_1, x_2) = x_2$$

er begge afstandsformindskende, og dermed kontinuerte. For $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in M_1 \times M_2$ gælder nemlig

$$d_1(\pi_1(x), \pi_1(y)) = d_1(x_1, y_1) \leq d(x,y)$$

og analogt for π_2. Bemærk at

$$\pi_1^{-1}(G_1) \cap \pi_2^{-1}(G_2) = G_1 \times G_2 \quad \text{for} \quad G_1 \subseteq M_1,\ G_2 \subseteq M_2 .$$

For $a \in M_1$ er $j_a: M_2 \to M_1 \times M_2$ givet ved $j_a(y) = (a,y)$ en kontinuert afbildning, ja endda en isometri. Tilsvarende er afbildningen $x \rightsquigarrow (x,b)$ en isometri af M_1 ind i $M_1 \times M_2$ for fast $b \in M_2$.

Ved sammensætning af en afbildning $f: M_1 \times M_2 \to M_3$ med j_a fås <u>snitafbildningen</u> $f \circ j_a = f(a,\cdot): M_2 \to M_3$ givet ved $y \rightsquigarrow f(a,y)$. Tilsvarende har vi for $b \in M_2$ snitafbildningen $f(\cdot,b): M_1 \to M_3$ givet ved $x \rightsquigarrow f(x,b)$. Da sammensætning af kontinuerte afbildninger igen er kontinuert ses, at <u>snitafbildningerne af en kontinuert afbildning igen er kontinuerte</u>.

4.3. <u>Rummet $L(E,F)$</u>.

Lad E være et normeret rum over $\mathbb{L}$ (= $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$), hvor normen betegnes $\|\cdot\|$.

SÆTNING 1. <u>De ved</u>

$$\varphi(x,y) = x+y \quad \underline{\text{af}} \quad E\times E \quad \underline{\text{ind i}} \quad E$$

<u>og</u>

$$\psi(\lambda,x) = \lambda x \quad \underline{\text{af}} \quad \mathbb{L}\times E \quad \underline{\text{ind i}} \quad E$$

<u>definerede afbildninger er kontinuerte</u>.

<u>Bevis</u>. Afbildningen φ opfylder endda en Lipschitz betingelse med konstant 2, idet der for $(x,y) \in E\times E$ og $(a,b) \in E\times E$ gælder

$$\|\varphi(x,y)-\varphi(a,b)\| = \|(x-a)+(y-b)\| \leq \|x-a\|+\|y-b\| \leq 2\max\{\|x-a\|,\|y-b\|\}.$$

Vi viser dernæst, at ψ er kontinuert i $(\lambda_0,x_0) \in \mathbb{L}\times E$, og benytter hertil udregningen

$$\psi(\lambda,x) - \psi(\lambda_0,x_0) = \lambda x-\lambda_0 x_0 = \lambda(x-x_0) + (\lambda-\lambda_0)x_0 ,$$

hvoraf

$$\|\psi(\lambda,x)-\psi(\lambda_0,x_0)\| \leq |\lambda|\,\|x-x_0\| + |\lambda-\lambda_0|\,\|x_0\|.$$

Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Hvis $\max(|\lambda-\lambda_0|, \|x-x_0\|) \leq \delta \leq 1$ finder vi

$$\|\psi(\lambda,x)-\psi(\lambda_0,x_0)\| \le \delta(|\lambda| + \|x_0\|) \le \delta(|\lambda_0| + 1 + \|x_0\|) \le \varepsilon$$

hvis vi vælger $\delta \le \varepsilon(1 + |\lambda_0| + \|x_0\|)^{-1}$. □

Lad E,F være normerede vektorrum over samme legeme $\mathbb{L}$. Begge de optrædende normer betegnes $\|\cdot\|$, hvilket ikke skulle kunne give anledning til misforståelse.

For en lineær afbildning $T: E \to F$, altså en afbildning der opfylder *)

$$T(x+y) = Tx + Ty$$

$$T(\lambda x) = \lambda Tx$$

for alle $x,y \in E$ og $\lambda \in \mathbb{L}$, indføres

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in E\,,\ \|x\| \le 1\} \in [0,\infty] .$$

SÆTNING 2. <u>For en lineær afbildning</u> $T: E \to F$ <u>er følgende betingelser ensbetydende</u>:

(1) T <u>er kontinuert i</u> 0 .

(2) T <u>opfylder en Lipschitz betingelse</u>.

(3) $\|T\| < \infty$.

<u>Hvis de tre betingelser er opfyldt er</u> $\|T\|$ <u>den mindst mulige Lipschitz konstant</u>.

<u>Bevis</u>. (1) $\Rightarrow$ (2). Hvis T er kontinuert i 0, som afbildes i nulvektoren i F , findes $\delta > 0$, så der for $x \in E$ gælder

$$\|x\| \le \delta \Rightarrow \|Tx\| \le 1 .$$

Heraf følger, at

$$\|Tx\| \le \frac{1}{\delta}\|x\| \qquad \text{for } x \in E .$$

Dette er klart for $x = 0$, og hvis $x \neq 0$, vil $y = \frac{\delta}{\|x\|}x$ opfylde $\|y\| = \delta$, hvoraf

$$1 \ge \|Ty\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right)\right\| = \left\|\frac{\delta}{\|x\|}Tx\right\| = \frac{\delta}{\|x\|}\|Tx\| .$$

*) Ved lineære afbildninger skrives ofte Tx i stedet for $T(x)$.

Lineariteten viser nu

$$\| Tx - Ty \| = \| T(x-y) \| \leq \frac{1}{\delta} \| x-y \| ,$$

altså at T opfylder en Lipschitz betingelse med konstant $\frac{1}{\delta}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Hvis (2) gælder med Lipschitz konstant C, har man for $\| x \| \leq 1$

$$\| Tx \| = \| Tx - T0 \| \leq C \| x-0 \| = C \| x \| \leq C ,$$

hvilket viser, at $\| T \| \leq C < \infty$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Hvis (3) er opfyldt har vi for $x \in E$ med $\| x \| \leq 1$, at $\| Tx \| \leq \| T \|$. For $x \in E \setminus \{0\}$ har vi så

$$\left\| T\left(\frac{x}{\| x \|}\right) \right\| \leq \| T \|$$

eller

$$\| Tx \| \leq \| T \| \, \| x \|$$

som også gælder for $x = 0$ og viser, at T er kontinuert i 0. Denne ulighed kombineret med lineariteten viser, at T opfylder en Lipschitz betingelse med konstant $\| T \|$, og dermed er $\| T \|$ den mindst mulige Lipschitz konstant. □

BEMÆRKNING. En lineær afbildning er altså kontinuert, netop hvis den er begrænset på enhedskuglen $\{x \in E \mid \| x \| \leq 1\}$. En kontinuert lineær afbildning $T: E \to F$ kaldes ofte en <u>begrænset operator fra</u> E <u>til</u> F.

Mængden $\mathrm{Hom}(E,F)$ af lineære afbildninger $T: E \to F$ er på naturlig måde organiseret til et vektorrum over $\mathbb{L}$ ved definitionerne

$$(S+T)(x) = Sx + Tx ,$$

$$(\lambda T)(x) = \lambda(Tx) ,$$

hvor $S,T \in \mathrm{Hom}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{L}$, $x \in E$.

For $x \in E$, $\|x\| \leq 1$ har vi

$$\|(S+T)(x)\| = \|Sx+Tx\| \leq \|Sx\| + \|Tx\| \leq \|S\| + \|T\|$$

$$\|(\lambda T)(x)\| = |\lambda| \|Tx\| \leq |\lambda| \|T\| ,$$

hvilket viser, at mængden $L(E,F)$ af kontinuerte lineære afbildninger er et underrum i $\mathrm{Hom}(E,F)$ og man ser, at $T \rightsquigarrow \|T\|$ er en norm på $L(E,F)$. (Af uligheden $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$ følger, at hvis $\|T\| = 0$, så er $Tx = 0$ for alle $x \in E$, altså T er nulvektoren i $L(E,F)$).

Vi formulerer det viste i følgende

SÆTNING 3. <u>Mængden</u> $L(E,F)$ <u>af kontinuerte lineære afbildninger</u> $T: E \to F$ <u>er et normeret rum ved fastsættelsen</u>

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| \leq 1\} .$$

<u>For</u> $T \in L(E,F)$ <u>og</u> $x \in E$ <u>gælder</u>

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| .$$

Opgaver til §4.

4.1. Gennemfør beviset for Sætningen i §4.2. Vis, at en afbildning $f\colon X \to M_1 \times M_2$ er kontinuert hvis og kun hvis $f_1 = \pi_1 \circ f$ og $f_2 = \pi_2 \circ f$ begge er kontinuerte. Vis, at en mængde $\mathcal{O} \subseteq M_1 \times M_2$ er åben i $M_1 \times M_2$ hvis og kun hvis den er forening af mængder af formen $U \times V$ med $U \in \mathcal{G}(M_1)$, $V \in \mathcal{G}(M_2)$. Vis endelig, at der om $A_i \subseteq M_i$, $i = 1,2$ gælder

$$\partial(A_1 \times A_2) = (\partial(A_1) \times \overline{A}_2) \cup (\overline{A}_1 \times \partial(A_2)).$$

4.2. Lad (M,d) være et metrisk rum. Vis, at metrikken er kontinuert som afbildning af det metriske produktrum $M \times M$ ind i $\mathbb{R}$. (Sammenlign med Opg.1.4.)

4.3. Lad $X_1 \times X_2$ være det metriske produktrum af (X_1, d_{X_1}) og (X_2, d_{X_2}) og tilsvarende $Y_1 \times Y_2$ det metriske produktrum af (Y_1, d_{Y_1}) og (Y_2, d_{Y_2}). Hvis $f_1\colon X_1 \to Y_1$ og $f_2\colon X_2 \to Y_2$, defineres en afbildning $f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ ved

$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

Vis, at f_1 og f_2 er kontinuerte hvis og kun hvis $f_1 \times f_2$ er kontinuert.

4.4. Lad $M_n(\mathbb{R})$ betegne vektorrummet af reelle $n \times n$ matricer, forsynet med maksimumsnormen

$$\|(a_{ij})\| = \max\{|a_{ij}| \mid i,j = 1,\cdots,n\}.$$

Vis, at $\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ er en kontinuert afbildning og at mængden $GL_n(\mathbb{R})$ af regulære matricer er en åben delmængde af $M_n(\mathbb{R})$.
Vis, at matrix addition og multiplikation er kontinuerte afbildninger fra $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ ind i $M_n(\mathbb{R})$, og at $A \mapsto A^{-1}$ er en homeomorfi af $GL_n(\mathbb{R})$ på sig selv.

4.5. Lad (M,d) betegne et metrisk rum, og lad F^* betegne mængden af ikke tomme afsluttede og begrænsede delmængder af M. For $A \in F^*$ og $x \in M$ sættes $d(x,A) = \inf\{d(x,a) | a \in A\}$. Vis, at $d(x,A) = 0$ hvis og kun hvis $x \in A$. Vis videre, at der ved fastsættelsen

$$D(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B),\ \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}$$

defineres en metrik D på F^* (kaldet Hausdorff-metrikken). Vis, at $x \rightsquigarrow \{x\}$ er en isometri af (M,d) ind i (F^*,D).
Lad $K(A,r) = \{x \in M | d(x,A) < r\}$ for $A \in F^*$, og $r > 0$.
Vis, at

$$D(A,B) = \inf\{r>0 | A \subseteq K(B,r) \wedge B \subseteq K(A,r)\}.$$

4.6. Lad (X_n,d_n), $n = 1,2,\cdots$ være en følge af metriske rum. Vis, at produktmængden $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ bestående af alle følger $\underline{x} = (x_n)_{n\geq 1}$, hvor $x_n \in X_n$, kan udstyres som et metrisk rum ved fastsættelsen

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \sup\{\min(d_n(x_n,y_n),\tfrac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

jvfr. Opg.1.9. Vis, at $\underline{x}_n = (x_{n1},x_{n2},\cdots)$ konvergerer mod $\underline{x} = (x_1,x_2,\cdots)$ i det metriske rum, hvis og kun hvis $\lim_{n\to\infty} x_{nj} = x_j$ i (X_j,d_j) for ethvert $j \in \mathbb{N}$.

4.7. Lad (M_1,d_1) og (M_2,d_2) være metriske rum. Vis, at for $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in M_1 \times M_2$ er

$$\operatorname{dist}(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$$

en metrik på $M_1 \times M_2$, som er ækvivalent med produktmetrikken.

4.8. Lad (X,d_X) og (Y,d_Y) være metriske rum, og lad $F(X,Y)$ betegne mængden af afbildninger $f: X \to Y$.
Vis, at der ved fastsættelsen

$$\mathrm{dist}(f,g) = \sup\{d_Y(f(x),g(x)) \wedge 1 \mid x \in X\},$$

defineres en metrik på $\mathcal{F}(X,Y)$, og at der om en følge (f_n) i $\mathcal{F}(X,Y)$ gælder, at $f_n \to f$ i $(\mathcal{F}(X,Y),\mathrm{dist})$, hvis og kun hvis $f_n \to f$ uniformt, dvs.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in X:\ d_Y(f(x),f_n(x)) \leq \varepsilon .$$

Vis, at mængden $\mathcal{C}(X,Y)$ af kontinuerte afbildninger af X ind i Y er en afsluttet delmængde af $\mathcal{F}(X,Y)$.

4.9. En følge $f_n\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ af afbildninger siges at konvergere lokalt uniformt mod $f\colon X \to Y$, såfremt der til hvert punkt $x \in X$ findes en omegn U af x, så $f_n \to f$ uniformt på U. Vis, at f er kontinuert, hvis hvert f_n er kontinuert.
Anvendelse: Sum-funktionen for en potensrække er kontinuert i konvergenscirklen.

§5. Fuldstændige metriske rum.

5.1. Cauchy følger. Fuldstændighed.

Det er af stor betydning - specielt ved eksistensbeviser - at man kan afgøre om en reel eller kompleks talfølge (x_n) er konvergent uden at kende en eventuel grænseværdi. Det bygger som bekendt på det almindelige konvergensprincip, som siger, at enhver Cauchy følge er konvergent.

Begrebet Cauchy følge kan umiddelbart generaliseres til metriske rum.

DEFINITION. En punktfølge (x_n) i et metrisk rum kaldes en Cauchy følge eller en fundamentalfølge såfremt der gælder

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N:\ d(x_n, x_m) \leq \varepsilon .$$

Som ved talfølger gælder umiddelbart, at enhver konvergent følge er en Cauchy følge, thi hvis $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ kan man til $\varepsilon > 0$ finde $N \in \mathbb{N}$, så der for $n \geq N$ gælder $d(x, x_n) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, og for $n, m \geq N$ gælder da ifølge trekantsuligheden

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

DEFINITION. Et metrisk rum (M,d) kaldes fuldstændigt, såfremt enhver Cauchy følge er konvergent.

Rummene $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ er fuldstændige metriske rum med den sædvanlige metrik, men også $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{C}^k$ med maksimum normen er fuldstændige. Hvis nemlig $x_n = (x_{n1}, \cdots, x_{nk})$, $n \geq 1$ er en Cauchy følge i $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$ sluttes af uligheden

$$|x_{nj} - x_{mj}| \leq \| x_n - x_m \|_\infty ,$$

at hver koordinatfølge $(x_{nj})_{n\geq 1}$ er en Cauchy følge, og dermed konvergent. Sættes $x_j = \lim_{n\to\infty} x_{nj}$ vil $\lim_{n\to\infty} x_n = x = (x_1, \cdots, x_k)$.

Mængden af rationale tal $\mathbb{Q}$ med den sædvanlige metrik, er som bekendt ikke fuldstændigt. F.eks. vil en følge af rationale tal (r_n) med en irrational grænseværdi, være en Cauchy følge i $\mathbb{Q}$, som ikke er konvergent i $\mathbb{Q}$. Mere almindeligt gælder

SÆTNING 1. Lad (M,d) være et fuldstændigt metrisk rum. For en ikke tom delmængde M' af M er delrummet (M',d) fuldstændigt, hvis og kun hvis M' er en afsluttet delmængde af M.

Bevis. (a) Antag først, at M' er en afsluttet delmængde af M og lad (x_n) være en Cauchy følge fra M'. Så er (x_n) også en Cauchy følge i M, og dermed findes $x \in M$, så $d(x,x_n) \to 0$. Af Sætn.4 i §2.2 følger at $x \in \overline{M'} = M'$, og dermed er vist, at (x_n) er konvergent med grænsepunkt x i det metriske rum (M',d).

(b) Antag dernæst, at (M',d) er et fuldstændigt metrisk rum. Til $x \in \overline{M'}$ findes - igen på grund af Sætning 4 i §2.2 - en følge (x_n) fra M', så $d(x,x_n) \to 0$. Dermed er (x_n) en Cauchy følge, og da M' er forudsat fuldstændigt, findes $x' \in M'$, så $d(x',x_n) \to 0$. Da (x_n) således har x og x' som grænsepunkt sluttes $x = x'$, og vi har dermed vist $\overline{M'} \subseteq M'$, altså at M' er afsluttet. □

BEMÆRKNING. Beviset under (b) giver lidt mere end formuleret i Sætning 1: Lad (M,d) være et metrisk rum og (M',d) et fuldstændigt delrum. Så er M' afsluttet i M.

Begreberne Cauchy følge og fuldstændighed er ikke topologiske begreber. I det følgende eksempel angives en metrik dist på $\mathbb{R}$, som er ækvivalent med den sædvanlige metrik, men $(\mathbb{R}, \text{dist})$ er ikke fuldstændigt.

Funktionen $\text{Arctan}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuert og afbilder $\mathbb{R}$ bijektivt på $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ved fastsættelsen

$$\text{dist}(x,y) = |\text{Arctan}\, x - \text{Arctan}\, y|$$

defineres en metrik på $\mathbb{R}$, og idet der for $0<r<\frac{\pi}{2} - |\text{Arctan}\, x|$ gælder at

$$\begin{aligned} K(x,r) &= \{y \in \mathbb{R} \mid \operatorname{Arctan} x - r < \operatorname{Arctan} y < \operatorname{Arctan} x + r\} \\ &=]\tan(\operatorname{Arctan} x - r),\ \tan(\operatorname{Arctan} x + r)[\\ &= \left] \frac{x-\tan r}{1+x\ \tan r},\ \frac{x+\tan r}{1-x\ \tan r} \right[, \end{aligned}$$

som er et åbent interval omkring x, ser man af Sætning 1 i §2.3, at dist er ækvivalent med den sædvanlige metrik. Følgen $1,2,3,\cdots$ er en Cauchy følge i $(\mathbb{R},\mathrm{dist})$ idet

$$\mathrm{dist}(n,m) = |\operatorname{Arctan} n - \operatorname{Arctan} m| ,$$

og $\operatorname{Arctan} n \to \frac{\pi}{2}$ for $n \to \infty$, men følgen er ikke konvergent i $(\mathbb{R},\mathrm{dist})$, thi så skulle den jo også være det i $\mathbb{R}$.

Vi ser videre, at billedet af et fuldstændigt metrisk rum under en homeomorfi ikke behøver at være fuldstændigt, idet Arctan er en homeomorfi af $\mathbb{R}$ på $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, som ikke er fuldstændigt ifølge Sætning 1. Derimod gælder følgende oplagte resultat

SÆTNING 2. <u>Lad</u> $f: (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ <u>være en isometri af det fuldstændige metriske rum</u> (X,d_X) <u>ind i</u> (Y,d_Y). <u>Så er billedet</u> $(f(X),d_Y)$ <u>et fuldstændigt metrisk rum</u>.

<u>Bevis</u>. Lad (y_n) være en Cauchy følge i $(f(X),d_Y)$. Følgen (x_n) i X fastlagt ved $f(x_n) = y_n$ er også en Cauchy-følge idet

$$d_X(x_n,x_m) = d_Y(f(x_n),f(x_m)).$$

Da (X,d_X) er forudsat fuldstændigt findes $x \in X$, så $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, men så gælder $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. □

5.2. <u>Banach rum</u>.

For normerede vektorrum ændres fuldstændighed ikke ved overgang til en ækvivalent norm. Hvis $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_2$ er ækvivalente normer på vektorrummet E gælder nemlig ifølge Sætning 2, §2.3, at

$$\|x\|_1 \leq k\|x\|_2$$

$$\|x\|_2 \leq \ell\|x\|_1$$

for passende konstanter $k,\ell > 0$. Heraf ses umiddelbart, at (x_n) er en Cauchy følge med hensyn til $\|\cdot\|_1$ hvis og kun hvis (x_n) er en Cauchy følge med hensyn til $\|\cdot\|_2$.

Fuldstændige normerede vektorrum er studeret i en berømt monografi af den polske matematiker Stefan Banach (1892-1945): Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932, og kaldes derfor Banach rum.

SÆTNING 1. (a) Vektorrummet $\mathcal{B}(M,\mathbb{L})$ af begrænsede funktioner på en mængde M med den uniforme norm er et Banach rum.

(b) Hvis M er et metrisk rum er underrummet $\mathcal{C}_b(M,\mathbb{L})$ af kontinuerte begrænsede funktioner afsluttet i $\mathcal{B}(M,\mathbb{L})$ og dermed et Banach rum.

Bevis. (a) Lad (f_n) være en Cauchy følge i $\mathcal{B}(M,\mathbb{L})$. For hvert $x \in M$ gælder

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_u ,$$

hvilket viser, at $(f_n(x))$ er en Cauchy følge i $\mathbb{L}$, og dermed konvergent. Ved fastsættelsen

$$x \sim \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

defineres en funktion $f: M \to \mathbb{L}$. Vi vil vise, dels at f er begrænset, og dels at $\lim f_n = f$ i den uniforme norm.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes $N \in \mathbb{N}$ så der for $n,m \geq N$ og alle $x \in M$ gælder

(*) $\quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$

Holder vi $n \geq N$ og $x \in M$ fast, og lader $m \to \infty$, må også grænseværdien af venstre side i (*) være $\leq \varepsilon$, men denne grænseværdi er $|f_n(x)-f(x)|$ ifølge Sætningerne 1 og 2 i §3.4. Da

$x \in M$ var vilkårlig sluttes, at

$$\| f_n - f \|_u \leq \varepsilon \qquad \text{for} \quad n \geq N$$

specielt

$$\| f \|_u = \| f - f_N + f_N \|_u \leq \varepsilon + \| f_N \|_u < \infty ,$$

så $f \in \mathcal{B}(M,\mathbb{L})$, og dermed er vist, at $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

(b) Det er tilstrækkeligt at vise, at hvis $f_n \to f$ uniformt på M, og hvis f_n er kontinuert for alle n, så er f kontinuert, men dette er netop vist i Sætning 2 i §3.5. □

Idet enhver kontinuert funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{L}$ er begrænset ifølge en hovedsætning i Mat 1, (beviset for denne sætning gives i næste §), har vi specielt, a~~f~~ rummet $C([a,b],\mathbb{L})$ af kontinu- t
erte funktioner $f\colon [a,b] \to \mathbb{L}$ er et Banach rum under den uniforme norm

$$\| f \|_u = \sup\{ |f(x)| \mid x \in [a,b] \} .$$

I differentialligningsteori optræder en række vigtige Banach rum, dels forskellige rum af kontinuert differentiable funktioner, dels Sobolev rummene, som det dog vil føre for vidt at komme ind på her. Vi nævner blot følgende vigtige

SÆTNING 2. <u>Mængden</u> $C^k([a,b],\mathbb{L})$ <u>af</u> k <u>gange kontinuert differentiable funktioner</u> $f\colon [a,b] \to \mathbb{L}$, $k = 0,1,2,\cdots$, <u>er et Banach rum under normen</u>

$$\| f \| = \sum_{j=0}^{k} \| D^j f \|_u .$$

<u>Bevis</u>. Det ses umiddelbart, at $\|\cdot\|$ er en norm på vektorrummet $C^k([a,b])$, og en følge (f_n) fra $C^k([a,b])$ konvergerer mod f i det normerede rum, hvis og kun hvis $(D^j f_n)$ konvergerer uniformt mod $D^j f$ for hvert $j = 0,1,\cdots,k$. Hvis (f_n) er en Cauchy følge i $C^k([a,b])$, så er $(D^j f_n)$ en Cauchy følge i $C([a,b])$ for hvert $j = 0,1,\cdots,k$ eftersom

$$\| D^j f_n - D^j f_m \|_u \leq \| f_n - f_m \| .$$

Da $C([a,b])$ er et Banach rum, findes funktioner $g_j \in C([a,b])$, så $\lim_{n\to\infty} \| D^j f_n - g_j \|_u = 0$, $j = 0,1,\cdots,k$. Af et vigtigt resultat i Mat 1 (MA XI sætn.4) følger nu at g_j tilhører $C^1([a,b])$, og $Dg_j = g_{j+1}$ for $j = 0,1,\cdots,k-1$, altså at $f = g_0 \in C^k([a,b])$, og $D^j f = g_j$ for $j = 0,1,\cdots,k$. Dermed er (f_n) konvergent i rummet $C^k([a,b])$ med grænsefunktion f. □

Lad E og F være normerede rum, og $L(E,F)$ det normerede rum af kontinuerte lineære afbildninger $T: E \to F$.

SÆTNING 3. <u>Hvis</u> F <u>er fuldstændigt er også</u> $L(E,F)$ <u>fuldstændigt</u>.

<u>Bevis</u>. Lad (T_n) være en Cauchy følge i $L(E,F)$. Idet der for $x \in E$ gælder

$$\| T_n x - T_m x \| \le \| T_n - T_m \| \, \| x \| ,$$

ses, at $(T_n x)$ er en Cauchy følge i F for ethvert $x \in E$. Da F er forudsat fuldstændigt eksisterer $\lim_{n\to\infty} T_n x$. Ved fastsættelsen $x \mapsto \lim_{n\to\infty} T_n x$ defineres en afbildning $T: E \to F$, som er lineær idet

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} (T_n x + T_n y) = \lim_{n\to\infty} T_n x + \lim_{n\to\infty} T_n y = Tx + Ty ,$$

og

$$T(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda T_n x = \lambda \lim_{n\to\infty} T_n x = \lambda Tx .$$

Undervejs er benyttet, at regneoperationerne i et normeret rum er kontinuerte, jvfr. §4.3. Til $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$, så der for $n,m \ge N$ gælder $\| T_n - T_m \| \le \varepsilon$ altså

$$\| T_n x - T_m x \| \le \varepsilon \qquad \text{for alle} \quad x \in E \quad \text{med} \quad \|x\| \le 1 .$$

For $m \to \infty$ fås heraf for $n \ge N$ og $\|x\| \le 1$, at

$$\| T_n x - Tx \| \le \varepsilon ,$$

hvilket viser, at $\| T_n - T\| \le \varepsilon < \infty$ for $n \ge N$. Heraf ses for det første, at $T_N - T \in L(E,F)$, og dermed er $T = T_N - (T_N - T) \in L(E,F)$, og dernæst, at $T_n \to T$ i det normerede rum $L(E,F)$. □

En lineær afbildning $T: E \to \mathbb{L}$ kaldes en <u>linearform</u> eller en <u>lineær funktional</u> på E. Mængden $L(E,\mathbb{L})$ af kontinuerte linearformer på E kaldes det <u>duale rum</u> til E, og betegnes E^*. Da $\mathbb{L}$ er fuldstændigt, har vi:

SÆTNING 3. <u>Det duale rum E^* af kontinuerte linearformer på et normeret rum E er et Banach rum under normen</u>

$$\| T \| = \sup\{ |Tx| \mid \|x\| \le 1\} .$$

5.3. <u>Fuldstændiggørelse</u>.

Lad (M,d) være et metrisk rum. Et fuldstændigt metrisk rum $(\hat{M},\hat{d})$ kaldes en <u>fuldstændiggørelse</u> af (M,d), hvis der findes en isometri $\varphi: (M,d) \to (\hat{M},\hat{d})$, så $\varphi(M)$ er overalt tæt i $\hat{M}$. At der altid findes en fuldstændiggørelse vises i Opgave 5.2. To vilkårlige fuldstændiggørelser $(\hat{M},\hat{d})$ og $(\tilde{M},\tilde{d})$ er isometriske, jvfr. Opg.6.12, så man kan tillade sig at tale om <u>fuldstændiggørelsen</u> af et metrisk rum. Idet (M,d) og $(\varphi(M),\hat{d})$ er isometriske, kan ethvert metrisk rum altså altid opfattes som et overalt tæt delrum af et fuldstændigt metrisk rum. !

Som generelt princip gælder, at hvis (M,d) har yderligere struktur, f.eks. som normeret rum, så kan fuldstændiggørelsen $(\hat{M},\hat{d})$ udstyres med samme struktur, eksempelvis som et Banach rum med (M,d) som tæt underrum.

Opgaver til §5.

5.1. Et punkt $a \in (M,d)$ kaldes fortætningspunkt for en punktfølge (x_n) fra M, hvis enhver kugle med centrum a indeholder x_n med vilkårligt højt index n, dvs. hvis mængden $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(a,r)\}$ er uendelig for ethvert $r > 0$. Vis, at hvis en Cauchy følge har et fortætningspunkt, så er den konvergent.

5.2. Fuldstændiggørelse. Lad (M,d) være et metrisk rum og lad $\mathcal{F}$ være mængden af Cauchy følger $x = (x_n)_{n \geq 1}$ fra M.

1° Vis, at for $x = (x_n)$ og $y = (y_n)$ i $\mathcal{F}$, er $(d(x_n,y_n))_{n \geq 1}$ en Cauchy følge i $\mathbb{R}$, så $D(x,y) = \lim_n d(x_n,y_n)$ er defineret.

2° Vis, at D er en pseudometrik på $\mathcal{F}$ (jvfr. Opg.1.10). Lad $\hat{M} = \mathcal{F}/\sim$ være det i Opg.1.10 definerede metriske rum af ækvivalensklasser $[x]$, $x \in \mathcal{F}$, med metrikken $\hat{d}([x],[y]) = D(x,y)$. Ved til $x \in M$ at knytte ækvivalensklassen indeholdende den konstante følge $\overline{x} = (x,x,\cdots)$ defineres en afbildning $\varphi\colon (M,d) \to (\hat{M},\hat{d})$.

3° Vis, at φ er en isometri, og at $\varphi(M)$ er overalt tæt i $\hat{M}$.

4° Vis, at $(\hat{M},\hat{d})$ er fuldstændigt.

Vink: Lad $([x_n])$ være en Cauchy følge fra $\hat{M}$, idet $x_n = (x_{n1},x_{n2},\cdots) \in \mathcal{F}$. Vælg for hvert $n \in \mathbb{N}$ et $y_n \in M$ så $\hat{d}([x_n],\varphi(y_n)) \leq \frac{1}{n}$. Så er $y = (y_n) \in \mathcal{F}$, og $\hat{d}([x_n],[y]) \to 0$.

5.3. Vis, at et diskret metrisk rum er fuldstændigt.

5.4. Lad (M,d) være et fuldstændigt metrisk rum. Vis, at for en dalende følge $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ af afsluttede ikke tomme mængder med $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, vil $\bigcap_1^\infty F_n$ være ikke tom og bestå af et punkt.

5.5. Lad $(M_1 \times M_2, d)$ være det metriske produktrum af (M_1,d_1) og (M_2,d_2). Vis, at $(M_1 \times M_2, d)$ er fuldstændigt, hvis og kun hvis (M_1,d_1) og (M_2,d_2) begge er fuldstændige.

5.6.* <u>(Hahn's sætning)</u>. Vis, at hvis (M,d) er fuldstændigt, så er rummet $(\mathcal{F}^*,D)$ af afsluttede og begrænsede ikke tomme delmængder med Hausdorff-metrikken igen fuldstændigt, jvfr. Opgave 4.5. <u>Vink</u>: Lad (A_n) være en Cauchy følge i $(\mathcal{F}^*,D)$. Sæt $A = \bigcap_{n=1}^\infty (\overline{\bigcup_{p\geq n} A_p})$, og vis, at A er afsluttet og begrænset.
Bestem til $\varepsilon > 0$ en følge $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$, så

$$D(A_n,A_m) < \frac{\varepsilon}{2^k} \qquad \text{for } n,m \geq n_k ,$$

og vælg $a_0 \in A_{n_0}$ vilkårligt. Bestem successivt $a_1 \in A_{n_1}$, $a_2 \in A_{n_2}$ osv., så $d(a_k,a_{k+1}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, $k = 0,1,\cdots$ og vis, at (a_n) er en Cauchy følge. Vis derved, at A er ikke tom, og at $D(A_n,A) \to 0$.

5.7. <u>Baire's sætning</u>. Lad (M,d) være et fuldstændigt metrisk rum, og lad $(G_n)_{n\geq 1}$ være en følge af åbne tætte delmængder af M. Vis, at $\bigcap_{n=1}^\infty G_n$ er tæt i M.
<u>vink</u>: Vis $K(x,r) \cap \bigcap_1^\infty G_n \neq \emptyset$ for fast $x \in M$, $r > 0$. Gør rede for, at man kan vælge $x_1,x_2,\cdots \in M$ og $r_1,r_2,\cdots \in \,]0,\infty[$, så

$$\overline{K(x_1,r_1)} \subseteq K(x,r) \cap G_1, \qquad r_1 < \frac{r}{2}$$
$$\overline{K(x_2,r_2)} \subseteq K(x_1,r_1) \cap G_2, \qquad r_2 < \frac{r_1}{2}$$
$$\vdots$$
$$\overline{K(x_{n+1},r_{n+1})} \subseteq K(x_n,r_n) \cap G_{n+1}, \qquad r_{n+1} < \frac{r_n}{2}$$
$$\vdots$$

og anvend 5.4.

5.8. Lad $D: C^1([a,b]) \to C([a,b])$ være differentiationsafbildningen $f \rightsquigarrow f'$.

1^o Vis, at $\|D\| = \infty$, hvis $C([a,b])$ og $C^1([a,b])$ begge er forsynet med den uniforme norm.

2^o Vis, at $\|D\| = 1$, hvis $C([a,b])$ er forsynet med den uniforme norm, og $C^1([a,b])$ med normen

$$\|f\| = \|f\|_u + \|Df\|_u .$$

5.9. Lad $C^1_\#(\mathbb{R}^2)$ betegne vektorrummet af C^1-funktioner $f(x,y)$ på $\mathbb{R}^2$, der er periodiske i x og i y med periode 2π, dvs.

$$f(x+2\pi,y) = f(x,y) = f(x,y+2\pi)$$

for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vis, at $C^1_\#(\mathbb{R}^2)$ er et Banach rum med normen

$$\|f\| = \|f\|_u + \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_u + \left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_u .$$

5.10. Betragt mængden $C^1([-1,1])$ af C^1-funktioner $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ som et normeret rum med den uniforme norm $\|f\|_u$.
Vis, at $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $n=1,2,\ldots$ udgør en Cauchy følge i $C^1([-1,1])$ og slut, at rummet ikke er fuldstændigt.

5.11. Vis, at en følge (x_n) i et metrisk rum (M,d) er en Cauchy følge såfremt

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n,x_{n+1}) < \infty .$$

Vis ved et eksempel i $M = \mathbb{R}$, at denne betingelse ikke er nødvendig, for at (x_n) er en Cauchy følge.

5.12. Lad M være et normeret rum. Vis, at fuldstændiggørelsen $\hat{M}$ fra Opgave 5.2 kan organiseres som et Banach rum, så afbildningen $\varphi: M \to \hat{M}$ er lineær.

§6. Kompakte mængder. Uniform kontinuitet.

6.1. En karakterisation af afsluttede og begrænsede mængder i $\mathbb{R}^k$.

En af de fundamentale sætninger i analysen er følgende sætning af K. Weierstrass: En kontinuert reel funktion på et begrænset, afsluttet interval i $\mathbb{R}$ er begrænset og har såvel en størsteværdi og en mindsteværdi.

Vi vil studere denne sætnings generalisation til talrummene $\mathbb{R}^k$ og til metriske rum, og derved give et bevis for hovedsætningerne 1.a-1.c i Kapitel III i Mat 1 MA. I denne sammenhæng spiller begrebet fortætningspunkt - kendt for følger i $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^*$ - en central rolle.

DEFINITION. Et punkt a i et metrisk rum (M,d) kaldes fortætningspunkt for en punktfølge (x_n), såfremt enhver kugle $K(a,r)$ indeholder x_n for uendeligt mange n, dvs. såfremt mængden

$$\{n \in \mathbb{N} \mid d(a,x_n) < r\} \text{ er uendelig for ethvert } r > 0 .$$

Ækvivalent hermed er at (x_n) har en delfølge $(x_{n_p})_{p\geq 1}$ som konvergerer mod a. Heraf ses, at fortætningspunkt er et topologisk begreb.

SÆTNING. For en delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er følgende to betingelser ensbetydende:

(1) A er afsluttet og begrænset.

(2) Enhver punktfølge fra A har et fortætningspunkt i A.

Bevis. (1) $\Rightarrow$ (2). Lad $x_n = (x_n^1, x_n^2, \cdots, x_n^k)$, $n = 1,2,\cdots$ være en punktfølge fra A som er forudsat begrænset og dermed indeholdt i en kugle $\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_\infty < r\}$. Idet hver koordinatfølge $(x_n^j)_{n\geq 1}$ er begrænset, nemlig $|x_n^j| < r$, har den et fortætningspunkt x^j. Imidlertid behøver $x = (x^1,\cdots,x^k)$ ikke at være fortætningspunkt for (x_n) (overvej dette!), og vi må bære os mere snedigt ad. Følgen (x_n^1) af første koordinater har en delfølge $(x^1_{n_p})$ der konvergerer mod et fortætningspunkt x^1. Den tilsvarende delfølge af anden koordinater $(x^2_{n_p})_{p\geq 1}$ er ligeledes begrænset af r og har derfor en delfølge $(x^2_{n_{p_q}})_{q\geq 1}$ der konvergerer mod et fortætningspunkt x^2 for (x^2_n). Så gælder

$$\lim_{q\to\infty} x^1_{n_{p_q}} = x^1 \,, \quad \lim_{q\to\infty} x^2_{n_{p_q}} = x^2 \,,$$

og dermed er (x^1,x^2) fortætningspunkt for (x_n) i tilfældet $k = 2$. Hvis $k = 3$ må ræsonnementet fortsættes ved at $(x^3_{n_{p_q}})$ udtyndes til en konvergent delfølge, og generelt foretages k successive valg af delfølger, så vi ender med en følge $1 \leq m_1 < m_2 < \cdots$ af naturlige tal med egenskaben

$$\lim_{k\to\infty} x^j_{m_k} = x^j$$

for $j = 1,\cdots,k$, hvorved $(x^1,x^2,\cdots,x^k)$ er fortætningspunkt for (x_n), og det tilhører den afsluttede mængde A, da det er grænsepunkt for en punktfølge fra A.

(2) $\Rightarrow$ (1). Dette bevises indirekte. Vi antager altså, at A ikke er afsluttet og begrænset, og at enhver punktfølge fra A har et fortætningspunkt i A.

Der er to muligheder: Hvis A ikke er afsluttet findes $x \in \bar{A} \setminus A$, og vi kan da finde en følge (x_n) fra A med $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Da (x_n) har et fortætningspunkt $x' \in A$ findes en delfølge (x_{n_p}) så $\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = x'$, men da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, må også $\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = x$, hvoraf $x = x'$, altså $x \in A$, hvilket er en modstrid.

Hvis A er afsluttet men ubegrænset, når vi til en modstrid på følgende måde. Først vælges $x_1 \in A$. Da A er ubegrænset kan vi vælge $x_2 \in A \setminus K(x_1,1)$. Da $K(x_1,1) \cup K(x_2,1)$ er begrænset, kan den ikke indeholde A, så vi kan vælge $x_3 \in A \setminus K(x_1,1) \cup K(x_2,1)$. Fortsættes på denne måde finder vi en følge (x_n) fra A med egenskaben

$$x_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i,1)\ , \qquad n = 1,2,\cdots ,$$

altså

$$d(x_n,x_m) \geq 1 \qquad \text{for} \quad n \neq m ,$$

men denne følge kan ikke have et fortætningspunkt. □

BEMÆRKNING. Af beviset ses at $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er begrænset, hvis og kun hvis enhver punktfølge fra A har en konvergent delfølge. Specielt har vi Bolzano-Weierstrass' sætning: En begrænset punktfølge i $\mathbb{R}^k$ har en konvergent delfølge.

6.2. Kompakte mængder.

I tilknytning til Sætningen i §6.1 giver vi følgende

DEFINITION. En delmængde K af et metrisk rum (M,d) kaldes kompakt, hvis enhver punktfølge fra K har et fortætningspunkt i K.

Da der ikke findes følger fra $K = \emptyset$, er $\emptyset$ kompakt. For $K = M$ er ovenstående en definition af begrebet kompakt metrisk rum. Bemærk at $K \neq \emptyset$ er en kompakt delmængde af (M,d), hvis og kun hvis delrummet (K,d) er et kompakt metrisk rum. Med brug af den nye terminologi udsiger den foregående sætning simpelthen, at de kompakte delmængder af $\mathbb{R}^k$ er præcis de afsluttede og begrænsede delmængder af $\mathbb{R}^k$. Da $\mathbb{C}^k$ er isometrisk med $\mathbb{R}^{2k}$ gælder samme udsagn om $\mathbb{C}^k$.

Den anden del af beviset for Sætningen i §6.1 kan uden videre overføres til et vilkårligt metrisk rum, hvorfor der gælder: En kompakt delmængde af et metrisk rum er afsluttet og begrænset. Den første del af beviset udnytter derimod specielle egenskaber ved talrummet, og gælder ikke i almindelighed.

EKSEMPEL. Enhver endelig mængde i et metrisk rum (M,d) er kompakt, thi hvis (x_n) er en punktfølge fra en endelig mængde K, må mindst et element være lig med x_n for uendeligt mange n. I et diskret metrisk rum (M,d), er der ikke andre kompakte mængder end de endelige, da en punktfølge kun er konvergent hvis den er konstant fra et vist trin. På den anden side, er enhver delmængde af et diskret metrisk rum, både afsluttet og begrænset.

Vi vil nu vise hovedsætningerne 1-5 om kompakte mængder og rum.

SÆTNING 1. Hvis (X,d_X) og (Y,d_Y) er metriske rum, K en kompakt delmængde af X og $f: K \to Y$ en kontinuert afbildning, da er billedmængden $f(K)$ en kompakt delmængde af Y.

Bevis. Lad (y_n) være en punktfølge fra $f(K)$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ kan vi vælge $x_n \in K$, så $f(x_n) = y_n$, og da K er kompakt findes $x \in K$, og en delfølge (x_{n_p}) af (x_n) så $\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = x$. Af sætningen i §3.1 følger at $\lim_{p\to\infty} f(x_{n_p}) = \lim_{p\to\infty} y_{n_p} = f(x) \in f(K)$, hvilket viser, at $f(K)$ er kompakt. □

Hvis $X = \mathbb{R}^k$ og $Y = \mathbb{R}^m$ genfinder man netop Hovedsætning 1.C fra Mat 1 MA. For en ikke tom, kompakt delmængde A af $\mathbb{R}$ (altså en ikke tom, afsluttet og begrænset delmængde A af $\mathbb{R}$), må gælde $\sup A \in A$ og $\inf A \in A$. En ikke tom, kompakt delmængde A af $\mathbb{R}$ indeholder altså et største og et mindste tal. Af Sætning 1 fremgår derfor følgende sætning, der indeholder den indledningsvis nævnte sætning af Weierstrass:

SÆTNING 2. En kontinuert reel funktion på en kompakt delmængde af et metrisk rum er begrænset og har såvel en størsteværdi og en mindsteværdi.

COROLLAR. Lad (M,d) være et kompakt metrisk rum. Rummet $C(M,\mathbb{L})$ af kontinuerte funktioner $f: M \to \mathbb{L}$ er et Banach rum under den uniforme norm

$$\| f\|_u = \sup\{ |f(x)| \mid x \in M\} = \max\{ |f(x)| \mid x \in M\} .$$

Bevis. Rummet $C(M,\mathbb{L})$ er identisk med rummet $C_b(M,\mathbb{L})$ af kontinuerte begrænsede funktioner på M studeret i §5.2. □

Vi vil nu undersøge hvordan kompakthed opfører sig ved konstruktion af delrum og produktrum.

SÆTNING 3. Lad (M,d) være et kompakt metrisk rum. En ikke tom delmængde $K \subseteq M$ er kompakt hvis og kun hvis K er afsluttet.

Bevis. Vi har tidligere bemærket, at en kompakt mængde er afsluttet. Antag dernæst, at K er afsluttet og lad (x_n) være en punktfølge fra K. Da M er kompakt findes en delfølge (x_{n_p}) og $x \in M$, så $\lim_{n\to\infty} x_{n_p} = x$, men da K er afsluttet, må $x \in K$, hvilket viser, at K er kompakt. □

SÆTNING 4. Lad $(M_1 \times M_2, d)$ være det metriske produktrum af (M_1,d_1) og (M_2,d_2). Så er $(M_1 \times M_2, d)$ kompakt hvis og kun hvis (M_1,d_1) og (M_2,d_2) begge er kompakte.

Bevis. Antag først, at (M_1,d_1) og (M_2,d_2) er kompakte, og lad $x_n = (x_n', x_n'')$, $n = 1,2,\cdots$ være en punktfølge fra $M_1 \times M_2$. Da M_1 er kompakt, findes en konvergent delfølge (x'_{n_p}) af (x_n') med grænseværdi x', og da M_2 er kompakt, har (x''_{n_p}) en konvergent delfølge $(x''_{n_{p_q}})$ med grænseværdi x''. Da $(x'_{n_{p_q}})$ som delfølge af (x'_{n_p}) også har grænseværdien x', sluttes af sætningen i §4.2, at $(x_{n_{p_q}})$ konvergerer mod (x',x'').

Antages dernæst, at produktrummet $M_1 \times M_2$ er kompakt, er billedrummet $M_1 = \pi_1(M_1 \times M_2)$ af $M_1 \times M_2$ under den kontinuerte projektion $\pi_1(x_1,x_2) = x_1$ også kompakt ifølge Sætning 1. Analogt ses $M_2 = \pi_2(M_1 \times M_2)$, at være kompakt. □

Vi har indset, at en kontinuert bijektiv afbildning, ikke behøver at være en homeomorfi. Hvis afbildningen er defineret på et kompakt rum, gælder påstanden imidlertid:

SÆTNING 5. Lad $f: (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ være en kontinuert bijektiv afbildning. Hvis (X,d_X) er kompakt, er f en homeomorfi.

Bevis. Lad $g = f^{-1}: Y \to X$. Vi skal nu vise, at g er kontinuert, og ifølge Sætning 1' i §3.1 er det tilstrækkeligt at vise, at for enhver afsluttet mængde $F \subseteq X$ er $g^{-1}(F) = f(F)$ afsluttet i Y. Ifølge Sætning 3 er F kompakt og dermed er $f(F)$ kompakt, altså specielt afsluttet. □

6.3. Ækvivalens af normer på et endelig dimensionalt vektorrum.

Ved valg af en basis er et k-dimensionalt vektorrum isomorft med $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$, og da $\mathbb{C}^k$ opfattet som reelt vektorrum, er isomorft med $\mathbb{R}^{2k}$, og en norm på $\mathbb{C}^k$ derved kan opfattes som en norm på $\mathbb{R}^{2k}$, er det nok at vise følgende:

SÆTNING. Alle normer på $\mathbb{R}^k$ er ækvivalente.

Bevis. Det er tilstrækkeligt at vise, at en vilkårlig norm $\|\cdot\|$ på $\mathbb{R}^k$ er ækvivalent med maksimumsnormen $\|\cdot\|_\infty$, altså at der i henhold til Sætning 2 i §2.3 findes konstanter $\alpha,\beta > 0$ så

$$(*) \qquad \|x\| \leq \alpha\|x\|_\infty \quad \text{og} \quad \|x\|_\infty \leq \beta\|x\| \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^k .$$

To vilkårlige normer er altså begge ækvivalente med maksimumsnormen, og dermed indbyrdes ækvivalente.

Når vi i det følgende benytter begreberne brgrænset mængde, afsluttet mængde, kompakt mængde og kontinuert funktion, skal disse forstås i relation til den ved maksimumsnormen bestemte metrik i $\mathbb{R}^k$.

Lad $e_1,\cdots,e_k$ betegne basisvektorerne $(1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1)$ i $\mathbb{R}^k$. For $x = (x_1,\cdots,x_k) \in \mathbb{R}^k$ gælder altså $x = x_1e_1 + \cdots + x_ke_k$, og dermed ifølge (N3) og (N2)

$$\|x\| \leq \|x_1e_1\| + \cdots + \|x_ke_k\| = |x_1|\,\|e_1\| + \cdots + |x_k|\,\|e_k\| \leq \alpha\|x\|_\infty ,$$

hvor $\alpha = \|e_1\| + \cdots + \|e_k\|$ er uafhængigt af $x \in \mathbb{R}^k$.

For $x,y \in \mathbb{R}^k$ gælder specielt

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\| \leq \alpha\|x-y\|_\infty ,$$

hvilket viser, at $\|\cdot\|: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ opfylder en Lipschitz betingelse, og dermed er $\|\cdot\|$ kontinuert. Mængden $S = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_\infty = 1\}$ er afsluttet og begrænset, altså kompakt, så ifølge Sætning 2 i §6.2 har $\|\cdot\|$ en mindsteværdi på S, dvs. der findes $x_0 \in S$ så

$$\inf\{\|x\| \mid x \in S\} = \|x_0\| ,$$

og da $0 \notin S$, er $\|x_0\| > 0$. Hvert $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ kan skrives på formen $x = \lambda\xi$ med $\lambda = \|x\|_\infty$, $\xi = \frac{x}{\|x\|_\infty} \in S$, og dermed har vi

$$\|x\| = \|\lambda\xi\| = |\lambda|\,\|\xi\| \geq |\lambda|\,\|x_0\| = \|x\|_\infty \|x_0\|$$

eller

$$\|x\|_\infty \leq \beta\|x\| , \quad \text{når} \quad \beta = \frac{1}{\|x_0\|} .$$

Denne ulighed gælder trivielt for $x = 0$, og dermed er (*) eftervist. □

BEMÆRKNINGER. Da $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{C}^k$ udstyret med maksimumsnormen er fuldstændige, gælder det samme, når vi benytter en vilkårlig anden norm. Vi har derfor: <u>Ethvert endelig dimensionalt normeret rum er et Banachrum</u>.

Da et fuldstændigt delrum er afsluttet har vi også, at <u>ethvert endelig dimensionalt underrum i et normeret rum er afsluttet</u>.

6.4. <u>Åbne overdækninger</u>.

I forbindelse med undersøgelser af det man i dag kalder Lebesgue målet, og som vi skal studere i næste kapitel, opstillede den franske matematiker E. Borel (1871-1956) følgende resultat (1894):

Hvis en følge af åbne delmængder af $\mathbb{R}$ overdækker et afsluttet begrænset interval, så vil allerede endeligt mange af de åbne mængder overdække intervallet.

Lad os præcisere sprogbrugen. En familie $(A_i)_{i\in I}$ af delmængder af en mængde M siges at overdække en delmængde $X \subseteq M$, såfremt $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Man siger også, at $(A_i)_{i\in I}$ er en overdækning af X. Hvis I er endelig eller numerabel taler man om en endelig eller numerabel overdækning. Hvis $J \subseteq I$ og også $(A_i)_{i\in J}$ overdækker X, siger man, at overdækningen $(A_i)_{i\in I}$ kan udtyndes til overdækningen $(A_i)_{i\in J}$. Hvis alle mængderne A_i i overdækningen er åbne (i et metrisk rum M) taler man om en åben overdækning. Borel's sætning kan altså formuleres således: Enhver numerabel åben overdækning af et afsluttet begrænset interval kan udtyndes til en endelig overdækning.

I 1920'erne blev man klar over at åbne overdækninger spiller en central rolle for kompakthed, idet følgende hovedresultat blev bevist:

SÆTNING. For en delmængde A af et metrisk rum (M,d) er følgende betingelser ensbetydende:

(1) A er kompakt.

(2) Enhver åben overdækning af A kan udtyndes til en endelig overdækning.

Bevis. (2) $\Rightarrow$ (1). Vi viser $\neg(\cancel{2})^{1} \Rightarrow \neg(\cancel{1})^{2}$. Lad (x_n) være en følge af punkter fra A som ikke har noget fortætningspunkt i A. For ethvert $y \in A$ findes da en kugle $K(y,r_y)$, således at mængden

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(y,r_y)\}$$

er endelig. Familien $(K(y,r_y))_{y\in A}$ er en åben overdækning af A, som ikke kan udtyndes til en endelig overdækning, idet der for $K(y_1,r_{y_1}),\cdots,K(y_p,r_{y_p})$ gælder, at

$$\mathbb{N} \neq \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(y_1,r_{y_1})\} \cup \cdots \cup \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(y_p,r_{y_p})\},$$

da højre side er en endelig mængde, og dermed kan $K(y_1,r_{y_1}),\cdots,K(y_p,r_{y_p})$ ikke overdække A.

(1) $\Rightarrow$ (2). Antag (1) opfyldt og lad $(G_i)_{i\in I}$ være en åben overdækning af A. Det skal vises, at den kan udtyndes til en endelig overdækning. Hvis $A = \emptyset$, er sagen klar. Vi antager derfor $A \neq \emptyset$. Beviset består i to skridt.

(α) Der findes et $\rho > 0$ således at for ethvert $x \in A$ er kuglen $K(x,\rho)$ delmængde af en af mængderne G_i.

I modsat fald fandtes for ethvert $n \in \mathbb{N}$ et punkt $x_n \in A$, så at $K(x_n, \frac{1}{n})$ ikke var delmængde af noget G_i. Ifølge (1) har følgen (x_n) et fortætningspunkt $x \in A$. For et vist $i \in I$ gælder altså $x \in G_i$. Da G_i er åben, findes et $r > 0$, så at $K(x,r) \subseteq G_i$. Da $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K(x, \frac{1}{2}r)\}$ er uendelig, kan vi finde et n, så at $x_n \in K(x, \frac{1}{2}r)$ og $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}r$. Da gælder $K(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq K(x,r) \subseteq G_i$, i strid med, at $K(x_n,\frac{1}{n})$ ikke er delmængde af noget G_i.

(β) Vi vælger et vilkårligt punkt $y_1 \in A$. Hvis $A \subseteq K(y_1,\rho)$, er A overdækket af en af mængderne G_i. I modsat fald vælges et punkt $y_2 \in A \setminus K(y_1,\rho)$. Hvis $A \subseteq K(y_1,\rho) \cup K(y_2,\rho)$ er A overdækket af to af mængderne G_i. Således fortsættes, og vi må ende med at få en overdækning af A med et endeligt antal af mængderne G_i. Thi hvis processen fortsatte i det uendelige, fremkom jo en følge y_n af punkter fra A, for hvilken $\mathrm{dist}(y_n,y_m) \geq \rho$ for $n \neq m$, og en sådan følge kan åbenbart ikke have noget fortætningspunkt. $\square$

BEMÆRKNING. På grund af ovenstående sætning vil man i mange lærebøger se, at kompakthed er <u>defineret</u> ved <u>overdækningsegenskaben</u> (2), der er meget bekvem ved teoretiske overvejelser, og som har den yderligere fordel, at den umiddelbart kan benyttes som definition af kompakt mængde i et (Hausdorff) topologisk rum. Betingelsen (1): Enhver punktfølge fra A har et fortætningspunkt i A, har umiddelbart mening i et topologisk rum og en mængde A med denne egenskab kaldes <u>sekventielt kompakt</u>. For topologiske rum er (1) og (2) ikke længere ensbetydende. Det er let at bevise kompakthedsteoriens hovedsætninger ud fra overdækningsegenskaben, jvfr. Opgave 6.5.

6.5. Uniform kontinuitet.

Idet (X,d_X) og (Y,d_Y) er metriske rum siges en afbildning $f: X \to Y$ at være uniformt kontinuert (eller ligeligt kontinuert), hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$ således at der for vilkårlige $x_1, x_2 \in X$ gælder

$$d_X(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon .$$

Skrevet med logiske symboler udtrykkes definitionen således:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall x_1,x_2 \in X: \, d_X(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon .$$

En uniformt kontinuert afbildning er øjensynligt kontinuert, medens det omvendte ikke behøver at være tilfældet.

F.eks. er den ved $f(x) = x^2$ definerede funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinuert, men ikke uniformt kontinuert, idet

$$f(n+\tfrac{1}{n}) - f(n) = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 \qquad \text{for alle } n \in \mathbb{N} .$$

Hvis f opfylder en Lipschitz betingelse med konstant C er f uniformt kontinuert, idet man til $\varepsilon > 0$ kan vælge $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$.

Uniform kontinuitet er ikke et topologisk begreb, jvfr. Opgave 6.13. Hvis X eller Y derimod er et normeret rum vil overgang til en ækvivalent norm ikke ændre på om en afbildning er uniformt kontinuert.

Begrebet uniform kontinuitet blev behandlet af den tyske matematiker E. Heine (1821-1881), der i 1872 viste, at en kontinuert funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ på et afsluttet, begrænset interval er uniformt kontinuert. Dette resultat er indeholdt i følgende hovedresultat.

SÆTNING 1. En kontinuert afbildning $f: (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ af et kompakt metrisk rum (X,d_X) ind i et metrisk rum (Y,d_Y) er uniformt kontinuert.

Bevis. Antag, at f ikke er uniformt kontinuert, altså

$$\exists \, \varepsilon > 0 \, \forall \, \delta > 0 \, \exists \, x_1,x_2 \in X: \, (d_X(x_1,x_2) < \delta) \wedge (d_Y(f(x_1),f(x_2)) \geq \varepsilon) .$$

Lad $\varepsilon > 0$ være et tal, der opfylder ovenstående udsagn. Sættes successivt $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ ser man, at der eksisterer følger (x_n') og (x_n'') fra X opfyldende

$$d_X(x_n', x_n'') < \frac{1}{n}, \quad d_Y(f(x_n'), f(x_n'')) \geq \varepsilon .$$

Da det metriske produktrum $X \times X$ er kompakt ifølge Sætning 4 i §6.2 findes $(x', x'') \in X \times X$ og en delfølge (x_{n_p}', x_{n_p}'') af (x_n', x_n'') så $x_{n_p}' \to x'$ og $x_{n_p}'' \to x''$. Idet

$$\lim_{p\to\infty} d_X(x_{n_p}', x_{n_p}'') = d_X(x', x'')$$

(jvfr. Opgave 1.4 og 4.2), og $d_X(x_{n_p}', x_{n_p}'') < \frac{1}{n_p}$ sluttes $d_X(x', x'') = 0$ altså $x' = x''$. Af f's kontinuitet i punktet $x' = x''$ følger dernæst at

$$\lim_{p\to\infty} f(x_{n_p}') = \lim_{p\to\infty} f(x_{n_p}'') = f(x') = f(x''),$$

hvoraf som ovenfor

$$\lim_{p\to\infty} d_Y(f(x_{n_p}'), f(x_{n_p}'')) = d_Y(f(x'), f(x'')) = 0 .$$

Dette er imidlertid i modstrid med at $d_Y(f(x_n'), f(x_n'')) \geq \varepsilon$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og vi kan konkludere, at f er uniformt kontinuert. □

Som en vigtig anvendelse af uniform kontinuitet viser vi

SÆTNING 2. <u>Lad</u> $f: A \to (Y, d_Y)$ <u>være en afbildning af en delmængde</u> A <u>i et metrisk rum</u> (X, d_X). <u>Hvis</u>

(i) (Y, d_Y) <u>er fuldstændigt</u>,

og

(ii) f <u>er uniformt kontinuert på delrummet</u> (A, d_X), <u>så kan</u> f <u>på en og kun en måde udvides til en kontinuert afbildning</u> $\tilde{f}: \bar{A} \to (Y, d_Y)$.

<u>Udvidelsen</u> $\tilde{f}$ <u>er endda uniformt kontinuert</u>.

<u>Bevis</u>. Vi foretager først en analyse af situationen og antager at $\tilde{f}: \bar{A} \to (Y,d_Y)$ er en kontinuert udvidelse af f, dvs. $\tilde{f}(x) = f(x)$ for alle $x \in A$. Til vilkårligt $x \in \bar{A} \setminus A$ findes en punktfølge (x_n) fra A så $x_n \to x$, og da $\tilde{f}$ er kontinuert i x gælder $\tilde{f}(x) = \lim \tilde{f}(x_n) = \lim f(x_n)$. Dette viser, endda uden brug af forudsætningerne (i) og (ii), at $\tilde{f}$ er entydigt bestemt. Dette sidste er i øvrigt også en konsekvens af Sætning 2 i §3.2.

For dernæst under brug af forudsætningerne (i) og (ii) at vise eksistensen af en udvidelse $\tilde{f}: \bar{A} \to Y$ bemærkes først: <u>Hvis</u> $x \in \bar{A}$ <u>og</u> (x_n) <u>er en vilkårlig følge fra</u> A <u>gående mod</u> x, <u>så er</u> $(f(x_n))$ <u>en Cauchy følge i</u> Y.

Til $\varepsilon > 0$ findes nemlig et $\delta > 0$ i henhold til f's uniforme kontinuitet på A, således at der for alle $x_1, x_2 \in A$ gælder

$$(*) \qquad d_X(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon .$$

Da (x_n) er konvergent og dermed en Cauchy følge findes $N \in \mathbb{N}$, så der for $n,m \geq N$ gælder $d_X(x_n,x_m) < \delta$, hvoraf

$$d_Y(f(x_n),f(x_m)) < \varepsilon \qquad \text{for} \quad n,m \geq N .$$

Da (Y,d_Y) er forudsat fuldstændigt eksisterer $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Denne grænseværdi afhænger af $x \in \bar{A}$, men kunne også tænkes at afhænge af den fra A betragtede følge (x_n), der konvergerer mod x. At det <u>ikke</u> er tilfældet ses således: Hvis (x_n) og (y_n) er to følger fra A, der begge konvergerer mod x vil den blandede følge $x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots$ også konvergere mod x, men ifølge bemærkningen ovenfor, har alle tre følger

$$(f(x_n)),\ (f(y_n)) \quad \text{og} \quad f(x_1),f(y_1),f(x_2),f(y_2),\cdots$$

en grænseværdi i Y. Da de to første er delfølger af den sidste, må alle tre grænseværdier være ens.

Det er nu tilladeligt at definere $\tilde{f}: \bar{A} \to Y$ ved

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \quad \text{for} \quad x \in \bar{A},\ x_n \in A,\ x_n \to x .$$

At $\tilde{f}(x) = f(x)$ for $x \in A$ følger straks ved at betragte den konstante følge $x, x, \cdots$, og at $\tilde{f}$ er uniformt kontinuert følger således: Til $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$ i henhold til (*). Lad $x', x'' \in \bar{A}$ opfylde $d_X(x', x'') < \delta$. Vælges (x_n') og (x_n'') fra A så $x_n' \to x'$, $x_n'' \to x''$, vil $d_X(x_n', x_n'') \to d_X(x', x'')$, og altså findes $N \in \mathbb{N}$, så der for $n \geq N$ gælder $d_X(x_n', x_n'') < \delta$. Ifølge (*) gælder så

$$d_Y(f(x_n'), f(x_n'')) < \varepsilon \qquad \text{for} \quad n \geq N,$$

hvoraf

$$d_Y(\tilde{f}(x'), \tilde{f}(x'')) = \lim_{n\to\infty} d_Y(f(x_n'), f(x_n'')) \leq \varepsilon . \qquad \square$$

BEMÆRKNING. I forbindelse med Sætning 2 kan vi formulere følgende princip: Egenskaber ved f forbliver gyldige for $\tilde{f}$. Som et eksempel herpå viser vi:

SÆTNING 3. *Lad $f: A \to F$ være en kontinuert lineær afbildning af et tæt underrum A af et normeret rum E ind i et Banachrum F.*

Den entydige kontinuerte udvidelse $\tilde{f}: E \to F$ af f er lineær og $\|f\| = \|\tilde{f}\|$.

Bevis. Ifølge Sætning 2 i §4.3 opfylder f en Lipschitz betingelse med konstant $\|f\|$ og er specielt uniformt kontinuert, så Sætning 2 kan anvendes. At $\tilde{f}(x+y) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)$ ses nu ved at vælge følger (x_n) og (y_n) fra A, så $x_n \to x$, $y_n \to y$. Dermed gælder $x_n + y_n \to x+y$, så

$$\tilde{f}(x+y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n) + f(y_n))$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y),$$

og tilsvarende ses, at $\tilde{f}(\lambda x) = \lambda \tilde{f}(x)$, altså er $\tilde{f}$ lineær. Af uligheden $\|f(x)\| \leq \|f\| \, \|x\|$ for $x \in A$, fås ved grænseovergang $\|\tilde{f}(x)\| \leq \|f\| \, \|x\|$ for $x \in E$, hvoraf $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$, og den modsatte ulighed gælder, da $\tilde{f}$ udvider f, altså $\|f\| = \|\tilde{f}\|$. $\square$

Opgaver til §6.

6.1. Vis, at et kompakt metrisk rum er fuldstændigt.

6.2. Lad (M,d) være et metrisk rum. Idet afstanden mellem to ikke tomme delmængder A og B af M defineres ved

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\},$$

og specielt $d(x,A) = d(\{x\},A)$, skal man vise følgende:
(1) Hvis A er kompakt findes for hvert $x \in M$ et punkt $a \in A$, så $d(x,A) = d(x,a)$.
(2) Hvis A og B begge er kompakte findes $a \in A$ og $b \in B$ så

$$d(a,b) = d(A,B).$$

(3) Hvis $M = \mathbb{R}^k$, og hvis $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er afsluttet, $B \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt, så findes $a \in A$, $b \in B$ så

$$d(a,b) = d(A,B).$$

(4) Giv et eksempel på to afsluttede disjunkte mængder A,B i $\mathbb{R}$ med $d(A,B) = 0$.

6.3. Lad (M,d) være et kompakt metrisk rum. Vis, at der findes $a,b \in M$ så $d(a,b) = \operatorname{diam} M$.

6.4. Lad (X,d_X) og (K,d_K) være metriske rum, og antag at K er kompakt. For en kontinuert funktion $f\colon X \times K \to \mathbb{L}$ betragtes for hvert $x \in X$ snitfunktionen $f_x\colon K \to \mathbb{L}$ givet ved $k \mapsto f_x(k) = f(x,k)$. Vis, at f_x tilhører Banachrummet $C(K,\mathbb{L})$. Vis videre, at hvis $x_n \to x$ i X, så vil $f_{x_n} \to f_x$ uniformt på K (gør det indirekte), og gør rede for, at det medfører, at $x \mapsto f_x$ er en kontinuert afbildning af X ind i $C(K,\mathbb{L})$.

6.5. Benyt overdækningsegenskaben til at vise hovedsætningerne 1-3 i §6.2 om kompakte mængder.

6.6. Lad (M,d) være et metrisk rum. Vis, at M er kompakt hvis og kun hvis fællesmængdeprincippet er opfyldt: For enhver familie $(F_i)_{i\in I}$ af afsluttede mængder i M gælder, at hvis $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, så findes endelig mange indices $i_1,\dots,i_n \in I$, så

$$F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} = \emptyset .$$

6.7. Lad (M,d) være et kompakt metrisk rum og lad $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ være en dalende følge af afsluttede ikke tomme mængder. Vis, at $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

6.8. Idet afstand mellem mængder er defineret i Opgave 6.2, betragter vi for en afbildning $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ følgende betingelser:

(1) f er uniformt kontinuert.

(2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall A \subseteq X$: $(\operatorname{diam} A \le \delta \Rightarrow \operatorname{diam} f(A) \le \varepsilon)$.

(3) $\forall A,B \subseteq X$: $(d_X(A,B) = 0 \Rightarrow d_Y(f(A),f(B)) = 0)$.

Vis, at (1) $\Leftrightarrow$ (2), og at (1) $\Rightarrow$ (3).

6.9.* Med betegnelserne fra 6.8 skal man vise Efremovich's sætning: (3) $\Rightarrow$ (1).
Vink: Antag, at f ikke er uniformt kontinuert. Udnyt dette til at finde $\varepsilon_0 > 0$, og følger (a_n) og (b_n) fra X, så der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$d_X(a_n,b_n) < \frac{1}{n}, \quad d_Y(f(a_n),f(b_n)) \ge \varepsilon_0 .$$

Se på følgende 3 muligheder, idet $\alpha_n = f(a_n), \beta_n = f(b_n)$:

(1) Der findes $n_0 \in \mathbb{N}$ og $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ fra $\mathbb{N}$ så

$$d_Y(\alpha_{n_0}, \beta_{n_k}) < \frac{\varepsilon_0}{4} \quad \text{for } k = 1,2,\cdots .$$

(2) Der findes $n_0 \in \mathbb{N}$ og $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ fra $\mathbb{N}$ så

$$d_Y(\alpha_{n_k}, \beta_{n_0}) < \frac{\varepsilon_0}{4} \quad \text{for } k = 1,2,\cdots .$$

(3) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m \geq N: d_Y(\alpha_n, \beta_m) \geq \frac{\varepsilon_0}{4}$,

og

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m \geq N: d_Y(\alpha_m, \beta_n) \geq \frac{\varepsilon_0}{4}$.

Vis, at man i alle tre tilfælde kan finde en følge $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ fra $\mathbb{N}$, så der for alle $p,q \in \mathbb{N}$ gælder

$$d(\alpha_{n_p}, \beta_{n_q}) \geq \frac{\varepsilon_0}{4} ,$$

og slut heraf, at (3) ikke er opfyldt.

6.10. Lad (X_n, d_n), $n = 1,2,\cdots$ være en følge af kompakte metriske rum og lad $X = \prod_1^\infty X_n$ være det i Opgave 4.6 definerede metriske rum af følger $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots)$, hvor $x_n \in X_n$ for alle n. Vis, at X er et kompakt metrisk rum.
Vink: Lad $(\underline{x}_n)$ være en følge fra X. Konstruer en delfølge $(\underline{x}_n')$ af $(\underline{x}_n)$ så første koordinaterne i $(\underline{x}_n')$ konvergerer. Konstruer dernæst en delfølge $(\underline{x}_n'')$ af $(\underline{x}_n')$ så 1. og 2. koordinaterne konvergerer. Fortsæt og konstruer i p'te trin en delfølge $(\underline{x}_n^{(p)})$ af $(\underline{x}_n^{(p-1)})$ så de p første koordinatfølger i $\underline{x}_n^{(p)}$ konvergerer. Betragt dernæst diagonalfølgen $(\underline{x}_n^{(n)})$ som er en delfølge af $(\underline{x}_n)$, og vis, at alle dens koordinatfølger konvergerer.

6.11. Lad $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, idet $-\infty < a < b < \infty$. Vis, at følgende betingelse er ækvivalente:

(i) f er uniformt kontinuert.

(ii) f kan udvides til en kontinuert funktion $\tilde{f}: [a,b] \to \mathbb{R}$.

(iii) $\lim_{x \to b^-} f(x)$ og $\lim_{x \to a^+} f(x)$ eksisterer.

Vis, at i tilfældet $a = -\infty$, $b = \infty$ gælder (iii) $\Rightarrow$ (i), men at (i) $\Rightarrow$ (iii) er forkert endda med begrænset f.

6.12. Lad (M,d) være et metrisk rum og lad $(\hat{M},\hat{d})$ og $(\tilde{M},\tilde{d})$ være fuldstændiggørelser af M. Vis, at $(\hat{M},\hat{d})$ og $(\tilde{M},\tilde{d})$ er isometriske, (dvs. at der findes en surjektiv isometri af $\hat{M}$ på $\tilde{M}$).

6.13. Sæt $\operatorname{dist}(x,y) = |\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y|$ for $x,y \in \mathbb{R}$. Vis, at $x \leadsto x$ ikke er uniformt kontinuert fra $(\mathbb{R},\operatorname{dist})$ til $(\mathbb{R},|\cdot|)$, og at $x \leadsto x^2$ er uniformt kontinuert fra $(\mathbb{R},|\cdot|)$ til $(\mathbb{R},\operatorname{dist})$.

Kapitel II. MÅL- OG INTEGRALTEORI

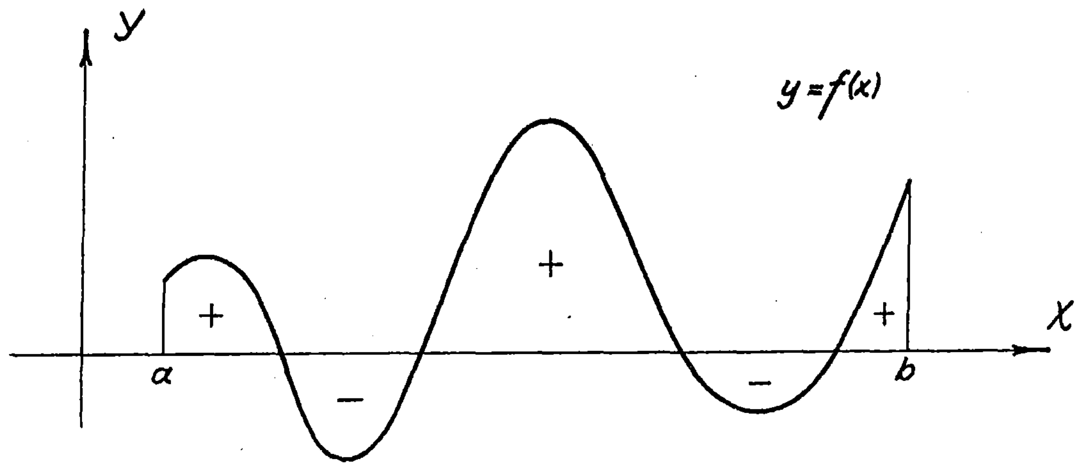
Indledning.

Når der i dette kapitel tales om integralet af en funktion eller skrives $\int f(x)dx$, $\int f(x)d\mu(x)$, $\int fd\mu$ o.lign., menes altid et tal, nemlig en grænseværdi for visse summer. Integraltegnet $\int$, indført af Leibniz (1675), er i øvrigt afledt af bogstavet S for det latinske ord summa.

For os er et integral således, hvad man også kalder et bestemt integral. Gængse betegnelser som $\int_a^b f(x)dx$, der skyldes Fourier (1816), vil naturligvis blive benyttet, når der er behov for at præcisere integrationsområdet.

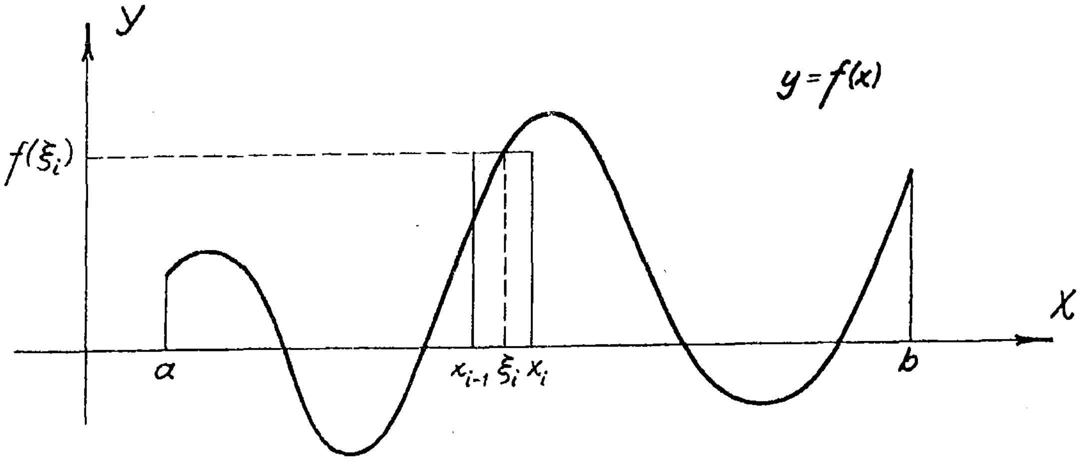
Om integralbegrebets udvikling.

Før Cauchy lod man sig nøje med at sige, hvilke arealer man skulle addere eller subtrahere for at opnå integralet $\int_a^b f(x)dx$ af en funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.



Til tilnærmet beregning af en sådan arealstørrelse har vel landmålere og matematikere til alle tider brugt middelsummer

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$



med $a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \leq \ldots \leq x_n = b$. Cauchy tager ikke længere arealstørrelsen for givet. Han beviser, at hvis $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, da findes et tal I, således at $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \colon |S-I| < \varepsilon$ for enhver inddeling med $\max_i (x_i - x_{i-1}) < \delta$, og definerer derpå $\int_a^b f(x)dx$ som grænseværdien I for middelsummerne. (1823).

Riemann definerer $\int_a^b f(x)dx$ på samme måde, men for enhver funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, hvor middelsummerne har en grænseværdi. (1854).

Riemann integralet, som det nu kaldes, vil vi dog foretrække at indføre som først gjort af Darboux (1873):

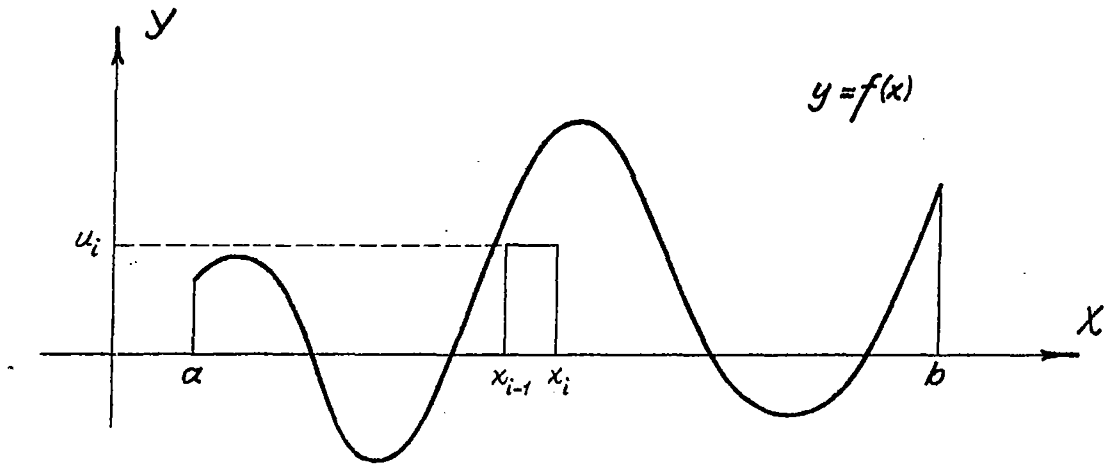
Lad $f\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ være en begrænset funktion.

Et tal $U \in \mathbb{R}$ kaldes da en undersum for f, hvis der findes en inddeling $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ samt tal $u_1, \cdots, u_n$, hvor

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i] \colon u_i \leq f(x), \qquad i = 1, \cdots, n,$$

således at $U = \sum_{i=1}^{n} u_i (x_i - x_{i-1})$. - Se figur p.3.

Nedre Riemann integral af f, $\underline{\int}_a^b f(x)dx$, defineres nu som øvre grænse for alle undersummer. Øvre Riemann integral af f, $\overline{\int}_a^b f(x)dx$ defineres ganske analogt som nedre grænse for alle oversummer.



Idet enhver undersum er mindre eller lig enhver oversum, har man

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \, .$$

Hvis der her gælder lighedstegn, siges f at være <u>Riemann integrabel</u>, den fælles værdi kaldes <u>Riemann integralet</u> af f og betegnes $\int_a^b f(x)\,dx$.

Riemanns integralbegreb har desværre en alvorlig mangel: De Riemann integrable funktioner udgør ikke noget velafrundet område ved grænseovergang.

Eksempelvis kunne man ønske sig bekvemme regler af form

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, .$$

Betragt imidlertid for hvert $q \in \mathbb{Q}$, $0 < q \leq 1$, funktionen $f_q \colon]0,1] \rightsquigarrow [0,\infty[$ givet ved

$$f_q(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = q \\ 0 & \text{for } x \neq q \, . \end{cases}$$

Alle funktionerne er Riemann integrable med integralet 0 , således at

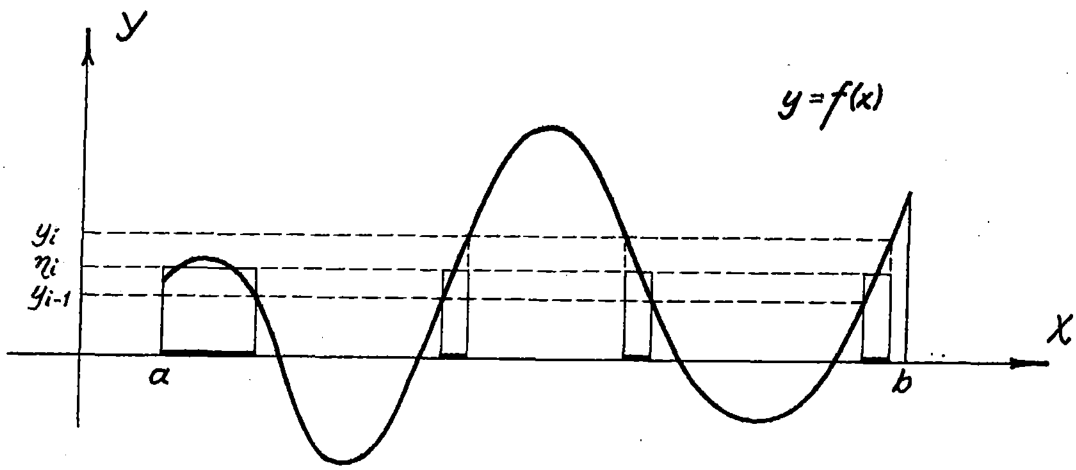
$$\Sigma_q \int_0^1 f_q(x)\,dx = 0 \, ,$$

men sum- og integraltegn kan ikke ombyttes; funktionen $\Sigma_q \, f_q$

er ikke Riemann integrabel. Det er den såkaldte Dirichlet funktion, med værdi 1 i hvert rationalt, 0 i hvert irrationalt punkt i intervallet $]0,1]$; øvre Riemann integral er lig 1 , nedre Riemann integral lig 0 .

Det er imidlertid lykkedes den franske matematiker Lebesgue (Intégrale, longueur, aire. Thèse. Paris 1902) at indføre et nyt integralbegreb, der indfrier alle rimelige forventninger vedrørende grænseovergang. Lebesgue integralet blev et afgørende gennembrud, en væsentlig forudsætning for den matematiske analyses udvikling i indeværende århundrede.

På dette sted vil vi nøjes med at skitsere, hvordan Lebesgue definerede integralet af en begrænset funktion $f:]a,b] \to \mathbb{R}$.



En Lebesgue middelsum har formen

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \cdot m(E_i) ,$$

hvor

$$\forall x \in]a,b]: y_0 < f(x) \leq y_n ,$$

$$y_0 \leq \eta_1 \leq y_1 \leq \eta_2 \leq \ldots \leq y_{i-1} \leq \eta_i \leq y_i \leq \ldots \leq \eta_n \leq y_n ,$$

$$E_i = \{x \in]a,b] \mid y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} , \quad i = 1,\ldots,n ,$$

og $m(E_i)$ betyder "den samlede længde" af E_i .

Man bemærker, at der inddeles efter funktionsværdier.

Lebesgue indførte så integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ som den eventuelle grænseværdi for middelsummer, svarende til $\max_i (y_i - y_{i-1}) \to 0$.

Til belysning af forskellen fra Riemanns fremgangsmåde giver vi Lebesgue ordet (Foredrag i Dansk Matematisk Forening, se Matematisk Tidsskrift B 1926, p.54 ff):

> .... On peut dire encore que, avec le procédé de Riemann, on essayait de sommer les valeurs de la fonction en les prenant dans l'ordre où ils étaient fournis par la variation de x, on opérait donc comme le ferait un commerçant sans méthode qui compterait pièces et billets au hasard de l'ordre où ils lui tomberaient sous la main; tandis que nous opérons comme le commercant méthodique qui dit:
>
> j'ai $m(E_1)$ pièces de 1 couronne valant $1 \cdot m(E_1)$,
> j'ai $m(E_2)$ pièces de 2 couronnes valant $2 \cdot m(E_2)$,
> j'ai $m(E_3)$ billets de 5 couronnes valant $5 \cdot m(E_2)$,
>
> etc., j'ai donc en tout:
>
> $$S = 1 \cdot m(E_1) + 2 \cdot m(E_2) + 5 \cdot m(E_3) + \cdots\cdot .$$
>
> Les deux procédés conduiront, certes, le commerçant au même résultat parceque, si riche qu'il soit, il n'a qu'un nombre fini de billets à compter; mais pour nous, qui avons à additionner une infinité de valeurs, la différence entre les deux façons de faire est capitale.

Til Lebesgues integraldefinition knytter vi nogle bemærkninger.

1. Mængderne E_i kan være yderst komplicerede. Dannelsen af Lebesgue middelsummer forudsætter derfor et nærmere studium af begrebet "samlet længde", også kaldet Lebesgue mål, for vilde delmængder af $\mathbb{R}$.
2. Under forudsætning af et tilsvarende hold på areal, volumen, ..., ligeledes kaldet Lebesgue mål, for vilde delmængder af $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \cdots$, kan Lebesgue integralet for funktioner af 2, 3 eller flere reelle variable indføres ganske som for funktioner af 1 variabel. Ovenfor erstattes blot intervallet $]a,b]$ med funktionens definitionsmængde.

3. Tænker man sig en massefordeling på linien (eller i planen, rummet,...), får man ved at lade $m(E_i)$ betyde den samlede masse i E_i, men i øvrigt gå frem som før, hvad der kaldes <u>integralet</u> af f med hensyn til den givne massefordeling. (Johann Radon 1913.) Videre:

4. Det er kun få, fundamentale egenskaber ved længde, areal, volumen,... , der benyttes ved definitionen af Lebesgue integralet og ved beviserne vedrørende grænseovergang med dette. Idet man af et <u>mål</u> μ i en (abstrakt) mængde netop kræver disse egenskaber, kan så hovedtræk af teorien overføres til integration med hensyn til et vilkårligt mål. (Maurice Fréchet 1915.)

Nærmere om integralbegrebets udvikling kan man læse i I. Pesin: Classical and modern integration theories (Moskva 1966; Academic Press 1970). Se også Lebesgues ovennævnte foredrag samt N. Bourbaki: Éléments d'histoire des mathématiques (Hermann 1960) for kortere oversigter.

Her går vi frem modsat den historiske udvikling, idet vi starter med den abstrakte mål- og integralteori. (Se 4. ovenfor.) Selv om vi ikke havde andet sigte end Lebesgue integralet, ville denne fremgangsmåde dog have den fordel, at hovedtrækkene fremstår klarere, når teorien er befriet for irrelevante forudsætninger. På den anden side bør man stedse have det konkrete hovedtilfælde i tankerne: Lebesgue integralet i $\mathbb{R}^k$.

Vi vil i øvrigt ikke i detaljer følge Lebesgue i definitionen af integral, men benytte en af de mange mulige varianter, der bl.a. tillader os straks at inddrage også ubegrænsede funktioner, defineret f.eks. på hele $\mathbb{R}^k$.

En anden fordel ved den abstrakte teori er, at den omfatter grundlaget for sandsynlighedsregning. En sandsynlighed er et mål med total masse en. En stokastisk variabel er en målelig afbildning og middelværdi er integralet med hensyn til en sandsynlighed.

Lad os slutte denne historiske indledning med at sammenligne talbegrebet med integralbegrebet.

Til praktiske formål er de rationale tal tilstrækkelige. En regnemaskine kan kun give os et rationalt facit. Alligevel er det fra et teoretisk synspunkt fundamentalt af have alle reelle tal til rådighed. (En begrænset talmængde har et supremum, Cauchy-følger er konvergente).

I praksis møder man hovedsagelig integralet af kontinuerte funktioner, eventuelt af stykkevis kontinuerte funktioner. Alligevel er det fra et teoretisk synspunkt fundamentalt, at kunne integrere en større klasse af funktioner - de Lebesgue integrable - fordi denne klasse af funktioner er lukket overfor grænseprocesser, der svarer til at en voksende begrænset talfølge er konvergent.

At stoppe ved Riemann integralet ville være som at nøjes med en del af de reelle tal.

Henri LEBESGUE (1875-1941)
(Photographie datant d'environ 1904)

§0. Regning med $\pm\infty$.

Det er undertiden bekvemt at udvide mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal med to ekstra elementer, som vi vil betegne ∞ og $-\infty$.

Vi sætter $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,\infty] = \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, (i Mat 1 betegnet $\mathbb{R}^*$).

Når ∞ indgår som led i en sum $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $a_i \in \overline{\mathbb{R}}$, men $-\infty$ ikke gør det, sættes $\sum_{i=1}^{n} a_i = \infty$.

Når $-\infty$ indgår som led i en sum $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $a_i \in \overline{\mathbb{R}}$, men ∞ ikke gør det, sættes $\sum_{i=1}^{n} a_i = -\infty$.

En sum, hvor både ∞ og $-\infty$ indgår som led, <u>tillægges ingen mening</u>. F.eks. er $\infty + (-\infty)$ <u>ikke</u> defineret.

En differens $b-a$ tolkes som $b+(-a)$. F.eks. er da $\infty - \infty$ <u>ikke</u> defineret.

<u>Ethvert</u> produkt ab med $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ tillægges en mening, idet vi sætter

$$0\cdot(\pm\infty) = (\pm\infty)\cdot 0 = 0,$$

$$c(\pm\infty) = (\pm\infty)c = \pm\infty \quad \text{når } 0 < c \leqq \infty,$$

$$c(\pm\infty) = (\pm\infty)c = \mp\infty \quad \text{når } -\infty \leqq c < 0.$$

Multiplikationen i $\overline{\mathbb{R}}$ er da kommutativ og associativ.

Der er ikke meget pænt at sige om regneoperationerne i $\overline{\mathbb{R}}$. I almindelighed arbejder vi da også i $\mathbb{R}$ eller i $[0,\infty]$.

Lad os dog til senere brug nævne følgende regler:

$$a+b = c \Leftrightarrow a = c-b \quad \text{når } b \in \mathbb{R} \text{ og } a,c \in \overline{\mathbb{R}},$$

$$a+b \leqq a+c \Leftrightarrow b \leqq c \quad \text{når } a \in \mathbb{R} \text{ og } b,c \in \overline{\mathbb{R}},$$

$$\liminf_n (a+b_n) = a + \liminf_n b_n \text{ og}$$

$$\limsup_n (a+b_n) = a + \limsup_n b_n,$$

når $a \in \mathbb{R}$ og $b_1, b_2, \dots \in \overline{\mathbb{R}}$.

<u>Summer</u> $\Sigma_{j\in J} a_j$ <u>med</u> $0 \leqq a_j \leqq \infty$.

I $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$ kan og vil vi boltre os, hvad angår multiplikation og især addition. Først bemærkes, at begge regneoperationer inden for $\overline{\mathbb{R}}_+$ er kommutative og associative, og at den distributive lov gælder. Herved vil vi dog ikke blive stående.

Vi definerer <u>summen</u> $\sum_{j\in J} a_j$ af en <u>vilkårlig</u> familie $(a_j)_{j\in J}$ af tal $a_j \in \overline{\mathbb{R}}_+$ som supremum af alle endelige delsummer, altså

$$\sum_{j\in J} a_j = \sup \sum_{j\in I^*} a_j ,$$

hvor supremum tages over alle endelige delmængder I^* af indeksmængden J.

Dette er naturligvis kun noget nyt, hvis J er uendelig.

Vi nævner 3 vigtige resultater om summer:

1° <u>Splittes</u> J <u>i (gerne uendelig mange) delmængder</u> J_k, $k \in K$ <u>da er</u> $\sum_{j\in J} a_j$ <u>lig summen af summerne</u> $\sum_{j\in J_k} a_j$. <u>Mere formelt skrevet</u>

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{k\in K} \sum_{j\in J_k} a_j$$

<u>når</u> $J = \bigcup_{k\in K} J_k$ <u>med</u> $J_{k_1} \cap J_{k_2} = \emptyset$ <u>for</u> $k_1 \neq k_2$.

(Vi regner $\sum_{j\in\emptyset} a_j = 0$, for det tilfælde at $J_k = \emptyset$ for et eller flere k.)

For bevis, se Opgave 0.6. - Resultatet finder specielt anvendelse på dobbeltsummer: For enhver familie $(b_{hk})_{(h,k)\in H\times K}$ af tal $b_{hk} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ er

$$\sum_h \sum_k b_{hk} = \sum_{h,k} b_{hk} = \sum_k \sum_h b_{hk} .$$

I almindeliggørelse af den distributive lov gælder der i $\overline{\mathbb{R}}_+$

2°
$$b \sum_{j\in J} a_j = \sum_{j\in J} (ba_j) .$$

Endelig gælder:

3° <u>Hvis en sum</u> $\sum_{j\in J} a_j$, $a_j \in \overline{\mathbb{R}}_+$, <u>har en endelig værdi, altså hvis</u>

$$\sum_{j\in J} a_j < \infty ,$$

<u>så er</u> $a_j \neq 0$ <u>for kun tælleligt mange indices</u> $j \in J$.

Antag nemlig $\sum_{j\in J} a_j = s < \infty$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er der da højst endelig mange $j \in J$ med $a_j \geq \frac{1}{n}$; antallet er begrænset af ns.

En sum $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$, $a_j \in \overline{\mathbb{R}}_+$, med $\mathbb{N}$ som indeksmængde kan tolkes som en <u>rækkesum</u>: Der gælder nemlig

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \nearrow \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Summen betegnes derfor også $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Eksempelvis er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty$.

(Summer $\sum_{j\in J} a_j$ med a_j $\mathbb{R}$, eller $a_j \in \mathbb{C}$, behandles i §4.6.)

<u>Opgaver til</u> §0.

0.1. For en vilkårlig følge $A_1, A_2, \cdots$ af mængder sættes $\liminf_m A_m = \cup_n \cap_p A_{n+p}$, $\limsup_m A_m = \cap_n \cup_p A_{n+p}$.

1° Vis, at

$$\liminf_m A_m \subseteqq \limsup_m A_m .$$

2° Vis, at

$$\liminf_m A_m = \{x \mid \exists n \forall p : x \in A_{n+p}\},$$

$$\limsup_m A_m = \{x \mid \forall n \exists p : x \in A_{n+p}\}.$$

(Bemærk, at

$\exists n \forall p : x \in A_{n+p} \Leftrightarrow x$ tilhører alle A_m fra et vist trin,

$\forall n \exists p : x \in A_{n+p} \Leftrightarrow x$ tilhører mængder A_m med vilkårligt høje numre .)

3° Gør rede for, at $\liminf_m A_m$ og $\limsup_m A_m$ bevares ved omordning af $A_1, A_2, \cdots$.

0.2. Bestem limes inferior og limes superior (se Opgave 0.1) for følgerne

$$A_1 \subseteqq A_2 \subseteqq \cdots \quad \text{og} \quad B_1 \supseteqq B_2 \supseteqq \cdots,$$

$$\emptyset, X, \emptyset, X, \emptyset, X, \cdots,$$

$$C_1, C_2, \cdots, \quad \text{hvor} \quad C_n = \left]\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[\subseteqq \mathbb{R} .$$

Ved <u>indikatorfunktionen</u> (med grundmængde X) for en delmængde A af en given mængde $X \neq \emptyset$ forstås funktionen $1_A : X \curvearrowright \{0,1\}$, hvor

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{for } x \in \complement A = X \setminus A . \end{cases}$$

0.3. 1° Lad A og B være delmængder af en (grund)mængde X.
Gør rede for, at

$$1_{CA} = 1 - 1_A ,$$

$$1_{A\cup B} = \sup\{1_A, 1_B\} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B} ,$$

$$1_{A\cap B} = \inf\{1_A, 1_B\} = 1_A + 1_B - 1_{A\cup B} .$$

2° Lad $(A_j)_{j\in J}$ være en familie af delmængder af X.
Gør rede for, at

$$1_{\cup_j A_j} = \sup_j 1_{A_j} , \quad 1_{\cap_j A_j} = \inf_j 1_{A_j} .$$

0.4. Lad $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af delmængder af en grundmængde X. Gør rede for, at

$$1_{\liminf A_n} = \liminf 1_{A_n} , \quad 1_{\limsup A_n} = \limsup 1_{A_n} .$$

(Se Opgave 0.1.)

0.5. 1° Idet $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ og $\emptyset \subset A \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+$, $\emptyset \subset B \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+$, skal man vise, at

$$\sup(a + B) = a + \sup B ,$$

$$\sup aB = a\cdot\sup B ,$$

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B ,$$

$$\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B .$$

Her er

$$a + B = \{a + b \mid b \in B\} , \qquad \{aB = ab \mid b \in B\} ,$$

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\} , \quad AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\} .$$

2 2° Gælder det samme med infimum i stedet for supremum ?

0.6. Lad $(a_j)_{j\in J}$ være en familie af tal $a_j \in [0,\infty]$.

1° Vis, at

$$\sum_{j\in J_1\cup J_2} a_j = \sum_{j\in J_1} a_j + \sum_{j\in J_2} a_j ,$$

når $J_1, J_2 \subseteqq J$ er disjunkte, dvs. $J_1 \cap J_2 = \emptyset$.
(Vink. Man kan benytte Opgave 0.5.)

2° Vis, at

$$\sum_{j\in \bigcup_{k=1}^{n} J_k} a_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j\in J_k} a_j ,$$

når $J_1,\dots,J_n \subseteqq J$ er parvis disjunkte.

3° Vis, at

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{k\in K} \sum_{j\in J_k} a_j ,$$

når $J = \bigcup_{k\in K} J_k$, hvor $(J_k)_{k\in K}$ er en familie af parvis disjunkte mængder.

0.7. Gør rede for, at reglen om dobbeltsummer i noterne er et specialtilfælde af resultatet i Opgave $0.6.3^{\circ}$.

0.8. Vi regner i $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$. Gør rede for, at

1° multiplikationen er distributiv med hensyn til additionen.

2°
$$a \sum_{j\in J} b_j = \sum_{j\in J} ab_j ,$$

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j ,$$

hvor $a \in [0,\infty]$, medens $(a_i)_{i\in I}$ og $(b_j)_{j\in J}$ er vilkårlige familier med $a_i \in [0,\infty]$, $b_j \in [0,\infty]$.
(Vink. Man kan benytte Opgave 0.5.)

§1. Målelige mængder.

1.1. Indledende om længde-, areal- og volumenproblemet.

Problemet består i til passende delmængder A af $\mathbb{R}$ (henholdsvis af $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$) at knytte tal $m(A)$, som med rimelighed kan kaldes længden (henholdsvis arealet, voluminet,...) af A.

Ud over kravet om, at kongruente mængder bør have samme længde (areal, volumen,...), havde man tidligere fæstet sig ved additivitet: når en mængde A i $\mathbb{R}$ (henh. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$) kan stykkes sammen af endelig mange, parvis disjunkte dele, der hver har en længde (areal, volumen,...), da bør A som længde (areal, volumen,...) have summen af delenes.

Émile Borel peger i stedet på numerabel additivitet: her tillades sammenstykninger også af numerabelt mange, parvis disjunkte dele; summen af længderne (arealerne, voluminerne,...) er da en rækkesum. (Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898.) Denne drejning er afgørende for Lebesgue integralet.

Hvis man kunne tillægge alle delmængder A i $\mathbb{R}$ (henh. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$) en længde (areal, volumen,...) og samtidig indfri ønsket om numerabel additivitet, og at kongruente mængder tillægges samme værdi, var situationen optimal. Som antydet i Mat 1 SS, kan dette lade sig gøre, hvis man bygger på Solovays model for mængdelæren (1970). I denne model gælder bl.a. det numerable udvalgsaxiom, men udvalgsaxiomet gælder ikke. Udvalgsaxiomet kan formuleres således: For enhver familie $(A_i)_{i\in I}$ af ikke tomme mængder A_i findes en funktion f på I så $f(i) \in A_i$ for hvert $i \in I$. Hvis man kun betragter numerable familier (dvs. I forudsættes numerabel), får man det numerable udvalgsaxiom.

Ønsker man at operere i en version af mængdelæren, hvor udvalgsaxiomet gælder, og det gør man normalt, kan man vise, at der er delmængder f.eks. af $\mathbb{R}$, der ikke kan tillægges en længde på fornuftig måde. (Se §5.8, Sætning 3).

Dette betyder, at man skal finde et passende stort system af mængder, som kan tillægges en længde (areal, volumen,...). Mængderne i systemet kaldes Lebesgue målelige. Af tekniske grunde studerer man først et mindre system, hvis mængder kaldes Borel målelige eller blot Borel mængder.

1.2. Begrebet σ-algebra.

En mængde $\mathbb{E}$ af delmængder af en mængde X kaldes en σ-algebra i X, hvis

(i) $X \in \mathbb{E}$

(ii) $CA = X \setminus A \in \mathbb{E}$, når $A \in \mathbb{E}$

(iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{E}$, når $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{E}$.

Der gælder da tillige

$$\emptyset \in \mathbb{E}$$

$$A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \in \mathbb{E}, \quad \text{når } A, B \in \mathbb{E},$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{E}, \quad \text{når } A_1, A_2, \dots \in \mathbb{E}.$$

En σ-algebra er altså stabil over for de sædvanlige mængdeoperationer anvendt på endelig eller numerabelt mange mængder.

Påstandede fremgår af

$$\emptyset = CX = X \setminus X,$$

$$A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \dots \cup \emptyset \cup \dots,$$

$$A \cap B = C(CA \cup CB),$$

$$A \setminus B = A \cap CB,$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = C\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} CA_n\Big).$$

Mængden $\mathcal{P}(X)$ af alle delmængder af en mængde X er naturligvis en σ-algebra i X, den størst mulige. Systemet $\{\emptyset, X\}$ er den mindste σ-algebra i X.

Enhver fællesmængde af σ-algebraer i X er igen en σ-algebra i X. Det verificeres umiddelbart.

SÆTNING. Lad $\mathbb{D}$ være en vilkårlig mængde af delmængder af en mængde X. Der findes da en mindste σ-algebra $\sigma(\mathbb{D})$ i X, der indeholder $\mathbb{D}$, dvs.

(i) $\sigma(\mathbb{D})$ er en σ-algebra i X, $\mathbb{D} \subseteq \sigma(\mathbb{D})$

(ii) for enhver σ-algebra $\mathbb{F}$ i X med $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{F}$ gælder $\sigma(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{F}$.

Bevis. Fællesmængden $\sigma(\mathbb{D})$ for alle σ-algebraer $\mathbb{F}$ i X, der indeholder $\mathbb{D}$, er selv en σ-algebra indeholdende $\mathbb{D}$, - og åbenbart den mindste. Strengt taget burde først bemærkes, at der er noget at tage fællesmængden for, altså at der findes i hvert fald én σ-algebra $\mathbb{F}$ i X, der indeholder $\mathbb{D}$. Men det er oplagt: $P(X)$. □

Bemærk, at beviset er et rent eksistensbevis. Det giver ikke nogen eksplicit betingelse for, om en forelagt mængde $A \subseteq X$ tilhører $\sigma(\mathbb{D})$ eller ej. Man siger, at $\sigma(\mathbb{D})$ er σ-algebraen frembragt af $\mathbb{D}$, og $\mathbb{D}$ kaldes et frembringersystem for $\sigma(\mathbb{D})$.

Når man i en mængde X har udvalgt en σ-algebra $\mathbb{E}$ kaldes parret $(X,\mathbb{E})$ et målbart rum, jvfr. terminologien topologisk rum, hvor man på X har udvalgt et mængdesystem G med helt andre egenskaber, kaldet en topologi. Mængderne i $\mathbb{E}$ siges at være målelige eller mere præcist $\mathbb{E}$-målelige.

Cl. Eug. Pirau

EMILE BOREL

1871-1956

1.3. Borel mængder.

Et interval i $\mathbb{R}^k$ er en mængde

$$I = I_1 \times \cdots \times I_k = \{(x_1,\cdots,x_k) \mid x_i \in I_i \ , \quad i=1,\cdots,k\} \ ,$$

hvor hvert I_i er et (begrænset eller ubegrænset) interval i $\mathbb{R}$. Er alle I_i åbne, henholdsvis afsluttede i $\mathbb{R}$, fås et åbent, henholdsvis afsluttet interval I i $\mathbb{R}^k$. Er alle I_i begrænsede og af samme længde, kaldes I også en terning.

Vi skal især betragte intervaller $I = I_1 \times \cdots \times I_k$, hvor hvert I_i er af form $]a_i,b_i]$ med $-\infty < a_i < b_i < \infty$. For at have et navn vil vi kalde dem standard intervaller.

Standard intervaller er velegnede som byggeklodser. F.eks. gælder:

SÆTNING. Enhver åben mængde $G \neq \emptyset$ i $\mathbb{R}^k$ kan fås som forening af numerabelt mange, parvis disjunkte standard terninger.

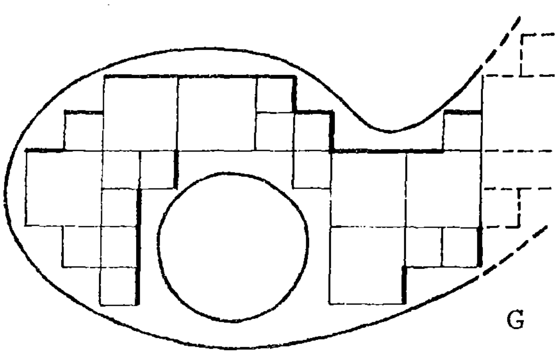
Bevis. De numerabelt mange terninger

$$\{(x_1,\cdots,x_k) \mid n_i < x_i \leqq n_i + 1, \quad i=1,\cdots,k\}$$

med $n_i \in \mathbb{Z}$ danner en klasseinddeling af $\mathbb{R}^k$, som maskerne i et net. Lad os kalde dem masker af 0^{te} orden. For hvert $p \in \mathbb{N}$ betragtes en tilsvarende klasseinddeling af $\mathbb{R}^k$ i masker p^{te} orden

$$\{(x_1,\cdots,x_k) \mid n_i \cdot 2^{-p} < x_i \leqq (n_i+1)2^{-p}, \ i=1,\cdots,k\}.$$

Enhver åben mængde $G \neq \emptyset$ i $\mathbb{R}^k$ kan nu opbygges af de masker af 0^{te}



orden, der er indeholdt i G; de masker af 1^{ste} orden, der er indeholdt i G uden at være del af en maske af 0^{te} orden indeholdt i G; osv.

Som konsekvens noteres, at en σ-algebra i $\mathbb{R}^k$, der indeholder ethvert standard interval (eller blot alle terninger i de ovennævnte klasseinddelinger af $\mathbb{R}^k$), også vil indeholde enhver åben mængde.

Omvendt er det klart, at en σ-algebra i $\mathbb{R}^k$, der indeholder alle åbne mængder, også vil indeholde alle intervaller. Thi ethvert interval kan fås som fællesmængde for en følge af åbne intervaller, eksempelvis

$$\{(x_1,\dots,x_k) \mid a_i < x_i \leq b_i\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x_1,\dots,x_k) \mid a_i < x_i < b_i + \tfrac{1}{n}\} .$$

Ved <u>Borel algebraen</u> i $\mathbb{R}^k$ forstås den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}^k$, der indeholder alle åbne mængder i $\mathbb{R}^k$. Den betegnes $\mathbb{B}(\mathbb{R}^k)$ eller blot $\mathbb{B}_k$. De $\mathbb{B}_k$-målelige mængder, dvs. mængderne tilhørende $\mathbb{B}_k$, kaldes også <u>Borel mængder</u>. Vi sætter $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1$.

Borel algebraen i $\mathbb{R}^k$ kan, ifølge ovenstående, også karakteriseres som den mindste σ-algebra, der indeholder alle standard intervaller. Med andre ord: De åbne mængder og standard intervallerne er hver for sig frembringersystemer for $\mathbb{B}_k$.

Borel mængderne i $\mathbb{R}$ blev første gang angivet af Émile Borel (1898), i forbindelse med en skitse til fastsættelse af længder for disse mængder (se §1.1). - For hvert talrum $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, er situationen ganske tilsvarende. Vi vil i hvert fald tilskrive ethvert standard interval i $\mathbb{R}^k$ et volumen, nemlig produktet af kantlængderne. Skal vore intentioner vedrørende volumenbegrebet (se §1.1) opfyldes, er det da nødvendigt at definere volumen ikke blot for enhver åben mængde, men for enhver Borel mængde i $\mathbb{R}^k$.

Bemærk, at vi ikke er i besiddelse af en generel, eksplicit betingelse til afgørelse af, om en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er en Borel mængde. Beviser for påstande af formen $\forall B \in \mathbb{B}_k: p(B)$, hvor $p(\cdot)$ er et åbent udsagn, må derfor som regel bevises på følgende måde:

a) Man viser at systemet af de mængder $A \in \mathbb{B}_k$ (eller blot $A \subseteq \mathbb{R}^k$) for hvilke $p(A)$ er sand, udgør en σ-algebra.

b) Man efterviser, at $p(A)$ er sand for alle mængder A i et passende frembringersystem for $\mathbb{B}_k$.

For at klare b) må man ofte udsøge sig et frembringersystem på snedig vis. Vi vil se mange eksempler på ovenstående bevismetode.

Medmindre det går meget underligt til, kan man imidlertid vente, at en eksplicit beskrevet mængde $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er en Borel mængde, og det vil som regel kunne vises ved, at man udtrykker A ved tælleligt mange mængdeoperationer udfra mængder, som man allerede ved er Borel mængder, f.eks. intervaller eller åbne mængder.

EKSEMPLER. (a) En afsluttet mængde i $\mathbb{R}^k$ er en Borel mængde, som komplementærmængde til en åben mængde.

(b) Et punkt og dermed enhver tællelig mængde i $\mathbb{R}^k$ er en Borel mængde.

Der findes delmængder af $\mathbb{R}^k$ som ikke er Borel mængder. Det er ikke helt let at vise, men er en konsekvens af resultater om ækvipotente mængder, idet $\mathbb{B}_k$ er ækvipotent med $\mathbb{R}^k$ (og dermed med $\mathbb{R}$), medens $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ ikke er ækvipotent med $\mathbb{R}^k$.

For et vilkårligt metrisk rum (X,d) defineres Borel algebraen $\mathbb{B}(X)$ som den mindste σ-algebra, der indeholder systemet af åbne mængder, altså $\mathbb{B}(X) = \sigma(\mathcal{G})$, hvor $\mathcal{G}$ er systemet af åbne mængder. Mængderne i $\mathbb{B}(X)$ kaldes Borel mængder. Bemærk, at "Borel mængde" er et topologisk begreb. Et metrisk rum kan altid opfattes som målbart rum udstyret med Borel algebraen.

Den udvidede reelle tallinie $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,\infty]$ vil vi også forsyne med en σ-algebra, betegnet $\overline{\mathbb{B}}$ og defineret ved

$$\overline{\mathbb{B}} = \sigma(\{]a,\infty] \mid a \in \mathbb{R}\}).$$

For $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ gælder (Opgave 1.6)

$$A \in \overline{\mathbb{B}} \Leftrightarrow A \cap \mathbb{R} \in \mathbb{B}.$$

Opgaver til §1.

1.1. Vis, at systemet $\mathbb{E}$ af delmængder $A \subseteq X$, så enten A eller $\complement A$ er tællelig, er en σ-algebra i X.

1.2. Vis, at mængdesystemerne

$\{]a,\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}$, $\{[a,\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}$, $\{]-\infty,a[\mid a \in \mathbb{R}\}$
$\{]-\infty,a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ alle er frembringersystemer for

$\mathbb{B}_1$.

1.3. Vis, at systemet F af afsluttede mængder og systemet K af kompakte mængder i $\mathbb{R}^k$, begge er frembringersystemer for $\mathbb{B}_k$.

1.4. Vis, at for $A \subseteq X$ gælder $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, \complement A, X\}$.

1.5. Lad $A_1,\cdots,A_n$ være delmængder af X. Vis, at den mindste σ-algebra i X, der indeholder $A_1,\cdots,A_n$, har højst 2^{2^n} elementer, og giv et eksempel, hvor $\sigma(\{A_1,\cdots,A_n\})$ har 2^{2^n} elementer.

1.6. Lad $\overline{\mathbb{R}}$ være udstyret som metrisk rum ved metrikken

$$d(x,y) = |\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y|,$$

idet $\operatorname{Arctan}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$.
Vis, at Borel algebraen $\mathbb{B}(\overline{\mathbb{R}})$ for det metriske rum $(\overline{\mathbb{R}},d)$ er frembragt af mængdesystemet $\{]a,\infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$, altså $\overline{\mathbb{B}} = \mathbb{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Vis videre, at der om $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ gælder

$$A \in \overline{\mathbb{B}} \Leftrightarrow A \cap \mathbb{R} \in \mathbb{B}.$$

1.7. Vis, at følgende mængdesystemer alle frembringer Borel algebraen $\mathbb{B}_1$ i $\mathbb{R}$:

a) $\{]-\infty,r[\mid r \in \mathbb{Q}\}$

b) $\{[a,b] \mid a<b ,\ a,b \in \mathbb{R}\}$

c) $\{[a,b] \mid a<b ,\ a,b \in T\}$, hvor T er en overalt tæt delmængde af $\mathbb{R}$.

1.8. Lad $\mathbb{Q}$ være udstyret med den sædvanlige metrik.
Vis, at $\mathbb{B}(\mathbb{Q}) = P(\mathbb{Q})$.

§2. Målelige afbildninger.

2.1. Definitioner og simple egenskaber.

Lad $(X,\mathbb{E})$ og $(Y,\mathbb{F})$ være målbare rum.

DEFINITION. En afbildning $\varphi\colon (X,\mathbb{E}) \to (Y,\mathbb{F})$ kaldes <u>$\mathbb{E}$-$\mathbb{F}$-målelig</u> (eller blot <u>målelig</u> når $\mathbb{E},\mathbb{F}$ er underforstået af sammenhængen), såfremt

$$\forall F \in \mathbb{F}\colon \varphi^{-1}(F) \in \mathbb{E},$$

altså såfremt enhver mængde $F \in \mathbb{F}$ "tilbagetransporteres" i en mængde fra $\mathbb{E}$.

Bemærk analogien med kontinuerte afbildninger.

Det er meget bekvemt, at man i praksis kan <u>nøjes</u> med at eftervise betingelsen ovenfor for delmængder i et frembringersystem for $\mathbb{F}$:

SÆTNING 1. <u>Lad</u> $\varphi\colon (X,\mathbb{E}) \to (Y,\mathbb{F})$ <u>være en afbildning og antag, at</u> $\mathbb{D}$ <u>er et frembringersystem for</u> $\mathbb{F}$. <u>Så er</u> φ $\mathbb{E}$-$\mathbb{F}$-målelig <u>blot</u>

$$\forall F \in \mathbb{D}\colon \varphi^{-1}(F) \in \mathbb{E}.$$

<u>Bevis</u>. Systemet

$$\tilde{\mathbb{F}} = \{F \in \mathbb{F} \mid \varphi^{-1}(F) \in \mathbb{E}\}$$

er en σ-algebra i Y, thi

$$\varphi^{-1}(Y) = X, \quad \varphi^{-1}(\complement F) = \complement\varphi^{-1}(F) \quad \text{og} \quad \varphi^{-1}\left(\bigcup_1^\infty F_n\right) = \bigcup_1^\infty \varphi^{-1}(F_n),$$

og antagelsen er at $\mathbb{D} \subseteq \tilde{\mathbb{F}}$. Da $\mathbb{F}$ er den mindste σ-algebra i Y indeholdende $\mathbb{D}$ må $\mathbb{F} \subseteq \tilde{\mathbb{F}}$, men så må $\mathbb{F} = \tilde{\mathbb{F}}$. □ (Bemærk at beviset passer i "skemaet" p.1.6).

Ved <u>sammensætning af målelige afbildninger</u> $\varphi: (X,\mathbb{E}) \to (Y,\mathbb{F})$, $\psi: (Y,\mathbb{F}) \to (Z,\mathbb{G})$ <u>fås en målelig afbildning</u> $\psi\circ\varphi: (X,\mathbb{E}) \to (Z,\mathbb{G})$, thi for $G \in \mathbb{G}$ har vi

$$(\psi\circ\varphi)^{-1}(G) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(G)) \in \mathbb{E}\,,$$

idet $\psi^{-1}(G) \in \mathbb{F}$.

Betragtes frembringersystemet $\{]a,\infty[\,|\,a \in \mathbb{R}\}$ for $\mathbb{B}_1$ eller frembringersystemet $\{]a,\infty]\,|\,a \in \mathbb{R}\}$ for $\overline{\mathbb{B}}$ fås følgende specialtilfælde af Sætning 1.

SÆTNING 2. <u>En funktion</u> $f: (X,\mathbb{E}) \to \mathbb{R}$ (<u>henh</u>. $\overline{\mathbb{R}}$) <u>er målelig, hvis og kun hvis</u>

$$\forall a \in \mathbb{R}: \{x \in X \mid f(x) > a\} \in \mathbb{E}\,.$$

I ovenstående sætning kunne vi naturligvis have benyttet ethvert andet frembringersystem, og dermed havde vi fundet andre karakterisationer af målelige afbildninger.

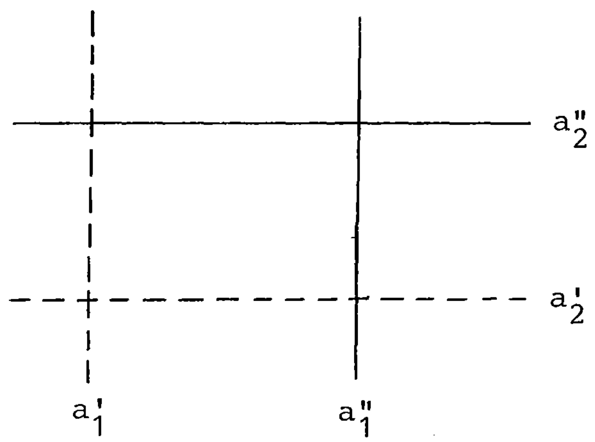
En afbildning $f: X \to \mathbb{R}^k$ har k koordinatfunktioner $f_1,\cdots,f_k: X \to \mathbb{R}$ så $f(x) = (f_1(x),\cdots,f_k(x))$ for $x \in X$. Som ved kontinuitet reduceres målelighed af f til koordinatfunktionernes målelighed:

SÆTNING 3. <u>En afbildning</u> $f: (X,\mathbb{E}) \to \mathbb{R}^k$ <u>er målelig, hvis og kun hvis hver koordinatfunktion</u> f_j <u>er målelig</u>, $j = 1,\cdots,k$.

<u>Bevis</u>. Lad $\mathbb{D}$ være systemet af åbne halvrum

$$\{y \in \mathbb{R}^k \mid y_j > a_j\}\,, \quad a_1,\cdots,a_k \in \mathbb{R}\,.$$

$k = 2$



For $a_j' < a_j''$, $j = 1,\cdots,k$, er

$$\{y \in \mathbb{R}^k \mid a_j' < y_j \leq a_j''\} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid a_j' < y_j\} \setminus \{x \in \mathbb{R}^k \mid a_j'' < y_j\}$$

en "parallelstrimmel" som tilhører $\sigma(\mathbb{D})$, og fællesmængden af k sådanne, en for hver koordinat, giver standard intervallet

$$]a_1',a_1''] \times \cdots \times]a_k',a_k''] ,$$

som altså tilhører $\sigma(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{B}_k$. Da $\mathbb{B}_k$ er den mindste σ-algebra, indeholdende standard intervallerne, må $\sigma(\mathbb{D}) = \mathbb{B}_k$. Ifølge Sætning 1 er f målelig hvis og kun hvis

$$f^{-1}(\{y \in \mathbb{R}^k \mid y_j > a_j\}) \in \mathbb{E} \quad \text{for alle } a_1,\cdots,a_k \in \mathbb{R},$$

men

$$f^{-1}(\{y \in \mathbb{R}^k \mid y_j > a_j\}) = \{x \in X \mid f_j(x) > a_j\} ,$$

så ifølge Sætning 2 kommer dette ud på, at f_j er målelig for $j = 1,\cdots,k$. □

Idet $\mathbb{C}$ som metrisk rum er homeomorft med $\mathbb{R}^2$, finder vi specielt:

SÆTNING 4. <u>En kompleks funktion</u> $f: (X,\mathbb{E}) \to \mathbb{C}$ <u>er målelig hvis og kun hvis</u> $\mathrm{Re}f$ <u>og</u> $\mathrm{Im}f$ <u>er målelige</u>.

Hvis (X,d_X) og (Y,d_Y) er metriske rum, kaldes en afbildning $\varphi: X \to Y$ <u>Borel målelig</u> eller en <u>Borel afbildning</u>, såfremt den er $\mathbb{B}(X)$ - $\mathbb{B}(Y)$ -målelig. Idet de åbne mængder frembringer Borel algebraen finder vi som specialtilfælde af Sætning 1:

SÆTNING 5. <u>En kontinuert afbildning</u> $\varphi: (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ <u>er en Borel afbildning</u>.

I almindelighed er de kontinuerte afbildninger kun en "meget lille" delmængde af Borel afbildningerne. Som eksempel kan nævnes at Dirichlets funktion $1_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en Borel funktion, som er diskontinuert i alle punkter. For $a \in \mathbb{R}$ gælder nemlig

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1_{\mathbb{Q}}(x) > a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{hvis} \quad a \geq 1 \\ \mathbb{Q} & \text{hvis} \quad 0 \leq a < 1 \\ \mathbb{R} & \text{hvis} \quad a < 0 \,, \end{cases}$$

og $\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ er alle Borel mængder.

Medens kontinuitet normalt sættes over styr ved punktvis konvergens, så bevares målelighed ved punktvis konvergens, som vi skal se i næste afsnit.

2.2. Grænseovergang med målelige funktioner.

Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde $X \neq \emptyset$.

SÆTNING. For enhver følge $f_1, f_2, \cdots$ af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, er $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ og $\liminf_n f_n$ igen $\mathbb{E}$-målelige funktioner.

Her betegner eksempelvis $\sup_n f_n$ og $\limsup_n f_n$ funktionerne

$$x \to \sup_n f_n(x) \quad \text{og} \quad x \to \limsup_n f_n(x) \,, \qquad x \in X \,,$$

dvs. for hvert $x \in X$ er funktionsværdien lig supremum, henholdsvis limes superior for talfølgen $f_1(x), f_2(x), \cdots$.

Bevis. For hvert $a \in \mathbb{R}$ gælder

$$\sup_n f_n(x) > a \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : f_n(x) > a \,,$$

altså

$$\{x \in X \mid \sup_n f_n(x) > a\} = \cup_n \{x \in X \mid f_n(x) > a\} \in \mathbb{E}$$

og analogt

$$\{x \in X \mid \inf_n f_n(x) < a\} = \cup_n \{x \in X \mid f_n(x) < a\} \in \mathbb{E} \,.$$

Det viser, at $\sup_n f_n$ og $\inf_n f_n$ er $\mathbb{E}$-målelige. Derpå benyttes, at

$$\limsup_m f_m = \inf_n (\sup_p f_{n+p}) \text{ og } \liminf_m f_m = \sup_n (\inf_p f_{n+p}) \,. \quad \square$$

COROLLAR 1. Når en følge $f_1, f_2, \cdots$ af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_j\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ er punktvis konvergent i $\overline{\mathbb{R}}$, da er grænsefunktionen $\lim_n f_n$ igen $\mathbb{E}$-målelig.

Konvergensforudsætningen er, at talfølgen $f_1(x), f_2(x), \cdots$ er konvergent i $\overline{\mathbb{R}}$ for hvert $x \in X$, og $\lim_n f_n$ betegner funktionen

$$x \to \lim_n f_n(x), \qquad x \in X.$$

Da nu $\lim_n f_n = \liminf_n f_n = \limsup_n f_n$, er resultatet et umiddelbart corollar af det foregående.

COROLLAR 2. Når en følge $f_1, f_2, \cdots$ af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_j\colon X \to \mathbb{C}$ er punktvis konvergent i $\mathbb{C}$, da er grænsefunktionen $\lim_n f_n$ igen $\mathbb{E}$-målelig.

Thi sættes $f_n = f_n' + if_n''$ med $f_n'\colon X \to \mathbb{R}$, $f_n''\colon X \to \mathbb{R}$, da har $\lim_n f_n$ som real- og imaginærdel funktionerne $\lim_n f_n'$ og $\lim_n f_n''$. Resultatet følger nu af det foregående. □

2.3. Regning med målelige funktioner.

Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde $X \neq \emptyset$.

SÆTNING 1. Når $f\colon X \to \mathbb{R}$ og $g\colon X \to \mathbb{R}$ er $\mathbb{E}$-målelige og $c \in \mathbb{R}$, da er $|f|$, cf, $f+g$, $f \vee g$, $f \wedge g$ og fg ligeledes $\mathbb{E}$-målelige.

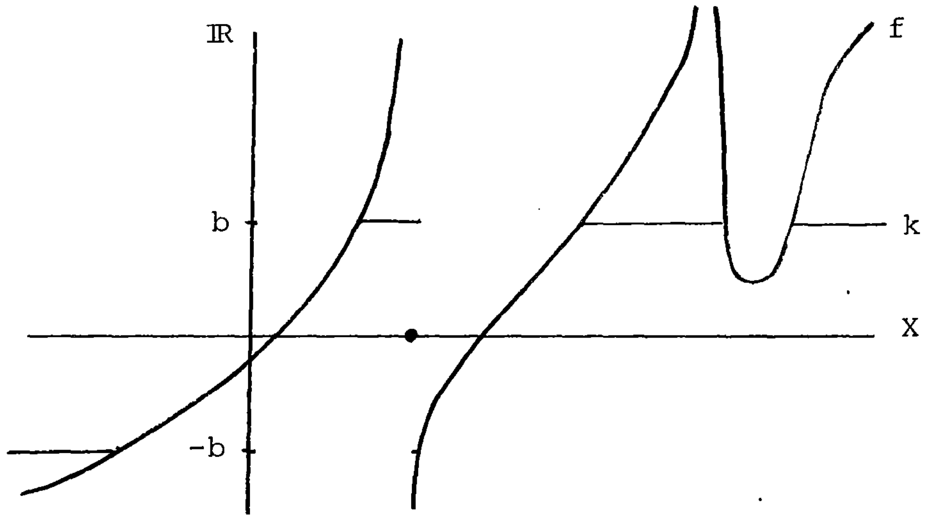
Her betegner eksempelvis $|f|$ og $f \vee g$ funktionerne

$$x \to |f(x)| \quad \text{og} \quad x \to f(x) \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \; x \in X.$$

Bevis. Påstanden følger af, at de nævnte funktioner kan fås ved sammensætning af $f\colon X \to \mathbb{R}$ eller $\varphi = (f,g)\colon X \to \mathbb{R}^2$ med

$$y \to |y|, cy \quad \text{eller} \quad (y_1, y_2) \to y_1 + y_2, y_1 \vee y_2, y_1 \wedge y_2, y_1 y_2,$$

der alle er kontinuerte og dermed Borel funktioner. □



Ved undersøgelser vedrørende funktioner $f: X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty,\infty]$, eller blot ubegrænsede funktioner, kan man undertiden med fordel foretage <u>afkapning</u> (truncéring). Af afkappe f ved et $b \in \mathbb{R}_+$ vil sige at gå over til funktionen k givet ved

$$k(x) = \begin{cases} -b & \text{for} \quad f(x) < -b \\ f(x) & \text{for} \quad -b \leqq f(x) \leqq b \\ b & \text{for} \quad b < f(x) . \end{cases}$$

<u>Ved afkapning af en $\mathbb{E}$-målelig funktion</u> $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ <u>fås igen en $\mathbb{E}$-målelig funktion</u>.

Verificeres umiddelbart, idet man betragter $\{x | k(x) > a\}$ i tilfældene $a < -b$, $-b \leqq a < b$ og $a \geqq b$.

SÆTNING 1'. <u>Når</u> $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ <u>og</u> $g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ <u>er</u> $\mathbb{E}$-<u>målelige og</u> $c \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty,\infty]$, <u>da er</u> $|f|$, cf, $f\vee g$, $f\wedge g$ <u>og</u> fg <u>ligeledes</u> $\mathbb{E}$-<u>målelige</u>.

<u>Hvis</u> $f(x) + g(x)$ <u>er defineret for hvert</u> $x \in X$, <u>dvs.</u> $(f(x),g(x)) \neq (\pm\infty,\mp\infty)$, <u>gælder det samme for</u> $f+g$.

<u>Bevis</u>. Lad os for hvert $n \in \mathbb{N}$ med f_n og g_n betegne de funktioner, der fås ved at afkappe f og g ved n. For hvert $x \in X$ har vi da ikke blot $f_n(x) \to f(x)$ og $g_n(x) \to g(x)$, men også

$$|f_n(x)| \to |f(x)|, \quad cf_n(x) \to cf(x),$$

$$f_n(x)\vee g_n(x) \to f(x)\vee g(x), \; f_n(x)\wedge g_n(x) \to f(x)\wedge g(x), \; f_n(x)g_n(x) \to f(x)g(x).$$

Og hvis $(f(x),g(x)) \neq (\pm\infty, \mp\infty)$, gælder tillige $f_n(x)+g_n(x) \to f(x)+g(x)$.

Påstanden følger nu af resultaterne ovenfor ved brug af Corollar 1 i §2.2. □

SÆTNING 1". Når $f: X \curvearrowright \mathbb{C}$ og $g: X \curvearrowright \mathbb{C}$ er $\mathbb{E}$-målelige og $c \in \mathbb{C}$, da er $|f|$, cf, $f+g$ og fg ligeledes $\mathbb{E}$-målelige.

Bevis. Funktionen $|f|$ kan fås ved sammensætning af f med $z \curvearrowright |z|$, $z \in \mathbb{C}$. For de tre øvrige kan man benytte Sætning 4 i §2.1; eksempelvis er jo $cf = (c'f'-c''f'') + i(c'f''+c''f')$. □

2.4. Delrum.

Lad $(X,\mathbb{E})$ være et målbart rum. For en ikke tom delmængde $X' \subseteq X$ betragtes mængdesystemet i X'

$$\mathbb{E}_{X'} = \{X' \cap E \mid E \in \mathbb{E}\},$$

som er en σ-algebra i X', idet

$$X' \cap X = X', \quad X' \setminus (X' \cap E) = X' \cap (X \setminus E), \quad \bigcup_1^\infty (X' \cap E_n) = X' \cap \left(\bigcup_1^\infty E_n\right).$$

Forsynet med σ-algebraen $\mathbb{E}_{X'}$, som kaldes den inducerede eller nedarvede σ-algebra, er $(X',\mathbb{E}_{X'})$ et målbart rum kaldet delrummet bestemt ved X' og $\mathbb{E}$.

Bemærk, at hvis $X' \in \mathbb{E}$ så er

$$\mathbb{E}_{X'} = \{E \in \mathbb{E} \mid E \subseteq X'\} \subseteq \mathbb{E}.$$

Hvis på den anden side $\mathbb{E}_{X'} \subseteq \mathbb{E}$, så er $X' \in \mathbb{E}$.

Inklusionsafbildningen $i = i_{X',X}: (X',\mathbb{E}_{X'}) \to (X,\mathbb{E})$ givet ved $i(x) = x$ er målelig, idet

$$i^{-1}(E) = X' \cap E$$

for $E \in \mathbb{E}$. Faktisk er $\mathbb{E}_{X'}$ den mindste σ-algebra på X', så i er målelig.

Hvis $\varphi\colon (X,\mathbb{E}) \to (Y,\mathbb{F})$ er målelig, og X' er en ikke tom delmængde af X, så er <u>restriktionen</u> $\varphi|X'\colon (X',\mathbb{E}_{X'}) \to (Y,\mathbb{F})$ målelig, idet $\varphi|X' = \varphi \circ i_{X',X}$. Hvis $\varphi(X) \subseteq Y' \subseteq Y$ kan vi betragte φ som en afbildning $\varphi\colon X \to Y'$. Man ser, at $\varphi\colon X \to Y'$ er $\mathbb{E}$-$\mathbb{F}_{Y'}$-målelig, hvis og kun hvis $\varphi\colon X \to Y$ er $\mathbb{E}$-$\mathbb{F}$-målelig.

Lad os se på en afbildning $\varphi\colon (X,\mathbb{E}) \to (Y,\mathbb{F})$ givet ved en "Tuborg"

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{hvis } x \in A_1 \\ \varphi_2(x) & \text{hvis } x \in A_2 \\ \vdots & \\ \varphi_n(x) & \text{hvis } x \in A_n \end{cases},$$

hvor $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ er en spaltning af X i parvis disjunkte ikke tomme mængder $A_i \in \mathbb{E}$, og φ_i er en afbildning af A_i ind i Y, $i = 1,\cdots,n$.

<u>Hvis φ_i er $\mathbb{E}_{A_i}$-$\mathbb{F}$-målelig for hvert $i = 1,\cdots,n$, så er φ en $\mathbb{E}$-$\mathbb{F}$-målelig afbildning</u>.

For hvert $F \in \mathbb{F}$ har vi nemlig

$$\varphi^{-1}(F) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi^{-1}(F) \cap A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(F) \in \mathbb{E},$$

idet $\varphi_i^{-1}(F) \in \mathbb{E}_{A_i} \subseteq \mathbb{E}$.

<u>EKSEMPEL</u>. Lad $f,g\colon (X,\mathbb{E}) \to \overline{\mathbb{R}}$ være $\mathbb{E}$-målelige funktioner. Definitionsmængden for $f-g$ er

$$U = X \setminus (\{x \in X \mid f(x) = g(x) = \infty\} \cup \{x \in X \mid f(x) = g(x) = -\infty\}) \in \mathbb{E},$$

idet

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x) = \infty\} = f^{-1}(\{\infty\}) \cap g^{-1}(\{\infty\}) \in \mathbb{E},$$

og analogt med $-\infty$. Ser vi bort fra tilfældet $U = \emptyset$, vil derfor $f|U$, $g|U$ og dermed $f-g = f|U - g|U$ være $\mathbb{E}$-målelig (§2.3).

Som corollar findes, at $\{x \in X | g(x) < f(x)\} \in \mathbb{E}$. Thi mængden er tom hvis $U = \emptyset$, og ellers lig med

$$\{x \in U | (f-g)(x) > 0\} \in \mathbb{E}.$$

Herefter ses let, at $\{x \in X | f(x) \leqq g(x)\} \in \mathbb{E}$ og $\{x \in X | f(x) = g(x)\} \in \mathbb{E}$.

(Mængden $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ vil naturligvis tilhøre $\mathbb{E}$ også for $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f,g: X \sim \mathbb{C}$, thi her har man uden videre

$$\{x \in X | f(x) = g(x)\} = \{x \in X | (f-g)(x) = 0\} = (f-g)^{-1}(\{0\}) \in \mathbb{E}.)$$

Opgaver til §2.

2.1. Vis, at indikator funktionen $1_A: (X,\mathbb{E}) \to \mathbb{R}$ for en mængde $A \subseteq X$ er målelig, hvis og kun hvis $A \in \mathbb{E}$. ($1_A(x) = 1$ for $x \in A$ og $1_A(x) = 0$ for $x \notin A$).

2.2. Lad $\varphi: X \to Y$ være en afbildning.

a) Vis, at hvis $\mathbb{E}$ er en σ-algebra i X, så findes en største σ-algebra $\mathbb{F}$ i Y med egenskaben at φ er $\mathbb{E}$-$\mathbb{F}$-målelig, og $\mathbb{F}$ er givet ved

$$\mathbb{F} = \{F \subseteq Y \mid \varphi^{-1}(F) \in \mathbb{E}\} .$$

b) Vis, at hvis $\mathbb{F}$ er en σ-algebra i Y, så findes en mindste σ-algebra $\mathbb{E}$ i X med egenskaben at φ er $\mathbb{E}$-$\mathbb{F}$-målelig, og $\mathbb{E}$ er givet ved

$$\mathbb{E} = \{\varphi^{-1}(F) \mid F \in \mathbb{F}\} .$$

Antag, at $X' \subseteq X$ og $X' \neq \emptyset$.

c) Vis, at hvis $\mathbb{E}'$ er en σ-algebra i X', så findes en største σ-algebra $\mathbb{E}$ i X med egenskaben $\mathbb{E}_{X'} \subseteq \mathbb{E}'$, og $\mathbb{E}$ er givet ved

$$\mathbb{E} = \{E \subseteq X \mid E \cap X' \in \mathbb{E}'\} .$$

2.3. Betragt $\varphi: (X,\mathbb{E}) \to (Y,\mathbb{F})$. Vis, at hvis $\mathbb{E} = \mathcal{P}(X)$, så er f målelig uanset hvad $\mathbb{F}$ er, og hvis $\mathbb{F} = \{\emptyset, Y\}$, så er f målelig uanset hvad $\mathbb{E}$ er.

2.4. Lad (A_n) være en følge af parvis disjunkte ikke tomme målelige delmængder i $(X,\mathbb{E})$ så $X = \bigcup_1^\infty A_n$, og lad (a_n) være en følge af reelle tal. Vis, at $f: X \to \mathbb{R}$ defineret ved $f(x) = a_n$ for $x \in A_n$, $n = 1,2,\cdots$, er målelig.

2.5. Lad $(X,\mathbb{E})$ være et målbart rum. Undersøg om der om en funktion $f: X \to \mathbb{R}$ gælder

$$f \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig} \Leftrightarrow |f| \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig.}$$

2.6. Lad $(X,\mathbb{E})$ være et målbart rum, og lad (f_n) være en følge af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_n: X \to \overline{\mathbb{R}}$.

1° Vis, at

$$\{x \in X \mid (f_n(x)) \text{ er konvergent i } \overline{\mathbb{R}}\} \in \mathbb{E}.$$

2° Samme opgave med $\mathbb{R}$ i stedet for $\overline{\mathbb{R}}$.

3° Samme opgave med $\mathbb{C}$ i stedet for $\overline{\mathbb{R}}$.

2.7.1° Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i X frembragt af et mængdesystem $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{E}$. Vis, at for $X' \subseteq X$ er den inducerede σ-algebra $\mathbb{E}_{X'}$ frembragt af mængdesystemet

$$\mathbb{D}_{X'} = \{X' \cap D \mid D \in \mathbb{D}\}, \text{ dvs. } \sigma(\mathbb{D})_{X'} = \sigma(\mathbb{D}_{X'}).$$

(Vink. $\{E \subseteq X \mid E \cap X' \in \sigma(\mathbb{D}_{X'})\}$ er en σ-algebra i X iflg. Opgave 2.2.c)).

2° Lad (X,d) være et metrisk rum, og $X' \subseteq X$. Vis, at $\mathbb{B}(X') = \mathbb{B}(X)_{X'}$, altså at Borel algebraen for det metriske delrum (X',d) er lig den af $\mathbb{B}(X)$ inducerede σ-algebra på X'.

§3. Mål.

Det almene begreb mål er udsprunget af længde-, areal- og volumenbegrebet, således som dette har fundet sin udformning i Lebesgue målet, idet man har fæstet sig ved nogle få, fundamentale egenskaber som de afgørende ved definitionen af Lebesgue integralet og ved beviserne vedrørende grænseovergang med dette. (Radon 1913, Fréchet 1915, jvfr. Indledningen.) Blandt disse egenskaber mærkes især numerabel additivitet (første gang fremhævet af Borel 1898, jvfr. §1.1).

3.1. Mål.

Ved et mål i en mængde X vil vi forstå en funktion μ defineret på en mængde $\mathbb{E}$ af delmængder af X, hvor

(i) $\mathbb{E}$ er en σ-algebra i X

(ii) $\mu(E) \in [0,\infty]$ for hvert $E \in \mathbb{E}$, $\mu(\emptyset) = 0$

(iii) $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$, når $E_1, E_2, \cdots$ er parvis disjunkte og tilhører $\mathbb{E}$.

En mængde X betragtet med et mål $\mu: \mathbb{E} \sim \overline{\mathbb{R}}_+$ i X kaldes et målrum. Som betegnelse benyttes $(X,\mathbb{E},\mu)$ eller blot (X,μ). Værdien $\mu(E)$ svarende til en mængde $E \in \mathbb{E}$ kaldes målet af E.

At (iii) er opfyldt, udtrykker man ved at sige, at μ er numerabelt additiv.

Man kan anskue et mål μ i X som beskrivelse af en massefordeling i X. Herved tolkes $\mu(E)$ som massen i mængden E. Tallet $\mu(X)$ kaldes den totale masse. Hvis $\mu(X) < \infty$ kaldes μ endeligt, og hvis $\mu(X) = 1$ kaldes μ et sandsynlighedsmål, eller en fordeling. Et mål $\mu: \mathbb{E} \sim \overline{\mathbb{R}}_+$ i en mængde X har følgende, hyppigt benyttede egenskaber:

(1) $\mu(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)$, når $E_1, \cdots, E_n$ er parvis disjunkte og tilhører $\mathbb{E}$.

Thi $\mu(E_1 \cup \cdots \cup E_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots) = \mu(E_1) + \ldots + \mu(E_n) + 0 + 0 + \ldots$.

(2) $\mu(E) \leqq \mu(F)$, når $E,F \in \mathbb{E}$, $E \subseteqq F$.

(3) $\mu(F\setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$, når $E,F \in \mathbb{E}$, $E \subseteqq F$ og $\mu(E) < \infty$.

Begge fås af $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F\setminus E)$.

(4) $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leqq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$, når $E_1, E_2, \cdots \in \mathbb{E}$.

$\mu(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) \leqq \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)$, når $E_1, \cdots, E_n \in \mathbb{E}$.

Ad første påstand: Med

$$F_1 = E_1 \quad \text{og} \quad F_j = E_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i,\ j = 2,3,\cdots$$

er $F_1, F_2, \cdots$ parvis disjunkte og

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j .$$

Thi hvert $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ tilhører netop ét F_j, nemlig F_j med $j = \min\{i | x \in E_i\}$.

Det er klart, at $F_j \in \mathbb{E}$, og idet $F_j \subseteqq E_j$, har vi

$$\mu(\cup_j E_j) = \mu(\cup_j F_j) = \Sigma_j \mu(F_j) \leqq \Sigma_j \mu(E_j) .$$

Anden påstand fås af første, eller vises analogt.

(5) $\mu(E_n) \nearrow \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$, når $E_1 \subseteqq E_2 \subseteqq \cdots$ og alle E_n tilhører $\mathbb{E}$.

Thi med $F_1 = E_1$ og $F_j = E_j \setminus E_{j-1}$, $j = 2,3,\cdots$, er $F_1, F_2, \cdots$ parvis disjunkte, $E_n = \bigcup_{j=1}^{n} F_j$, $n = 1,2,\cdots$, og $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$. Følgelig gælder

$$\mu(E_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu(F_j) \nearrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j).$$

(6) $\mu(E_n) \searrow \mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j)$, når $E_1 \supseteqq E_2 \supseteqq \cdots$, alle E_n tilhører $\mathbb{E}$ og $\mu(E_1) < \infty$.

Thi med $F_n = E_1 \setminus E_n$ har vi $F_1 \subseteqq F_2 \subseteqq \cdots$ og $\cup_j F_j = E_1 \setminus \cap_j E_j$. Følgelig gælder

$$\mu(E_1) - \mu(E_n) = \mu(F_n) \nearrow \mu(\cup_j F_j) = \mu(E_1) - \mu(\cap_j E_j) .$$

Som simple eksempler viser (se nedenfor), kan man i (6) ikke slette forudsætningen $\mu(E_1) < \infty$. (Men selvfølgelig kan man nøjes med $\exists n: \mu(E_n) < \infty$.) I (3) er forudsætningen $\mu(E) < \infty$ væsentlig.

EKSEMPLER.

A. Lebesgue målet. (Hovedeksempel.)

Vi skal senere (§5) gøre rede for, at der findes et og kun et mål m defineret på Borel algebraen i $\mathbb{R}$, hvis værdi for ethvert interval er lig intervallængden. Dette mål kalder vi Lebesgue målet i $\mathbb{R}$.

Mere generelt skal vi (ligeledes i §5) gøre rede for, at der findes et og kun et mål m_k defineret på Borel algebraen i $\mathbb{R}^k$, hvis værdi for ethvert interval er lig produktet af kantlængderne. Dette mål kalder vi Lebesgue målet i $\mathbb{R}^k$. Vi skal videre bevise, at kongruente Borel mængder i $\mathbb{R}^k$ har samme Lebesgue mål; hermed vil det være berettiget at opfatte værdien $m_k(E)$ på en Borel mængde E i $\mathbb{R}^k$ som dennes volumen (specielt areal for $k = 2$, længde for $k = 1$).

Vi vil allerede nu tillade os at benytte Lebesgue målet i eksempler og opgaver.

Ad (3), p.3.2. Med $E =]1,\infty[\subseteq \mathbb{R}$ og $F =]0,\infty[\subseteq \mathbb{R}$ kan $m(F \setminus E) = m(]0,1]) = 1$ ikke findes som $\mu(F) - \mu(E)$. (Det havde ikke hjulpet at regne $\infty - \infty = 0$.)

Ad (6), p.3.2. Med $E_n =]n,\infty[\subseteq \mathbb{R}$, $n = 1,2,\cdots$, er $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$. Men $m(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j) = m(\emptyset) = 0$, skønt $m(E_n) = \infty$ for hvert n.

B. Tællemål.

Funktionen μ defineret på mængden $P(X)$ af alle delmængder af en vilkårlig (endelig, numerabel eller overnumerabel) mængde X ved

$$\mu(E) = \begin{cases} \text{antal elementer i } E, & \text{når } E \subseteq X \text{ er endelig} \\ \infty, & \text{når } E \subseteq X \text{ er uendelig} \end{cases}$$

er et mål, kaldet tællemålet i X .

C. Er $\mu: \mathbb{E} \sim \overline{\mathbb{R}}_+$ et mål i en mængde X og $A \in \mathbb{E}$, da vil funktionen

$$E \sim \mu(A \cap E), \quad E \in \mathbb{E},$$

igen være et mål i X .

D. Er $(\mu_j)_{j\in J}$ en (endelig eller uendelig) familie af mål, alle defineret på samme σ-algebra $\mathbb{E}$ i en mængde X, og er $(a_j)_{j\in J}$ en familie af tal $a_j \in \overline{\mathbb{R}}_+$, da er funktionen $\sum_{j\in J} a_j\mu_j$, dvs.

$$E \sim \sum_{j\in J} a_j\mu_j(E), \quad E \in \mathbb{E},$$

igen et mål i X .

Thi med $\mu = \sum_{j\in J} a_j\mu_j$ har vi

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{j\in J} a_j\mu_j(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \Sigma_j(a_j\Sigma_n\mu_j(E_n)) = \Sigma_j\Sigma_n a_j\mu_j(E_n)$$
$$= \sum_{n,j} a_j\mu_j(E_n) = \Sigma_n\Sigma_j a_j\mu_j(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n),$$

når $E_1, E_2, \cdots$ er parvis disjunkte og tilhører $\mathbb{E}$. (Se §0.)

E. For en mængde X og et punkt $a \in X$ defineres Dirac målet ε_a i a ved

$$\varepsilon_a(E) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } a \in E \\ 0 & \text{hvis } a \notin E \end{cases}, \quad E \in \mathcal{P}(X).$$

Man ser, at ε_a er et sandsynlighedsmål i X, der ofte kaldes "den i a udartede fordeling".

F. Er $\mu: \mathbb{E} \to [0,\infty]$ et mål i X og $A \in \mathbb{E}$ ikke tom, da er restriktionen $\mu|\mathbb{E}_A : \mathbb{E}_A \to [0,\infty]$ et mål i A kaldet μ's restriktion til A. For enhver Borel mængde $B \subseteq \mathbb{R}^k$, kan vi specielt betragte Lebesgue målets restriktion til B.

3.2. "Næsten overalt".

Lad $\mu: \mathbb{E} \to [0,\infty]$ være et mål i en mængde X .

En mængde $N \subseteq X$ kaldes en nulmængde med hensyn til μ (kort: en μ-nulmængde) såfremt der findes $E \in \mathbb{E}$ så $N \subseteq E$ og $\mu(E) = 0$.

En delmængde af en μ-nulmængde er igen en μ-nulmængde. En forening af endelig eller numerabelt mange μ-nulmængder er igen en μ-nulmængde.

I tilknytning til begrebet nulmængde benyttes sprogbrugen "næsten overalt":

Lad $P(x)$ være et prædikat (et åbent udsagn) vedrørende mængden X , eller blot vedrørende en delmængde $A \subseteq X$. (Eksempelvis kan $P(x)$ stå for "$f(x) = 0$" , hvor f er en given funktion defineret på A .) Vendingen

"for næsten alle $x \in A$ med hensyn til μ: $P(x)$" ,

"for μ-næsten alle $x \in A$: $P(x)$"

eller, når misforståelser ikke kan frygtes, kortet ned til f.eks.

"for næsten alle x: $P(x)$" ,

skal da betyde:

"$\{x \in A \mid \neg P(x)\}$ er en nulmængde m.h.t. μ" .

Til sammenligning bemærkes, at "$\forall x \in A: P(x)$" jo kommer ud på et med "$\{x \in A \mid \neg P(x)\}$ er tom".

Undertiden skrives blot "P næsten overalt", "P p.p.", "P a.e.", eller "P n.o." (p.p. står for presque partout, a.e. for almost everywhere).

I ovennævnte eksempel har vi således udtryksmåder som "$f(x) = 0$ for næsten alle $x \in A$", "$f = 0$ næsten overalt i A".

Endnu et eksempel: Konvergens næsten overalt. Lad $f_1, f_2, \ldots$ og f være funktioner defineret på X (eller eventuelt kun på dele af X). Udsagnet "$f_n(x) \to f(x)$ for μ-næsten alle x" eller kort

"$f_n \to f$ μ-n.o."

betyder da, at der findes en mængde $N \in \mathbb{E}$ med $\mu(N) = 0$, således at

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{for hvert} \quad x \in X \setminus N .$$

Sættes

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for} \quad x \in X \setminus N \\ 0 & \text{for} \quad x \in N \end{cases} ,$$

og defineres $g_1, g_2, \cdots$ på samme måde ud fra $f_1, f_2, \cdots$, opnås konvergens overalt:

$$\forall x \in X: \ g_n(x) \to g(x) .$$

Er $f_1, f_2, \cdots$ og f alle $\mathbb{E}$-målelige, vil $g_1, g_2, \cdots$ og g ligeledes være det (ifølge bemærkninger om delrum).

Ved

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \text{næsten overalt m.h.t. } \mu$$

defineres en ækvivalensrelation f.eks. i mængden af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f: X \rightsquigarrow \mathbb{C}$. Relationen kan udstrækkes til $\mathbb{E}$-målelige funktioner, som er defineret μ-næsten overalt i X. I mange henseender viser ækvivalente funktioner sig at være "lige gode".

Eksempelvis harmonerer ækvivalensrelationen med konvergens næsten overalt: Hvis $f_n \to f$ μ-n.o., $f = h$ μ-n.o. og $\forall n: f_n = h_n$ μ-n.o., så gælder $h_n \to h$ μ-n.o.

Med hensyn til tællemålet i en mængde X findes ikke andre nulmængder end $\emptyset$. Med hensyn til Dirac målet ε_a i X er nulmængder N karakteriseret ved at $a \notin N$.

Med hensyn til Lebesgue målet $m_k: \mathbb{B}_k \to [0,\infty]$ er ethvert punkt og dermed enhver tællelig mængde, en nulmængde. Men også Cantors mængde Z, der er ækvipotent med $\mathbb{R}$, er en nulmængde, jvfr. §5.6. Derimod er $\emptyset$ den eneste åbne nulmængde. (Hvorfor?)

Opgaver til §3.

3.1. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $\mu(X) < \infty$.
Vis, at funktionen $d\colon \mathbb{E}\times\mathbb{E} \to [0,\infty[$ givet ved

$$d(A,B) = \mu(A\setminus B) + \mu(B\setminus A)$$

er en pseudometrik på $\mathbb{E}$.

3.2. Lad $\mu\colon \mathcal{P}(X) \rightsquigarrow [0,\infty]$ være givet ved

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{for } E = \emptyset \\ \infty & \text{ellers} \end{cases} .$$

Vis, at μ er et mål i X.

3.3. Lad $\mu\colon \mathcal{P}(X) \rightsquigarrow [0,\infty]$ være givet ved

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{når } E \text{ er endelig eller numerabel} \\ \infty & \text{ellers} . \end{cases}$$

Vis, at μ er et mål i X.

3.4. Lad $(E_j)_{j\in J}$ være en familie af parvis disjunkte Borel mængder i $\mathbb{R}$, hvor $\bigcup_{j\in J} E_j$ igen er en Borel mængde.

1° Vis, at $\sum_{j\in J} m(E_j) \leq m(\bigcup_{j\in J} E_j)$.

2° Vis, at "<" kan forekomme. (Begrænsningen til <u>numerabel</u> additivitet i definitionen af mål har således sine gode grunde.)

3.5. Lad B være en Borel mængde i $\mathbb{R}$.

1° Vis, at funktionen

$$x \rightsquigarrow m(B \cap\,]-x,x]), \quad x \in \mathbb{R}_+ ,$$

er kontinuert og voksende. Bestem funktionens grænseværdi for $x \to \infty$ og for $x \to 0$.

2° Vis, at der for ethvert $a \in \mathbb{R}$, $0 \leq a \leq m(B)$, findes en Borel mængde $A \subseteq B$ med $m(A) = a$.

3.6. Vis påstanden i Eksempel B, p.3.3 i noterne.

3.7. Vis påstanden i Eksempel C, p.3.4 i noterne.

3.8. Betragt en vilkårlig funktion $p: X \rightsquigarrow [0,\infty]$ og sæt

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} p(x)$$

for hver delmængde $E \subseteq X$. Gør rede for, at μ er et mål i X.
Man siger, at målet μ er givet ved vægtfunktionen p.
(Sprogbruen svarer til, at $p(x)$ tolkes som en vægt eller masse anbragt i punktet x.)

3.9. Lad X være en endelig eller numerabel mængde. Gør rede for, at ethvert mål $\mu: \mathcal{P}(X) \rightsquigarrow [0,\infty]$ svarer til en vægtfunktion (se Opgave 3.8).

3.10. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum. Bevis, at

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) ,$$

når $E_1, E_2, \dots \in \mathbb{E}$ og $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ for $i \neq j$.
(Vink. Se beviset for regel (4), p.3.2 i noterne.)

3.11. Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde X og lad $\lambda: \mathbb{E} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ være numerabelt additiv. Sæt

$$\lambda^+(E) = \sup\{\lambda(A) \mid A \subseteq E,\ A \in \mathbb{E}\} \quad \text{for} \quad E \in \mathbb{E} ,$$

$$\lambda^-(E) = -\inf\{\lambda(A) \mid A \subseteq E,\ A \in \mathbb{E}\} \quad \text{for} \quad E \in \mathbb{E} .$$

1° Vis, at $\lambda(E) \leq \lambda^+(E)$ og $0 \leq \lambda^+(E)$ for alle $E \in \mathbb{E}$.

2° Vis, at $\lambda^+(\bigcup_n E_n) \leq \sum_n \lambda^+(E_n)$, når $E_1, E_2, \dots \in \mathbb{E}$ er parvis disjunkte.

3° Vis, at $\lambda^+(X) < \infty$. (Vink. Antag $\lambda^+(X) = \infty$ og begynd med at slutte, at der findes en mængde $A_1 \in \mathbb{E}$, hvor $|\lambda(A_1)| \geq 1$ og $\lambda^+(X \setminus A_1) = \infty$.)

4^o Vis, at λ^+ er et mål.

5^o Vis, at λ^- er et mål med $\lambda^-(X) < \infty$.

6^o Vis, at $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$.

7^o Vis, at $\lambda^+ \leqq \mu$, $\lambda^- \leqq \nu$, når μ og ν er (endelige) mål defineret på $\mathbb{E}$ med $\lambda = \mu - \nu$.

Svarende til en tolkning af $\lambda(E)$ som den samlede ladning i mængden E er det naturligt at opfatte $\lambda^+(E)$ som den positive og $-\lambda^-(E)$ som den negative ladning i E.

3.12. Idet

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \in]-\infty, 0] \\ 1 & \text{for } x \in]0,\infty[\end{cases},$$

skal man vise, at der ikke findes nogen kontinuert funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, således at $f(x) = g(x)$ for næsten alle $x \in \mathbb{R}$ med hensyn til Lebesgue målet.

3.13. Lad $(x,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og antag $f_n \to f$ μ-n.o., $f = h$ μ-n.o. og $\forall n$: $f_n = h_n$ μ-n.o. Vis, at $h_n \to h$ μ-n.o.

3.14. Et mål $\mu: \mathbb{E} \to [0,\infty]$ i en mængde X siges at være <u>koncentreret</u> i en mængde $A \in \mathbb{E}$, hvis $\mu(CA) = 0$. Vis, at hvis μ er koncentreret i hver af mængderne $A_1, A_2 \cdots$ fra $\mathbb{E}$, så er μ også koncentreret i $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

3.15. Et mål $\mu: \mathbb{E} \to [0,\infty]$ i en mængde X siges at være <u>fuldstændigt</u>, hvis der for $M,N \subseteq X$ gælder

$$M \subseteq N \text{ og } N \in \mathbb{E} \text{ med } \mu(N) = 0 \Rightarrow M \in \mathbb{E},$$

dvs. hvis enhver μ-nulmængde tilhører $\mathbb{E}$.

Giv eksempler på
et fuldstændigt mål,
et mål, der ikke er fuldstændigt,
to mål defineret på samme σ-algebra, hvor det ene er fuldstændigt, det andet ikke.

(Hovedeksemplet er det fuldstændige Lebesgue mål i $\mathbb{R}^k$, se §5.8).

3.16. Lad $\mu: \mathbb{E} \to [0,\infty]$ være et <u>fuldstændigt</u> mål i en mængde X (se Opgave 3.15). Med $f,g,f_1,f_2,\cdots$ betegnes funktioner defineret på X og med værdier i samme mængde $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$.

1° Antag $f = g$ μ-n.o. Vis da, at f er $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis g er det.

2° Antag $f_n(x) \to f(x)$ for μ-næsten alle x. Vis, at f er $\mathbb{E}$-målelig, hvis $f_1,f_2,\cdots$ alle er det.

3° Gør rede for, at forudsætningen om fuldstændighed er nødvendig i 1° og 2°.

3.17. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og sæt

$$\mathbb{F} = \{F \subseteq X \mid \exists A,B \in \mathbb{E} : A \subseteq F \subseteq B,\ \mu(B\setminus A) = 0\}.$$

1° Vis, at en mængde $F \subseteq X$ tilhører $\mathbb{F}$, hvis og kun hvis F kan skrives $F = A \cup M$, hvor $A \in \mathbb{E}$, og M er en μ-nulmængde.

2° Vis, at $\mathbb{F}$ er en σ-algebra i X.

3° Vis, at μ på en og kun en måde kan udvides til et mål $\overline{\mu}: \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. (Vink. Benyt 1°.)

4° Vis, at nulmængderne m.h.t. μ og $\overline{\mu}$ er de samme.

5° Vis, at $\overline{\mu}$ er et fuldstændigt mål (se Opgave 3.15), og at enhver udvidelse af μ til et fuldstændigt mål i X, også er en udvidelse af $\overline{\mu}$. (Kort: $\overline{\mu}$ er den snævreste udvidelse af μ til et fuldstændigt mål i X. Ofte kaldes $\overline{\mu}$ for <u>fuldstændiggørelsen</u> af μ.)
(Hovedeksempel: Se §5.8.)

3.18. Lad $\mu\colon \mathbb{E} \curvearrowright \overline{\mathbb{R}}_+$ være et mål i en mængde $X \neq \emptyset$ og lad $\overline{\mu}\colon \mathbb{F} \curvearrowright \overline{\mathbb{R}}_+$ være den snævreste udvidelse af μ til et fuldstændigt mål i X. (Se Opgave 3.17.)

1° Vis, at der til enhver $\mathbb{F}$-målelig funktion $g\colon X \curvearrowright \overline{\mathbb{R}}$ findes en $\mathbb{E}$-målelig funktion $f\colon X \curvearrowright \overline{\mathbb{R}}$, således at

$$f = g \quad \mu\text{-n.o.}$$

(Vink. Sæt $F_r = \{x \mid g(x) > r\}$ for hvert $r \in \mathbb{Q}$ og skriv F_r på formen $A_r \cup M_r$, hvor $A_r \in \mathbb{E}$, og M_r er en μ-nulmængde. Videre vælges $N \in \mathbb{E}$ med $\mu(N) = 0$, således at $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} M_r \subseteq N$. Prøv så

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{for } x \in X \setminus N \\ 0 & \text{for } x \in N, \end{cases}$$

idet $\{]r,\infty] \mid r \in \mathbb{Q}\}$ frembringer $\overline{\mathbb{B}}$.)

2° Som 1°, men med $\mathbb{R}$, henholdsvis $\mathbb{C}$, i stedet for $\overline{\mathbb{R}}$.

§4. Integral.

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum. I de 3 næste afsnit skal vi til visse funktioner $f\colon X \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) knytte et tal $\int f d\mu$ kaldet integralet af funktionen med hensyn til målet μ. Dette skal naturligvis gøres på en sådan måde, at vi genfinder det sædvanlige integral, når μ er Lebesgue målet. Den grundlæggende ide er at definere

$$\int 1_E \, d\mu = \mu(E) \quad \text{for} \quad E \in \mathbb{E},$$

idet 1_E er indikatorfunktionen for E, dvs.

$$1_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad x \in E, \\ 0 & \text{for} \quad x \in X \setminus E. \end{cases}$$

Vi skal se, at denne ide fastlægger integralet, hvis vi samtidig ønsker, at afbildningen $f \rightsquigarrow \int f d\mu$ er lineær og har "passende kontinuitetsegenskaber".

4.1. Integral af positive målelige funktioner.

En funktion $s\colon X \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) kaldes simpel, hvis den kun har endelig mange forskellige funktionsværdier. Som eksempel nævnes indikatorfunktionen 1_E for en delmængde $E \subseteq X$, der højst har to værdier.

Er $a_1,\cdots,a_n$ de forskellige funktionsværdier for en simpel funktion s, vil $A_i = \{x \in X \mid s(x) = a_i\} = s^{-1}(\{a_i\})$, $i = 1,\cdots,n$, være ikke tomme, parvis disjunkte delmængder af X med $\bigcup_1^n A_i = X$, altså en klasseinddeling af X, og

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \, 1_{A_i} .$$

Man ser, at s er $\mathbb{E}$-målelig netop hvis $A_i \in \mathbb{E}$ for $i = 1,\cdots,n$, jvfr. §2.4.

Lad $M^+ = M^+(X,\mathbb{E})$ betegne mængden af målelige funktioner $f\colon X \to [0,\infty]$. Det understreges, at funktionerne i M^+ må antage værdien ∞, og f.eks. er funktionen $x \rightsquigarrow \infty$ element i M^+.

For $f,g \in \mathcal{M}^+$ og $c \in [0,\infty]$ er $f+g$ og cf igen i $\mathcal{M}^+$, og hvis (f_n) er en følge fra $\mathcal{M}^+$ som konvergerer punktvis mod en funktion f, så er f i $\mathcal{M}^+$. Specielt vil grænsefunktionen for en voksende følge af simple, positive og målelige funktioner tilhøre $\mathcal{M}^+$. At alle funktioner i $\mathcal{M}^+$ kan opnås på denne måde, er indeholdt i følgende

SÆTNING 1. <u>For enhver funktion</u> $f \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$ <u>findes en voksende følge</u> $s_1 \le s_2 \le \cdots$ <u>af simple,</u> $\mathbb{E}$<u>-målelige funktioner</u> $s_n: X \to [0,\infty[$ <u>med</u> $f = \lim_{n\to\infty} s_n$ (<u>punktvis</u>).

<u>Bevis</u>. Man kan benytte $s_n: X \to [0,n]$, $n = 1,2,\cdots$, defineret ved

$$s_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad 0 \le f(x) < \frac{1}{2^n} \\ \vdots & \\ \frac{k}{2^n} & \text{når} \quad \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n} \\ \vdots & \\ \frac{n2^n-1}{2^n} & \text{når} \quad \frac{n2^n-1}{2^n} \le f(x) < n \\ n & \text{når} \quad n \le f(x) \le \infty . \end{cases}$$

Funktionen s_n er defineret ved en "Tuborg" og derfor $\mathbb{E}$-målelig ifølge §2.4. Desuden gælder at $s_n(x)$ konvergerer voksende mod $f(x)$ for alle $x \in X$, hvilket kort skrives $s_n \nearrow f$. Thi, er $f(x) < 1$ fås $s_1(x), s_2(x), \cdots$ ud fra $f(x)$ som nærmeste lavere multipla af $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots$. For $1 \le p \le f(x) < p+1$ begynder talfølgen $s_1(x), s_2(x), \cdots$ med $1,2,\cdots,p$, medens de resterende elementer fås ud fra $f(x)$ som nærmeste lavere multipla af $\frac{1}{2^{p+1}}, \frac{1}{2^{p+2}}, \cdots$. Er $f(x) = \infty$ bliver talfølgen $1,2,\cdots$. □

BEMÆRKNINGER. (a) En simpel funktion $s \in M^+$ har per definition værdier i $[0,\infty[$, værdien ∞ tillades ikke.

(b) For et reelt tal x betegner $[x]$ den hele del af x, altså $[x]$ er det hele tal $n \in \mathbb{Z}$, der opfylder $n \leq x < n+1$. Dermed kan s_n skrives

$$s_n(x) = \begin{cases} 2^{-n}[2^n f(x)] & \text{når } f(x) < n, \\ n & \text{når } f(x) \geq n. \end{cases}$$

Vi ønsker at tilskrive enhver funktion $f \in M^+$ et integral $\int f d\mu$, som skal være et tal i intervallet $[0,\infty]$. Følgende hovedresultat viser, at dette kan gøres på kun én måde, hvis vi ønsker nogle rimelige regneregler for afbildningen $f \leadsto \int f d\mu$. Sætningen er analog til resultatet om eksistens og entydighed af middelværdi i kurset 1 SS.

HOVEDSÆTNING. <u>Der findes en og kun en afbildning</u> $f \leadsto \int f d\mu$ <u>af</u> $M^+(X,\mathbb{E})$ <u>ind i</u> $[0,\infty]$, <u>som har følgende egenskaber</u>:

(i) $\int 1_E \, d\mu = \mu(E)$ <u>for</u> $E \in \mathbb{E}$.

(ii) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ <u>for</u> $f,g \in M^+$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$ <u>når</u> (f_n) er en følge fra M^+ så $f_n \nearrow f$.

<u>Den ved</u> (i)-(iii) <u>fastlagte afbildning kan defineres ved</u>

$$(*) \qquad \int s d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu(A_i),$$

<u>når</u> $s \in M^+$ <u>er simpel med de indbyrdes forskellige funktionsværdier</u> $a_1,\cdots,a_n$ og $A_i = s^{-1}(\{a_i\})$, <u>og ved</u>

$$(**) \qquad \int f d\mu = \sup\left\{\int s d\mu \;\middle|\; s \in M^+, \ s \text{ simpel}, \ s \leq f\right\},$$

<u>for vilkårligt</u> $f \in M^+$.

Bevis. Analyse af problemstillingen. Antag, at der findes en afbildning $f \rightsquigarrow \int f d\mu$ med de ønskede egenskaber. Af (ii) sluttes $\int (2f) d\mu = 2\int f d\mu$ og ved induktion $\int (nf) d\mu = n\int f d\mu$ for $n \in \mathbb{N}$. For et rationalt tal $r = \frac{p}{q}$, $p,q \in \mathbb{N}$ har vi da

$$p\int f d\mu = \int (pf) d\mu = \int q(rf) d\mu = q\int (rf) d\mu ,$$

så

$$\int (rf) d\mu = r\int f d\mu .$$

Idet der til ethvert $c \in]0,\infty]$ findes en voksende følge (r_n) af positive rationale tal, der konvergerer mod c, finder vi af (iii) at

$$\int (cf) d\mu = \lim \int (r_n f) d\mu = \lim r_n \int f d\mu = c\int f d\mu ,$$

altså

(iv) $\int (cf) d\mu = c\int f d\mu$ for $c \in [0,\infty]$, $f \in M^+$.

For en simpel funktion $s \in M^+$ med værdierne $a_1,\cdots,a_n$, har man $s = \sum_1^n a_i 1_{A_i}$, hvor $A_i = s^{-1}(\{a_i\})$, og ved anvendelse af (ii),(iv) og (i) fås (*).

For vilkårligt $f \in M^+$ gælder (**). Hvis nemlig $s \leq f$ og s er simpel og $\mathbb{E}$-målelig, vil $f-s \in M^+$ og $f = s+(f-s)$, hvoraf $\int f d\mu = \int s d\mu + \int (f-s) d\mu \geq \int s d\mu$, og dermed er $\int f d\mu$ et overtal for den betragtede talmængde. På den anden side viser (iii) og Sætning 1, at der findes simple $\mathbb{E}$-målelige funktioner $s_n \leq f$ med $\int s_n d\mu$ så tæt på $\int f d\mu$, vi ønsker.

Analysen viser, at der højst er én afbildning med de ønskede egenskaber, og hvis der findes en, må den opfylde (iv), og være givet ved (*) for simple funktioner, og ved (**) for vilkårlige funktioner i M^+.

I eksistensbeviset definerer vi først $\int s d\mu$ for simple funktioner i M^+ ved (*), og får brug for

LEMMA 1. For simple $\mathbb{E}$-målelige funktioner $s,t\colon X \to [0,\infty[$ og $c \in [0,\infty[$ er cs og $s+t$ igen simple og $\mathbb{E}$-målelige, og der gælder

$$\int cs\,d\mu = c\int s\,d\mu\ ,\quad \int (s+t)\,d\mu = \int s\,d\mu + \int t\,d\mu\ .$$

Bevis. Kun den sidste påstand er værd at omtale:

1° Hvis $X = \bigcup_{h=1}^{p} C_h$, hvor $C_1,\dots,C_p \in \mathbb{E}$ er parvis disjunkte, og hvis $c_1,\dots,c_p \in [0,\infty[$, da er

$$\int\Big(\sum_{h=1}^{p} c_h 1_{C_h}\Big)d\mu = \sum_{h=1}^{p} c_h \mu(C_h)\ .$$

Bemærk, at nogle af mængderne C_h kan være tomme, og at $c_1,\dots,c_p$ ikke er forudsat indbyrdes forskellige. - Udelades tomme C_h, og erstattes led $c_{h_1}\mu(C_{h_1}),\dots,c_{h_k}(C_{h_k})$ på højre side med $c_{h_1}\sum_{i=1}^{k}\mu(C_{h_i}) = c_{h_1}\mu(\bigcup_{i=1}^{k} C_{h_i})$ når $c_{h_1} = \dots = c_{h_k}$, kommer vi imidlertid tilbage til definitionen af $\int(\sum_{h=1}^{p} c_h 1_{C_h})d\mu$.

2° Er $a_1,\dots,a_m$ og $b_1,\dots,b_n$ de forskellige funktionsværdier for henholdsvis s og t, og sættes $A_i = s^{-1}(\{a_i\})$, $i = 1,\dots,m$, og $B_j = t^{-1}(\{b_j\})$, $j = 1,\dots,n$, har vi

$$X = X\cap X = \Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\Big) = \bigcup_{i,j}(A_i\cap B_j)\ ,$$

hvor de mn mængder $A_i \cap B_j \in \mathbb{E}$ er parvis disjunkte. Da nu

$$s = \sum_{i,j} a_i 1_{A_i\cap B_j}\ ,\qquad t = \sum_{i,j} b_j 1_{A_i\cap B_j}$$

og dermed

$$s+t = \sum_{i,j}(a_i+b_j)1_{A_i\cap B_j}\ ,$$

finder vi med brug af 1°

$$\int s\,d\mu + \int t\,d\mu = \sum_{i,j} a_i\mu(A_i\cap B_j) + \sum_{i,j} b_j\mu(A_i\cap B_j)$$

$$= \sum_{i,j}(a_i+b_j)\mu(A_i\cap B_j) = \int (s+t)\,d\mu\ . \quad \square$$

LEMMA 2. For simple, $\mathbb{E}$-målelige funktioner $s,t: X \rightsquigarrow [0,\infty[$, hvor $s \leq t$, dvs. $\forall x \in X: s(x) \leq t(x)$, er

$$\int s d\mu \leq \int t d\mu .$$

Bevis. Idet $t = s + (t-s)$ med $t-s \geq 0$, har vi

$$\int t d\mu = \int s d\mu + \int (t-s) d\mu \geq \int s d\mu . \qquad \square$$

For vilkårlige $f \in M^+$ defineres dernæst

$$I(f) = \sup\left\{ \int s d\mu \;\middle|\; s \in M^+,\ s \text{ simpel},\ s \leq f \right\} \in [0,\infty] .$$

Hvis $f \in M^+$ selv er simpel, indgår $\int f d\mu$ i talmængden på højre side, altså $I(f) \geq \int f d\mu$. På den anden side, kan vi af Lemma 2 slutte $\int f d\mu \geq \int s d\mu$ for de betragtede s, altså $\int f d\mu \geq I(f)$. Der gælder altså $I(f) = \int f d\mu$ når $f \in M^+$ er simpel, og dermed er der ingen grund til at opretholde betegnelsen $I(f)$. Det har mening at definere $\int f d\mu$ ved (**) for alle $f \in M^+$.

En umiddelbar konsekvens af definitionen er at der for $f,g \in M^+$ gælder

$$f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu .$$

Vi skal nu eftervise, at afbildningen $f \rightsquigarrow \int f d\mu$ har egenskaberne (i)-(iii), og her er (i) en umiddelbar konsekvens af definitionen (*). Egenskaben (ii) følger af (iii) og Lemma 1 på følgende måde: Til $f,g \in M^+$ kan vi ifølge Sætning 1 finde følger (s_n), (t_n) af simple funktioner fra M^+ så $s_n \nearrow f$, $t_n \nearrow g$. Da $s_n + t_n \nearrow f+g$ giver (iii)

$$\int (f+g) d\mu = \lim \int (s_n + t_n) d\mu = \lim\left(\int s_n d\mu + \int t_n d\mu \right)$$

$$= \lim \int s_n d\mu + \lim \int t_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu .$$

Den manglende egenskab (iii) er af fundamental betydning, så vi citerer den som en selvstændig sætning (jvfr. Lebesgue: Leçons sur l'intégration, Paris 1904 p.98).

LEBESGUES SÆTNING OM STIGENDE GRÆNSEOVERGANG. (Kort: LEBESGUES MONOTONISÆTNING).

<u>For enhver stigende følge</u> $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ <u>af funktioner fra</u> M^+ <u>gælder</u>

$$\int (\lim f_n) d\mu = \lim \int f_n d\mu .$$

<u>Bevis</u>. Vi bemærker, at $f = \lim_n f_n = \sup_n f_n \in M^+$, og at talfølgen $(\int f_n d\mu)_{n=1,2,\cdots}$ er stigende. Både venstre og højre side i ligningen har derfor mening.

Idet $f \geq f_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, er det endvidere klart, at

$$\int f d\mu \geq \lim_n \int f_n d\mu .$$

Problemet er altså at vise den modsatte ulighed.

Ifølge definitionen af $\int f d\mu$ kommer dette ud på at vise

$$\int s d\mu \leq \lim_n \int f_n d\mu$$

for en vilkårlig simpel, $\mathbb{E}$-målelig funktion $s: X \to [0,\infty[$ med $s \leq f$. - Det vil være nok for et vilkårligt tal $a \in]0,1[$ at vise

$$a\int s d\mu = \int as\, d\mu \leq \lim_n \int f_n d\mu .$$

For hvert $x \in X$, hvor $0 < f(x)$, er $as(x) < f(x) = \lim_n f_n(x)$, hvorfor $\exists n \in \mathbb{N}: as(x) < f_n(x)$. Og $f(x) = 0$ medfører $0 = s(x) = f_1(x) = f_2(x) = \cdots$.

Sætter vi $E_n = \{x \in X | as(x) \leq f_n(x)\}$, $n = 1,2,\cdots$, har vi derfor

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X .$$

Endvidere er $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$, og alle E_n tilhører $\mathbb{E}$ (§2.4, eksempel).

Imidlertid er afbildningen $E \rightsquigarrow \nu(E) = \int as\ 1_E d\mu$ et mål på $\mathbb{E}$, thi hvis $s = \sum_{i=1}^{n} a_i\ 1_{A_i}$ har vi ifølge Lemma 1

$$\nu(E) = \int \sum_{i=1}^{n} aa_i\ 1_{A_i \cap E} d\mu = \sum_{i=1}^{n} aa_i \mu(A_i \cap E)\ ,$$

og sidste udtryk er et mål ifølge eksemplerne C,D i §3.1. Følgelig har vi (§3.1 (5)), at

$$\nu(E_n) = \int as\ 1_{E_n} d\mu \nearrow \nu(X) = \int as\ 1_X d\mu = \int as\ d\mu\ .$$

Idet $as \cdot 1_{E_n} \leq f_n$ og dermed $\int as \cdot 1_{E_n} d\mu \leq \int f_n d\mu$, følger det ønskede

$$\int as\ d\mu = \lim_n \int as \cdot 1_{E_n} d\mu \leq \lim_n \int f_n d\mu\ . \quad \square$$

BEMÆRKNING. Egenskaben (5) i §3.1 er et specialtilfælde af monotonisætningen ($f_n = 1_{E_n}$). Det afgørende skridt i ovenstående bevis, er at udnytte egenskaben (5), dog for et andet mål.

Sætningen viser, at integration og grænseovergang kan ombyttes, når man har en stigende følge fra M^+.

Vi fremhæver to egenskaber ved integralet som er vist under henholdsvis analysedelen, og eksistensbeviset:

TILLÆG TIL HOVEDSÆTNING: For $f,g \in M^+$ og $c \in [0,\infty]$ gælder

(iv) $\int cf\ d\mu = c\int f d\mu$,

(v) $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ når $f \leq g$.

COROLLAR 1. For $f \in M^+$ gælder

$$\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0\ \ \mu\text{-n.o.}$$

samt

$$\int f d\mu < \infty \Rightarrow f < \infty\ \ \mu\text{-n.o.}$$

Bevis. Med $A = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ er $\infty\cdot f = \infty\cdot 1_A$ og dermed

$$\infty \int f d\mu = \int \infty f \, d\mu = \int \infty 1_A d\mu = \infty \, \mu(A) ,$$

men dette viser $\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0$.

Med $B = \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$ er $\infty 1_B \leq f$, og dermed

$$\infty \, \mu(B) \leq \int f d\mu ,$$

hvilket viser $\int f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(B) = 0$. □

Som en anvendelse af monotonisætningen viser vi, at egenskab (ii) i Hovedsætningen gælder ikke blot for endelig mange addender, men for numerabelt mange.

SÆTNING 2. For en uendelig række $\sum_1^\infty f_n$ af funktioner fra M^+ gælder

$$\int \left(\sum_1^\infty f_n \right) d\mu = \sum_1^\infty \int f_n d\mu .$$

Bevis. Af $\sum_{k=1}^n f_k \nearrow \sum_{k=1}^\infty f_k$ følger at

$$\sum_{k=1}^n \int f_k d\mu = \int \left(\sum_{k=1}^n f_k \right) d\mu \nearrow \int \left(\sum_{k=1}^\infty f_k \right) d\mu . \quad □$$

Vi slutter med en anvendelse af monotonisætningen, som vi skal udnytte i beviset for Lebesgues majorantsætning i §4.2.

FATOUS LEMMA. For en følge (f_n) fra M^+ gælder

$$\int (\liminf_n f_n) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu .$$

Bevis. Med $g_m = \inf_p f_{m+p}$, $m = 1,2,\cdots$ har vi $g_m \leq f_{m+p}$, hvoraf

$$\int g_m d\mu \leq \int f_{m+p} d\mu ,$$

altså

$$\int g_m d\mu \leq \inf_p \int f_{m+p} d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu .$$

Da nu $g_m \nearrow \liminf_n f_n$, giver monotonisætningen det ønskede. □

BEMÆRKNING. Hvis (f_n) er voksende, giver Fatous lemma

$$\int (\lim f_n) d\mu \leq \lim \int f_n d\mu ,$$

men den modsatte ulighed er oplagt, idet $\lim f_n \geq f_n$ for alle n, og dermed genfinder vi monotonisætningen.

Uanset at Fatous lemma kun er en lille variant af monotonisætningen, er den ofte til stor nytte. (Pierre Fatou, fransk matematiker 1878-1929).

4.2. Integral af reelle funktioner.

Medens det, så længe talen er om integration af positive funktioner, er overordentlig bekvemt at operere med tallet ∞, ville det for vilkårlige reelle funktioner tværtimod være en belastning at inddrage ∞ og $-\infty$. Derfor lader vi være.

Er f en reel funktion $f: X \to \mathbb{R}$, sætter vi $f^+ = f \vee 0$ og $f^- = -(f \wedge 0)$, altså

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{når } 0 \leq f(x) \\ 0 & \text{når } f(x) \leq 0, \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } 0 \leq f(x) \\ -f(x) & \text{når } f(x) \leq 0 . \end{cases}$$

De to funktioner kaldes <u>den positive</u> og <u>den negative</u> del af f.

Bemærk, at $f = f^+ - f^-$ og $|f| = f^+ + f^-$.

Er $\mathbb{E}$ en σ-algebra i X, vil f være $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis f^+ og f^- begge er det.

Lad nu $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$.

En funktion $f: X \to \mathbb{R}$ siges da at være <u>integrabel</u> med hensyn til μ (kort: μ-<u>integrabel</u>), hvis f er $\mathbb{E}$-målelig og

$$\int f^+ d\mu < \infty , \quad \int f^- d\mu < \infty .$$

I bekræftende fald sættes

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu .$$

Integralet af f med hensyn til μ skrives også $\int f(x) d\mu(x)$ el.lign.

Mængden af μ-integrable funktioner $f: X \to \mathbb{R}$ betegnes $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X,\mu) = \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$. Bemærk at 1_A er integrabel hvis og kun hvis $A \in \mathbb{E}$ og $\mu(A) < \infty$.

Åbenbart er $-\infty < \int f d\mu < \infty$ for hvert $f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$.

Definitionen af $\int f d\mu$ er tilladelig. Thi for $f \geq 0$ er jo $f^+ = f$, $f^- = 0$.

BEMÆRKNING. Enhver $\mathbb{E}$-målelig funktion $f: X \to [0,\infty]$ har et integral $\int f d\mu$, eventuelt med værdien ∞, men den regnes kun for integrabel m.h.t. μ, hvis alle funktionsværdier $f(x)$ er endelige og $\int f d\mu$ er endeligt.

SÆTNING 1. En $\mathbb{E}$-målelig funktion $f: X \to \mathbb{R}$ er integrabel med hensyn til μ, hvis og kun hvis $|f|$ er det, dvs. hvis $\int |f| d\mu < \infty$. I bekræftende fald er

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu .$$

Bevis. Af $|f| = f^+ + f^-$ følger $\int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu$, hvoraf

$$\int f^+ d\mu < \infty , \int f^- d\mu < \infty \Leftrightarrow \int |f| d\mu < \infty ,$$

og i bekræftende fald er

$$\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu . \quad \square$$

Integrabilitet godtgøres oftest ved følgende trivielle

COROLLAR 1. Hvis $f: X \to \mathbb{R}$ er $\mathbb{E}$-målelig, og hvis $|f| \leq g$ hvor $g \in M^+(X,\mathbb{E})$ og $\int g d\mu < \infty$, så er f integrabel m.h.t. μ.

Bevis. $\int|f|d\mu \leq \int g d\mu$. □

SÆTNING 2a. Er $f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ og $a \in \mathbb{R}$, da er også $af \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ og

$$\int af\, d\mu = a\int f d\mu \ .$$

For $a = 0$ er påstanden triviel. For $a > 0$ benyttes $(af)^+ = af^+$, $(af)^- = af^-$. Det er nu nok at betragte tilfældet $a = -1$; her benyttes $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$. □

SÆTNING 2b. Når $f,g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, da er også $f+g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ og

$$\int(f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu .$$

Bevis. At summen $f+g\colon X \sim \mathbb{R}$ er μ-integrabel, følger af, at den er $\mathbb{E}$-målelig, og at $|f+g| \leq |f| + |g|$, hvor $|f| + |g| \in M^+(X,\mathbb{E})$ og

$$\int\Big(|f| + |g|\Big)d\mu = \int|f|d\mu + \int|g|d\mu < \infty \ .$$

At $\int(f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$, kan nu vises således: Af

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

fås

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^- ,$$

hvor alle led tilhører $M^+(X,\mathbb{E})$. Men så er

$$\int(f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int(f+g)^- d\mu ,$$

og da disse integraler alle er endelige tal, sluttes

$$\int(f+g)^+ d\mu - \int(f+g)^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu ,$$

dvs.

$$\int(f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \ . \ \square$$

COROLLAR 2. Når $f,g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ og $f \leq g$, da er

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu .$$

Lighedstegnet gælder, hvis og kun hvis $f = g$ næsten overalt m.h.t. μ.

Bevis. Idet $g-f \in M^+(X,\mathbb{E})$, er $\int (g-f)d\mu \geq 0$, med lighedstegn hvis og kun hvis $g-f = 0$ næsten overalt m.h.t. μ (§4.2, Corollar 1). Og

$$\int (g-f)d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu . \quad \square$$

Ovenstående kan rekapituleres således: $\mathcal{L}(X,\mu)$ er et vektorrum og $f \rightsquigarrow \int f d\mu$ en voksende linearform.

Grænsefunktionen f for en punktvis konvergent følge $f_1, f_2, \cdots$ af integrable funktioner behøver ikke at være integrabel, end ikke hvis talfølgen $\int f_1 d\mu, \int f_2 d\mu, \cdots$ er konvergent. Og hvis f er integrabel, gælder ikke nødvendigvis $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$. Det er let at give trivielle modeksempler, f.eks. med μ = Lebesgue målet på $\mathbb{R}$, således $f_n = 1_{]0,n]} - 1_{]-n,0]}$, henholdsvis $f_n = 1_{]n-1,n]}$, $n = 1,2,\cdots$.

Der gælder imidlertid følgende simple og ofte anvendelige hovedsætning, et af teoriens højdepunkter:

LEBESGUES SÆTNING OM MAJORISERET GRÆNSEOVERGANG. (Kort: LEBESGUES MAJORANTSÆTNING.)

Lad funktionerne $f_n: X \rightsquigarrow \mathbb{R}$, $n = 1,2,\cdots$, være $\mathbb{E}$-målelige og lad følgen $f_1(x), f_2(x), \cdots$ være konvergent i $\mathbb{R}$ for hvert $x \in X$. Hvis der findes en funktion $g \in M^+(X,\mathbb{E})$ med $\int g d\mu < \infty$, således at $\forall n: |f_n| \leq g$, da er funktionerne $f_1, f_2, \cdots$ og $f = \lim f_n$ alle integrable m.h.t. μ, og

$$\int f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\to} \int f d\mu .$$

<u>Bevis</u>. Lad $g \in M^+(X,\mathbb{E})$ med $\int g d\mu < \infty$ være en majorant for funktionerne $|f_1|, |f_2|, \cdots$.

1^o Det er klart, at $f_1, f_2, \cdots$ og $f = \lim f_n$ er integrable m.h.t. μ, idet funktionerne alle er $\mathbb{E}$-målelige, og $|f_n| \le g$ medfører $|f| \le g$.

2^o Antag her $\forall x \in X: g(x) < \infty$, således at majoranten g er integrabel m.h.t. μ.

Idet $g+f_n \ge 0$ og $g-f_n \ge 0$, kan vi anvende Fatous lemma (§4.1) på hver af følgerne $(g+f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(g-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da

$$\liminf (g+f_n) = \lim(g+f_n) = g+f,$$

får vi i første tilfælde

$$\int (g+f)d\mu \le \liminf \int (g+f_n)d\mu,$$

altså ifølge Sætning 2b

$$\int g d\mu + \int f d\mu \le \liminf \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu\right)$$

$$= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu,$$

dvs.

$$\int f d\mu \le \liminf \int f_n d\mu.$$

I andet tilfælde fås

$$\int (g-f)d\mu \le \liminf \int (g-f_n)d\mu,$$

altså

$$\int g d\mu - \int f d\mu \le \liminf \left(\int g d\mu - \int f_n d\mu\right)$$

$$= \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu,$$

dvs.

$$\limsup \int f_n d\mu \le \int f d\mu .$$

Sammenholdt har vi

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu \leq \limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu ,$$

altså

$$\liminf \int f_n d\mu = \limsup \int f_n d\mu = \int f d\mu ,$$

dvs.

$$\int f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\to} \int f d\mu .$$

3° Generelt: Med $N = \{x \in X \mid g(x) = \infty\}$ er $g \cdot 1_{X \setminus N}$ en μ-integrabel majorant for $|f_1 \cdot 1_{X\setminus N}|, |f_2 \cdot 1_{X\setminus N}|, \cdots$. Ifølge 2° gælder derfor

$$\int f_n \cdot 1_{X\setminus N} d\mu \underset{n\to\infty}{\to} \int f \cdot 1_{X\setminus N} d\mu .$$

Da nu $\mu(N) = 0$ (§4.1, Corollar 1), har vi imidlertid (jvfr. bemærkning nedenfor)

$$\int f_n d\mu = \int f_n \cdot 1_{X\setminus N} d\mu \quad \text{og} \quad \int f d\mu = \int f \cdot 1_{X\setminus N} d\mu . \qquad \square$$

Som et specialtilfælde af Lebesgues sætning nævnes, at <u>majorisering med en konstant</u> $K \in \mathbb{R}_+$

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in X: \ |f_n(x)| \leq K ,$$

<u>er en tilstrækkelig betingelsen, når</u> $\mu(X) < \infty$. (Lebesgue 1902; den almene majorantbetingelse: Lebesgue 1908.)

BEMÆRKNING. Hvis $f = g$ næsten overalt m.h.t. μ, hvor $f: X \curvearrowright \mathbb{R}$ er $\mathbb{E}$-målelig, medens $g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, da er også $f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, og

$$\int f d\mu = \int g d\mu .$$

<u>Bevis</u>. Vi skriver $f = g + (f-g)$. Idet $\int |f-g| d\mu = 0$ (§4.1, Corollar 1), sluttes (Sætning 1), at $f-g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ med $\int (f-g) d\mu = 0$. Dette giver straks det ønskede (Sætning 2b). $\square$

Bemærkningen tillader en svækkelse af forudsætningerne i en række sætninger i disse noter.

I Lebesgues majorantsætning kan forudsætningen, at $f_1(x), f_2(x), \cdots$ er konvergent for <u>hvert</u> $x \in X$, således ændres til

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{for } \mu\text{-næsten alle } x \in X,$$

hvor $f: X \rightsquigarrow \mathbb{R}$ er en $\mathbb{E}$-målelig funktion. Og hvad majorantfunktionen angår, vil det være nok, at

$$\forall n \in \mathbb{N}: |f_n| \leq g \quad \text{næsten overalt m.h.t. } \mu.$$

Thi da der kun er tale om numerabelt mange undtagelsesnulmængder, kan disse forenes til en enkelt, N, hvorefter den oprindelige sætning anvendes på $f_n \cdot 1_{X \setminus N} \to f \cdot 1_{X \setminus N}$.

Vi vil også tillade os at integrere en funktion f, der kun er defineret næsten overalt, under forudsætning af at den kan udvides til en integrabel funktion $\tilde{f}$ på hele X. Vi sætter $\int f d\mu = \int \tilde{f} d\mu$, idet værdien ikke afhænger af, hvordan udvidelsen til en integrabel funktion foretages.

4.3. Integral af komplekse funktioner.

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$.

Idet vi skriver en funktion $f: X \rightsquigarrow \mathbb{C}$ på formen

$$f = f' + if'' \quad \text{med} \quad f': X \rightsquigarrow \mathbb{R}, \; f'': X \rightsquigarrow \mathbb{R},$$

siges f at være <u>integrabel</u> med hensyn til μ, hvis f' og f'' begge er det. I bekræftende fald sættes

$$\int f d\mu = \int f' d\mu + i \int f'' d\mu .$$

Mængden af μ-integrable funktioner $f: X \rightsquigarrow \mathbb{C}$ betegnes $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mu) = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, ganske som for reelle funktioner.

En funktion $f = f' + if''$, der er μ-integrabel, er åbenbart $\mathbb{E}$-målelig (§2, Sætning 4). Det er også indlysende, at den konjugerede funktion $\overline{f} = f' - if''$ er μ-integrabel, og at $\int \overline{f} d\mu$ er konjugeret til $\int f d\mu$.

<u>Resultaterne i §4.2 (sætninger, corollarer, bemærkninger,...) gælder ord til andet også for funktioner med komplekse værdier, idet $\mathbb{R}$ overalt ændres til $\mathbb{C}$.</u> Eneste undtagelse er Corollar 2, der naturligvis er specifikt for reelle funktioner.

Begrundelsen er gennemgående ganske ligetil. Eksempelvis:

<u>Når</u> $f: X \sim \mathbb{C}$ <u>er</u> μ-<u>integrabel og</u> $a \in \mathbb{C}$, <u>da er også</u> $af \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ <u>og</u>

$$\int af \cdot d\mu = a \int f d\mu .$$

Thi med $f = f' + if''$ og $a = a' + ia''$ har vi

$$af = (a'f' - a''f'') + i(a'f'' + a''f') .$$

Altså er $af \in \mathcal{L}(\mu)$ og

$$\int af\, d\mu = \int (a'f' - a''f'') d\mu + i \int (a'f'' + a''f') d\mu$$

$$= (a' \int f' d\mu - a'' \int f'' d\mu + i(a' \int f'' d\mu + a'' \int f' d\mu)$$

$$= (a' + ia'')(\int f' d\mu + i \int f'' d\mu) = a \int f d\mu .$$

<u>En</u> $\mathbb{E}$-<u>målelig funktion</u> $f: X \sim \mathbb{C}$ <u>er integrabel m.h.t.</u> μ, <u>hvis og kun hvis</u> $|f|$ <u>er det, dvs. hvis</u> $\int |f| d\mu < \infty$.

Thi f', f'' og $|f|$ er $\mathbb{E}$-målelige, og

$$|f'| \leq |f|, \ |f''| \leq |f| \quad \text{samt} \quad |f| \leq |f'| + |f''| .$$

Kun for ét resultat kræver begrundelsen mere opfindsomhed:

<u>Når</u> $f: X \sim \mathbb{C}$ <u>er integrabel m.h.t.</u> μ, <u>da er</u>

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu .$$

<u>Bevis</u>. Vælg $a \in \mathbb{C}$ med $|a| = 1$, således at $a \int f d\mu \in [0, \infty[$. Da er

$$\left| \int f d\mu \right| = a \int f d\mu = \int af\, d\mu = \int g' d\mu + i \int g'' d\mu ,$$

hvor vi har $af = g' + ig''$ med $g': X \to \mathbb{R}$, $g'': X \to \mathbb{R}$. Idet tallet er reelt, har vi

$$|\int f d\mu| = \int g' d\mu .$$

Uligheden følger nu af, at $g' \leq |af| = |f|$.

Bemærk specielt, at Lebesgues sætning om majoriseret grænseovergang gælder ordret med $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$.

Med $f_n = f_n' + if_n''$, $n = 1,2,\cdots,$ og $f = f' + if''$ kan sætningen for reelle funktioner nemlig anvendes på $f_n' \to f'$ og $f_n'' \to f''$, idet jo $|f_n| \leq g$ medfører $|f_n'| \leq g$ og $|f_n''| \leq g$.

Bemærkning om notationen. Er der givet et målrum $(X,\mathbb{E},\mu)$, knytter vi altså til funktioner $f \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E}) \cup \mathcal{L}(X,\mu)$ et tal i $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, som vi har betegnet $\int f d\mu$. En anden benyttet skrivemåde er $\int f(x) d\mu(x)$, hvor x er en variabel. Denne skrivemåde har især betydning, hvis f afhænger af flere variable, idet den viser, efter hvilken variabel integrationen skal foretages. Bogstavet "d" optræder af historiske grunde. Man kunne naturligvis lige så godt have benyttet betegnelsen $\int f\mu$ eller mere neutrale betegnelser som $I_\mu(f)$, $\mu(f)$, $\langle\mu,f\rangle$, der alle kan ses i litteraturen. I sandsynlighedsteori ser man endvidere skrivemåden $\int f(x)\mu(dx)$.

4.4. Integral over delmængde. Mål med tæthed.

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og $V \in \mathbb{E}$ en ikke tom delmængde. Vi kan på naturlig måde organisere V til et målrum $(V,\mathbb{E}_V,\mu_V)$ idet

$$\mathbb{E}_V = \{B \in \mathbb{E} \mid B \subseteq V\}, \quad \mu_V = \mu|\mathbb{E}_V .$$

Vi siger, at μ_V er restriktionen af μ til V.

En funktion g med definitionsmængde V vil vi udvide til en funktion $\tilde{g}$ på X ved fastsættelsen

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{for } x \in V, \\ 0 & \text{for } x \in X \setminus V. \end{cases}$$

Vi erindrer om, at $\tilde{g}$ er $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis g er $\mathbb{E}_V$-målelig, jvfr. §2.4.

Vi skal nu se hvorledes integraler m.h.t. μ_V kan føres tilbage til integraler m.h.t. μ.

SÆTNING 1. <u>For enhver</u> $\mathbb{E}_V$<u>-målelig funktion</u> $g: V \to [0,\infty]$ <u>er</u>

(*) $$\int g \, d\mu_V = \int \tilde{g} \, d\mu .$$

<u>Om en</u> $\mathbb{E}_V$<u>-målelig funktion</u> $g: V \to \mathbb{R}$ (<u>eller</u> $\mathbb{C}$) <u>gælder</u>

$$g \in \mathcal{L}(V,\mu_V) \Leftrightarrow \tilde{g} \in \mathcal{L}(X,\mu) ,$$

<u>og (*) bevarer sin gyldighed for</u> $g \in \mathcal{L}(V,\mu_V)$.

<u>Bevis</u>. Afbildningen $g \mapsto \int \tilde{g} \, d\mu$ af $M^+(V,\mathbb{E}_V)$ ind i $[0,\infty]$ har egenskaberne (i)-(iii), der ifølge Hovedsætningen i §4.1 karakteriserer afbildningen $g \mapsto \int g \, d\mu_V$:

(i) $$\int \tilde{1}_E \, d\mu = \mu_V(E) \quad \text{for } E \in \mathbb{E}_V ,$$

idet $\tilde{1}_E = 1_E$ så $\int \tilde{1}_E \, d\mu = \mu(E) = \mu_V(E)$.

(ii) $$\int (f+g)^\sim d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu + \int \tilde{g} \, d\mu \quad \text{for } f,g \in M^+(V,\mathbb{E}_V) ,$$

idet $(f+g)^\sim = \tilde{f} + \tilde{g}$.

(iii) $$\lim_{n\to\infty} \int \tilde{f}_n d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu \quad \text{når } f_n \nearrow f, \; f_n \in M^+(V,\mathbb{E}_V) ,$$

idet $\tilde{f}_n \nearrow \tilde{f}$.

Heraf følger (*).

For en $\mathbb{E}_V$-målelig funktion $g: V \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) gælder

$$g \in \mathcal{L}(V,\mu_V) \Leftrightarrow \int |g| d\mu_V < \infty$$

og

$$\tilde{g} \in \mathcal{L}(X,\mu) \Leftrightarrow \int |\tilde{g}| d\mu < \infty ,$$

så da

$$\int |g| d\mu_V = \int |\tilde{g}| d\mu$$

ifølge (*), ($|g|^{\sim} = |\tilde{g}|$), har vi

$$g \in \mathcal{L}(V,\mu_V) \Leftrightarrow \tilde{g} \in \mathcal{L}(X,\mu).$$

Hvis $g: V \to \mathbb{R}$ tilhører $\mathcal{L}(V,\mu_V)$ har vi

$$\int g \, d\mu_V = \int g^+ d\mu_V - \int g^- d\mu_V = \int (g^+)^{\sim} d\mu - \int (g^-)^{\sim} d\mu$$

$$= \int (\tilde{g})^+ d\mu - \int (\tilde{g})^- d\mu = \int \tilde{g} \, d\mu ,$$

så (*) gælder. Det komplekse tilfælde reduceres let til det reelle. □

For $g \in \mathcal{L}(V,\mu_V)$ benytter vi sprogbrugen, at g er μ-integrabel over V, og vi benytter følgende skrivemåder for integralet

$$\int g \, d\mu_V = \int_V g \, d\mu \left(= \int \tilde{g} \, d\mu\right) .$$

Hvis $V \in \mathbb{E}$ og g er defineret på hele X, defineres integralet af g over V m.h.t. μ ved

$$\int_V g \, d\mu = \int (g|V) d\mu_V .$$

Idet $(g|V)^{\sim} = g \cdot 1_V$, har vi

$$\int_V g \, d\mu = \int g \cdot 1_V d\mu .$$

Hvis man tillader sig at misbruge de matematiske symboler, kan man også i første tilfælde benytte $\int g \cdot 1_V d\mu$ som definition af integralet af g over V. Misbruget ligger i, at $g \cdot 1_V$ ikke er defineret udenfor V, hvis g kun er defineret på V. På den anden side kan man ignorere dette, da der multipliceres med nul.

EKSEMPEL 1. For en funktion g på et interval I af en af de fire typer $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ eller $]a,b[$ skrives

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dm(x) = \int_a^b g\,dm$$

i stedet for $\int_I g\,dm$, hvor m er Lebesgue målet. Når vi kan benytte samme symbol uanset intervaltype, er det fordi etpunktsmængder er nulmængder m.h.t. Lebesgue målet, jvfr. slutbemærkningen i §4.2. Hvis vi derimod integrerer funktioner på et interval med hensyn til et mål μ på $(\mathbb{R},\mathbb{B})$, for hvilket $\mu(\{b\}) > 0$ for visse $b \in \mathbb{R}$, er det naturligvis vigtigt at holde rede på intervaltypen, idet

$$\int_{]a,b]} f\,d\mu = \int_{]a,b[} f\,d\mu + f(b)\mu(\{b\}),$$

hvis f er μ-integrabel over $]a,b]$.

Ud fra et målrum $(X,\mathbb{E},\mu)$ og en funktion $f \in M^+(X,\mathbb{E})$ kan man konstruere et nyt mål på $\mathbb{E}$ ved fastsættelsen

$$E \curvearrowright \int_E f\,d\mu \quad \text{for } E \in \mathbb{E},$$

idet

$$\int_\emptyset f\,d\mu = 0 \qquad \int_{\bigcup_1^\infty E_n} f\,d\mu = \sum_1^\infty \int_{E_n} f\,d\mu,$$

når (E_n) er en følge af parvis disjunkte mængder fra $\mathbb{E}$. Den sidste ligning følger af Sætning 2 i §4.1, idet

$$f \cdot 1_{\bigcup_1^\infty E_n} = f \cdot \left(\sum_1^\infty 1_{E_n}\right) = \sum_1^\infty f\cdot 1_{E_n}.$$

Målet betegnes $f\cdot\mu$ (eller blot $f\mu$) og siges at have <u>tætheden</u> f <u>m.h.t. målet</u> μ. I symboler har vi

$$(f\cdot\mu)(E) = \int_E f\,d\mu \quad \text{for } E \in \mathbb{E}.$$

EKSEMPEL 2. Er $\mu = m$, og opfylder $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R},\mathbb{B})$ betingelsen $\int f dm = 1$, er $f\cdot m$ et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ og f kaldes en sandsynlighedstæthed.

Med $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2)$, $f(x) = 1_{]0,\infty[}(x)e^{-x}$, $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ fås henholdsvis normalfordelingen, eksponentialfordelingen og Cauchy-fordelingen.

Vedrørende integration m.h.t. målet $f\cdot\mu$ har man følgende

SÆTNING 2. For $\varphi \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$ er

$$(*)\qquad \int \varphi d(f\cdot\mu) = \int \varphi f \, d\mu .$$

Hvis f har endelige værdier gælder der om en målelig funktion $\varphi: X \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$)

$$\varphi \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},f\cdot\mu) \Leftrightarrow \varphi f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu),$$

og (*) bevarer sin gyldighed for $\varphi \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},f\cdot\mu)$.

Bevis. Afbildningen $\varphi \leadsto \int\varphi f\, d\mu$ af $\mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$ ind i $[0,\infty]$ ses umiddelbart at opfylde de tre betingelser, der karakteriserer afbildningen $\varphi \leadsto \int\varphi d(f\cdot\mu)$, og derfor gælder (*). For en målelig funktion $\varphi: X \to \mathbb{R}$ gælder ifølge (*) og Sætning 1 i §4.2

$$\varphi \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},f\cdot\mu) \Leftrightarrow \int|\varphi| f d\mu < \infty ,$$

og hvis f har endelige værdier, er dette ensbetydende med, at $\varphi f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$. At (*) gælder for $\varphi \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},f\cdot\mu)$ ses nu umiddelbart ved at skrive $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Udvidelsen til komplekse funktioner går glat. □

4.5. Billedmål.

Lad $\varphi: (X,\mathbb{E}) \to (Y,\mathbb{F})$ være en målelig afbildning. Hvis der er givet et mål μ på $\mathbb{E}$, er afbildningen

$$B \leadsto \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad B \in \mathbb{F}$$

et mål på $\mathbb{F}$, hvilket umiddelbart verificeres. Det kaldes billedmålet af μ under φ og betegnes $\varphi(\mu)$. Der gælder altså

$$\varphi(\mu)(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) \quad \text{for} \quad B \in \mathbb{F}.$$

Bemærk, at μ og $\varphi(\mu)$ har samme totale masse. Om integration med hensyn til billedmålet gælder:

SÆTNING. For enhver $\mathbb{F}$-målelig funktion $g: Y \to [0,\infty]$ er

$$(*) \qquad \int g d\varphi(\mu) = \int g \circ \varphi \, d\mu .$$

Om en $\mathbb{F}$-målelig funktion $g: Y \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) gælder

$$g \in \mathcal{L}(Y,\varphi(\mu)) \Leftrightarrow g \circ \varphi \in \mathcal{L}(X,\mu) ,$$

og (*) bevarer sin gyldighed for $g \in \mathcal{L}(Y,\varphi(\mu))$.

Bevis. Afbildningen af $M^+(Y,\mathbb{F})$ ind i $[0,\infty]$ givet ved $g \rightsquigarrow \int (g\circ\varphi)d\mu$ ses umiddelbart at opfylde betingelserne (i)-(iii) i Hovedsætningen fra §4.1 m.h.t. målet $\varphi(\mu)$, og derfor gælder (*). At f.eks. (i) er opfyldt ses således:

$$\int 1_B \circ \varphi \, d\mu = \int 1_{\varphi^{-1}(B)} d\mu = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \varphi(\mu)(B) \quad \text{for} \quad B \in \mathbb{F} .$$

Dernæst er $g: Y \to \mathbb{R}$ integrabel m.h.t. $\varphi(\mu)$, hvis og kun hvis $|g|$ er $\varphi(\mu)$-integrabel, og idet

$$\int |g| d\varphi(\mu) = \int |g| \circ \varphi \, d\mu = \int |g\circ\varphi| d\mu ,$$

er dette ensbetydende med, at $g\circ\varphi$ er μ-integrabel. Hvis g er $\varphi(\mu)$-integrabel, anvendes (*) på g^+ og g^-, og derved ses, at formlen (*) bevarer sin gyldighed. Udvidelsen til komplekse funktioner er umiddelbar. □

EKSEMPLER.

(a) Lad μ være et sandsynlighedsmål defineret i $(X,\mathbb{E})$. For en målelig funktion $\varphi: X \to \mathbb{R}$ (= en stokastisk variabel) kaldes billedmålet $\varphi(\mu)$, som er et sandsynlighedsmål på Borel algebraen i $\mathbb{R}$, fordelingen af φ,

$$\varphi(\mu)(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \mu(\{x \in X \mid \varphi(x) \in B\})$$

er da sandsynligheden for at φ's værdier ligger i mængden B. Den stokastiske variabel φ har <u>første moment</u> netop hvis

$$\int_X |\varphi| d\mu = \int_{\mathbb{R}} |x| \, d\varphi(\mu)(x) < \infty ,$$

og når denne betingelse er opfyldt, er <u>middelværdien</u> $E(\varphi)$ af φ givet ved

$$E(\varphi) = \int \varphi d\mu = \int x \, d\varphi(\mu)(x) .$$

(b) Lad ν være et mål på en σ-algebra $\mathbb{F}$ i X, og lad μ være en udvidelse af ν til et mål på en σ-algebra $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{F}$ i X. For en $\mathbb{F}$-målelig funktion g på X kommer integration med hensyn til ν og μ da ud på et.

Dette fremgår, idet ν er billedmålet af μ under den identiske afbildning af $(X,\mathbb{E})$ ind i $(X,\mathbb{F})$, som er $\mathbb{E}$-$\mathbb{F}$-målelig.

4.6. <u>Summer</u> $\Sigma_{j\in J}\, a_j$.

Hovedanvendelsen af det foregående er integration med hensyn til Lebesgue målet i $\mathbb{R}^k$. (Se §3.1, Eksempel A.)

På dette sted vil vi imidlertid - som illustration af den almene teori - betragte <u>integration med hensyn til tællemålet</u> μ i en vilkårlig mængde $J \neq \emptyset$. (Se §3.1, Eksempel B.)

Idet definitionsmængden for μ består af samtlige delmængder af J, er der ingen problemer med målelighed.

SÆTNING. <u>For enhver funktion</u> $f: J \to [0,\infty]$ <u>er</u>

$$\int_J f d\mu = \sum_{x\in J} f(x) .$$

<u>Bevis</u>. For hvert $x \in J$ er $\int_{\{x\}} f d\mu = f(x)\cdot\mu(\{x\}) = f(x)$, og følgelig gælder

$$\int_I f d\mu = \sum_{x\in I} f(x)$$

for enhver endelig eller numerabel delmængde $I \subseteq J$, jvfr. §4.4. Ifølge sumdefinitionen (§0) er da

$$\int_J f d\mu \geq \sum_{x\in J} f(x) \;;$$

specielt gælder lighedstegn, hvis $\sum_{j\in J} f(x) = \infty$. Og hvis $\sum_{x\in J} f(x) < \infty$, vil $I = \{x \in J \mid f(x) \neq 0\}$ være højst numerabel (se §0), hvorfor

$$\int_J f d\mu = \int_I f d\mu + \int_{J\setminus I} f d\mu = \sum_{x\in I} f(x) + \sum_{x\in J\setminus I} f(x) = \sum_{x\in J} f(x). \;\square$$

En funktion $f: J \to \mathbb{R}$ eller $f: J \to \mathbb{C}$ er integrabel m.h.t. tællemålet μ i J, hvis og kun hvis

$$\sum_{x\in J} |f(x)| < \infty .$$

I bekræftende fald <u>definerer</u> vi summen $\sum_{x\in J} f(x)$ som integralet $\int_J f d\mu$. For $\mathcal{L}(J,\mu)$ skrives $\ell(J)$.

Er funktionen f skrevet som en familie $(a_j)_{j\in J}$ af tal, bliver sumbetegnelsen $\sum_{j\in J} a_j$, som i §0.

Er J endelig, f.eks. $J = \{1,\cdots,n\}$, har summen $\sum_{j\in J} a_j = \sum_{j\in J} f(j)$ den sædvanlige betydning, idet regningen

$$\int_J f d\mu = a_1\cdot\mu(\{1\}) + \ldots + a_n\cdot\mu(\{n\}) = a_1 + \ldots + a_n$$

gælder ikke blot i tilfældet $a_j \in [0,\infty]$, men også når tallene a_j alle er reelle eller komplekse.

<u>En sum</u> $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ <u>med</u> $\mathbb{N}$ <u>som indeksmængde kan tolkes som en rækkesum</u> $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, dvs.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \to \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \quad \text{for} \quad n\to\infty\,,$$

ikke blot i tilfældet $a_j \in [0,\infty]$, men også når tallene a_j alle er reelle eller komplekse og $\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < \infty$.

Tilfældet $a_j \in [0,\infty]$ er omtalt allerede i §0, og vi har siden benyttet det gentagne gange. I sidstnævnte tilfælde kan Lebesgues majorantsætning anvendes på grænseovergangen

$$f\cdot 1_{\{1,\dots,n\}} \to f = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}\,,$$

med $|f|$ som majorantfunktion. - For $a_j \in [0,\infty]$ kan Lebesgues monotonisætning i øvrigt anvendes på samme grænseovergang.

Med ℓ betegnes mængden af (reelle eller komplekse) talfølger $f = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, hvor

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty\,,$$

altså talfølger, hvor rækken $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ er absolut konvergent.

Anderledes udtrykt drejer det sig om de (reelle eller komplekse) funktioner på $\mathbb{N}$, der er integrable m.h.t. tællemålet μ i $\mathbb{N}$. Altså $\ell = \mathcal{L}(\mathbb{N},\mu) = \ell(\mathbb{N})$.

Da rækkesummen $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ her, som netop vist, stemmer med integralet $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j = \int_{\mathbb{N}} f d\mu$, kan resultaterne i §§4.2, 4.3 såvel som mange senere resultater benyttes på absolut konvergente rækker, - ligesom §4.1 kan anvendes på rækker med positive led.

EKSEMPEL. Som specialtilfælde af Lebesgues majorantsætning har vi:

Lad $\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}, \cdots$ være rækker med reelle eller komplekse led og forudsæt, at følgen $a_{1j}, a_{2j}, \cdots$ er konvergent for hvert $j\in\mathbb{N}$. Hvis der findes en række $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ med $0 \le b_j$ og $\sum_{j=1}^{\infty} b_j < \infty$, således at $\forall_{n,j}\colon |a_{nj}| \le b_j$, da er de givne rækker såvel som rækken $\sum_{j=1}^{\infty} \lim_n a_{nj}$ absolut konvergente, og om rækkesummerne gælder

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lim_n a_{nj} = \lim_n \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} .$$

Formentlig er det uhensigtsmæssigt således at opskrive specialtilfælde af vore integralsætninger. Det er nok bedre ved anvendelse på f.eks. rækker at tænke i et integralsprog.

4.7. Integral med reel parameter.

Idet $(X,\mathbb{E},\mu)$ er et målrum med $X \neq \emptyset$ og I et (begrænset eller ubegrænset) interval på $\mathbb{R}$, tænker vi os givet en funktion $f: X\times I \to \mathbb{R}$ eller $f: X\times I \to \mathbb{C}$.

For hvert $x \in X$ vil vi med $f(x,\cdot)$ eller f_x betegne snitfunktionen

$$t \to f(x,t),\ t \in I,$$

medens vi for hvert $t \in I$ med $f(\cdot,t)$ eller f^t betegner snitfunktionen

$$x \to f(x,t),\ x \in X .$$

Vi antager $f^t \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ for hvert $t \in I$ og betragter funktionen F defineret på I ved

$$F(t) = \int_X f^t d\mu = \int_X f(x,t)d\mu(x), \quad t \in I .$$

Ofte omtales F som "integralet $\int_X f(x,t)d\mu(x)$ som funktion af parameteren t" .

SÆTNING 1. Antag yderligere, at alle snitfunktioner f_x er kontinuerte i samme punkt $t_0 \in I$. Findes der nu en funktion $g \in M^+(X,\mathbb{E})$ med $\int_X g d\mu < \infty$, således at

$$\forall t \in I\ \forall x \in X: |f(x,t)| \leq g(x) ,$$

da er også F kontinuert i t_0.

BEMÆRKNING. Sætningen kan uden videre generaliseres ved at lade I være et metrisk rum.

Bevis. For enhver punktfølge $t_1, t_2, \cdots \to t_0$, $t_n \in I$, vil funktionsfølgen $f^{t_1}, f^{t_2}, \cdots$ konvergere punktvis mod f^{t_0}. Vi har jo $f_x(t_n) \to f_x(t_0)$, dvs. $f(x,t_n) \to f(x,t_0)$ eller $f^{t_n}(x) \to f^{t_0}(x)$, for hvert $x \in X$. Når $\forall t \in I: |f^t| \le g$, hvor $g \in M^+(X,\mathbb{E})$ med $\int_X g d\mu < \infty$, sluttes derfor af Lebesgues majorantsætning, at $\int_X f^{t_n} d\mu \to \int_X f^{t_0} d\mu$, dvs. $F(t_n) \to F(t_0)$. □

SÆTNING 2. DIFFERENTIATION UNDER INTEGRALTEGNET. Ud over $\forall t \in I: f^t \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ antages her, at alle snitfunktioner f_x er differentiable i I, altså at den (partielle) afledede $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = Df_x(t)$ eksisterer for alle $x \in X$ og $t \in I$. Findes der nu en funktion $g \in M^+(X,\mathbb{E})$ med $\int_X g d\mu < \infty$, således at

$$\forall t \in I \; \forall x \in X: \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right| \le g(x),$$

da vil $x \leadsto \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ tilhøre $\mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ for hvert $t \in I$, og F er differentiabel i I med

$$DF(t) = \frac{d}{dt} \int_X f(x,t) d\mu(x) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) d\mu(x).$$

Bevis. For fast $t \in I$ betragtes følgen

$$\frac{F(t_n)-F(t)}{t_n - t} = \int_X \frac{f^{t_n} - f^t}{t_n - t} d\mu, \quad n = 1,2,\cdots,$$

af differenskvotienter svarende til en vilkårlig talfølge $t_1, t_2, \cdots \to t$ med $t_n \in I$, $t_n \neq t$, og det bemærkes, at funktionsfølgen $(f^{t_n} - f^t)/(t_n - t)$ konvergerer mod $x \leadsto \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$. For hvert $x \in X$ har vi nemlig

$$\frac{f^{t_n}(x) - f^t(x)}{t_n - t} = \frac{f_x(t_n) - f_x(t)}{t_n - t} \underset{n\to\infty}{\to} Df_x(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(x,t).$$

Er f reel, findes der ifølge differentialregningens middelværdisætning et tal $\tau_{n,x}$ mellem t_n og t, således at

$$\frac{f_x(t_n)-f_x(t)}{t_n-t} = Df_x(\tau_{n,x}) = \frac{\partial}{\partial t} f(x,\tau_{n,x}) .$$

Eksisterer nu en majorantfunktion g som beskrevet, har vi følgelig

$$\left|\frac{f^{t_n}-f^t}{t_n-t}\right| \leq g \quad \text{for alle} \quad n \in \mathbb{N} ,$$

således at Lebesgues majorantsætning kan anvendes. Altså vil $x \curvearrowright \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ tilhøre $\mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ og

$$\frac{F(t_n)-F(t)}{t_n-t} = \int_X \frac{f^{t_n}-f^t}{t_n-t}\, d\mu \underset{n\to\infty}{\to} \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,d\mu(x) .$$

Er f kompleks, $f = f' + if''$, kan den reelle sætning anvendes på f' og f'', eller man kan modificere beviset ovenfor ved at anvende middelværdisætningen på f' og f'' og opnå majoriseringen

$$\left|\frac{f^{t_n}-f^t}{t_n-t}\right| \leq g\sqrt{2} . \quad \square$$

Opgaver til §4.

I opgaver vedrørende integraler m.h.t. Lebesgue målet på $\mathbb{R}$ (Lebesgue integraler) er det ønskeligt straks fra starten foruden funktioner defineret på hele $\mathbb{R}$ at inddrage funktioner defineret f.eks. på et interval.

Vi bruger $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^\infty f(x)dx, \cdots$ som betegnelse for integraler m.h.t. Lebesgue målet i $]0,1]$, $]1,\infty[, \cdots$.

Det vil senere (som corollar til infinitesimalregningens hovedsætning, §5.2) blive vist, at

Er $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ kontinuert på et kompakt interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, og er Φ en stamfunktion til f, dvs. differentiabel i $[a,b]$ med afledet $D\Phi = f$, da er

$$\int_a^b f(x)dx = [\Phi(x)]_{x=a}^{x=b} = \Phi(b) - \Phi(a) .$$

Dette resultat, der jo knytter tråden til gymnasiematematikken, tænkes allerede nu anvendt i opgaver, hvor der er behov for det.

Integral af positive funktioner.

4.1. En begrænset funktion på et begrænset interval, som er Lebesgue integrabel, men ikke Riemann integrabel.

Påvis, at Dirichlets funktion (se p.II.i.4) på intervallet $]0,1]$ er en Borel funktion, og bestem dens Lebesgue integral.

4.2. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum. Vis, at hvis hvert $x \in X$ tilhører mindst k af mængderne $A_1,\cdots,A_n \in \mathbb{E}$, så er

$$\mu(A_j) \geq \frac{k}{n}\,\mu(X) \quad \text{for mindst et } j .$$

4.3. Lad $f: \mathbb{R}_+ \to [0,\infty[$ være en Borel funktion med $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$.

1° Kan man slutte, at

$f(x) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to \infty$?

$\exists a \in \mathbb{R}_+ : \sup\{f(x) \mid x > a\} < \infty$?

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : m(\{x > a \mid f(x) > \varepsilon\}) \to 0 \quad \text{for} \quad a \to \infty$?

2° Samme spørgsmål, idet f yderligere forudsættes kontinuert, henholdsvis uniformt kontinuert.

4.4.1° Vis, at

$$\int_1^n f(x)dx \to \int_1^\infty f(x)dx \quad \text{og} \quad \int_{1/n}^1 f(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \quad \text{for} \quad n \to \infty ,$$

når $f: \mathbb{R}_+ \curvearrowright [0,\infty]$ er en Borel funktion. (Vink. Benyt Lebesgues monotonisætning.)
Gælder også

$$\int_1^u f(x)dx \to \int_1^\infty f(x)dx \quad \text{og} \quad \int_u^1 f(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$$

for $u \to \infty$, henholdsvis $u \to 0$, $u \in \mathbb{R}_+$?

2° Find $\int_0^1 x^a dx$ og $\int_1^\infty x^a dx$ for hvert $a \in \mathbb{R}$.
(Resultaterne anvendes ofte.)

4.5.1° Vis, at $(1-\frac{x}{n})^n \cdot 1_{]-\infty,n]}(x) \underset{n\to\infty}{\nearrow} e^{-x}$ for hvert $x \in \mathbb{R}$.
(Vink. Man kan benytte, at $\log$ er en konkav funktion med $D\log(1) = 1$.)

2° Vis, at $\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n dx \underset{n\to\infty}{\nearrow} 1$.

3° Vis, at $\int_0^n x^a (1-\frac{x}{n})^n dx \underset{n\to\infty}{\nearrow} \int_{\mathbb{R}_+} x^a e^{-x} dx$ for hvert $a \in \mathbb{R}$.
(Bemærk, at man ikke behøver at bekymre sig om, hvorvidt $\int_{\mathbb{R}_+} x^a e^{-x} dx < \infty$. For hvilke $a \in \mathbb{R}$ er det i øvrigt tilfældet ?)

4.6. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum, hvor $\mu(X) = \infty$, og lad $f: X \sim]0,\infty[$ være $\mathbb{E}$-målelige. Vis, at

$$\int f d\mu < \infty \Rightarrow \int \frac{1}{f} d\mu = \infty .$$

(Vink. $1 < f + \frac{1}{f}$.)

4.7. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum, hvor $\mu(X) < \infty$, og lad $f_1, f_2, \dots$ være en følge af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_n: X \sim [0,\infty[$, der konvergerer uniformt mod en funktion $f: X \sim [0,\infty[$. Vis, at

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu .$$

4.8.1° Find $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} dx$.

2° Undersøg, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$ er uniformt konvergent for $0 < x < 1$.

4.9. Lad $a,b \in \mathbb{R}_+$.

1° Vis, at $\frac{x^{b-1}}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^a)x^{b-1+2na}$ for $0 < x < 1$.

2° Vis, at

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}}{1+x^a} dx = \frac{1}{b} - \frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+2a} - \frac{1}{b+3a} + \dots + \frac{1}{b+2na} - \frac{1}{b+(2n+1)a} + \dots .$$

4.10. Find $\int_0^1 (\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}) dx$ og $\int_1^{\infty} (\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}) dx$.

(Værdien af det sidste integral kan angives som en rækkesum.)

4.11.1° Giv et eksempel på en dalende følge $f_1 \geq f_2 \geq \cdots$ af Borel funktioner $f_n: \mathbb{R} \sim [0,\infty[$, hvor

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n(x) dx \neq \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx .$$

2° Samme opgave med $]0,1]$ i stedet for $\mathbb{R}$.

4.12. Giv et eksempel på en familie $(f_j)_{j\in J}$ af Borel funktioner $f_j\colon\ ]0,1] \to [0,\infty[$, hvor $\sum_{j\in J} f_j$ igen er en Borel funktion, men

$$\int_0^1 \sum_{j\in J} f_j(x)dx \neq \sum_{j\in J} \int_0^1 f_j(x)dx .$$

4.13. Vis ved eksempler, at hvert af tegnene $<$ og $=$ kan forekomme i uligheden

$$\int_0^1 \liminf_n f_n(x)dx \leq \liminf_n \int_0^1 f_n(x)dx ,$$

og at hvert af tegnene $<$, $=$ og $>$ kan forekomme mellem

$$\int_0^1 \limsup_n f_n(x)dx \quad \text{og} \quad \limsup_n \int_0^1 f_n(x)dx ,$$

hvor $f_n\colon\ ]0,1] \to [0,\infty[$, $n = 1,2,\cdots$, er Borel funktioner.

Integral af reelle funktioner.

4.14. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og lad $g\colon X \to \mathbb{R}$ være $\mathbb{E}$-målelig.

1° Vis, at $g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, hvis der findes funktioner $f,h \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, således at $f \leq g \leq h$.

2° Vis, at $g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ og

$$a\mu(X) \leq \int g\, d\mu \leq b\mu(X) ,$$

hvis $\mu(X) < \infty$ og $a \leq g(x) \leq b$ for alle $x \in X$, hvor $a,b \in \mathbb{R}$.

4.15. Er produktet af to integrable funktioner altid integrabelt ?
(Sml. Opgave 4.22.1° .)

4.16. Lebesgue under- og oversummer.

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $\mu(X) < \infty$, og lad $f: X \curvearrowright \mathbb{R}$ være $\mathbb{E}$-målelig og begrænset.
Svarende til et sæt P af (dele-) punkter
$y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_n$, hvor $\forall x \in X$: $y_0 < f(x) \leq y_n$,
defineres Lebesgue oversummen

$$\overline{S}(P,f) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \mu(\{x | y_{i-1} < f(x) \leq y_i\}),$$

og Lebesgue undersummen

$$\underline{S}(P,f) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \, \mu(\{x | y_{i-1} < f(x) \leq y_i\}).$$

Vis, at $\underline{S}(P,f) \leq \int f d\mu \leq \overline{S}(P,f)$, og at

$$\sup_P \underline{S}(P,f) = \int f d\mu = \inf_P \overline{S}(P,f).$$

4.17. Lebesgue middelsummer. (Jvfr. II.i.4).

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $\mu(X) < \infty$, og lad $f: X \curvearrowright \mathbb{R}$ være $\mathbb{E}$-målelig og begrænset.
Vis, at der til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at

$$\left| \int f d\mu - \sum_{i=1}^{n} \eta_i \mu(\{x | y_{i-1} < f(x) \leq y_i\}) \right| < \varepsilon ,$$

når $y_0 \leq \eta_1 \leq y_1 \leq \eta_2 \leq y_2 \leq \cdots \leq \eta_n \leq y_n$,
$\forall x \in X$: $y_0 < f(x) \leq y_n$, samt $y_i - y_{i-1} < \delta$, $i=1,\dots,n$.

4.18. Bevis, at

$$\int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} \, dx \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

(Vink. Vis, at $\dfrac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.)

4.19. Giv eksempler på punktvis konvergente følger $f_1, f_2, \cdots$ af Lebesgue integrable funktioner $f_n\colon]-1,1] \to \mathbb{R}$, med $f = \lim f_n$, hvor henholdsvis

(a) $f \in \mathcal{L}(]-1,1],m)$, og talfølgen $\int_{-1}^{1} f_n(x)dx$, $n = 1,2,\cdots$, er konvergent, men

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \neq \lim_n \int_{-1}^{1} f_n(x)dx .$$

(b) $f \in \mathcal{L}(]-1,1],m)$, men talfølgen $\int_{-1}^{1} f_n(x)dx$, $n = 1,2,\cdots$ er divergent.

(c) talfølgen $\int_{-1}^{1} f_n(x)dx$, $n = 1,2,\cdots$ er konvergent, men

$$f \notin \mathcal{L}(]-1,1],m) .$$

4.20. Samme opgave som Opgave 4.19, idet dog $]-1,1]$ erstattes med $\mathbb{R}$, og der ønskes eksempler, hvor konvergensen af følgen $f_1, f_2, \cdots$ er uniform og numerisk majoriseret af en konstant $K \in \mathbb{R}_+$.

4.21. Vis, at hvis $f,g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, så er $f \vee g$ og $f \wedge g$ igen integrable funktioner.

<u>Integral af komplekse funktioner</u>.

4.22. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum.

1° Vis, at fg er μ-integrabel, når $f\colon X \to \mathbb{C}$ er μ-integrabel, medens $g\colon X \to \mathbb{C}$ er $\mathbb{E}$-målelig og begrænset. (Sml. Opgave 4.15.)

2° Vis, at enhver begrænset, $\mathbb{E}$-målelig funktion $g\colon X \to \mathbb{C}$ er μ-integrabel, hvis $\mu(X) < \infty$. (Sml. Opgave 4.14.2°.)

4.23.1° Vis, at

$$\int_a^u f(x)dx \to \int_a^\infty f(x)dx \quad \text{for} \quad u \to \infty ,$$

når $f \in \mathscr{L}(]a,\infty[,m)$.
(Vink. Betragt en vilkårlig følge $u_1, u_2, \cdots, a<u_n < \infty$, med $u_n \to \infty$ og benyt Lebesgues majorantsætning.)
(Resultatet anvendes ofte).

2° Giv et eksempel på en kontinuert funktion $f: [0,\infty[\sim \mathbb{R}$, hvor $\lim_{u\to\infty} \int_0^u f(x)dx$ eksisterer i $\mathbb{R}$, uden at f er Lebesgue integrabel over $]0,\infty[$.

4.24. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum, antag $f \in \mathscr{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ og sæt $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq n\}$. Vis, at $n\mu(A_n) \to 0$ for $n \to \infty$.

4.25. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og lad $f: X \sim \mathbb{C}$ være en $\mathbb{E}$-målelig funktion. For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in X$ sættes

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{når} \quad |f(x)| \leq n \\ n\dfrac{f(x)}{|f(x)|} & \text{når} \quad |f(x)| > n . \end{cases}$$

1° Gør rede for, at hver af funktionerne $f_n: X \sim \mathbb{C}$, $n = 1,2,\cdots$, er $\mathbb{E}$-målelig.

2° Bevis, at

$$f \in \mathscr{L}(X,\mathbb{E},\mu) \Leftrightarrow \sup \int |f_n| d\mu < \infty ,$$

samt i bekræftende fald, at

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

4.26. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum, lad $f_n: X \sim \mathbb{C}$ være $\mathbb{E}$-målelig, $n = 1,2,\cdots$, og antag, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty .$$

1° Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er (absolut) konvergent for μ-næsten alle $x \in X$.

2^o Med $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ for μ-næsten alle $x \in X$, hvor $f: X \to \mathbb{C}$ er $\mathbb{E}$-målelig, skal man dernæst vise, at $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu .$$

4.27. Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} g(2^n x)$ er (absolut) konvergent for næsten alle $x \in \mathbb{R}$, når $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, m)$.
Hvad viser Opgave 4.26 om summen ?

Integral over delmængde.

4.28. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, lad f og g tilhøre $M^+(X, \mathbb{E})$ og antag, at $f = g$ næsten overalt m.h.t. μ. Vis, at

$$\int f d\mu = \int g d\mu .$$

(Resultatet benyttes ofte.)

4.29. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad $f: X \to \mathbb{R}$ være integrabel m.h.t. μ.

1^o Vis, at

$$\int_E f d\mu \geq 0 \quad \text{for alle} \quad E \in \mathbb{E}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \quad \text{for} \quad \mu\text{-næsten alle} \quad x \in X .$$

2^o Vis, at

$$\int_E f d\mu = 0 \quad \text{for alle} \quad E \in \mathbb{E}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{for} \quad \mu\text{-næsten alle} \quad x \in X .$$

4.30. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad $U_1, U_2, \dots \in \mathbb{E}$ være parvis disjunkte. Vis, at rækken

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{U_j} f d\mu$$

er absolut konvergent, når f er μ-integrabel over $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$.

4.31. Lad $f: \mathbb{R}_+ \curvearrowright \mathbb{R}_+$ være aftagende. Vis, at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_{\mathbb{R}_+} f(x)dx \quad \text{for} \quad n \to \infty \ .$$

4.32. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og lad $f: X \curvearrowright [0,\infty]$ være $\mathbb{E}$-målelig med

$$\int f d\mu < \infty \ .$$

1° Vis, at $\mu(\{x \in X | f(x) \geq a\}) < \infty$ for hvert $a \in \mathbb{R}_+$.

2° Vis, at $\{x \in X | f(x) > 0\}$ har σ-endeligt mål, dvs. at mængden kan skrives $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, hvor $E_n \in \mathbb{E}$, og $\mu(E_n) < \infty$, $n = 1,2,\cdots$.

3° Vis, at der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en mængde $E \in \mathbb{E}$ med $\mu(E) < \infty$, således at

$$\int_{X \setminus E} f d\mu < \varepsilon \ .$$

4.33. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og lad f tilhøre $\mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$.

1° Vis, at $\{x \in X | f(x) \neq 0\}$ har σ-endeligt mål. (Se Opgave 4.32.)

2° Vis, at der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en mængde $E \in \mathbb{E}$ med $\mu(E) < \infty$, således at

$$\int_{X \setminus E} |f| d\mu < \varepsilon \ .$$

4.34.1° Vis, at

$$\liminf_n (a_n+b_n) \leq \liminf_n a_n + \limsup_n b_n \leq \limsup_n (a_n+b_n) ,$$

når $a_n, b_n \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $n = 1,2,\cdots$.

$*2^{\circ}$ Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og lad $f_1,f_2,\cdots$ være en punktvis konvergent følge af funktioner $f_n \in M^+(X,\mathbb{E})$ med grænsefunktion f. Det antages, at $\int f d\mu < \infty$, og at

$$\int f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\to} \int f d\mu .$$

Vis, at $\int_E f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\to} \int_E f d\mu$ for enhver mængde $E \in \mathbb{E}$.

3° Vis ved et eksempel, at konklusionen i 2° ikke behøver at gælde, når forudsætningen $\int f d\mu < \infty$ udelades.

Billedmål.

4.35. Lad $\varphi\colon (X,P(X)) \to (Y,P(Y))$ være en (målelig) afbildning. Vis, at $\varphi(\varepsilon_a) = \varepsilon_{\varphi(a)}$ for hvert $a \in X$, idet ε_a betegner Dirac målet i a (§3.1).

4.36. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og lad $\varphi\colon (X,\mathbb{E}) \to \mathbb{R}$ være en simpel $\mathbb{E}$-målelig funktion. Vis, at billedmålet $\varphi(\mu)$ på $(\mathbb{R},\mathbb{B})$ er givet som

$$\varphi(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\varepsilon_{a_i} ,$$

når $a_1,\cdots,a_n$ er φ's værdier og $A_i = \varphi^{-1}(\{a_i\})$, $i = 1,\cdots,n$.

Summer $\Sigma_{j\in J}\, a_j$.

4.37. Lad $f\colon J \to \mathbb{C}$ være integrabel m.h.t. tællemålet μ i mængden J , altså $f \in \mathcal{L}(J)$. Vis, at der til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en endelig mængde $H^* \subseteq J$, således at

$$\left|\int f d\mu - \sum_{x\in I^*} f(x)\right| < \varepsilon$$

for enhver endelig mængde I^*, hvor $H^* \subseteq I^* \subseteq J$.
(Vink. Man kan anvende Opgave 4.33.2°.)

4.38. Gør rede for, at

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J} a_{nj} = \sum_{j\in J} \lim_{n\to\infty} a_{nj},$$

når $0 \leq a_{1j} \leq a_{2j} \leq \cdots$ for hvert $j \in J$.

(Eksempel: $J = \mathbb{N}$.)

4.39. Lad $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$ være en stigende følge af mål, alle defineret på samme σ-algebra $\mathbb{E}$ i en mængde X, og sæt

$$\mu(E) = \lim_n \mu_n(E), \quad E \in \mathbb{E}.$$

1° Vis, at μ er et mål. (Vink. Man kan benytte Opgave 4.38.)

2° Vis, at

$$\int f d\mu_n \underset{n\to\infty}{\to} \int f d\mu$$

for enhver funktion $f \in M^+(X,\mathbb{E})$.

4.40. Lad $(\mu_j)_{j\in J}$ være en familie af mål μ_j, alle defineret på samme σ-algebra $\mathbb{E}$ i en mængde X, antag $a_j \in [0,\infty]$, $J \in J$, og sæt $\mu = \sum_{J\in J} a_j \mu_j$.

(Se §3.1, Eksempel D.)

Vis, at

$$\int f d\mu = \sum_{J\in J} a_j \int f d\mu_j$$

for enhver funktion $f \in M^+(X,\mathbb{E})$.

4.41. Funktionen $F: \mathbb{R}_+ \curvearrowright \mathbb{R}$ defineres ved

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx, \quad t \in \mathbb{R}_+ .$$

1^o Gør rede for, at definitionen har mening.

2^o Bevis, at $F(t) \to 0$ for $t \to \infty$.

3^o Bevis, at F er differentiabel med

$$DF(t) = -\frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}_+ .$$

(Vink. Betragt først et interval $]a,\infty[$ i stedet for $\mathbb{R}_+$. - Undervejs kan man eventuelt benytte, at $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.)

4^o Angiv $F(t)$ eksplicit, uden brug af integraltegn.

4.42. Gamma funktionen Γ defineres for $z \in \mathbb{C}$ med $\operatorname{Re} z > 0$ ved integralet

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx .$$

1^o Vis, at definitionen har mening, og at Γ er kontinuert.

2^o Vis, at Γ er vilkårligt ofte differentiabel på $]0,\infty[$.

3^o Vis, at $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ for $\operatorname{Re} z > 0$, og slut, at $\Gamma(n+1) = n!$ for $n \in \mathbb{N}$.

4^o Idet

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi} ,$$

skal det vises, at $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

§5. Lebesgue målet i $\mathbb{R}^k$.

Længderne $b_i - a_i$ af intervallerne $I_i =]a_i, b_i]$ på $\mathbb{R}$, $i = 1,\cdots,k$, kaldes kantlængder for intervallet $I = I_1 \times\cdots\times I_k$ i $\mathbb{R}^k$. Det er naturligt at kalde

$$v_k(I) = (b_1 - a_1)\cdots(b_k - a_k),$$

det k-dimensionale volumen (= længde, areal og volumen for $k = 1,2$ og 3) af I.

HOVEDSÆTNING. Der findes et og kun et mål m_k defineret på Borel algebraen $\mathbb{B}_k$ i $\mathbb{R}^k$, således at $m_k(I) = v_k(I)$ for ethvert standard interval I i $\mathbb{R}^k$.

Det ved hovedsætningen bestemte mål m_k vil vi kalde det k-dimensionale Lebesgue mål.

Hovedsætningen indeholder et entydighedsudsagn, som vil blive bevist i §5.1. Hovedsætningen giver dermed et signalement af Lebesgue målet. Når vi i fremtiden møder et mål defineret på $\mathbb{B}_k$ med de anførte egenskaber, så må det være m_k.

Hovedsætningen indeholder også et eksistensudsagn. Da beviset herfor er langt, vil det ikke blive gennemgået. Ideen er, at m_k er bestemt ved følgende formel

$$m_k(B) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} v_k(I_n) \;\middle|\; B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}, \qquad B \in \mathbb{B}_k,$$

hvor vi betragter alle følger af standard intervaller der overdækker B. Målet er altså det samlede volumen af den mest "økonomiske" overdækning. (Eksistensen er vist i opg. 5.1-5.5).

5.1. Entydighedsbeviset.

Lad $(X,\mathbb{E})$ være et målbart rum, og lad μ,ν være to mål på $\mathbb{E}$. Det er nærliggende at prøve at finde egenskaber ved et system $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$, der sikrer, at $\mu = \nu$ blot $\mu(A) = \nu(A)$ for alle $A \in \mathbb{K}$. I denne sammenhæng er følgende hjælpebegreb nyttigt:

Et system $\mathbb{D}$ af delmængder af en mængde X kaldes en σ-klasse (eller et Dynkin system) i X, hvis

(i) $X \in \mathbb{D}$

(ii) $\complement A \in \mathbb{D}$, når $A \in \mathbb{D}$

(iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{D}$, når $(A_n)_{n\geq 1}$ er en følge af parvis disjunkte mængder fra $\mathbb{D}$.

Da er tillige $\emptyset \in \mathbb{D}$, ligesom $A \cup B \in \mathbb{D}$, når $A,B \in \mathbb{D}$ og $A \cap B = \emptyset$.

Enhver σ-algebra i X (se §1.2) er naturligvis også en σ-klasse. Omvendt bemærkes, at en σ-klasse i $\mathbb{D}$ i X vil være en σ-algebra, hvis

$$A \cap B \in \mathbb{D} \quad \text{når} \quad A,B \in \mathbb{D}.$$

Thi da er også $A \cup B = \complement(\complement A \cap \complement B) \in \mathbb{D}$ og $A \setminus B = A \cap \complement B \in \mathbb{D}$, når $A,B \in \mathbb{D}$. En foreningsmængde $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ med $B_n \in \mathbb{D}$ kan derfor skrives som forening $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ af parvis disjunkte mængder $A_n \in \mathbb{D}$, nemlig

$$A_1 = B_1,\ A_n = B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i\ , \quad n = 2,3,\dots\ .$$

Enhver fællesmængde af σ-klasser i X er igen en σ-klasse i X.

For enhver mængde $\mathbb{K}$ af delmængder af X findes én mindste σ-klasse $\mathbb{D}(\mathbb{K})$ i X, der indeholder $\mathbb{K}$ (nemlig fællesmængden af alle σ-klasser i X, der indeholder $\mathbb{K}$).

Naturligvis er $\mathbb{D}(\mathbb{K}) \subseteq \sigma(\mathbb{K})$. Bemærkelsesværdigt er det imidlertid, at her gælder lighedstegn, hvis $\mathbb{K}$ er fællesmængde stabilt, dvs.

$$H \cap K \in \mathbb{K} \quad \text{når} \quad H,K \in \mathbb{K}.$$

Det udtrykker vi i følgende

LEMMA. Lad $\mathbb{K}$ være et system af delmængder af en mængde X, hvor

$$H \cap K \in \mathbb{K} \quad \text{når} \quad H,K \in \mathbb{K}.$$

Da er $\mathbb{D}(\mathbb{K}) = \sigma(\mathbb{K})$.

Beviset fører vi ved at godtgøre, at den <u>mindste</u> σ-klasse $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathbb{K})$ i X, der indeholder $\mathbb{K}$, er en σ-algebra i X. Hertil er det som bemærket ovenfor nok at vise, at

$$A \cap B \in \mathbb{D} \quad \text{når} \quad A, B \in \mathbb{D}.$$

For hvert $A \in \mathbb{D}$ er imidlertid $\mathbb{F}_A = \{B \subseteq X \mid A \cap B \in \mathbb{D}\}$ en σ-klasse i X, thi

(i) $A \cap X = A \in \mathbb{D}$.

(ii) $A \cap \complement B = \complement(\complement A \cup (A \cap B)) \in \mathbb{D}$ når $B \in \mathbb{F}_A$, idet $\complement A$ og $A \cap B$ er disjunkte.

(iii) $A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_n) \in \mathbb{D}$ når $B_1, B_2, \cdots \in \mathbb{F}_A$ er parvis disjunkte.

For hvert $H \in \mathbb{K}$ er $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}_H$ ifølge forudsætning. Vi slutter nu, at $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{F}_H$. Hermed er vist, at

$$H \cap B \in \mathbb{D} \quad \text{når} \quad H \in \mathbb{K},\ B \in \mathbb{D}.$$

For hvert $B \in \mathbb{D}$ er altså $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}_B$ og dermed også $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{F}_B$, dvs.

$$A \cap B \in \mathbb{D} \quad \text{når} \quad A, B \in \mathbb{D}. \quad \square$$

ENTYDIGHEDSSÆTNING FOR MÅL. <u>Lad</u> μ <u>og</u> ν <u>være mål på en</u> σ-<u>algebra</u> $\mathbb{E}$ <u>i</u> X, <u>og antag at</u> $\mathbb{K}$ <u>er et fællesmængde stabilt frembringersystem for</u> $\mathbb{E}$. <u>Antag yderligere, at</u> X <u>kan skrives som forening</u> $X = \bigcup_1^\infty K_n$ <u>med</u> $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$, <u>hvor</u> $K_n \in \mathbb{K}$, <u>og</u> $\mu(K_n) < \infty$, $n = 1, 1, \cdots$.

<u>Hvis</u> $\mu(K) = \nu(K)$ <u>for alle</u> $K \in \mathbb{K}$ <u>så er</u> $\mu = \nu$.

<u>Bevis</u>. For hvert $n \in \mathbb{N}$ sættes

$$\mathbb{D}_n = \{E \in \mathbb{E} \mid \mu(K_n \cap E) = \nu(K_n \cap E)\}.$$

Idet vi antager, at $\mu(H) = \nu(H)$ for alle $H \in \mathbb{K}$, har vi straks $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{D}_n$. Og $\mathbb{D}_n$ er en σ-klasse i X; thi

(i) $X \in \mathbb{D}_n$.

(ii) Når $E \in \mathbb{D}_n$, er også $\complement E = X \setminus E \in \mathbb{D}_n$,

idet $\mu(K_n \cap \complement E) = \mu(K_n) - \mu(K_n \cap E) = \nu(K_n) - \nu(K_n \cap E) = \nu(K_n \cap \complement E)$. Her benyttes, at $\mu(K_n) = \nu(K_n) < \infty$.

(iii) Når $E_1, E_2, \cdots \in \mathbb{D}_n$ er parvis disjunkte, er også $\cup_j E_j \in \mathbb{D}_n$, idet

$$\mu(K_n \cap \cup_j E_j) = \Sigma_j \mu(K_n \cap E_j) = \Sigma_j \nu(K_n \cap E_j) = \nu(K_n \cap \cup_j E_j) .$$

Dermed er $\mathbb{D}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{D}_n$ og ifølge lemmaet ovenfor er $\mathbb{D}(\mathbb{K}) = \sigma(\mathbb{K}) = \mathbb{E}$, altså $\mathbb{D}_n = \mathbb{E}$, dvs.

$$\mu(K_n \cap E) = \nu(K_n \cap E) \quad \text{for alle} \quad E \in \mathbb{E} .$$

Det er nu let at slutte $\mu = \nu$. For vilkårligt $E \in \mathbb{E}$ er nemlig

$$\mu(E) = \lim_n \mu(K_n \cap E) = \lim_n \nu(K_n \cap E) = \nu(E) ,$$

idet $K_1 \cap E \subseteq K_2 \cap E \subseteq \ldots$ og $\cup_n (K_n \cap E) = E$. □

Lad $\mathbb{K}$ være mængden af standard intervaller i $\mathbb{R}^k$ samt $\emptyset$. Så er $\mathbb{K}$ et fællesmængde stabilt frembringersystem for $\mathbb{B}_k$. Hvis der om to mål μ og ν på $\mathbb{B}_k$ gælder, at $\mu(I) = \nu(I) = v_k(I)$ for alle standard intervaller, kan vi umiddelbart af entydighedssætningen slutte, at $\mu = \nu$.

5.2. Lokalt Lebesgue integrable funktioner.

For en ikke tom Borel mængde B i $\mathbb{R}^k$ kan vi betragte Lebesgue målets restriktion til B , dvs. målet $E \curvearrowright m_k(E)$ defineret for Borel mængder E i $\mathbb{R}^k$ indeholdt i B . Dette mål kaldes kort Lebesgue målet på (i) B , og betegnes $(m_k)_B$ eller sædvanligvis blot m_k , med mindre der er fare for misforståelse. Rummet af funktioner på B , der er integrable med hensyn til Lebesgue målet, betegnes $\mathcal{L}(B)$, eller $\mathcal{L}(B,m_k)$. For en funktion $f \in \mathcal{L}(B)$ bruges følgende betegnelser for integralet

$$\int_B f\,dm_k = \int_B f(x)\,dx = \int_B f(x_1,\dots,x_k)\,d(x_1,\dots,x_k).$$

For $k = 1$ skrives m i stedet for m_1.

DEFINITION. En Borel målelig funktion $f: B \to \mathbb{C}$ kaldes <u>lokalt integrabel</u>, hvis $f|K \in \mathcal{L}(K)$ for enhver kompakt delmængde $K \subseteq B$, altså hvis

$$\int_K |f(x)|\,dx < \infty \quad \text{for enhver kompakt delmængde } K \subseteq B.$$

Mængden af lokalt integrable funktioner på B er et vektorrum som betegnes $\mathcal{L}_{loc}(B)$. Der gælder $\mathcal{L}(B) \subseteq \mathcal{L}_{loc}(B)$, men også enhver kontinuert funktion $f: B \to \mathbb{C}$ er lokalt integrabel, da

$$\int_K |f(x)|\,dx \le \sup_{x\in K} |f(x)|\,m_k(K) < \infty,$$

fordi en kontinuert funktion er begrænset på en kompakt mængde, og en kompakt mængde har endeligt Lebesgue mål.

Hvis $I \subseteq \mathbb{R}$ er et interval, og $f \in \mathcal{L}_{loc}(I)$, er $\int_a^b f(x)\,dx$ veldefineret for alle $a,b \in I$ med $a \le b$. Som i Mat 1 er det bekvemt at indføre

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

når $a > b$. Dermed gælder <u>indskudsreglen</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

for vilkårlige punkter $a,b,c \in I$.

INFINITESIMALREGNINGENS HOVEDSÆTNING. <u>Lad</u> $I \subseteq \mathbb{R}$ <u>være et interval og lad</u> $f \in \mathcal{L}_{loc}(I)$. <u>For hvert</u> $a \in I$ <u>er funktionen</u> $F: I \to \mathbb{C}$ <u>defineret ved</u>

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in I$$

<u>kontinuert</u>.

Hvis f er kontinuert i $x_0 \in I$ er F differentiabel i x_0 og $F'(x_0) = f(x_0)$.

Bevis. Lad $x_0 \in I$ og antag, at (x_n) er en følge fra I, der går mod x_0. Vi skal vise, at $F(x_n) \to F(x_0)$. Der findes $b,c \in I$ så $b \le x_n \le c$ for alle n, og idet

$$F(x_n) = \int_a^b f(t)dt + \int_b^{x_n} f(t)dt, \quad F(x_0) = \int_a^b f(t)dt + \int_b^{x_0} f(t)dt,$$

er det tilstrækkeligt, at vise, at

$$\int f(t)1_{[b,x_n]}(t)dt \to \int f(t)1_{[b,x_0]}(t)dt.$$

Dette følger af Lebesgues majorantsætning, idet $|f|\cdot 1_{[b,c]}$ er en integrabel majorant, og $f(t)1_{[b,x_n]}(t) \to f(t)1_{[b,x_0]}(t)$ for alle $t \in I \setminus \{x_0\}$, altså næsten overalt med hensyn til Lebesgue målet.

Hvis $x_n \neq x_0$ for alle n og f er kontinuert i x_0 finder vi ifølge indskudsreglen

$$\frac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0} = \frac{1}{x_n-x_0}\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt.$$

Til $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$, så $|f(x_0)-f(t)| \le \varepsilon$, blot $t \in I$ og $|x_0-t| \le \delta$. For n så stor, at $|x_n-x_0| \le \delta$, finder vi da

$$\left|\frac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x_n-x_0}\int_{x_0}^{x_n}(f(t)-f(x_0))dt\right| \le \varepsilon,$$

hvilket viser, at F er differentiabel i x_0 med $F'(x_0) = f(x_0)$. □

COROLLAR 1. Lad $f: I \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion. For $a,b \in I$ kan $\int_a^b f(t)dt$ udregnes ved formlen

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[\Phi(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = \Phi(b) - \Phi(a),$$

<u>hvor</u> Φ <u>er en vilkårlig stamfunktion til</u> f , <u>dvs. en differentiabel funktion</u> Φ <u>på</u> I <u>så</u> $\Phi' = f$.

<u>Bevis</u>. Hvis Φ betegner en vilkårlig stamfunktion til f og F er som i sætningen ovenfor, så er $(F-\Phi)' = 0$, og derfor er $F-\Phi$ en konstant k . Idet $F(a) = 0$ finder vi

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b)-F(a) = \Phi(b)-\Phi(a) . \quad \square$$

Corollaret er af stor praktisk betydning i forbindelse med udregning af konkrete integraler, og det viser, at Lebesgue integralet er en udvidelse af det klassiske integralbegreb.

Vi skal senere se (Fubinis sætning), hvordan integration med hensyn til m_k kan udføres som k successive integrationer med hensyn til m , og dermed føres integration med hensyn til m_k essentielt tilbage til stamfunktionsbestemmelse.

Hovedsætningen udtrykker, at integration efterfulgt af differentiation fører tilbage til udgangspunktet. Dette kan generaliseres, idet følgende dybereliggende resultat af Lebesgue gælder:

SÆTNING 1. <u>For</u> $f \in \mathcal{L}_{loc}(I)$ <u>og</u> $a \in I$ <u>er funktionen</u>

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt , \qquad x \in I$$

<u>differentiabel for næsten alle</u> $x \in I$ <u>med differentialkvotient</u> $F'(x) = f(x)$.

For en differentiabel funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er f' en Borel funktion, idet f' er grænsefunktion for den punktvis konvergente følge af kontinuerte funktioner

$$x \rightsquigarrow n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)) .$$

Derimod behøver f' ikke være lokalt integrabel og formlen

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) ,$$

som gælder for C^1-funktioner, har derfor ingen mening for sådanne f. Jvfr. Opgave 5.15.

5.3. Radon mål i $\mathbb{R}^k$.

Et mål μ i $\mathbb{R}^k$ defineret på Borel algebraen $\mathbb{B}_k$ kaldes et Borel mål i $\mathbb{R}^k$. Blandt Borel målene betragtes en snævrere klasse af mål opkaldt efter den østrigske matematiker J. Radon (1887-1956). Et Borel mål $\mu: \mathbb{B}_k \to [0,\infty]$ kaldes et Radon mål, hvis det har endelig værdi for enhver begrænset Borel mængde. Det er selvfølgelig ensbetydende at kræve at $\mu(I) < \infty$ for ethvert standard interval I, eller at $\mu(K) < \infty$ for enhver kompakt delmængde $K \subseteq \mathbb{R}^k$.

BEMÆRKNING. Et mål μ defineret på Borel algebraen $\mathbb{B}(X)$ for et metrisk rum (eller et Hausdorff topologisk rum) X kaldes et Borel mål i X. Et Borel mål μ kaldes et Radon mål, hvis

(i) $\mu(K) < \infty$ for enhver kompakt mængde $K \subseteq X$,

(ii) $\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subseteq B\}$ for alle $B \in \mathbb{B}(X)$.

Man kan vise, at (ii) automatisk er opfyldt i tilfældet $X = \mathbb{R}^k$, se Opgave 5.17.

EKSEMPLER. (a) Lebesgue målet er et Radon mål.

(b) Lad $f: \mathbb{R}^k \to [0,\infty[$ være en Borel funktion og lad $\mu = f \cdot m_k$ være målet med tætheden f med hensyn til Lebesgue målet. Da er μ et Radon mål hvis og kun hvis $f \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^k)$. Dette er tilfældet, hvis f er kontinuert.

For en funktion $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eller $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ indføres støtten (eng. support) som mængden

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Støtten er altså en afsluttet mængde i $\mathbb{R}^k$, udenfor hvilken funktionen er 0, og det er den mindste afsluttede mængde med denne egenskab. F.eks. er $\mathrm{supp}(\sin) = \mathbb{R}$, $\mathrm{supp}(\exp) = \mathbb{R}$. Støtten for nulfunktionen er $\emptyset$ og ikke andre funktioner har denne støtte. Bemærk, at $f = f\cdot 1_{\mathrm{supp}(f)}$.

Mængden af kontinuerte funktioner $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ med kompakt støtte betegnes $C_c(\mathbb{R}^k)$. Idet der for funktioner $f,g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ og $\lambda \neq 0$ oplagt gælder

$$\mathrm{supp}(f+g) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)$$

$$\mathrm{supp}(\lambda f) = \mathrm{supp}(f),$$

ser man, at $C_c(\mathbb{R}^k)$ er et underrum af vektorrummet $F(\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$ af alle reelle funktioner på $\mathbb{R}^k$.

For et Radon mål μ i $\mathbb{R}^k$ er $C_c(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^k,\mathbb{B}_k,\mu)$. En funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$ er nemlig specielt en Borel funktion, og hvis $K = \mathrm{supp}(f)$ er f's kompakte støtte, har vi

$$\int |f(x)|d\mu(x) = \int |f(x)|1_K(x)d\mu(x) \leq \int \Big(\sup_{x\in K}|f(x)|\Big)1_K(x)d\mu(x)$$

$$= \sup_{x\in K}|f(x)|\;\mu(K) < \infty .$$

Med betegnelsen

$$L_\mu(f) = \int f d\mu \quad \text{for} \quad f \in C_c(\mathbb{R}^k)$$

er $L_\mu: C_c(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ en lineær afbildning, som er positiv, dvs. $L_\mu(f) \geq 0$ når $f \geq 0$, altså L_μ er en <u>positiv</u> <u>linearform</u>.

Det følgende hovedresultat blev vist af F. Riesz i 1909 i et specialtilfælde, og er kendt under navnet

RIESZ'ES REPRÆSENTATIONSSÆTNING. <u>Til en positiv linearform</u> $L: C_c(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ <u>findes et og kun et Radon mål</u> μ <u>i</u> $\mathbb{R}^k$, <u>så</u> $L = L_\mu$, <u>altså så</u>

$$L(f) = \int f d\mu \quad \underline{\text{for}} \quad f \in C_c(\mathbb{R}^k) .$$

Sætningen kan betragtes som begyndelsen til <u>funktional analysen</u>, idet den giver en en-entydig korrespondance mellem en klasse af <u>funktionaler</u> (= funktioner defineret på et vektorrum), og en klasse af andre objekter, nemlig Radon målene.

Sætningen kan generaliseres ved at $\mathbb{R}^k$ erstattes af et vilkårligt lokalkompakt topologisk rum. Beviset for denne generelle sætning, vil blive givet i et senere kursus. (Et bevis findes i Rudin: Real and complex analysis. McGraw-Hill. New York 1966.)

I tilfældet $k = 1$ kan man karakterisere Radon målene ved en klasse af voksende funktioner.

Lad $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en voksende funktion. For hvert $a \in \mathbb{R}$ gælder

$$\lim_{x\to a^-} \varphi(x) = \sup\{\varphi(x) \mid x<a\} \leq \varphi(a) \leq \inf\{\varphi(x) \mid x>a\} = \lim_{x\to a^+} \varphi(x) .$$

De to midterste ulighedstegn gælder klart, og at φ har en grænseværdi fra venstre i a, som er lig med $\sup\{\varphi(x) \mid x<a\}$, ses således: Til $\varepsilon > 0$ findes $x_0 < a$ så

$$\varphi(x_0) > \sup\{\varphi(x) \mid x<a\} - \varepsilon ,$$

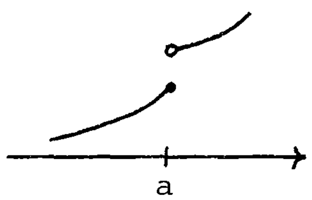
og for alle $x \in \,]x_0,a[$ gælder så

$$\sup\{\varphi(x) \mid x<a\} - \varepsilon < \varphi(x) \leq \sup\{\varphi(x) \mid x<a\} .$$

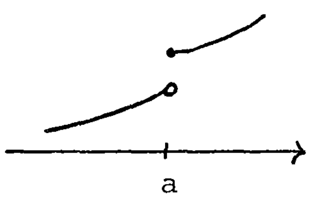
Det sidste lighedstegn ses tilsvarende. Man siger, at φ er <u>kontinuert fra højre</u> (henh. <u>venstre</u>) i a, hvis

$$\varphi(a) = \lim_{x\to a^+} \varphi(x) (= \varphi(a+)) \quad (\text{henh.} \quad \varphi(a) = \lim_{x\to a^-} \varphi(x) = \varphi(a-)) .$$

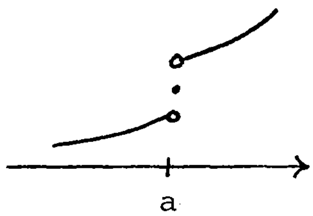
Naturligvis er φ kontinuert i a, hvis og kun hvis φ er kontinuert både fra højre og venstre i a.



kont. fra venstre



kont. fra højre



hverken kont. fra højre eller venstre

Vi vil indse:

Mængden D af diskontinuitetspunkter for φ er endelig eller numerabel.

Bevis. For $a \in \mathbb{R}$ sættes $\delta(a) = \varphi(a+) - \varphi(a-)$, og så er $D = \{a \in \mathbb{R} \mid \delta(a) > 0\}$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er mængden

$$D_n = \{a \in]-n,n[\mid \delta(a) \geq \frac{1}{n}\}$$

endelig, idet $\sum_{a \in D_n} \delta(a) \leq \varphi(n) - \varphi(-n)$.

Da $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, er D endelig eller numerabel. □

SÆTNING 1. Lad $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være voksende og kontinuert fra højre. Der findes et og kun et mål μ på $\mathbb{B}$, så

(*) $\mu(]a,b]) = \varphi(b) - \varphi(a)$ for $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Det ved (*) bestemte mål er et Radon mål, som betegnes μ_φ. Funktionerne $\varphi + c$, $c \in \mathbb{R}$ bestemmer alle samme mål.

Til et Radon mål μ på $\mathbb{R}$ findes en og på nær addition af en konstant kun en funktion φ som er voksende og kontinuert fra højre, så $\mu = \mu_\varphi$.

Bevis. Der findes højst et mål μ på $\mathbb{B}$, så (*) gælder, ifølge entydighedssætningen for mål. At φ bestemmer et mål μ_φ med de ønskede egenskaber, og som derfor er et Radon mål, er ikke enkelt at vise. Det søgte mål μ_φ er ved (*) fastlagt på standard intervallerne. Som ved Lebesgue målet kan vises, at

$$\mu_\varphi(B) = \inf\left\{\sum_1^\infty \mu_\varphi(I_n) \,\middle|\, B \subseteq \bigcup_1^\infty I_n\right\} \quad \text{for } B \in \mathbb{B},$$

hvor der betragtes alle følger af standard intervaller i $\mathbb{R}$, der overdækker B.

Vi kan også gøre som Stieltjes (1894), der indførte Stieltjes integralet $I_\varphi(f)$ af en funktion $f \in C_c(\mathbb{R})$ med hensyn til φ som grænseværdien

$$I_\varphi(f) = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))$$

af middelsummer hørende til inddelinger $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, hvor $a < b$ er valgt så $\mathrm{supp}(f) \subseteq [a,b]$. Mere præcist gælder i analogi med resultater fra Mat 1 MA:

Til en inddeling D af $[a,b]$ som ovenfor, indføres undersummer s og oversummer S, som tal af formen

$$s = \sum_{i=1}^{n} g_i(\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})) , \quad S = \sum_{i=1}^{n} G_i(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) ,$$

hvor $g_i \le f(x) \le G_i$ for alle $x \in [x_{i-1},x_i]$, $i = 1,\cdots,n$. Enhver undersum er mindre end eller lig enhver oversum, så vi har $\underline{I}_\varphi(f) \le \overline{I}_\varphi(f)$, hvor $\underline{I}_\varphi(f)$ er supremum af mængden af undersummer, og $\overline{I}_\varphi(f)$ er infimum af mængden af oversummer. Da f er uniformt kontinuert på $[a,b]$, kan vi til $\varepsilon > 0$ finde $\delta > 0$, så der for $x,y \in [a,b]$ med $|x-y| \le \delta$, gælder $|f(x)-f(y)| \le \varepsilon(\varphi(b)-\varphi(a))^{-1}$. For enhver inddeling af finhed $\le \delta$, gælder der om under- og oversummerne s, S hørende til tallene

$$g_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\} , \quad G_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\}$$

at

$$S-s = \sum_{i=1}^{n} \left(G_i-g_i\right)\left(\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})\right) \le \frac{\varepsilon}{\varphi(b)-\varphi(a)} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1}) = \varepsilon .$$

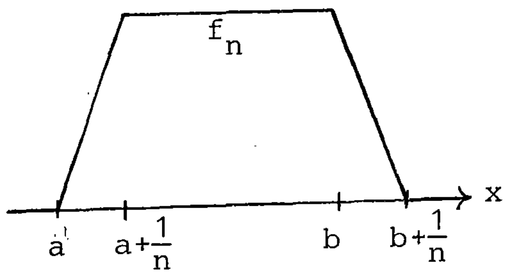
Dermed er $\underline{I}_\varphi(f) = \overline{I}_\varphi(f)$, og man ser som i Mat 1, at den fælles værdi $I_\varphi(f)$ er grænseværdi for ovennævnte middelsummer, når finheden går mod 0. Man ser ligeledes let at $f \rightsquigarrow I_\varphi(f)$ er en positiv linearform på $C_c(\mathbb{R})$, så ifølge Riesz'es repræsentationssætning, findes et Radon mål μ_φ på $\mathbb{R}$ med egenskaben

$$I_\varphi(f) = \int f d\mu_\varphi \quad \text{for alle} \quad f \in C_c(\mathbb{R}) .$$

Vi vil dernæst indse, at

$$\mu_\varphi(]a,b]) = \varphi(b) - \varphi(a)$$

for et vilkårligt standard interval $]a,b]$. Hertil vælges en følge (f_n) fra $C_c(\mathbb{R})$ som vist på tegningen:



$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \le a \\ n(x-a) & \text{for } a \le x \le a+\frac{1}{n} \\ 1 & \text{for } a+\frac{1}{n} \le x \le b \\ 1-n(x-b) & \text{for } b \le x \le b+\frac{1}{n} \\ 0 & \text{for } b+\frac{1}{n} \le x . \end{cases}$$

Idet $f_n \to 1_{]a,b]}$ punktvis, og $1_{]a,b+1]}$ er en μ_φ-integrabel majorant for følgen, finder vi af Lebesgues sætning om majoriseret konvergens

$$\mu_\varphi(]a,b]) = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu_\varphi = \lim_{n\to\infty} I_\varphi(f_n) .$$

Imidlertid er $\varphi(b+\frac{1}{n}) - \varphi(a)$ en oversum, og $\varphi(b) - \varphi(a+\frac{1}{n})$ en undersum for f_n, altså

$$\varphi(b) - \varphi(a+\frac{1}{n}) \le I_\varphi(f_n) \le \varphi(b+\frac{1}{n}) - \varphi(a) ,$$

og da φ er kontinuert fra højre, får vi for $n \to \infty$

$$\mu_\varphi(]a,b]) = \varphi(b) - \varphi(a) .$$

Vi mangler nu blot at vise, at ethvert Radon mål μ på $\mathbb{R}$ har formen μ_φ, og at φ er entydigt bestemt på nær en konstant. Et sådant φ må nødvendigvis opfylde

$$\mu(]0,a]) = \varphi(a) - \varphi(0) \quad \text{for } a > 0$$
$$\mu(]a,0]) = \varphi(0) - \varphi(a) \quad \text{for } a < 0 ,$$

og er altså af formen $c + \varphi_0$, hvor $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er defineret ved

$$\varphi_0(a) = \begin{cases} \mu(]0,a]) & \text{for } a > 0 \\ -\mu(]a,0]) & \text{for } a < 0 \\ 0 & \text{for } a = 0 . \end{cases}$$

Funktionen φ_0 er klart voksende og kontinuert fra højre (jvfr. §3.1), og man ser let, at $\mu(]a,b]) = \varphi_0(b) - \varphi_0(a)$ for $a < b$. (Hvis f.eks. $a < b < 0$, ses det således:

$\mu(]a,b]) = \mu(]a,0] \setminus]b,0]) = \mu(]a,0]) - \mu(]b,0]) =$
$-\varphi_0(a) - (-\varphi_0(b)))$. □

Det ved den voksende funktion φ definerede mål μ_φ og integral $\int f d\mu_\varphi$ kaldes <u>Stieltjes målet</u> og <u>Stieltjes integralet</u> bestemt ved φ. (J.T. Stieltjes, hollandsk matematiker, 1856-1894).

Idet vi sætter $\varphi(\infty) = \lim_{x\to\infty} \varphi(x) \le \infty$, $\varphi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) \ge -\infty$, noterer vi

$$\mu_\varphi(]a,\infty[) = \varphi(\infty)-\varphi(a), \quad \text{idet} \quad]a,\infty[= \bigcup_{n>a}]a,n]$$
$$\mu_\varphi(]-\infty,b]) = \varphi(b)-\varphi(-\infty), \quad \text{idet} \quad]-\infty,b] = \bigcup_{n>-b}]-n,b]$$
$$\mu_\varphi(\mathbb{R}) = \varphi(\infty) - \varphi(-\infty)$$
$$\mu_\varphi(]a,b[) = \varphi(b-) - \varphi(a), \quad \text{idet} \quad]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]a,b-\tfrac{1}{n}]$$
$$\mu_\varphi(\{b\}) = \varphi(b)-\varphi(b-), \quad \text{idet} \quad \{b\} =]a,b] \setminus]a,b[$$
$$\mu_\varphi([a,b]) = \varphi(b)-\varphi(a-), \quad \text{idet} \quad [a,b] =]a,b] \cup \{a\}.$$

Heraf ses, at μ_φ er et <u>endeligt mål</u>, netop hvis φ er begrænset. For et endeligt Radon mål μ bestemmes der ved $\varphi(x) = \mu(]-\infty,x])$, $x \in \mathbb{R}$ en voksende funktion, som er kontinuert fra højre, og som opfylder $\varphi(-\infty) = 0$. Der gælder $\mu = \mu_\varphi$ og $\mu(\mathbb{R}) = \varphi(\infty)$. Hvis μ er et sandsynlighedsmål, kaldes $\varphi(x) = \mu(]-\infty,x])$ <u>fordelingsfunktionen</u> for μ. Vi har dermed følgende hovedresultat fra sandsynlighedsregningen

SÆTNING 2. <u>Der er en en-entydig korrespondance mellem sandsynlighedsmål</u> μ <u>på</u> $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ <u>og fordelingsfunktioner</u> $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, <u>dvs. funktioner med egenskaberne</u>

(i) φ <u>er voksende og kontinuert fra højre</u>.

(ii) $\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi(\infty) = 1$.

<u>For givet</u> μ <u>er</u> φ <u>bestemt ved</u> $\varphi(x) = \mu(]-\infty,x])$, <u>og for givet</u> φ <u>er</u> $\mu = \mu_\varphi$.

EKSEMPLER. (1) Funktionen

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < a \\ 1 & \text{for} \quad x \geq a \end{cases}$$

er voksende og kontinuert fra højre. Det tilhørende Stieltjes mål μ_φ er lig med Dirac målet ε_a. Der gælder nemlig

$$\varepsilon_a(]\alpha,\beta]) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

for alle $\alpha < \beta$, som ses ved at betragte de 3 tilfælde $a \leq \alpha$, $\alpha < a \leq \beta$, $\beta < a$.

(2) Lad $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en voksende C^1-funktion. Det tilsvarende Stieltjes mål μ_φ er lig med målet $\varphi'\cdot m$, der har tætheden φ' m.h.t. m. Der gælder nemlig

$$\varphi'\cdot m(]\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)dt = \varphi(\beta)-\varphi(\alpha)$$

for alle $\alpha < \beta$.

5.4. Lebesgue målets invarians.

Før vi med rette kan opfatte Lebesgue målet $m = m_k$ i $\mathbb{R}^k$ som det fornuftige volumenbegreb, må vi endnu vise, at det har samme værdi for kongruente mængder. (Sætning 3 nedenfor.) Hertil benytter vi en deskriptiv karakterisering af målene cm, $0 \leq c < \infty$, ved hjælp af additionen i $\mathbb{R}^k$ (Sætning 2).

Lad $\varphi\colon \mathbb{R}^k \curvearrowright \mathbb{R}^k$ være en bijektiv afbildning, hvor både φ og φ^{-1} er målelige, når $\mathbb{R}^k$ betragtes med Borel algebraen $\mathbb{B}_k$, dvs.

$$E \in \mathbb{B}_k \Leftrightarrow \varphi(E) \in \mathbb{B}_k .$$

Et Borel mål μ siges at være <u>invariant</u> ved φ, hvis billedmålet $\varphi(\mu)$ er lig med μ, dvs. hvis

$$\forall B \in \mathbb{B}_k\colon \mu(\varphi^{-1}(B)) = \mu(B) .$$

Enhver homeomorf afbildning $\varphi: \mathbb{R}^k \sim \mathbb{R}^k$ fører Borel algebraen $\mathbb{B}_k$ i $\mathbb{R}^k$ over i sig selv, og den fører et Radon mål μ over i et Radon mål $\varphi(\mu)$.

Thi at $\varphi: \mathbb{R}^k \sim \mathbb{R}^k$ er homeomorf, betyder at φ er bijektiv og tillige med φ^{-1} kontinuert. Specielt er φ og φ^{-1} Borel funktioner. For enhver kompakt mængde $K \subseteq \mathbb{R}^k$ er $\varphi^{-1}(K)$ også kompakt som billede af K ved den kontinuerte afbildning φ^{-1}. Dermed er $\varphi(\mu)(K) = \mu(\varphi^{-1}(K)) < \infty$.

<u>Translationen</u> τ_a bestemt ved $a \in \mathbb{R}^k$ er givet ved

$$\tau_a(x) = x+a\,, \quad x \in \mathbb{R}^k\,.$$

Den er naturligvis en homeomorf afbildning af $\mathbb{R}^k$ på sig selv, med $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$.

SÆTNING 1. <u>Lebesgue målet m_k i $\mathbb{R}^k$ er translationsinvariant, dvs. invariant ved enhver translation af $\mathbb{R}^k$.</u>

Thi m_k føres ved en translation τ_a over i målet $\tau_a(m_k)$, og for ethvert standard interval I i $\mathbb{R}^k$ vil $\tau_a^{-1}(I) = \tau_{-a}(I)$ påny være et standard interval med samme kantlængder, hvorfor

$$\tau_a(m_k)(I) = m_k(\tau_{-a}(I)) = m_k(I)\,.$$

Af entydighedsudsagnet i hovedsætningen følger da $\tau_a(m_k) = m_k$.

Idet vi betegner $\tau_a(E)$ med $E+a$, kommer sætningen ud på, at

$$m_k(E-a) = m_k(E)$$

for ethvert $a \in \mathbb{R}^k$ og enhver Borel mængde E i $\mathbb{R}^k$. Sætningen indebærer, at der for $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ gælder

$$\int f(x)\,dx = \int f(x+a)\,dx\,,$$

således at forstå, at de to integraler samtidig har mening og i bekræftende fald samme værdi, jvfr. sætningen om integration med hensyn til et billedmål.

SÆTNING 2. Målene cm_k , $c \in [0,\infty[$, er de eneste translationsinvariante Radon mål i $\mathbb{R}^k$.

Hermed har vi en ny deskriptiv karakterisering af Lebesgue målet m_k i $\mathbb{R}^k$, nemlig som det translationsinvariante Radon mål, der har værdien 1 på enhedsterningen

$$\{(x_1,\cdots,x_k) \mid 0 < x_i \leq 1,\ i = 1,\cdots,k\} .$$

Bevis for sætningen:

Vi har lige vist, at m_k og dermed hvert af målene cm_k er translationsinvariant.

Lad nu omvendt μ være et translationsinvariant Radon mål i $\mathbb{R}^k$. Det har åbenbart samme værdi på alle standard intervaller med samme sæt af kantlængder. Idet vi med c betegner værdien af enhedsterningen, må værdien være c/q^k for enhver standard terning med kantlængde $1/q$, hvor $q \in \mathbb{N}$; enhedsterningen kan jo deles i q^k sådanne. For et standard interval med rationale kantlængder $r_1,\cdots,r_k = p_1/q,\cdots,p_k/q$ må værdien være $cr_1\cdots r_k$; intervallet kan jo deles i $p_1\cdots p_k$ terninger med kantlængde $1/q$. For et vilkårligt begrænset interval I med kantlængder $a_1,\cdots,a_k$ følger nu $\mu(I) \leq ca_1 \cdots a_k$, idet $\mu(I) \leq \mu(J)$ for ethvert standard interval J med rationale kantlængder, hvor $I \subseteq J$. Tilsvarende ses $\mu(I) \geq ca_1\cdots a_k$. Da således $\mu(I) = cm_k(I)$ for ethvert begrænset interval I , følger $\mu = cm_k$ af entydighedssætningen for mål. □

SÆTNING 3. Lebesgue målet m_k i $\mathbb{R}^k$ er invariant ved enhver isometri $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$.

Mængder $E,F \subseteq \mathbb{R}^k$ kaldes kongruente, hvis der findes en isometri $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ med $\varphi(E) = F$. Sætning 3 kommer ud på, at kongruente Borel mængder i $\mathbb{R}^k$ har samme Lebesgue mål. Vi ved at en isometri φ kan udtrykkes $\varphi(x) = Ax + a$, hvor A er en ortogonal $k\times k$ matrix, og $a \in \mathbb{R}^k$. (Se I.3.3).

Bevis for Sætning 3.

Det er nok at vise, at m_k er invariant ved en vilkårlig lineær isometri $\varphi\colon \mathbb{R}^k \curvearrowright \mathbb{R}^k$, svarende til $a = 0$, idet vi jo allerede ved, at m_k er translationsinvariant. For at opnå simplere betegnelser vælger vi at vise, at m_k er invariant ved φ^{-1}.

Ved φ^{-1} føres m_k over i Radon målet $\nu = \varphi^{-1}(m_k)$ defineret ved

$$\nu(E) = m_k(\varphi(E)), \quad E \in \mathbb{B}.$$

Nu er ν translationsinvariant, thi idet $\varphi(x+a) = \varphi(x)+\varphi(a)$, har vi for hvert $E \in \mathbb{B}_k$ og $a \in \mathbb{R}^k$

$$\nu(E+a) = m_k(\varphi(E+a)) = m_k(\varphi(E)+\varphi(a)) = m_k(\varphi(E)) = \nu(E).$$

Ifølge Sætning 2 ovenfor er da $\nu = cm_k$ for passende $c \geq 0$.

Idet φ er en isometri, er imidlertid $\varphi(B) = B$, når

$$B = \{(x_1,\dots,x_k) \mid \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \leq 1\}$$

er enhedskuglen i $\mathbb{R}^k$. Da nu

$$\nu(B) = m_k(\varphi(B)) = m_k(B), \quad 0 < m_k(B) < \infty,$$

sluttes $c = 1$, altså $\nu = m_k$, dvs. m_k er invariant ved φ^{-1}. □

5.5. Målforholdet af en isomorfi af $\mathbb{R}^k$.

Med $GL(k)$ betegnes mængden af regulære $(k\times k)$ matricer med reelle elementer. Det er velkendt, at matricen for en isomorfi af $\mathbb{R}^k$ tilhører $GL(k)$. Omvendt vil $x \curvearrowright Gx$ være en isomorfi af $\mathbb{R}^k$ når $G \in GL(k)$. En isomorfi af $\mathbb{R}^k$ er specielt en homeomorfi. Mængden $GL(k)$ er en gruppe under matrix multiplikation, og determinanten giver en afbildning $\det\colon GL(k) \to (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, som er en gruppehomomorfi.

For $G \in GL(k)$ er billedmålet $G^{-1}(m_k)$ af Lebesgue målet under afbildningen $x \curvearrowright G^{-1}x$ et translationinvariant Radon mål på $\mathbb{R}^k$, idet der for $E \in \mathbb{B}_k$ og $a \in \mathbb{R}^k$ gælder

$$G^{-1}(m_k)(E+a) = m_k(G(E+a)) = m_k(G(E)+G(a)) = m_k(G(E)) = G^{-1}(m_k)(E) ,$$

og ifølge Sætning 2 findes en konstant $c > 0$, så $G^{-1}(m_k) = cm_k$, altså så

$$m_k(G(E)) = cm_k(E) \quad \text{for alle} \quad E \in \mathbb{B}_k .$$

Konstanten c afhænger af G, betegnes $c = \mathrm{mfh}(G)$, og kaldes G's målforhold. Målforholdet er altså en afbildning $\mathrm{mfh}: GL(k) \to]0,\infty[$ opfyldende

$$m_k(G(E)) = \mathrm{mfh}(G)m_k(E) \quad \text{for alle} \quad E \in \mathbb{B}_k .$$

Sættes $E = [0,1]^k$ fås specielt

$$\mathrm{mfh}(G) = m_k(G([0,1]^k)) ,$$

og denne ligning gælder naturligvis også, hvis den lukkede enhedsterning erstattes af den åbne enhedsterning $]0,1[^k$, eller af standard terningen $]0,1]^k$.

Hvis $e_1,\cdots,e_k$ betegner den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^k$, og hvis vi sætter $v_1 = Ge_1,\cdots,v_k = Ge_k$, som altså er G's søjler, er $G([0,1]^k)$ lig med parallelotopen udspændt af $v_1,\cdots,v_k$:

$$G([0,1]^k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; 0 \le \lambda_i \le 1 ,\quad i = 1,\cdots,k \right\} .$$

Dermed har vi:

Målforholdet af G er lig Lebesgue målet af parallelotopen udspændt af G's søjler.

For $G_1,G_2 \in GL(k)$ har vi

$$\mathrm{mfh}(G_1G_2) = m_k(G_1G_2([0,1]^k)) = m_k(G_1(G_2([0,1]^k)))$$

$$= \mathrm{mfh}(G_1)m_k(G_2([0,1]^k)) = \mathrm{mfh}(G_1)\mathrm{mfh}(G_2) .$$

Med andre ord er målforholdet en homomorfi af $(GL(k)),\cdot)$ ind i $(]0,\infty[,\cdot)$.

SÆTNING 1. <u>For</u> $G \in GL(k)$ <u>gælder</u> $\mathrm{mfh}(G) = |\det G|$.

<u>Bevis</u>. Hvis G er en ortogonal matrix gælder påstanden, idet $\mathrm{mfh}(G) = 1$ ifølge Sætning 3 i §5.4, og $\det G = \pm 1$.

Hvis G er en symmetrisk positivt definit matrix gælder påstanden også. Fra Mat 1 vides nemlig at G er ortogonal-ækvivalent med en diagonalmatrix $D(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$, hvor $\lambda_1,\cdots,\lambda_k > 0$ er G's egenværdier. Der findes altså en ortogonal matrix $\mathcal{O}$ så $\mathcal{O}G\mathcal{O}' = D(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$, hvoraf

$$\mathrm{mfh}(D(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)) = \mathrm{mfh}(\mathcal{O})\mathrm{mfh}(G)\,\mathrm{mfh}(\mathcal{O}') = \mathrm{mfh}(G) ,$$

men

$$D(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)([0,1]^k) = [0,\lambda_1] \times \cdots \times [0,\lambda_k]$$

så

$$\mathrm{mfh}(D(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)) = m_k([0,\lambda_1]\times\cdots\times[0,\lambda_k]) = \lambda_1\cdots\lambda_k = \det G = |\det G| .$$

Idet mfh og $|\det|$ er homomorfier, følger sætningens påstand af følgende resultat, der er analogt til fremstillingen $z = \gamma r$ af et komplekst tal $z \neq 0$ som produkt af et positivt tal $r = |z|$, og et tal γ med $|\gamma| = 1$.

LEMMA. <u>En matrix</u> $G \in GL(k)$ <u>kan skrives</u> $G = AP$, <u>hvor</u> A <u>er en ortogonal matrix og</u> P <u>er en symmetrisk positivt definit matrix</u>.

<u>Bevis</u>. Vi bemærker først at $G'G$ er symmetrisk idet $(G'G)' = G'G'' = G'G$, og positivt definit. For $x \in \mathbb{R}^k$ har vi nemlig

$$(G'Gx,x) = (Gx,Gx) = \|Gx\|_2^2 \geq 0 ,$$

og hvis $x \neq 0$ er $Gx \neq 0$, da G er regulær, altså $\|Gx\|_2^2 > 0$. Der findes en symmetrisk positivt definit matrix P så $P^2 = G'G$. (Vi kan sige, at P er en kvadratrod af $G'G$). Thi der findes (jvfr. Mat 1) en ortogonal matrix $\mathcal{O}$ så $\mathcal{O}G'G\mathcal{O}' = D(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$, hvor $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ er $G'G$'s egenværdier. Sættes $P = \mathcal{O}'D(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_k})\mathcal{O}$, er P symmetrisk og positivt definit og $P^2 = \mathcal{O}'D(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_k})^2\mathcal{O} = G'G$, idet vi har udnyttet at $\mathcal{O}\mathcal{O}' = I$ og $D(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_k})^2 = D(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$. Vi definerer dernæst $A = GP^{-1}$, og lemmaet vil være vist, når det er godtgjort at A er ortogonal, hvilket følger af at

$$(Ax_1, Ax_2) = (x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k .$$

For at se dette sættes $y_1 = P^{-1}x_1$, $y_2 = P^{-1}x_2$, og vi finder

$$(Ax_1, Ax_2) = (Gy_1, Gy_2) = (G'Gy_1, y_2) = (P^2y_1, y_2) = (Py_1, Py_2)$$
$$= (x_1, x_2). \quad \square$$

COROLLAR. <u>Lad</u> $v_1, \cdots, v_k$ <u>være lineært uafhængige vektorer i</u> $\mathbb{R}^k$. <u>Parallelotopen</u> $[v_1, \cdots, v_k]$ <u>udspændt af</u> $v_1, \cdots, v_k$ <u>har Lebesgue målet</u>

$$|\det(v_1, \cdots, v_k)| .$$

<u>Bevis</u>. Lad G være matricen hvis søjler er $v_1, \cdots, v_k$. Så er $G \in GL(k)$ og $m_k([v_1, \cdots, v_k]) = \text{mfh}(G) = |\det G|$. $\square$

5.6. <u>EKSEMPLER</u>.

A. <u>Enhver hyperplan i</u> $\mathbb{R}^k$ <u>er afsluttet og har Lebesgue mål</u> 0.

<u>Bevis</u>. En hyperplan H (gennem 0) er givet ved en normalvektor $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_k) \neq 0$ så $H = H_\xi = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x \cdot \xi = 0\}$. Idet H er originalmængden til $\{0\}$ ved den kontinuerte afbildning $x \rightsquigarrow x \cdot \xi$ er H afsluttet. Ved en drejning A går H_ξ over i hyperplanen $A(H_\xi) = H_{A\xi}$, der har samme Lebesgue mål som H_ξ, da Lebesgue målet er invariant ved drejning. Ved en passende drejning A kan vi sikre os at $A\xi = (0, 0, \cdots, \|\xi\|)$, og dermed er

$$H_{A\xi} = H_k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_k = 0\}$$

Det er altså nok at vise at $m_k(H_k) = 0$, og endvidere nok at enhver begrænset mængde

$$\{x \in \mathbb{R}^k \mid x_k = 0 , \quad x_i \in]a_i,b_i] , \quad i = 1,\cdots,k-1\} ,$$

har Lebesgue mål 0, idet H_k er forening af numerabelt mange sådanne. Imidlertid er ovenstående mængde indeholdt i intervaller med vilkårligt lille Lebesgue mål, f.eks. for hvert $n \in \mathbb{N}$ indeholdt i

$$\{x \in \mathbb{R}^k \mid -\frac{1}{n} < x_k \leq 0, \; x_i \in]a_i,b_i] , \; i = 1,\cdots,k-1\} .$$

<u>Konsekvenser</u>. Ikke blot for standard intervaller, men også for de andre typer af intervaller er Lebesgue målet produktet af kantlængderne. Dette gælder så også for enhver kasse (= retvinklet parallelotop) i $\mathbb{R}^k$. Da ethvert ægte underrum er indeholdt i en hyperplan er også ethvert underrum og deres translaterede nulmængder.

En polygon i $\mathbb{R}^2$, et polyeder i $\mathbb{R}^3$ og generelt en polytop i $\mathbb{R}^k$, har samme Lebesgue mål, hvadenten randen medregnes eller ej. Derimod kan randen af mere indviklede afsluttede mængder, have positivt Lebesgue mål. (Se opg. 5.26, 5.27).

B. <u>Cantors mængde</u>.

Cantors mængde $Z \subseteq [0,1]$ fremkommer ved, at man fra intervallet $[0,1]$ fjerner den midterste åbne tredjedel, videre den midterste åbne tredjedel af $[0,\frac{1}{3}]$ og $[\frac{2}{3},1]$, den midterste åbne tredjedel af $[0,\frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]$ og $[\frac{8}{9},1]$, osv. altså

$$[0,1] \setminus Z = \left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right[\cup \left]\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right[\cup \cdots .$$

Cantors mængde er afsluttet, og $m(Z) = 0$, idet

$$m([0,1] \setminus Z) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27}\right) + \cdots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 .$$

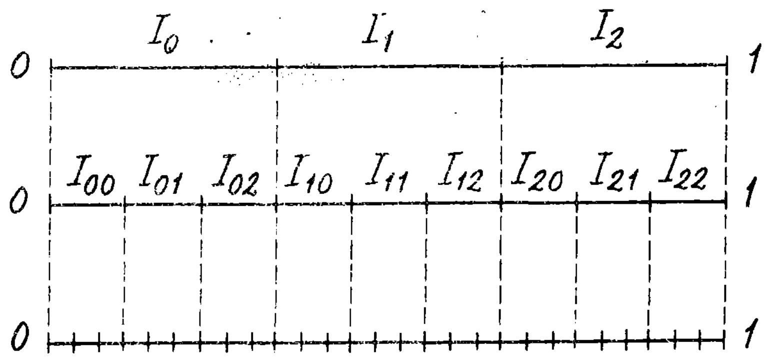
Man kunne tro, at der ikke var mange punkter tilbage, når man fra $[0,1]$ har fjernet numerabelt mange intervaller med længdesummen 1. Af nedenstående karakterisering af Z ved trialbrøker vil imidlertid fremgå, at Z er ækvipotent med $\mathbb{R}$.

En trialbrøk ${}^{3}0{,}a_1\,a_2\cdots a_n\cdots$, hvor hvert a_n er 0, 1 eller 2, siges at fremstille summen af rækken

$$a_1/3 + a_2/3^2 + \ldots + a_n/3^n + \ldots ,$$

hvilket vil være et tal i intervallet $[0,1]$.

Lad os her for de afsluttede intervaller, der fremkommer ved successive tredelinger af $[0,1]$ benytte betegnelser som vist på figuren:



Trialbrøken ovenfor fremstiller da samme tal som intervalindsnævringen

$$I_{a_1} \supset I_{a_1 a_2} \supset \cdots \supset I_{a_1 a_2 \cdots a_n} \supset \cdots .$$

(Fællesmængden af disse intervaller består af netop et reelt tal).

Heraf fremgår for det første, at hvert $x \in [0,1]$, som ikke er tredelingspunkt, har netop én trialbrøkfremstilling, medens delepunkterne har to: en endende på lutter 0'er, en endende på lutter 2'er.

Men det fremgår også, at Cantors mængde Z består af netop de tal, der kan fremstilles ved en trialbrøk ${}^{3}0{,}a_1\,a_2\cdots$ med cifrene 0 og 2. Fremstillingen er entydig. (På denne form er mængden angivet af Georg Cantor, Acta Mathematica 2 (1883), p.407.)

At Z er ækvipotent med $\mathbb{R}$ følger nu af, at afbildningen

$${}^{3}0{,}a_1 a_2\cdots a_n\cdots \sim {}^{2}0{,}b_1\,b_2\cdots b_n\cdots ,$$

der fører $x \in Z$ fremstillet ved trialbrøk ${}^{3}0{,}a_1 a_2\cdots a_n\cdots$ med cifre 0 og 2 over i tallet fremstillet ved dualbrøken med cifrene $b_n = a_n/2$, har hele intervallet $[0,1]$ som billedmængde.

Cantors mængde er således en afsluttet del af $\mathbb{R}$, ækvipotent med $\mathbb{R}$, men med Lebesgue målet 0.

BEMÆRKNING. Da enhver delmængde af Z er en nulmængde m.h.t. Lebesgue målet, ser man, at mængden af Lebesgue nulmængder i $\mathbb{R}$ har samme mægtighed som mængden af alle delmængder af $\mathbb{R}$. Man kan derimod vise, at Borel algebraen i $\mathbb{R}$ er ækvipotent med $\mathbb{R}$. Der findes altså Lebesgue nulmængder, som ikke er Borel mængder.

C. Uden at gå ind på detaljer nævner vi, at Giuseppe Peano som den første har angivet en kontinuert vej $\varphi: [0,1] \curvearrowright \mathbb{R}^2$, hvis punkter udfylder enhedskvadratet $[0,1] \times [0,1]$ i $\mathbb{R}^2$. (Mathematische Annalen 36 (1890), p.157-160. En af de første tilnærmelser kan man se anskueliggjort som flisegang i gårdhaven i Matematisk Institut, Danmarks tekniske Højskole.) Man kan vise, at φ afbilder Lebesgue målet på $[0,1]$ i Lebesgue målet på $[0,1]^2$.

Peanos kurve har multiple punkter, dvs. punkter der optræder for mere end én parameterværdi. Ved modifikation af Peanos konstruktion (W.F. Osgood, Transactions of the American Mathematical Society 4 (1903), p.107-112, - smukke figurer!) kan man imidlertid opnå en Jordan bue i $[0,1] \times [0,1]$, der ganske vist ikke udfylder hele kvadratet, men dog har Lebesgue mål tæt ved 1. (En Jordan bue i $\mathbb{R}^2$ er billedmængde ved en injektiv, kontinuert afbildning $\varphi: [0,1] \curvearrowright \mathbb{R}^2$.)

D. Lebesgue målet af enhedskuglen i $\mathbb{R}^k$ betegnes V_k, altså

$$V_k = m_k\left(\left\{x \in \mathbb{R}^k \;\middle|\; \sum_1^k x_i^2 \le 1\right\}\right) .$$

(Vi bestemmer V_k i §6.) En ellipsoide med halvakser $a_1,\dots,a_k > 0$ er defineret som mængden

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{a_i^2} \le 1 \right\} .$$

Den lineære afbildning med matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

afbilder enhedskuglen i E, og derfor har vi

$$m_k(E) = |\det A| \, V_k = V_k \cdot a_1 a_2 \cdots a_k .$$

En ellipse i planen med halvakser a_1 og a_2 har altså arealet $\pi a_1 a_2$.

5.7. Transformation af Lebesgue integraler.

Lad $\varphi: X \sim Y$ være en bijektiv afbildning af en åben mængde $X \subseteq \mathbb{R}^k$ på en åben mængde $Y \subseteq \mathbb{R}^k$, hvor φ og φ^{-1} begge er kontinuert differentiable, dvs. af klasse C^1. Der gælder da:

<u>En funktion</u> f <u>defineret på</u> Y <u>er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis</u> $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$ <u>er det; i bekræftende fald er</u>

$$\int_Y f(y)\,dy = \int_X f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|\,dx .$$

Her betegner $\det D\varphi(x)$ Jacobi determinanten (funktionaldeterminanten) for φ i punktet x.

Vi vil nøjes med et heuristisk bevis, idet et stringent bevis ikke er helt simpelt. (Se f.eks. E. Asplund/L. Bungart: A first course in integration, Holt, Rinehart and Winston 1966, p.179-186. Eller S. Lang: Analysis II, Addison-Wesley 1969, p.401-404.)

Lad $\varphi_1, \cdots, \varphi_k : X \to \mathbb{R}$ være koordinatfunktionerne, så $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_k(x))$. Af Taylors formel følger, at

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + D\varphi(x)h + \varepsilon(h)\|h\|, \quad x \in X, \quad \|h\| < r ,$$

hvor r er så lille, at kuglen $K(x,r) \subseteq X$, og $\varepsilon(h) \in \mathbb{R}^k$ går mod 0 for $h \to 0$.

Formlen viser, at funktionstilvæksten $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ approximeres godt af den lineære afbildning $h \sim D\varphi(x)h$ for små h. Intervallet $\{x+h \mid 0 \le h_1 \le \ell_1, \dots, 0 \le h_k \le \ell_k\}$ afbildes derfor for små $\ell_1, \dots, \ell_k > 0$ i en mængde, der approximativt er

$$\{\varphi(x) + D\varphi(x)h \mid 0 \le h_1 \le \ell_1, \cdots, 0 \le h_k \le \ell_k\},$$

men denne mængde kan skrives

$$\{\varphi(x) + \lambda_1\ell_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_k\ell_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \mid 0 \le \lambda_i \le 1,\ i = 1, \cdots, k\},$$

hvor $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ er søjlerne i Jacobi matricen $D\varphi(x)$, og den fremgår altså af parallelotopen $\left[\ell_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \cdots, \ell_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right]$ ved translation med $\varphi(x)$. Dens k-dimensionale Lebesgue mål er

$$\ell_1 \cdots \ell_k \, m_k\left(\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right]\right) = \ell_1 \cdots \ell_k \, |\det D\varphi(x)|.$$

Intuitivt har vi altså, at

$$\lim_{\ell_1, \cdots, \ell_k \to 0} \frac{m_k(\varphi(x+[0,\ell_1] \times \cdots \times [0,\ell_k]))}{\ell_1 \cdots \ell_k} = |\det D\varphi(x)|,$$

så $|\det D\varphi(x)|$ kan opfattes som <u>målforholdet i punktet</u> x.

Billedet af et infinitesimalt interval $[x_1, x_1 + dx_1] \times \cdots \times [x_k, x_k + dx_k]$ med kantlængder $dx_1, \cdots, dx_k$ er altså en mængde, der approksimativt har Lebesgue målet $|\det D\varphi(x)| dx_1 \cdots dx_k$. En mængde $A \subseteq X$, der er disjunkt forening af infinitesimale intervaller, afbildes derfor i en mængde $\varphi(A)$ med Lebesgue målet

$$m_k(\varphi(A)) = \int_A |\det D\varphi(x)| \, dx_1 \cdots dx_k .$$

Denne formel kan fortolkes som $\varphi^{-1}(m_Y) = |\det D\varphi| m_X$, altså at billedmålet af Lebesgue målet m_Y på Y under φ^{-1} er målet med tætheden $|\det(D\varphi)|$ med hensyn til Lebesgue målet m_X på X.

Sætningen om integration med hensyn til et billedmål, giver nu den ønskede formel

$$\int_Y f(y)\,dy = \int f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} dm_Y = \int_X f \circ \varphi \; d\varphi^{-1}(m_Y).$$

5.8. Det fuldstændige Lebesgue mål.

Et målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ kaldes fuldstændigt, hvis enhver μ-nulmængde tilhører $\mathbb{E}$. Ifølge bemærkningen i §5.6 B er $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k, m_k)$ ikke fuldstændigt.

Det kan man råde bod på ved at indføre en større σ-algebra end $\mathbb{B}_k$, nemlig σ-algebraen $\mathbb{L}_k$ af Lebesgue målelige mængder. Lad $\mathcal{N}_k$ betegne mængden af m_k-nulmængder.

Definition. En delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^k$ kaldes Lebesgue målelig, hvis $A = B \cup N$, hvor $B \in \mathbb{B}_k$ og $N \in \mathcal{N}_k$.

Mængden af Lebesgue målelige mængder i $\mathbb{R}^k$ betegnes $\mathbb{L}_k$.

SÆTNING 1. (a) Systemet $\mathbb{L}_k$ er den mindste σ-algebra, der indeholder alle Borel mængder og alle Lebesgue nulmængder, dvs. $\mathbb{L}_k = \sigma(\mathbb{B}_k \cup \mathcal{N}_k)$.

(b) Lebesgue målet $m_k : \mathbb{B}_k \to [0,\infty]$ kan på en og kun en måde udvides til et mål $\overline{m}_k : \mathbb{L}_k \to [0,\infty]$ så $\overline{m}_k(N) = 0$ for alle $N \in \mathcal{N}_k$. Målet $\overline{m}_k$ er givet ved

automatisk opfyldt.

$$\overline{m}_k(A) = m_k(B) \quad \text{for} \quad A = B \cup N,$$

hvor $B \in \mathbb{B}_k$, $N \in \mathcal{N}_k$.

(c) Målrummet $(\mathbb{R}^k, \mathbb{L}_k, \overline{m}_k)$ er fuldstændigt.

Bevis. Påstand (a) vil være bevist, hvis vi godtgør, at $\mathbb{L}_k$ er en σ-algebra.

Hvis $A_n = B_n \cup N_n \in \mathbb{L}_k$, $n = 1,2,\cdots$, har vi

$$\bigcup_1^\infty A_n = \bigcup_1^\infty B_n \cup \bigcup_1^\infty N_n \in \mathbb{L}_k,$$

idet $\bigcup_1^\infty B_n \in \mathbb{B}_k$ og $\bigcup_1^\infty N_n \in \mathcal{N}_k$ når $B_n \in \mathbb{B}_k$ og $N_n \in \mathcal{N}_k$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$.

Hvis $A = B \cup N \in \mathbb{L}_k$ findes $M \in \mathbb{B}_k$, så $N \subseteq M$ og $m_k(M) = 0$. Sættes $\tilde{B} = B \cup M$, har vi $\tilde{B} \in \mathbb{B}_k$, $\complement B \supseteq \complement A \supseteq \complement\tilde{B}$, og differensmængden $D = \complement A \setminus \complement\tilde{B} = \tilde{B} \setminus A \subseteq M$ er en nulmængde. Dermed er $\complement A = \complement\tilde{B} \cup D \in \mathbb{L}_k$.

(b) Hvis $\overline{m}_k : \mathbb{L}_k \to [0,\infty]$ er et mål med egenskabe~~rne~~n $\overline{m}_k(B) = m_k(B)$ for $B \in \mathbb{B}_k$ ~~og $\overline{m}_k(N) = 0$ for $N \in \mathcal{N}_k$~~, [illegible] så har vi om $A = B \cup N \in \mathbb{L}_k$, ~~at~~ hvor $B \in \mathbb{B}_k$, $N \in \mathcal{N}_k$:

$$m_k(B) = \overline{m}_k(B) \le \overline{m}_k(A) \le \overline{m}_k(B) + \overline{m}_k(N) = m_k(B) ,$$

hvilket viser, at $\overline{m}_k$ er entydigt bestemt og opfylder

$$\overline{m}_k(A) = m_k(B) .$$

Efter denne analyse definerer vi $\overline{m}_k : \mathbb{L}_k \to [0,\infty]$ ved

$$\overline{m}_k(A) = m_k(B) \quad \text{når} \quad A = B \cup N \quad \text{hvor} \quad B \in \mathbb{B}_k \quad \text{og} \quad N \in \mathcal{N}_k .$$

Hvis $A = B_1 \cup N_1$ er en analog opsplitning, ser man let, at $m_k(B) = m_k(B_1)$, så definitionen har mening. Det er klart, at $\overline{m}_k$ udvider m_k, og at $\overline{m}_k(N) = m_k(\emptyset) = 0$ for $N \in \mathcal{N}_k$. Hvis $A_n = B_n \cup N_n$, $n = 1,2,\cdots$ er parvis disjunkte, så er også B_n, $n = 1,2,\cdots$ parvis disjunkte, og

$$\overline{m}_k\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) = m_k\left(\bigcup_1^\infty B_n\right) = \sum_1^\infty m_k(B_n) = \sum_1^\infty \overline{m}_k(A_n) .$$

Dermed er vist, at $\overline{m}_k$ er et mål på $\mathbb{L}_k$ med de ønskede egenskaber.

(c) Lad $N \subseteq \mathbb{R}^k$ være en nulmængde m.h.t. $\overline{m}_k$. Så findes $M \in \mathbb{L}_k$ med $\overline{m}_k(M) = 0$, og $N \subseteq M$. Om M ved vi at $M = B \cup N_1$, hvor $B \in \mathbb{B}_k$ opfylder $m_k(B) = \overline{m}_k(M) = 0$, og $N_1 \in \mathcal{N}_k$. Så er også M, og dermed N, en nulmængde m.h.t. m_k, altså $N \in \mathcal{N}_k \subseteq \mathbb{L}_k$. $\square$

Målet $\bar{m}_k$ kaldes <u>det fuldstændige Lebesgue mål</u>. I mange fremstillinger af teorien kaldes det dog bare Lebesgue målet.

Systemet $\mathbb{L}_k$ er effektivt større end $\mathbb{B}_k$, da vi allerede har bemærket (§5.6), at $\mathcal{N}_k$, og dermed $\mathbb{L}_k$ er ækvipotent med $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, medens $\mathbb{B}_k$ er ækvipotent med $\mathbb{R}$. (Det erindres, at $\mathbb{R}^k$ er ækvipotent med $\mathbb{R}$ for alle k).

For en Borel funktion $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ kommer integration m.h.t. m_k og $\bar{m}_k$ ud på et, jvfr. Eksempel (b) i §4.5. Vi vil sædvanligvis nøjes med at betragte målrummet $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k, m_k)$. At dette er en uvæsentlig indskrænkning følger af at der gælder:

SÆTNING 2. <u>Til en Lebesgue målelig funktion</u> $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, <u>(dvs. f er $\mathbb{L}_k$-$\mathbb{B}$-målelig) findes en Borel funktion</u> $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ <u>så</u> $f = g$ m_k-n.o.

<u>Bevis</u>. Antag først, at $f \geq 0$, og lad (f_n) være en følge af simple, positive Lebesgue målelige funktioner, så $f_n \nearrow f$. Hvert f_n er en endelig sum af formen

$$f_n = \sum_{i=1}^{p_n} a_{n,i} 1_{A_{n,i}},$$

hvor $A_{n,i} \in \mathbb{L}_k$. Idet $A_{n,i} = B_{n,i} \cup N_{n,i}$, hvor $B_{n,i} \in \mathbb{B}_k$, og $N_{n,i} \in \mathcal{N}_k$, vil

$$g_n = \sum_{i=1}^{p_n} a_{n,i} 1_{B_{n,i}}$$

være en simpel Borel funktion, og mængden

$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{p_n} N_{n,i}$$

tilhører $\mathcal{N}_k$. For $x \notin N$ er $f_n(x) = g_n(x)$ for alle n, og betegner $M \in \mathbb{B}_k$ en nulmængde, så $N \subseteq M$ vil

$$g(x) = \begin{cases} \lim g_n(x), & x \in X \setminus M \\ 0, & x \in M \end{cases}$$

være en Borel funktion, så $f(x) = g(x)$ for $x \notin M$.

Hvis f er reel anvendes det lige viste på de Lebesgue målelige funktioner f^+ og f^-. □

Også det fuldstændige Lebesgue mål er invariant ved isometrier: Hvis $A \in \mathbb{L}_k$ og $G: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ er en isometri, så er $G(A) \in \mathbb{L}_k$ og $\bar{m}_k(G(A)) = \bar{m}_k(A)$.

Under brug af udvalgsaksiomet skal vi nu vise, at der findes delmængder $A \subseteq \mathbb{R}$, som ikke er Lebesgue målelige. Vi viser mere generelt, at man ikke kan udvide $\bar{m}_1$ til $P(\mathbb{R})$, hvis man ønsker et translationsinvariant mål.

SÆTNING 3. (Vitali,1905). Lad $(\mathbb{R}, \mathbb{E}, m)$ være et målrum med egenskaberne

(i) $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{E}$, $m|\mathbb{B}$ er Lebesgue målet,

(ii) $m: \mathbb{E} \to [0,\infty]$ er translationsinvariant, dvs. $\forall a \in \mathbb{R} \forall E \in \mathbb{E}: (a+E \in \mathbb{E}) \wedge (m(a+E) = m(E))$.

Så er $\mathbb{E} \neq P(\mathbb{R})$.

Bevis. Vi indfører en ækvivalensrelation $\sim$ i $[0,1]$ ved fastsættelsen $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$. På grund af udvalgsaksiomet, findes en mængde $A \subseteq [0,1]$, som består af et element fra hver ækvivalensklasse. Vi påstår, at $A \notin \mathbb{E}$.

Vi bemærker, at

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} A+q \subseteq [0,2], \qquad \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A+q = \mathbb{R},$$

og mængderne $A+q$, $q \in \mathbb{Q}$ er parvis disjunkte. Antages at $A \in \mathbb{E}$, vil også $A+q \in \mathbb{E}$ for alle $q \in \mathbb{Q}$, og vi har da

$$2 \geq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} m(A+q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} m(A) = \infty \cdot m(A)$$

og

$$\infty = m(\mathbb{R}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m(A+q) = \infty \cdot m(A).$$

Af første ligning sluttes $m(A) = 0$, af sidste ligning $m(A) > 0$, og vi har en modstrid. □

I Solovays model for mængdelæren fra 1970 betragtes Zermelo-Fraenkels aksiomer, samt aksiomet $\mathbb{L}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Dette er naturligvis uforeneligt med udvalgsaksiomet, men dog med det numerable udvalgsaksiom.

Ethvert målrum kan udvides til et fuldstændigt målrum, jvfr. opg. 3.17.

Opgaver til §5.

I de følgende opgaver 5.1-5.5 betegner $\mathbb{I}_k$ systemet af standard intervaller i $\mathbb{R}^k$ og $v_k: \mathbb{I}_k \to [0,\infty[$ betegner det k-dimensionale volumen.

Formålet med opgaverne, er at vise eksistensen af Lebesgue målet $m_k: \mathbb{B}_k \to [0,\infty]$, og beviserne skal derfor føres uden brug af dette.

5.1. Lad $I_1,\dots,I_n$ være endeligt mange standard intervaller i $\mathbb{R}^k$. Vis, at der findes endeligt mange parvis disjunkte standard intervaller $J_1,\dots,J_p$ således, at hver af mængderne $I_i \cap I_j$ og $I_i \setminus I_j$, $i,j = 1,\dots,n$, hvis de er ikke tomme, er foreningsmængde af visse af intervallerne $J_1,\dots,J_p$ ("byggeklodserne").

5.2. Vis, at afbildningen $v_k: \mathbb{I}_k \to [0,\infty[$ er

1° additiv, dvs.

$$v_k(I) = v_k(I_1)+\dots+v_k(I_n) \quad \text{når } I = I_1 \cup\dots\cup I_n \text{ og } I_1,\dots,I_n$$

er parvis disjunkte.

2° subadditiv, dvs.

$$v_k(I) \le v_k(I_1)+\dots+v_k(I_n) \quad \text{når } I \subseteq I_1 \cup\dots\cup I_n .$$

3° numerabelt subadditiv, dvs.

$$v_k(I) = \sum_{n=1}^{\infty} v_k(I_n) \quad \text{når } I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n .$$

(Vink: Til 1° og 2° benyttes 5.1. 3° "reduceres" til 2° ved hjælp af Borels overdækningssætning, anvendt på kompakte delintervaller af I).

5.3. (Carathéodorys sætning). Lad $\alpha: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ være defineret på mængden af alle delmængder af X, og antag $\alpha(\emptyset) = 0$. Lad $\mathbb{M}$ betegne systemet af mængder $E \subseteq X$, hvor

$$\forall A \subseteq X: \alpha(A) = \alpha(A\cap E) + \alpha(A \cap \complement E) .$$

Vis, at $\mathbb{M}$ er en <u>mængdealgebra</u>, dvs.

(i) $X \in \mathbb{M}$

(ii) $\complement E \in \mathbb{M}$ når $E \in \mathbb{M}$

(iii) $E \cup F \in \mathbb{M}$ når $E,F \in \mathbb{M}$.

Vis videre, at $\alpha(E \cup F) = \alpha(E) + \alpha(F)$, når $E,F \in \mathbb{M}$ er disjunkte.

Vis, at hvis $E_1,\dots,E_n \in \mathbb{M}$ er parvis disjunkte, så gælder der for alle $A \subseteq X$, at

$$\alpha\left(\bigcup_{j=1}^{n} A \cap E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha(A \cap E_j) .$$

Antag, at der yderligere gælder

$$\alpha(A) \leq \alpha(B) \quad \text{når} \quad A \subseteq B ,$$

$$\alpha\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{1}^{\infty} \alpha(A_n) .$$

Vis, at hvis $E_1, E_2, \dots \in \mathbb{M}$ er parvis disjunkte, så gælder der for alle $A \subseteq X$, at

$$\alpha\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A \cap E_j),$$

og slut, at $\bigcup_{1}^{\infty} E_j \in \mathbb{M}$.

Vis derved, at $\mathbb{M}$ er en σ-algebra, og at α's restriktion til $\mathbb{M}$ er et mål.

Vis, at $(X, \mathbb{M}, \alpha)$ er et fuldstændigt målrum (§5.8).

5.4. Lad $\kappa: \mathbb{I}_k \cup \{\emptyset\} \to [0,\infty]$ opfylde

1° $\kappa(\emptyset) = 0$

2° κ er additiv (jvfr.5.2)

3° κ er numerabelt subadditiv (jvfr.5.2).

Vis, at afbildningen $\alpha: P(\mathbb{R}^k) \to [0,\infty]$ defineret ved

$$\alpha(A) = \inf\left\{\sum_{1}^{\infty} \kappa(I_n) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_{1}^{\infty} I_n ,\ I_n \in \mathbb{I}_k \cup \{\emptyset\},\ n = 1,2,\dots\right\}$$

opfylder

(i) $\alpha(I) = \kappa(I)$ når $I \in \mathbb{II}_k \cup \{\emptyset\}$

(ii) $\alpha(A) \leq \alpha(B)$ når $A \subseteq B$

(iii) $\alpha\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) \leq \sum_1^\infty \alpha(A_n)$

(iv) $\alpha(A) = \alpha(A\cap I) + \alpha(A\cap CI)$ for $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $I \in \mathbb{II}_k \cup \{\emptyset\}$.

Vink til (iv): Nok at vise

$$\alpha(A\cap I) + \alpha(A\cap CI) \leq \sum_1^\infty \kappa(I_n)$$

når $I_n \in \mathbb{II}_k$, $n = 1,2,\cdots$ og $\bigcup_1^\infty I_n \supseteq A$.
Dette gøres ved at bemærke, at

$$A \cap I \subseteq \bigcup_1^\infty I_n \cap I$$

$$A \setminus I \subseteq \bigcup_1^\infty I_n \setminus I .$$

Brug dernæst "byggeklodserne" $J_{n1},\cdots,J_{np_n}$ for parret I_n, I for hvert n (Opg.5.1).

5.5. Vis følgende hovedresultat, ved at kombinere 5.3 og 5.4. Lad $\kappa: \mathbb{II}_k \to [0,\infty]$ være givet. Vis, at κ kan udvides til et mål $\mu: \mathbb{B}_k \to [0,\infty]$, hvis og kun hvis κ er additiv og numerabelt subadditiv.

(Vink til "hvis-delen": Lad α være som i 5.4, og $\mathbb{M}$ som i 5.3, idet κ først udvides til $\mathbb{II}_k \cup \{\emptyset\}$ ved $\kappa(\emptyset) = 0$. Bemærk, at $\mathbb{B}_k \subseteq \mathbb{M}$.)

5.6. Lad $(X,\mathbb{E})$ være et målbart rum, og lad μ og ν være to mål på $\mathbb{E}$, så $\mu(X) = \nu(X) < \infty$. Vis, at mængdesystemet

$$\mathbb{D} = \{E \in \mathbb{E} \mid \mu(E) = \nu(E)\} ,$$

er en σ-klasse.

5.7. Lad $L = \{2,4,6,\cdots\}$ være mængden af lige tal og $P = \{2,3,5,7,\cdots\}$ mængden af primtal. Vis, at den mindste σ-klasse i $\mathbb{N}$, der indeholder L og P, har 6 elementer, medens den mindste σ-algebra, der indeholder L og P, har 16 elementer.

Lokalt integrable funktioner.

5.8. Lad I være et åbent interval, $I =]a,b[$ med $-\infty \leq a < b \leq \infty$, og lad $f \in \mathcal{L}_{loc}(I)$. Man siger, at f er integrabel i b, såfremt

$$\int_{x_0}^{b} |f(t)|dt < \infty \quad \text{for et} \quad x_0 \in]a,b[\ .$$

Vis, at denne betingelse er uafhængig af $x_0 \in]a,b[$.
Integrabilitet i a defineres tilsvarende.
Vis, at der om $f \in \mathcal{L}_{loc}(I)$ gælder

$$f \in \mathcal{L}(I) \Leftrightarrow f \ \text{integrabel i a og b} \ .$$

5.9. (Fortsættelse af 5.8). Lad $f \in \mathcal{L}_{loc}(I)$, hvor I er som før. Vis, at f er integrabel i b, hvis og kun hvis

$$\lim_{x \to b^-} \int_{x_0}^{x} |f(t)|dt < \infty ,$$

hvor $x_0 \in]a,b[$ er vilkårlig, og at der i bekræftende fald gælder

$$\int_{x_0}^{b} f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_{x_0}^{x} f(t)dt \ .$$

5.10.1° Vis, at $\log:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ er integrabel i 0, men ikke i ∞.

2° Vis, at $f:]0,1[\to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\log \frac{1}{x}}$$

er integrabel i 0, men ikke i 1.

3^o Vis, at $f\colon]1,\infty[\to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\log x},$$

hverken er integrabel i 1 eller ∞.

5.11. Bestem de $\alpha \in \mathbb{R}$ for hvilken $(\sin x)^{-\alpha}$ er integrabel over $]0,\pi[$.

5.12. Bestem de $\alpha \in \mathbb{R}$ for hvilke $(\tan x)^{-\alpha}$, $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$ er

1^o integrabel i 0.

2^o integrabel i $\frac{\pi}{2}$.

3^o integrabel over $]0,\frac{\pi}{2}[$.

5.13. Lad $f\colon G \to \mathbb{C}$ være en Borel funktion i en <u>åben</u> mængde $G \subseteq \mathbb{R}^k$. Vis, at $f \in \mathcal{L}_{loc}(G)$, hvis og kun hvis, der til hvert $x \in G$ findes $r > 0$, så $K(x,r) \subseteq G$ og

$$\int_{K(x,r)} |f|\,dm_k < \infty.$$

5.14. 1^o Vis, at funktionen $x \to \frac{\sin x}{x}$ ikke er integrabel i ∞.

<u>Vink</u>. $$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx.$$

2^o Vis, at $x \rightsquigarrow \frac{1}{x}\sin(x^{-2})$, $x \in]0,\infty[$, er integrabel i ∞, men ikke i 0.

5.15. Sæt

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(x^{-2}) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Vis, at f er differentiabel, men at f' ikke er lokalt integrabel.

<u>Vink</u>. Benyt Opgave 5.14.

Radon mål i $\mathbb{R}^k$.

5.16. Lad (X,d) være et metrisk rum, og lad $\mu: \mathbb{B}(X) \to [0,\infty[$ være et endeligt Borel mål, i.e. $\mu(X) < \infty$.

1° Vis, at enhver afsluttet mængde i X er fællesmængde for en dalende følge af åbne mængder, og at enhver åben mængde er foreningsmængde af en stigende følge af afsluttede mængder.

2° Vis, at der for alle Borel mængder $B \in \mathbb{B}(X)$ gælder

$$\sup\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{F}, F \subseteq B\} = \mu(B) = \inf\{\mu(G) \mid G \in \mathcal{G}, G \supseteq B\},$$

idet $\mathcal{F}$ (rest. $\mathcal{G}$) er systemet af afsluttede (resp. åbne) mængder i X.

(Vink. Lad $\mathbb{D}$ betegne systemet af Borel mængder med ovenstående egenskab. Vis, at $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathbb{D}$, og at $\mathbb{D}$ er en σ-klasse. Konkludér, at $\mathbb{D} = \mathbb{B}(X)$.)

5.17. Lad $\mu: \mathbb{B}_k \to [0,\infty]$ være et Radon mål i $\mathbb{R}^k$.

1° Vis

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall B \in \mathbb{B}_k \ \exists G \in \mathcal{G}: B \subseteq G \wedge \mu(G \setminus B) < \varepsilon,$$

og slut heraf, at

$$\mu(B) = \inf\{\mu(G) \mid G \in \mathcal{G}, G \supseteq B\} \quad \text{for alle} \quad B \in \mathbb{B}_k.$$

(Vink. Antag først, at B er begrænset, og prøv at udnytte 5.16.)

2° Vis

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall B \in \mathbb{B}_k \ \exists F \in \mathcal{F}: F \subseteq B \wedge \mu(B \setminus F) < \varepsilon,$$

og slut heraf, at

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{F}, F \subseteq B\} \quad \text{for alle} \quad B \in \mathbb{B}_k.$$

3° Vis, at der for alle $B \in \mathbb{B}_k$ gælder

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subseteq B\}.$$

5.18. Vis, at to Radon mål μ og ν i $\mathbb{R}^k$, er ens, blot en af følgende 3 betingelser er opfyldt:

1) $\mu(I) = \nu(I)$ for alle standard intervaller.

2) $\mu(K) = \nu(K)$ for alle kompakte mængder i $\mathbb{R}^k$.

3) $\mu(G) = \nu(G)$ for alle åbne mængder i $\mathbb{R}^k$.

5.19. Lad μ være et Radon mål i $\mathbb{R}^k$. Vis, at mængden

$$A = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \mu(\{x\}) > 0\}$$

er tællelig.

5.20. Lad μ være et Borel mål i $\mathbb{R}^k$, og lad G_μ betegne systemet af åbne μ-nulmængder.

1^o Vis, at der findes tælleligt mange mængder fra G_μ, så enhver mængde fra G_μ er forening af visse af disse. (Vink. Prøv med åbne intervaller med rationale endepunkter).

2^o Vis, at

$$\bigcup_{G \in G_\mu} G$$

er en åben μ-nulmængde, og altså den største sådanne.

3^o Vis, at mængden $F = \mathbb{R}^k \setminus \bigcup_{G \in G_\mu} G$ er karakteriseret ved at der for $x \in \mathbb{R}^k$ gælder

$$x \in F \Leftrightarrow \forall r > 0: \mu(K(x,r)) > 0 .$$

Mængden F kaldes μ's <u>støtte</u>, og betegnes $\operatorname{supp}(\mu)$. Find $\operatorname{supp}(\varepsilon_a)$, $\operatorname{supp}(m_k)$ og vis, at $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(f \cdot m_k)$ når $f: \mathbb{R}^k \to [0,\infty[$ er kontinuert.

5.21. <u>Tyngdepunkt for Radon Mål</u>. Lad ℓ være en ret linie i $\mathbb{R}^2$ givet ved en ligning

$$ax + by + c = 0 \quad \text{med} \quad a^2 + b^2 = 1 ,$$

og lad os orientere normalen til ℓ ved vektoren (a,b). For hvert $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ er $ax + by + c$ da som bekendt den med fortegn regnede afstand til (x,y) fra linien ℓ. Hvis $(x,y) \sim ax+by+c$ er integrabel over $\mathbb{R}^2$ med hensyn til et Radon mål μ i $\mathbb{R}^2$, siges dette at have et moment med hensyn til ℓ, nemlig (med den valgte orientering af normalen til ℓ):

$$\int_{\mathbb{R}^2} (ax+by+c)\,d\mu(x,y) .$$

Lad nu μ være et Radon mål i $\mathbb{R}^2$, med $0 < \mu(\mathbb{R}^2) = M < \infty$ og antag, at μ har momenter med hensyn til 2 hinanden skærende rette linier ℓ_1 og ℓ_2 i $\mathbb{R}^2$.

1° Bevis, at μ har et moment med hensyn til enhver ret linie i $\mathbb{R}^2$.

2° Bevis, at der findes et og kun et Radon mål ν, der er koncentreret i ét punkt (x_o,y_o), dvs. hvor $\nu(\mathbb{R}^2 \setminus \{x_o,y_o)\}) = 0$, og som har samme moment som μ om enhver ret linie ℓ i $\mathbb{R}^2$.

(Punktet (x_o,y_o) kaldes tyngdepunktet for μ.)

5.22. Angiv et mål $\mu: \mathbb{B}_k \to [0,\infty]$ som ikke er af form cm_k, $c \geq 0$, men dog er invariant ved enhver isometri af $\mathbb{R}^k$.

5.23. Vis, at

$$\int_{K(0,R)} (x+iy)^n d(x,y) = 0 ,$$

når $K(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 < R^2\}$ og $n \in \mathbb{N}$.

(Vink. Gør rede for, at

$$\int_{K(0,R)} (x+iy)^n d(x,y) = \int_{K(0,R)} c^n (x+iy)^n d(x,y) ,$$

når $c \in \mathbb{C}$ og $|c| = 1$.)

5.24. Reelle tal r,λ,β kaldes (sfærisk) polære koordinater for punktet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, hvor

$$x = r \cos \beta \cos \lambda$$

$$y = r \cos \beta \sin \lambda$$

$$z = r \sin \beta \,.$$

1° Beregn Jacobi determinanten for afbildningen $(r,\lambda,\beta) \rightsquigarrow (x,y,z)$. Gør rede for, at restriktionen φ til det åbne interval

$$I = \{(r,\lambda,\beta) \mid 0 < r, -\pi < \lambda < \pi, -\tfrac{\pi}{2} < \beta < \tfrac{\pi}{2}\}$$

er en bijektiv afbildning af dette på $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x \leq 0, y = 0\}$, som tillige med φ^{-1} er kontinuert differentiabel. Beskriv den geometriske betydning af r, λ og β. (Figur !)

2° Hvorledes udtrykkes et integral $\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,d(x,y,z)$ i polære koordinater ?

5.25. Lad $E \subseteq \,]0,1]$ være en Borel mængde med $m(E) > 0$. Til ækvivalensrelationen givet ved

$$x \sim y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$$

svarer en klassedeling af E. Lad A være en mængde bestående af én repræsentant for hver klasse. (For eksistens af en sådan mængde påberåbes udvalgsaksiomet.)

1° Vis, at $E \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[} (A+q) \subseteq \,]-1,2[$.

2° Vis, at A ikke er Lebesgue målelig.

(Resultatet anvendes i Opgave 5.29.)

5.26. <u>En åben mængde i $\mathbb{R}$, hvis rand har positivt Lebesgue mål.</u>

Antag $0 < \varepsilon < 2$ og lad F fremgå af $[0,1]$ på følgende måde: Midt i $[0,1]$ fjernes det åbne interval af længde $\varepsilon/4$, midt i hvert af de to tiloversblevne intervaller fjernes det åbne interval af længde $\varepsilon/4^2$, osv.

1° Vis, at $G = [0,1] \setminus F$ er åben og har F som rand.

2° Bestem $m(G)$ og $m(F)$.

5.27. Angiv en sammenhængende, åben mængde (dvs. et område) i $\mathbb{R}^2$, hvis rand har positivt Lebesgue mål.
(Vink. Søg inspiration i Opgave 5.26.)

Cantor/Lebesgues funktion.

5.28.1° Gør rede for, at den p. 5.23 i noterne definerede afbildning af Cantors mængde Z over på intervallet $[0,1]$ på en og kun en måde kan udvides til en voksende funktion $f: [0,1] \curvearrowright [0,1]$.
(Denne kaldes Cantor/Lebesgues funktion.)

2° Gør rede for, at Cantor/Lebesgues funktion f er kontinuert i hele intervallet $[0,1]$, og for, at f er differentiabel med $Df(x) = 0$ i hvert $x \in [0,1] \setminus Z$, men ikke differentiabel i noget $x \in Z$.
(Cantor/Lebesgues funktion benyttes i Opg.5.29-5.32.)

5.29. En Lebesgue målelig mængde, som ikke er en Borel mængde.

Lad $f: [0,1] \curvearrowright [0,1]$ være Cantor/Lebesgues funktion (Opgave 5.28), og sæt

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}f(x), \quad x \in [0,1].$$

1° Gør rede for, at g er en homeomorf afbildning af intervallet $[0,1]$ på sig selv.

2° Vis, at mængden $E = g(Z)$ har Lebesgue målet $m(E) = \frac{1}{2}$ (medens jo $m(Z) = 0$).

3° Ifølge Opgave 5.25 har E en delmængde A, som ikke er Lebesgue målelig. - Vis, at $g^{-1}(A)$ er Lebesgue målelig, men ikke en Borel mængde, altså at $g^{-1}(A) \in \mathbb{L}_1 \setminus \mathbb{B}$.

4° Vis, at $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$\varphi(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{for } x \in [0,1] \\ x & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \end{cases},$$

er kontinuert, men ikke $\mathbb{L}_1$-$\mathbb{L}_1$-målelig.

5.30. Vis, at sammensætningen $\psi \circ \varphi$ af to Lebesgue målelige funktioner $\psi, \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ikke behøver at være Lebesgue målelig.
(Vink. Lad φ være funktionen i Opgave 5.29.4° .)

5.31. Lad $f: [0,1] \to [0,1]$ være Cantor/Lebesgues funktion, og lad $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være udvidelsen defineret ved

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 , \\ f(x) & \text{for } x \in [0,1] , \\ 1 & \text{for } x > 1 . \end{cases}$$

Lad $\mu = \mu_\varphi$ være Stieltjes målet bestemt ved den voksende funktion φ.

1° Vis, at μ er koncentreret på Cantors mængde Z, dvs. $\mu(\mathbb{R} \setminus Z) = 0$, og at $\mu(Z) = 1$.

2° Vis, at $\operatorname{supp}(\mu) = Z$ (jvfr. Opgave 5.20.)

3° Vis, at $\mu(\{x\}) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

(μ er et eksempel på et såkaldt <u>kontinuert singulært sandsynlighedsmål</u>, hvis støtte er en Lebesgue nulmængde, men som ikke har masse i nogen punkter).

5.32. Lad $f: [a,b] \sim \mathbb{R}$ være voksende samt næsten overalt differentiabel.

1° Vis, at Df er Lebesgue integrabel i $[a,b]$, samt at

$$\int_a^b Df(x)\,dx \leq f(b) - f(a) .$$

(Vink. Sæt $f(x) = f(b)$ for $x > b$, og betragt funktionsfølgen $g_n: [a,b] \sim \mathbb{R}$, $n = 1,2,\cdots$, givet ved

$$g_n(x) = n(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)) .)$$

2° Vis, at

$$\int_a^b Df(x)\,dx < f(b) - f(a)$$

kan forekomme, endda med f kontinuert i $[a,b]$.
(Vink. Prøv Cantor/Lebesgues funktion, Opgave 5.28.)

5.33. Bevis, at

$$\int_a^b Df(x)\,dx = f(b) - (a) ,$$

når $f: [a,b] \rightsquigarrow \mathbb{R}$ er differentiabel med en begrænset afledet Df.
(Vink. Sæt $f(x) = f(b) + (x-b)Df(b)$ for $x > b$ og betragt funktionsfølgen $g_n: [a,b] \rightsquigarrow \mathbb{R}$, $n = 1,2,\cdots$, givet ved

$$g_n(x) = n(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)) .)$$

§6. Produktmål.

I denne paragraf vil vi til to målrum $(X,\mathbb{E},\mu)$ og $(Y,\mathbb{F},\nu)$ knytte et nyt målrum $(X\times Y,\ \mathbb{E}\otimes\mathbb{F},\ \mu\otimes\nu)$ kaldet produktet af de givne. Ideen bag konstruktionen er, at

$$(*) \qquad \mu\otimes\nu\ (A\times B) = \mu(A)\nu(B) \qquad \text{for } A\in\mathbb{E},\ B\in\mathbb{F}\ ,$$

og når paragraffen er slut, bør læseren have indset, at konstruktionen er den eneste mulige, når (*) ønskes opfyldt.

En advarsel: Man kan ikke danne produktet af vilkårlige målrum. Man må indskrænke sig til σ-endelige målrum, som defineres i 6.2.

Det viser sig, at produktet af $(\mathbb{R}^p, \mathbb{B}_p, m_p)$ med $(\mathbb{R}^q, \mathbb{B}_q, m_q)$ er $(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{B}_{p+q}, m_{p+q})$.

De to italienske matematikere Guido Fubini (1879-1943) og Leonida Tonelli (1885-1946) har deres navne knyttet til sætninger, der udtaler sig om, hvordan integralet af en funktion f på $X\times Y$ med hensyn til produktmålet $\mu\otimes\nu$ kan udregnes ved successivt at integrere med hensyn til μ og ν.

6.1. Målelighed i cartesisk produkt.

Lad $(X,\mathbb{E})$ og $(Y,\mathbb{F})$ være to målbare rum. Vi tænker os det cartesiske produkt $X\times Y$ forsynet med en σ-algebra $\mathbb{G}$ så projektionsafbildningerne

$$\pi_1 : X\times Y \to X \quad \text{og} \quad \pi_2 : X\times Y \to Y$$

er målelige. Idet

$$\pi_1^{-1}(A) = A\times Y\ ,\quad \pi_2^{-1}(B) = X\times B\ ,\quad \pi_1^{-1}(A)\cap\pi_2^{-1}(B) = A\times B$$

for $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$, ser man, at $\mathbb{G}$ indeholder alle rektangler $A\times B$, hvor $A\in\mathbb{E}$, $B\in\mathbb{F}$. Dette leder til følgende:

DEFINITION. Ved produkt σ-algebraen i $X\times Y$ forstås den mindste σ-algebra i $X\times Y$, der indeholder alle rektangler $A\times B$, hvor $A\in\mathbb{E}$, $B\in\mathbb{F}$. Idet produkt σ-algebraen betegnes $\mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$ har vi altså

$$\mathbb{E}\otimes\mathbb{F} = \sigma\{A\times B \mid A\in\mathbb{E},\ B\in\mathbb{F}\}\ .$$

Idet $X \times Y$ udstyres som målbart rum med σ-algebraen $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$, ser man, at projektionerne π_1 og π_2 er målelige, og $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ er åbenbart den mindste σ-algebra på $X \times Y$ med denne egenskab. I almindelighed vil der være mængder i $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$, som <u>ikke</u> er rektangler.

Er g og h funktioner defineret på henholdsvis X og Y, og med værdier i samme talområde $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$, betegnes funktionen

$$(x,y) \curvearrowright g(x)h(y)\,, \qquad (x,y) \in X \times Y$$

med $g \otimes h$; den kaldes undertiden <u>tensorproduktet</u> af g og h. Bemærk, at for $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ gælder $1_A \otimes 1_B = 1_{A \times B}$.

LEMMA. <u>Er</u> g <u>en</u> $\mathbb{E}$-<u>målelig funktion på</u> X <u>og</u> h <u>en</u> $\mathbb{F}$-<u>målelig funktion på</u> Y, <u>begge med værdier i samme talområde</u> $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ <u>eller</u> $\mathbb{C}$, <u>da er</u> $g \otimes h$ <u>en</u> $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$-<u>målelig funktion på</u> $X \times Y$.

<u>Bevis</u>. For funktionerne

$$(x,y) \curvearrowright g(x) \quad \text{og} \quad (x,y) \curvearrowright h(y)\,, \qquad (x,y) \in X \times Y\,,$$

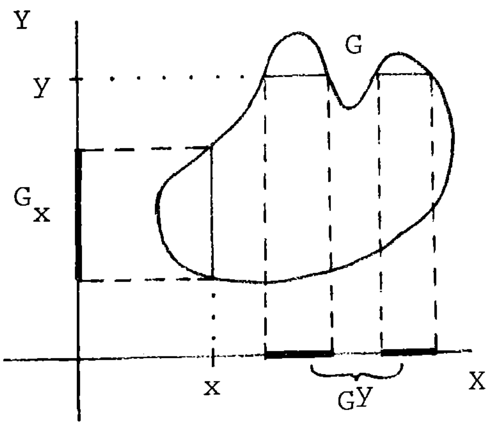
har vi betegnelserne $g \otimes 1_Y$ henholdsvis $1_X \otimes h$, og der gælder

$$g \otimes h = (g \otimes 1_Y) \cdot (1_X \otimes h)\,.$$

Da produktet af målelige funktioner igen er en målelig funktion, er det tilstrækkeligt at vise, at $g \otimes 1_Y$ og $1_X \otimes h$ er målelige, men det ses for den første funktions vedkommende således:

$$(g \otimes 1_Y)^{-1}(D) = \{(x,y) \mid g(x) \in D\} = g^{-1}(D) \times Y \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}\,,$$

idet $g^{-1}(D) \in \mathbb{E}$, når D tilhører Borel algebraen for talområdet. □



For $G \subseteq X \times Y$ og $x \in X$ sættes

$$G_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in G\} ;$$

mængden kaldes et <u>snit</u> i G. Er f en funktion defineret på $X \times Y$ og $x \in X$, betegner f_x eller $f(x,\cdot)$ <u>snitfunktionen</u>

$$y \curvearrowright f(x,y),\ y \in Y .$$

Hvis vi indfører indlejringen $j_x : Y \to X \times Y$ ved

$$j_x(y) = (x,y), \quad y \in Y$$

er $G_x = j_x^{-1}(G)$ og $f(x,\cdot) = f \circ j_x$.

Tilsvarende taler vi om snit $\{x \in X \mid (x,y) \in G\}$, og snitfunktion $x \curvearrowright f(x,y)$, $x \in X$ bestemt ved et $y \in Y$. Her benytter vi betegnelserne G^y og $f(\cdot,y)$ eller f^y.

<u>Indlejringen</u> $j_x : Y \to X \times Y$ <u>er målelig</u> idet

$$j_x^{-1}(A \times B) = \begin{cases} B, & \text{hvis } x \in A, \\ \emptyset, & \text{hvis } x \notin A, \end{cases}$$

og mængdesystemet $\{A \times B \mid A \in \mathbb{E}, B \in \mathbb{F}\}$ frembringer $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$.

Vi har dermed vist:

SÆTNING 1. <u>For enhver mængde</u> $G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ <u>og</u> $x \in X$, $y \in Y$ <u>vil</u> $G_x \in \mathbb{F}$ <u>og</u> $G^y \in \mathbb{E}$.

<u>For enhver</u> $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$<u>-målelig funktion</u> f <u>på</u> $X \times Y$ <u>vil snitfunktionen</u> $f(x,\cdot)$ <u>være</u> $\mathbb{F}$<u>-målelig, og snitfunktionen</u> $f(\cdot,y)$ <u>være</u> $\mathbb{E}$<u>-målelig</u>.

HOVEDEKSEMPEL.

Det cartesiske produkt $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ vil vi identificere med $\mathbb{R}^k$, hvor $k = p+q$, idet vi for $x = (x_1,\dots,x_p)$ og $(y_1,\dots,y_q)$ tolker (x,y) som $(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$. Dermed kan produkt σ-algebraen $\mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q$ opfattes som en σ-algebra i $\mathbb{R}^k$.

SÆTNING 2. Med $k = p+q$ er $\mathbb{B}_k = \mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q$.

Bevis. Idet projektionerne $\pi_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ og $\pi_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^q$ er kontinuerte, og dermed Borel målelige, har vi $\mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q \subseteq \mathbb{B}_k$. Produkt σ-algebraen er nemlig den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, så π_1 og π_2 er målelige.

Et standard interval I i $\mathbb{R}^k$ kan skrives $I = I_1 \times I_2$, hvor I_1 er et standard interval i $\mathbb{R}^p$, og I_2 er et standard interval i $\mathbb{R}^q$. Dermed har vi $I \in \mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q$, men da $\mathbb{B}_k$ er den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}^k$, der indeholder standard intervallerne, må $\mathbb{B}_k \subseteq \mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q$. □

Som konsekvens af inklusionen $\mathbb{B}_k \subseteq \mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q$ og Sætning 1 noteres, at ethvert snit i en Borel mængde (Borel funktion) i $\mathbb{R}^k$ igen er en Borel mængde (Borel funktion).

Som konsekvens af inklusionen $\mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q \subseteq \mathbb{B}_k$ noteres, at $g \otimes h$ er en Borel funktion på $\mathbb{R}^k$, når g og h er Borel funktioner på henholdsvis $\mathbb{R}^p$ og $\mathbb{R}^q$ med værdier i samme talområde $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$.

6.2. Produktmål.

Et målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ kaldes σ-endeligt, hvis X kan skrives som forening $X = \bigcup_1^\infty A_n$ af en følge af mængder $A_n \in \mathbb{E}$ med $\mu(A_n) < \infty$. Man overbeviser sig let om, at mængderne A_n kan vælges enten som en stigende følge, eller parvis disjunkte.

Et endeligt mål er σ-endeligt, og ethvert Radon mål i $\mathbb{R}^k$ er σ-endeligt, da $\mathbb{R}^k$ er foreningsmængde af numerabelt mange begrænsede intervaller.

Definition af produkt σ-algebraen $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ kræver ingen indskrænkende forudsætninger om målrummene $(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $(Y, \mathbb{F}, \nu)$, men definition af produktmålet $\mu \otimes \nu$ kræver σ-endelighed.

HOVEDSÆTNING OM PRODUKTMÅL. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $(Y, \mathbb{F}, \nu)$ være to σ-endelige målrum.

Der findes et og kun et mål π på produkt σ-algebraen $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ med egenskaben

(*) $$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \qquad \text{for } A \in \mathbb{E},\ B \in \mathbb{F}.$$

Det ved (*) entydigt bestemte mål, kaldes produktmålet af μ og ν, og betegnes $\mu \otimes \nu$. Målrummet $(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}, \mu \otimes \nu)$ er σ-endeligt, og kaldes produktet af de givne målrum.

Bevis. At der er højst et mål som ønsket, følger af entydighedssætningen for mål fra §5.1:

Systemet

(**) $$\mathbb{K} = \{A \times B \mid A \in \mathbb{E}, B \in \mathbb{F}\}$$

er et fællesmængde stabilt frembringersystem for $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$, idet

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) .$$

Ifølge forudsætningen om σ-endelighed, findes mængder $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \in \mathbb{E}$ med $\mu(A_n) < \infty$, og mængder $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \in \mathbb{F}$ med $\nu(B_n) < \infty$, således at $X = \bigcup_1^\infty A_n$, $Y = \bigcup_1^\infty B_n$. Sættes $K_n = A_n \times B_n$, $n = 1,2,\cdots$ gælder $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \in \mathbb{K}$ og $\bigcup_1^\infty K_n = X \times Y$. Tænker vi os mål π og ρ på $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ opfyldende (*), har vi

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \rho(A \times B) \qquad \text{for } A \in \mathbb{E},\ B \in \mathbb{F} ,$$

specielt $\pi(K_n) = \mu(A_n)\nu(B_n) < \infty$, og entydighedssætningen giver $\pi = \rho$. Desuden ses, at $(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}, \pi)$ er σ-endeligt.

Eksistensen af et mål som ønsket, viser vi ved eksplicit at angive et, nemlig funktionen $\pi : \mathbb{E} \otimes \mathbb{F} \to [0,\infty]$ bestemt ved

(***) $$\pi(G) = \int_X \nu(G_x)\, d\mu(x) ,$$

jvfr. tegningen p.II.6.3. Formlen er nærliggende for den, der har beregnet arealet "ved deling i strimler" og voluminer "ved deling i skiver". Vanskeligheden består i at godtgøre, at funktionen $x \leadsto \nu(G_x)$ er $\mathbb{E}$-målelig, så integralet har mening. Det sikres af

LEMMA. For hvert $G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ er $\varphi_G: X \to [0,\infty]$ defineret ved $\varphi_G(x) = \nu(G_x)$ en $\mathbb{E}$-målelig funktion.

Bevis. Ifølge Sætning 1 i §6.1 er $G_x \in \mathbb{F}$, og dermed har definitionen af φ_G mening.

Vi fremhæver dernæst følgende egenskaber ved φ_G:

a) For $G = A \times B$ med $A \in \mathbb{E}$, $B \in \mathbb{F}$ gælder

$$\varphi_G = \nu(B) 1_A .$$

Thi

$$G_x = \begin{cases} B & \text{når } x \in A \\ \emptyset & \text{når } x \in X \setminus A , \end{cases} \quad \text{altså} \quad \varphi_G(x) = \begin{cases} \nu(B) & \text{når } x \in A \\ \nu(\emptyset) = 0 & \text{når } x \in X \setminus A . \end{cases}$$

b) Hvis $G_1, G_2, \cdots \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ er parvis disjunkte og $G = \bigcup_1^\infty G_n$, da er

$$\varphi_G = \sum_1^\infty \varphi_{G_n} .$$

Thi for hvert $x \in X$ er $G_x = \bigcup_1^\infty (G_n)_x$, hvor $(G_1)_x, (G_2)_x, \cdots \in \mathbb{F}$ er parvis disjunkte, og dermed er

$$\varphi_G(x) = \nu(G_x) = \sum_1^\infty \nu((G_n)_x) = \sum_1^\infty \varphi_{G_n}(x) .$$

1° Vi viser først lemmaet under forudsætningen $\nu(Y) < \infty$.

Mængdesystemet

$$\mathbb{D} = \{G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F} \mid \varphi_G \in M^+(X,\mathbb{E})\} ,$$

indeholder systemet $\mathbb{K}$ givet ved (**) på grund af a).

Vi indser dernæst, at $\mathbb{D}$ er en σ-klasse.

Betingelsen $X \times Y \in \mathbb{D}$ følger af at $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{D}$.

Hvis $G_1, G_2, \cdots \in \mathbb{D}$ er parvis disjunkte, da er $G = \bigcup_1^\infty G_n \in \mathbb{D}$. Thi når $\varphi_{G_n} \in M^+(X,\mathbb{E})$, $n = 1,2,\cdots$ følger af sætninger om regning og grænseovergang med målelige funktioner, at $\sum_1^\infty \varphi_{G_n} \in M^+(X,\mathbb{E})$, men denne funktion er netop φ_G ifølge b).

Hvis $G \in \mathbb{D}$, da er også $\complement G \in \mathbb{D}$. Thi, da

$$\varphi_{X \times Y} = \varphi_G + \varphi_{\complement G}$$

og da $\varphi_{X\times Y}(x) = \nu(Y) < \infty$ kan vi slutte, at φ_G har endelige værdier, og dermed er $\varphi_{CG} = \nu(Y) - \varphi_G \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$.

Da $\mathbb{K}$ er et fællesmængde stabilt frembringersystem for $\mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$, kan vi af lemmaet i §5.1 slutte, at $\mathbb{D}(\mathbb{K}) = \sigma(\mathbb{K}) = \mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$, men da $\mathbb{D}$ er en σ-klasse indeholdende $\mathbb{K}$, må $\mathbb{D}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{D}$, altså $\mathbb{D} = \mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$, og lemmaet er bevist.

2^o Vi skal nu vise, hvordan det generelle tilfælde kan udledes af 1^o.

Da $(Y,\mathbb{F},\nu)$ er σ-endeligt, findes mængder $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \in \mathbb{F}$ med $\nu(B_n) < \infty$, $Y = \bigcup_1^\infty B_n$.

For fast n betragtes målet $\nu_n : \mathbb{F} \to [0,\infty[$ defineret ved $\nu_n(B) = \nu(B\cap B_n)$. Da $\nu_n(Y) = \nu(B_n) < \infty$, kan vi af første del af beviset slutte, at

$$x \curvearrowright \varphi_G^{(n)}(x) = \nu_n(G_x) \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E}).$$

Af egenskab (5) i §3.1 følger for $x \in X$

$$\varphi_G^{(n)}(x) = \nu(G_x \cap B_n) \nearrow \nu(G_x) = \varphi_G(x),$$

og dermed sluttes, at grænsefunktionen $\varphi_G \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$. □

Det er nu godtgjort, at (***) har mening, og vi mangler at eftervise, at $\pi: \mathbb{E}\otimes\mathbb{F} \to [0,\infty]$ er et mål opfyldende (*).

Når $G_1, G_2, \cdots \in \mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$ er parvis disjunkte, og $G = \bigcup_1^\infty G_n$, da er $\varphi_G = \sum_1^\infty \varphi_{G_n}$ ifølge b), og dermed (Sætning 2 i §4.1)

$$\pi(G) = \int \varphi_G d\mu = \sum_1^\infty \int \varphi_{G_n} d\mu = \sum_1^\infty \pi(G_n).$$

For $G = A\times B$ med $A \in \mathbb{E}$, $B \in \mathbb{F}$ finder vi ifølge a), at

$$\pi(A\times B) = \int \nu(B) 1_A d\mu = \nu(B)\int 1_A d\mu = \mu(A)\nu(B).$$

Hvis specielt $G = \emptyset = \emptyset\times\emptyset$, har vi $\pi(\emptyset) = 0$. □

COROLLAR. <u>Lad</u> $(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>og</u> $(Y,\mathbb{F},\nu)$ <u>være to</u> σ-<u>endelige målrum. Da gælder</u>

$$\mu\otimes\nu(G) = \int_X \nu(G_x)\,d\mu(x) = \int_Y \mu(G^y)\,d\nu(y)$$

<u>for ethvert</u> $G \in \mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$.

<u>Bevis</u>. Det første lighedstegn følger af eksistens- og entydighedsbeviset for hovedsætningen. Ganske analogt vil naturligvis $y \curvearrowright \mu(G^y)$, $y \in Y$, tilhøre $M^+(Y,\mathbb{F})$ for ethvert $G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$, og funktionen $\rho\colon \mathbb{E} \otimes \mathbb{F} \to [0,\infty]$ givet ved

$$\rho(G) = \int \mu(G^y)\,d\nu(y) ,$$

er et mål på $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ opfyldende (*), altså $\rho = \mu \otimes \nu$ ifølge entydighedsudsagnet. □

HOVEDEKSEMPEL.

SÆTNING . <u>Idet $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ identificeres med $\mathbb{R}^{p+q}$, og m_p, m_q og m_{p+q} betegner Lebesgue målene i henholdsvis $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$ og $\mathbb{R}^{p+q}$, defineret på Borel algebraerne $\mathbb{B}_p, \mathbb{B}_q$ og $\mathbb{B}_{p+q}$, er</u>

$$m_p \otimes m_q = m_{p+q} .$$

<u>Bevis</u>. Ifølge §6.1, Sætning 2, er $\mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q = \mathbb{B}_{p+q}$. Produktmålet $m_p \otimes m_q$ er altså defineret på Borel algebraen $\mathbb{B}_{p+q}$, og dets værdi $m_p(I)\cdot m_q(J) = v_p(I)\cdot v_q(J)$ for ethvert standard interval $I \times J = I_1 \times \cdots \times I_p \times J_1 \times \cdots \times J_q$ i $\mathbb{R}^{p+q}$ er åbenbart produktet af samtlige kantlængder. Men disse egenskaber karakteriserer Lebesgue målet m_{p+q}.

COROLLAR. <u>For enhver Borel mængde</u> B <u>i</u> $\mathbb{R}^{p+q}$ <u>er</u> $x \curvearrowright m_q(B_x)$, $x \in \mathbb{R}^p$, <u>en Borel funktion og</u>

$$m_{p+q}(B) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(B_x)\,dx .$$

For $p = q = 1$ kan formlen tolkes som arealbestemmelse ved deling i strimler, for $p = 1$, $q = 2$ som volumenbestemmelse ved deling i skiver.

Lad os også notere, at produktmålet $\mu \otimes \nu$ af Radon mål μ og ν i henholdsvis $\mathbb{R}^p$ og $\mathbb{R}^q$ er et Radon mål i $\mathbb{R}^{p+q}$.

6.3. Tonellis og Fubinis sætninger.

TONELLIS SÆTNING. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ og $(Y,\mathbb{F},\nu)$ være σ-endelige målrum.

For $f \in M^+(X\times Y,\mathbb{E}\otimes\mathbb{F})$ gælder

(i) funktionen $x \curvearrowright \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x,y)d\nu(y)$, $x \in X$, tilhører $M^+(X,\mathbb{E})$.

(ii) $$\int_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x).$$

Bevis. For $f \in M^+(X\times Y,\mathbb{E}\otimes\mathbb{F})$ og $x \in X$, vil $f_x \in M^+(Y,\mathbb{F})$ (Sætning 1 i §6.1), og dermed er der ved $g(x) = \int f_x d\nu$ defineret en funktion $g\colon X \to [0,\infty]$. Påstanden i sætningen er, at $g \in M^+(X,\mathbb{E})$, og at $\int fd\mu\otimes\nu = \int gd\nu$.

1°. For en indikatorfunktion $f = 1_G$ på $X\times Y$ med $G \in \mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$, er de to påstande vist i §6.2, omend i en anden formulering. For ethvert $x \in X$ er nemlig $(1_G)_x = 1_{G_x}$, hvor 1_{G_x} betegner indikatorfunktionen på Y for snitmængden $G_x \subseteq Y$. Lemmaet i §6.2 udsiger at funktionen

$$x \curvearrowright \nu(G_x) = \int (1_G)_x \, d\nu$$

tilhører $M^+(X,\mathbb{E})$ og Corollaret i §6.2, at dens μ-integral er lig med $\mu\otimes\nu(G) = \int 1_G d\mu\otimes\nu$.

2°. De to påstande gælder for enhver simpel funktion $f = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{G_j}$ på $X\times Y$ med $0 < a_j < \infty$, $G_j \in \mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$.

Det følger af 1°, idet det er let at eftervise, at (i) og (ii) gælder for $f_1 + f_2$ og cf_1, hvor $0 < c < \infty$, hvis de gælder for f_1 og f_2.

3°. En vilkårlig funktion $f \in M^+(X\times Y,\mathbb{E}\otimes\mathbb{F})$ kan fås som grænsefunktion for en følge $f_1 \le f_2 \le$ af simple $\mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$-målelige funktioner $f_n\colon X\times Y \to [0,\infty[$ (§4.1, Sætning 1). Vi noterer, at

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu) = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} f_n d(\mu\otimes\nu)$$

ifølge Lebesgues monotonisætning.

For hvert $x \in X$ har vi $(f_n)_x \nearrow f_x$ og dermed

$$g_n(x) = \int_Y (f_n)_x d\nu \nearrow g(x) = \int_Y f_x d\nu$$

ifølge Lebesgues monotonisætning. Da nu $g_n \in M^+(X,\mathbb{E})$ og $g_n \nearrow g$, er $g \in M^+(X,\mathbb{E})$, samt

$$\int_X g d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu$$

ifølge Lebesgues monotonisætning. Og da $\int_{X\times Y} f_n d(\mu\otimes\nu) = \int_X g_n d\mu$, $n = 1,2,\cdots$, sluttes endelig

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu) = \int_X gd\mu . \quad \square$$

<u>Tilføjelse til Tonellis sætning</u>. Der gælder naturligvis et analogt resultat med integrationerne i dobbeltintegralet ombyttet (jvfr. symmetrien i Corollaret i §6.2). Sammenholdt har vi da for enhver funktion $f \in M^+(X\times Y,\mathbb{E}\otimes\mathbb{F})$:

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y) .$$

Resultatet rummer en ofte nyttig regel om ombytning af integrationsorden.

Vi tænker os stadig givet σ-endelige målrum $(X,\mathbb{E},\mu)$ og $(Y,\mathbb{F},\nu)$.

For en $\mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$-målelig funktion $f\colon X\times Y \curvearrowright \mathbb{R}$ vil snitfunktionen $f_x\colon Y \curvearrowright \mathbb{R}$ være $\mathbb{F}$-målelig for hvert $x \in X$, som allerede vist i §6.1. Videre er $A = \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{L}(Y,\mathbb{F},\nu)\} \in \mathbb{E}$, og hvis $A \neq \emptyset$, vil funktionen $g\colon A \curvearrowright \mathbb{R}$ givet ved

$$g(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x,y)\,d\nu(y), \quad x \in A,$$

være $\mathbb{E}$-målelig.

<u>Begrundelse</u>: Ifølge Tonellis sætning, (i), anvendt på f^+ og f^- vil funktionerne $p\colon X \curvearrowright [0,\infty]$ og $n\colon X \curvearrowright [0,\infty]$ givet ved

$$p(x) = \int_Y (f^+)_x d\nu \quad \text{og} \quad n(x) = \int_Y (f^-)_x d\nu , \quad x \in X,$$

tilhøre $M^+(X,\mathbb{E})$. Idet $(f^+)_x = (f_x)^+$ og $(f^-)_x = (f_x)^-$, har vi derfor

$$A = \{x \in X \mid p(x) < \infty\} \cap \{x \in X \mid n(x) < \infty\} \in \mathbb{E},$$

samt hvis $A \neq \emptyset$, at $g = p|A - n|A$ er $\mathbb{E}$-målelig.

Ifølge Tonellis sætning, (ii), er endvidere

$$\int_X p\,d\mu = \int_{X\times Y} f^+ d(\mu\otimes\nu) \quad \text{og} \quad \int_X n\,d\mu = \int_{X\times Y} f^- d(\mu\otimes\nu) .$$

I tilfælde af, at f er integrabel m.h.t. $\mu\otimes\nu$, har vi derfor $\mu(X\setminus A) = 0$, idet $\int_X p\,d\mu < \infty$ og dermed $\mu(\{x \in X \mid p(x) = \infty\}) = 0$, ligesom $\int_X n\,d\mu < \infty$ og dermed $\mu(\{x \in X \mid n(x) = \infty\}) = 0$. (§4.1, Corollar 1). Medmindre $A = \emptyset$, vil endvidere $p|A$, $n|A$ og dermed $g = p|A - n|A$ tilhøre $\mathcal{L}(A,\mu)$, og

$$\int_A g\,d\mu = \int_A p\,d\mu - \int_A n\,d\mu = \int_X p\,d\mu - \int_X n\,d\mu$$
$$= \int_{X\times Y} f^+ d(\mu\otimes\nu) - \int_{X\times Y} f^- d(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) .$$

Vi noterer:

FUBINIS SÆTNING. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ og $(Y,\mathbb{F},\nu)$ være σ-endelige målrum.

For hvert $f \in \mathcal{L}(X\times Y, \mathbb{E}\otimes\mathbb{F}, \mu\otimes\nu)$ gælder da

(i) $A = \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{L}(Y,\mathbb{F},\nu)\} \in \mathbb{E}$ og $\mu(X\setminus A) = 0$,

(ii) funktionen $x \rightsquigarrow \int_Y f_x\,d\nu = \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$, $x \in A$, er integrabel m.h.t. μ,

(iii) $$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_A \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) .$$

Sætningen gælder ordret også for funktioner f med komplekse værdier. Det fremgår, idet sætningen for reelle funktioner anvendes på f' og f'', hvor $f = f' + if''$. (De indledende resultater vedrørende en $\mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$-målelig, men ikke nødvendigvis $(\mu\otimes\nu)$-integrabel funktion $f: X\times Y \rightsquigarrow \mathbb{R}$ gælder ligeledes med $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$.)

I (iii) skrives ofte $\int_X$ i stedet for $\int_A$, selv om integranden kun er defineret μ-næsten overalt i X.

Tilføjelse til Fubinis sætning. Der gælder naturligvis et analogt resultat med integrationerne i dobbeltintegralet ombyttet. Sammenholdt har vi da for enhver funktion $f \in \mathcal{L}(X\times Y, \mu\otimes\nu)$:

$$\int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

Resultatet rummer en ofte nyttig regel om ombytning af integrationsorden.

En $\mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$-målelig funktion f defineret på $X\times Y$ tilhører jo $\mathcal{L}(X\times Y,\mu\otimes\nu)$, hvis $\int_{X\times Y}|f|d(\mu\otimes\nu) < \infty$. Til udregning eller vurdering af dette integral benyttes ofte med fordel Tonellis sætning.

EKSEMPEL. Er $g \in \mathcal{L}(X,\mu)$ og $h \in \mathcal{L}(Y,\nu)$, da er $g\otimes h \in \mathcal{L}(\mu\otimes\nu)$ og

$$\int_{X\times Y} g\otimes h\ d(\mu\otimes\nu) = \int_X g d\mu \cdot \int_Y h d\nu .$$

Thi $g\otimes h$ er $\mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$-målelig ifølge §6.1, og Tonellis sætning giver

$$\int_{X\times Y} |g\otimes h| d(\mu\otimes\nu) = \int_X\left(\int_Y |g(x)h(y)|d\nu(y)\right)d\mu(x)$$
$$= \int_X\left(|g(x)| \int_Y |h|d\nu\right)d\mu(x) = \int_Y |h|d\nu \cdot \int_X |g|d\mu < \infty .$$

Altså er $g\otimes h \in \mathcal{L}(X\times Y,\mu\otimes\nu)$, og regningen kan nu gentages uden numeriske tegn, i kraft af Fubinis sætning.

BEMÆRKNING. For en funktion f, der er integrabel m.h.t. $\mu\otimes\nu$ over en mængde $G \in \mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$, kan Fubinis sætning anvendes på funktionen

$$(x,y) \rightsquigarrow \begin{cases} f(x,y) & \text{for } (x,y) \in G \\ 0 & \text{for } (x,y) \in X\times Y \setminus G . \end{cases}$$

Samme ide kan naturligvis benyttes i forbindelse med Tonellis sætning.

HOVEDEKSEMPEL.

Når $k = p+q$, $p,q \in \mathbb{N}$, gælder

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(z)dz = \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dx\right)dy$$

for enhver Borel funktion f defineret på $\mathbb{R}^k$, der enten har værdier i $[0,\infty]$ eller har endelige (reelle eller komplekse) værdier og er Lebesgue integrabel.

Thi ved identifikation af $\mathbb{R}^k$ med $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ stemmer Lebesgue målet $m_k : \mathbb{B}_k \to [0,\infty]$ overens med produktmålet $m_p \otimes m_q$. Tonellis og Fubinis sætninger står så til rådighed, idet integralet $\int_{\mathbb{R}^k} f(z)dz = \int_{\mathbb{R}^k} f dm_k$ opfattes som $\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} fd(m_p \otimes m_q)$.

Resultatet skyldes Lebesgue, 1902, for en begrænset funktion f defineret på et begrænset interval $I \times J$. Fubini klarede tilfældet $f \in \mathcal{L}(I \times J)$; 1907. Tonelli bemærkede, at $f \in \mathcal{L}(I \times J)$, hvis $\int_I (\int_J |f(x,y)|dy)dx < \infty$; 1909.)

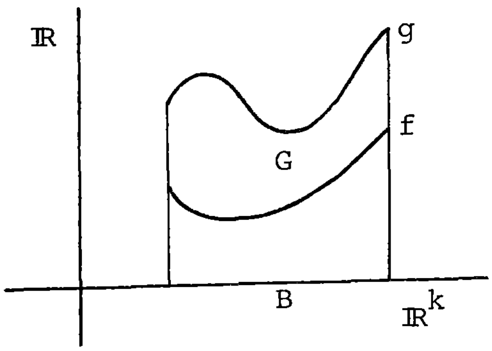
Den foregående teori kan uden vanskelighed udvides, så man kan danne produktet af endeligt mange σ-endelige målrum $(X_i, \mathbb{E}_i, \mu_i)$, $i = 1,\cdots,n$. Produkt σ-algebraen $\mathbb{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{E}_n$ er den mindste σ-algebra på $X_1 \times \cdots \times X_n$, der indeholder mængderne $A_1 \times \cdots \times A_n$, $A_i \in \mathbb{E}_i$, $i = 1,\cdots,n$, og produktmålet $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$, er fastlagt ved

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n) .$$

Desuden kan man danne produktet af en vilkårlig familie af sandsynlighedsfelter $(X_i, \mathbb{E}_i, \mu_i)$, $i \in I$, dvs. målrum, hvor $\mu_i(X_i) = 1$ for alle $i \in I$. Dette resultat har stor betydning i teorien for stokastiske processer, men falder udenfor rammerne af dette kursus.

6.4. Eksempler.

A. Lad $B \in \mathbb{B}_k$ og lad $f,g: B \to \mathbb{R}$ være Borel funktioner opfyldende $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in B$. Mængden



$$G = \{(x,y) \in B\times\mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

er en Borel mæmgde i $\mathbb{R}^{k+1}$, og dens $(k+1)$-dimensionale Lebesgue mål er givet ved

$$m_{k+1}(G) = \int_B (g(x)-f(x))\,dm_k(x) .$$

Sættes nemlig $\varphi,\psi: B\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til

$$\varphi(x,y) = g(x)-y,\ \psi(x,y) = y-f(x), \quad x \in B,\ y \in \mathbb{R},$$

er φ,ψ Borel funktioner, og

$$G = \varphi^{-1}([0,\infty[) \cap \psi^{-1}([0,\infty[)$$

hvilket viser, at $G \in \mathbb{B}_{k+1}$. For $x \in \mathbb{R}^k$ er

$$G_x = \begin{cases} [f(x),g(x)] & \text{for } x \in B \\ \emptyset & \text{for } x \in \mathbb{R}^k \setminus B \end{cases},$$

hvoraf formlen fremgår, idet $m_{k+1} = m_k \otimes m$.

Hvis $\Phi: G \to \mathbb{R}$ er enten integrabel over G eller en positiv Borel funktion, så gælder

$$\int_G \Phi\,dm_{k+1} = \int_B \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \Phi(x,y)\,dy\right) dm_k(x)$$

ifølge Fubinis og Tonellis sætninger. Snitfunktionen $(1_G\Phi)_x$ er nemlig givet ved

$$y \curvearrowright \begin{cases} 1_{[f(x),g(x)]}(y)\Phi(x,y) & \text{for } x \in B \\ 0 & \text{for } x \in \mathbb{R}^k \setminus B . \end{cases}$$

(Sammenlign med sætningerne 1 og 2 i IX.1 i Mat 1 MA 1983/84).

B. Udregning ved polære koordinater.

Et punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ har de polære koordinater (r,θ), hvor $r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ og $\theta \in \mathbb{R}$ opfylder $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. For $(x,y) \neq (0,0)$ er θ som bekendt kun bestemt på nær et multiplum af 2π. Afbildningen

$$\varphi\colon X(=]0,\infty[\times]-\pi,\pi[) \to Y(= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\})$$

givet ved $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ er bijektiv, og såvel φ som φ^{-1} er vilkårligt ofte differentiable. Forudsætningerne i integraltransformationsformlen (II.5.7) er derfor opfyldt, og Jacobideterminanten udregnes til

$$\det D\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r .$$

Hvis $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er enten integrabel eller en positiv Borel funktion, finder vi

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, dm_2 = \int_Y f\, dm_2 = \int_X f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dm_2(r,\theta)$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta\right) r\, dr = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\right) d\theta ,$$

idet det første lighedstegn er begrundet med, at en halvlinie i planen er en m_2-nulmængde.

Lad os som anvendelse heraf vise

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dm_2(x,y) = \pi .$$

Vi har nemlig

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dm_2(x,y) = \int_0^\infty \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2}\, d\theta\right) r\, dr = \pi \int_0^\infty e^{-r^2}\, 2r\,dr$$

$$= \pi \int_0^\infty e^{-u}\, du = \pi .$$

På den anden side finder vi ved Tonellis sætning, at

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dm_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2} dx\right) dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)^2 ,$$

så

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} ,$$

(jvfr. Eksempel 2 i §4.4).

C. Enhedskuglens Lebesgue mål.

Idet V_k betegner Lebesgue målet af enhedskuglen i $\mathbb{R}^k$, gælder

$$m_k(K(a,r)) = V_k r^k \quad \text{for} \quad a \in \mathbb{R}^k,\ r > 0 .$$

Vi har nemlig $K(a,r) = a + K(0,r)$ og $K(0,r)$ er billede af enhedskuglen under isomorfien $x \sim rx$ med determinant r^k, jvfr. §5.5. Da $\overline{K(a,r)} = \bigcap_1^\infty K(a, r + \frac{1}{n})$ ser man, at også den afsluttede kugle med radius r har Lebesgue mål $V_k r^k$, og dermed er kuglefladerne nulmængder.

I Mat 1 MA XIV vises, at

$$V_k = \pi^{\frac{k}{2}} / \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right), \qquad k = 1,2,\cdots .$$

Vi vil her vise, at

$$V_{k+2} = \frac{2\pi}{k+2} V_k , \qquad k = 1,2,\cdots ,$$

som ud fra de kendte værdier $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$ giver en simpel beregning af de øvrige.

Vi opfatter $\mathbb{R}^{k+2}$ som $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2$, og betegner punkterne i $\mathbb{R}^{k+2}$ ved $(x_1,\cdots,x_k,x,y)$. Snittet i enhedskuglen i $\mathbb{R}^{k+2}$ bestemt ved $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, er da givet som

$$\left\{(x_1,\cdots,x_k) \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, x_1^2 + \cdots + x_k^2 < 1 - x^2 - y^2\right\} ,$$

hvilket er kuglen i $\mathbb{R}^k$ med radius $(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$, når $(x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$, og den tomme mængde når $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Udnyttes $m_{k+2} = m_k \otimes m_2$, finder vi

$$V_{k+2} = \int_D V_k(1-x^2-y^2)^{k/2}\,dm_2(x,y) = V_k \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 (1-r^2)^{k/2}\,r\,dr\right)d\theta$$

$$\pi V_k \int_0^1 u^{k/2}du = \frac{2\pi}{k+2}\,V_k\,,$$

idet vi har benyttet polære koordinater, jvfr. eks.B.

D. <u>Guldins regel</u>: Når et plant areal drejes om en dermed disjunkt akse i samme plan, er det opståede rumfang lig med arealet multipliceret med længden af tyngdepunktets bane.

Vi tænker på "arealet" som en begrænset Borel mængde $E \subseteq]0,\infty[\times\mathbb{R}$, der drejes om y-aksen. Dermed kan omdrejningslegemet beskrives som

$$L = \{(r\cos\theta, y, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid (r,y) \in E,\ \theta \in [0,2\pi[\}\,,$$

altså

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+z^2}, y) \in E\}\,,$$

hvoraf ses, at $L \in \mathbb{B}_3$. Afbildningen

$$(r,y,\theta) \rightsquigarrow \varphi(r,y,\theta) = (r\cos\theta, y, r\sin\theta)$$

af $X =]0,\infty[\times\mathbb{R}\times]0,2\pi[$ på $Y = \mathbb{R}^3\setminus\{x,y,0)\mid x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$ ses at opfylde forudsætningerne for integraltransformationsformlen, og Jacobi-determinanten udregnes let til r. Som i B. får vi da

$$m_3(L) = m_3(L\cap Y) = \int_X 1_{L\cap Y}\circ\varphi(r,y,\theta)\,r\,dm_3(r,y,\theta)$$

$$= \int_X 1_E(r,y)\,r\,d(m_2\otimes m_1)\,(r,y;\theta) = 2\pi\int_E r\,dm_2(r,y) = 2\pi b\,m_2(E)\,,$$

idet vi har indført tallet

$$b = \frac{1}{m_2(E)}\int_E r\,dm_2(r,y)\,,$$

som netop er abscissen til E's tyngdepunkt, dvs. tyngdepunktet for $m_2|E$, jvfr. Opg.II.5.22.

(Reglen er fremsat af den schweiziske jesuit P. Guldin i værket Centrobaryca 1635-1641. Den findes dog allerede hos den græske matematiker Pappos, 3.årh.e.kr.).

Opgaver til §6.

6.1. Gælder

$$A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2 \Rightarrow (A_1 = A_2) \wedge (B_1 = B_2) \ ?$$

$$A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2 \neq \emptyset \Rightarrow (A_1 = A_2) \wedge (B_1 = B_2) \ ?$$

6.2. Vis, at der om $G \subseteq X \times Y$ gælder

$$G = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times G_x) .$$

6.3. Lad $(X, \mathbb{E})$ være et målbart rum. En delmængde $G \subseteq \mathbb{N} \times X$ modsvares af en følge af delmængder af X, nemlig snittene $G_1, G_2, \cdots$. En funktion f på $\mathbb{N} \times X$ modsvares af en følge af funktioner på X, nemlig snittene $f_1, f_2, \cdots$.
Idet $\mathbb{N}$ udstyres med σ-algebraen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ af alle delmængder, betragtes produkt σ-algebraen $\mathbb{G} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{E}$.
Vis:

$$G \in \mathbb{G} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : G_n \in \mathbb{E}$$

$$f \text{ er } \mathbb{G}\text{-målelig} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : f_n \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig.}$$

6.4. Lad X være en tællelig mængde, Y en vilkårlig mængde. Vis, at $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$.

6.5. Lad X og Y være metriske rum med Borel algebraerne $\mathbb{B}(X)$ og $\mathbb{B}(Y)$. Vis, at $\mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}(Y) \subseteq \mathbb{B}(X \times Y)$, hvor $X \times Y$ er det metriske produktrum. (I almindelighed er $\mathbb{B}(X \times Y)$ mere omfattende end $\mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}(Y)$. Se dog opg.6.7).

6.6. Lad $(X, \mathbb{E})$ og $(Y, \mathbb{F})$ være målbare rum, og antag, at $\mathbb{E}_1$ og $\mathbb{F}_1$ er frembringersystemer for henholdsvis $\mathbb{E}$ og $\mathbb{F}$, således at der findes mængder $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \in \mathbb{E}_1$, $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \in \mathbb{F}_1$ med $X = \bigcup A_n$, $Y = \bigcup B_n$.
Vis, at mængdesystemet $\{E \times F \mid E \in \mathbb{E}_1, F \in \mathbb{F}_1\}$ frembringer produkt σ-algebraen $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$.

6.7. Et system $\mathbb{D}$ af åbne mængder i et metrisk rum X kaldes en basis for topologien, hvis enhver ikke tom åben mængde er foreningsmængde af mængder fra $\mathbb{D}$.
Vis, at hvis et metrisk rum X har en tællelig basis $\mathbb{D}$ for topologien, så er $\sigma(\mathbb{D}) = \mathbb{B}(X)$.
Vis, at hvis X og Y er metriske rum med tællelig basis $\mathbb{D}_1$ henholdsvis $\mathbb{D}_2$, så har det metriske produktrum $X \times Y$ en tællelig basis

$$\{G_1 \times G_2 \mid G_1 \in \mathbb{D}_1, G_2 \in \mathbb{D}_2\}$$

og $\mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}(Y) = \mathbb{B}(X \times Y)$. (Vink. Opg.6.6).
Eksempel. $X = \mathbb{R}^k$, $\mathbb{D}$ = systemet af åbne intervaller med rationale endepunkter.

6.8. 1° Vis, at $\mathbb{L}_p \otimes \mathbb{L}_q \subseteq \mathbb{L}_{p+q}$, hvor $\mathbb{L}_p$ betegner systemet af Lebesgue målelige mængder i $\mathbb{R}^p$.

2° Vis, at $\mathbb{L}_1 \otimes \mathbb{L}_1 \neq \mathbb{L}_2$. (Vink. Betragt $\{0\} \times A$, hvor $A \subseteq \mathbb{R}$ ikke er Lebesgue målelig).

3° Vis, at $\overline{m}_p \otimes \overline{m}_q$ stemmer overens med restriktionen af $\overline{m}_{p+q}$ til $\mathbb{L}_p \otimes \mathbb{L}_q$.

6.9. Vis, at produktet af målrummene $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \varepsilon_a)$ og $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \varepsilon_b)$ er $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2, \varepsilon_{(a,b)})$.

6.10. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $(Y, \mathbb{F}, \nu)$ være σ-endelige målrum, og antag, at $f \in M^+(X, \mathbb{E})$ og $g \in M^+(Y, \mathbb{F})$ er sådan, at målene $f \cdot \mu$ og $g \cdot \nu$ igen er σ-endelige.
Vis, at

$$(f \cdot \mu) \otimes (g \cdot \nu) = f \otimes g \cdot \mu \otimes \nu .$$

6.11.1° Lad $\varphi_1 : (X_1, \mathbb{E}_1) \to (Y_1, \mathbb{F}_1)$, $\varphi_2 : (X_2, \mathbb{E}_2) \to (Y_2, \mathbb{F}_2)$ være målelige afbildninger. Vis, at produktafbildningen

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : (X_1 \times X_2, \mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2) \to (Y_1 \times Y_2, \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_2)$$

er målelig, idet

$$\varphi_1 \times \varphi_2 (x_1, x_2) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) .$$

2^o Lad nu μ_1 være et mål på $\mathbb{E}_1$, μ_2 et mål på $\mathbb{E}_2$. Vis, at hvis billedmålet $\varphi_1(\mu_1)$ er σ-endeligt, så er også μ_1 σ-endeligt.

3^o Vis, at hvis $\varphi_1(\mu_1)$ og $\varphi_2(\mu_2)$ begge er σ-endelige, så er

$$\varphi_1 \times \varphi_2(\mu_1 \otimes \mu_2) = \varphi_1(\mu_1) \otimes \varphi_2(\mu_2).$$

6.12. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ og $(Y,\mathbb{F},\nu)$ være målrum, og antag, at funktionen $x \rightsquigarrow \nu(G_x)$, $x \in X$, er $\mathbb{E}$-målelig for enhver mængde $G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$.
Gør rede for, at den ved

$$\pi(G) = \int_X \nu(G_x)\,d\mu(x), \quad G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F},$$

definerede funktion π er et mål, og at

$$\pi(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \quad \text{for alle } A \in \mathbb{E},\ B \in \mathbb{F}.$$

6.13. Lad $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow [0,\infty]$ være målet i $\mathbb{R}$ givet ved

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{når } A \text{ er endelig eller numerabel} \\ \infty & \text{ellers} \end{cases}$$

og lad $\nu: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow [0,\infty]$ være tællemålet i $\mathbb{R}$.

1^o Gør rede for, at der ved

$$\pi(E) = \int \nu(E_x)\,d\mu(x), \quad \rho(E) = \int \mu(E^y)\,d\nu(y)$$

defineres mål π og ρ på $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$, hvor

$$\forall A,B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}): \pi(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) = \rho(A \times B).$$

(Vink. Benyt øvelse 6.12.)

2^o Vis, at $\pi \neq \rho$. Sammenhold med Corollaret i §6.2.
(Vink. Betragt f.eks. diagonalen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.)

6.14. $\int_a^b f(x)dx$ som areal.
Lad $f: \mathbb{R}^k \rightsquigarrow [0,\infty]$ være en Borel funktion.

1^o Vis, at ordinatmængden

$$0_f = \{(x,y) = (x_1,\cdots,x_k,y) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

er en Borel mængde i $\mathbb{R}^{k+1}$.

2^o Vis, at

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x)dx = m_{k+1}(0_f) = \int_0^\infty m_k(f^{-1}([y,\infty[))dy .$$

(Lebesgue integralet af funktioner på $\mathbb{R}^k$ kunne således være defineret ud fra Lebesgue målet i $\mathbb{R}^{k+1}$. Specielt er "begynder"-definitionen af $\int_a^b f(x)dx$ som et areal faktisk korrekt!)

6.15. Vis, at grafen

$$G_f = \{(x,y) = (x_1,\dots,x_k,y) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid y = f(x)\}$$

for en Borel funktion $f: \mathbb{R}^k \curvearrowright \mathbb{R}$ er en Borel mængde i $\mathbb{R}^{k+1}$ med Lebesgue mål $m_{k+1}(G_f) = 0$.

6.16. Lad μ,ν og π være tællemålene i $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ og $X \times Y$. Gør rede for, at

$$\int_{X\times Y} fd\pi = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)$$

for enhver funktion $f: X\times Y \curvearrowright [0,\infty]$.

6.17.1^o Om en funktion $f: X\times Y \curvearrowright \mathbb{R}$ antages

$$\Sigma_{(x,y)\in X\times Y} \mid f(x,y) \mid < \infty .$$

Vis, at

$$\Sigma_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y) = \Sigma_x\Sigma_y f(x,y) = \Sigma_y\Sigma_x f(x,y) .$$

2^o Som 1^o, men med $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$.

6.18. Definer a_{mn} for $m,n \in \mathbb{N}$ ved

$$a_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{når } m = n \\ -1 & \text{når } m = n+1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} .$$

Vis, at $\Sigma_m\Sigma_n a_{mn} \neq \Sigma_n\Sigma_m a_{mn}$. Sammenhold med Tilføjelse til Fubinis sætning, og med øvelse 6.17.

6.19. Sæt $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ og vis, at

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_E(x,y)\,dm(y)\,d\tau(x) \neq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_E(x,y)\,d\tau(x)\,dm(y)$$

når $m: \mathbb{B} \sim [0,\infty]$ er Lebesgue målet og $\tau: \mathbb{B} \sim [0,\infty]$ er restriktion af tællemålet i $\mathbb{R}$.
Sammenhold med Tilføjelse til Tonellis sætning.

6.20. Find

$$\int_E (x-y)^a d(x,y)$$

for ethvert $a \in \mathbb{R}$, idet $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x < 1\}$.

6.21.1° Beregn $\int_{K(0,R)\setminus\{0\}} r^a d(x,y)$ for hvert $a \in \mathbb{R}$, når $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

2° Undersøg, for hvilke $n \in \mathbb{Z}$ funktionen

$$(x,y) \sim (x+iy)^n$$

er Lebesgue integrabel i $K(0,R) \setminus \{0\}$, og find for hvert af disse n værdien af

$$\int_{K(0,R)\setminus\{0\}} (x+iy)^n \, d(x,y) .$$

6.22. Lad $f:]0,1] \times]0,1] \sim \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2} & \text{for } 0 < x < y \leq 1 \\ -x^{-2} & \text{for } 0 < y < x \leq 1 \\ 0 & \text{for } 0 < x = y \leq 1 . \end{cases}$$

1° Find værdien af hvert af dobbeltintegralerne

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dydx , \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dxdy .$$

2° Er f Lebesgue integrabel ?

6.23. Sæt $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ for $(x,y) \neq (0,0)$.
Vis, at $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dydx = \frac{\pi}{4}$, og find $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy$.
(Vink. For $x \neq 0$ kan integralet $\int_0^1 f(x,y)\,dy$ f.eks. udregnes ved substitutionerne $y = xt$ og $t = \tan\frac{u}{2}$.)

6.24. Udfyld detaljerne i følgende bevis for Sætning 2 §5.4:

Lad μ være et translationsinvariant Radon mål på $\mathbb{B}_k$, og sæt $c = \mu([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^k)$. Vis, at der for $f,g \in M^+(\mathbb{R}^k,\mathbb{B}_k)$ gælder

$$\int_{\mathbb{R}^{2k}} g(y)f(x+y)\,d\,\mu\otimes m_k(x,y) = \int f d\mu \int g dm_k$$
$$= \int g(-x)\,d\mu(x) \int f dm_k\,,$$

og sæt $g = 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^k}$, $f = 1_B$, $B \in \mathbb{B}_k$.

6.25. Idet V_k betegner Lebesgue målet af enhedskuglen i $\mathbb{R}^k$, skal man vise

$$V_{k+1} = 2V_k \int_0^{\pi/2} \cos^{k+1}t\,dt\,, \quad k = 1,2,\cdots .$$

6.26. Tegn for $a > 0$ simplexet

$$S_k(a) = \{(x_1,\cdots,x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{i=1}^{k} x_i \leq a,\ x_1 \geq 0,\cdots,x_k \geq 0\}$$

i $k = 1,2,3$ dimensioner. Vis, at

$$m_k(S_k(a)) = \frac{a^k}{k!}\,.$$

(Vink. Induktion efter k).

6.27. For $B \in \mathbb{B}_k$ og $h > 0$ defineres keglen $K \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ frembragt af $B\times\{0\}$ og $(0,\cdots,0,h)$, ved

$$K = \{((1-\lambda)x,\lambda h) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \mid \lambda \in [0,1],\ x \in B\}\,.$$

1^o Vis, at snitmængden $K^y \subseteq \mathbb{R}^k$ for $y \in \mathbb{R}$ er givet ved

$$K^y = \begin{cases} (1-\frac{y}{h})B & \text{for } y \in [0,h] \\ \emptyset & \text{for } y \notin [0,h] \end{cases} .$$

2^o Idet $f: \mathbb{R}^k \times]0,h[\to \mathbb{R}^k$ defineres ved

$$f(x,y) = \left(1-\frac{y}{h}\right)^{-1} x ,$$

skal man vise, at

$$K = B \times \{0\} \cup f^{-1}(B) \cup \{(0,\cdots,0,h)\} ,$$

og slut deraf, at $K \in \mathbb{B}_{k+1}$.

3^o Vis, at

$$m_{k+1}(K) = \frac{1}{k+1} h\, m_k(B) .$$

(Volumen af en kegle er højde gange grundflade divideret med dimensionen).

6.28. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ og $(Y,\mathbb{F},\nu)$ være σ-endelige målrum, og lad $E \in \mathbb{E}$, $F \in \mathbb{F}$. Vis, at

$$\mathbb{E}_E \otimes \mathbb{F}_F = \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}_{E\times F}$$

og

$$\mu_E \otimes \nu_F = \mu \otimes \nu_{E\times F}$$

idet $\mathbb{E}_E$ er den inducerede σ-algebra på E, og μ_E er restriktionen af μ til E, dvs. $\mu_E = \mu|\mathbb{E}_E$.

§7. Funktionsrummene $\mathcal{L}_p$.

7.1. Funktionsrummet $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$.

For et vilkårligt målrum $(X,\mathbb{E},\mu)$ er mængden $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ af μ-integrable funktioner $f: X \curvearrowright \mathbb{C}$ et funktionsvektorrum, idet

$$af,\ f+g \in \mathcal{L}, \quad \text{når} \quad a \in \mathbb{C},\ f,g \in \mathcal{L}.$$

Med $\|f\|_1 = \int|f|d\mu$ gælder (i) $\|f\|_1 \geqq 0$, (ii) $\|af\|_1 = |a|\,\|f\|_1$ og (iii) $\|f+g\|_1 \leqq \|f\|_1 + \|g\|_1$ for $a \in \mathbb{C}$, $f,g \in \mathcal{L}$, medens

$$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \mu\text{-næsten overalt,}$$

ifølge §4.1, Corollar 1. Afbildningen $f \curvearrowright \|f\|_1$ er med andre ord en <u>seminorm</u>. Her kan $\mathbb{C}$ erstattes med $\mathbb{R}$. I begge tilfælde vil det ofte være naturligt at betragte

$$\|f-g\|_1 = \int|f-g|d\mu$$

som en afstand mellem funktionerne f og g tilhørende $\mathcal{L}$. Man bemærker, at

$$\|f-g\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = g \ \mu\text{-næsten overalt,}$$

så $\|f-g\|_1$ er en pseudometrik og kun en metrik, hvis $\emptyset$ er den eneste μ-nulmængde.

En følge af funktioner $f_1,f_2,\dots \in \mathcal{L}$ siges at <u>konvergere</u> mod $f \in \mathcal{L}$ i 1-<u>middel</u>, hvis $\|f_n-f\|_1 \to 0$ for $n \to \infty$.

Dette konvergensbegreb for funktioner er et helt andet end punktvis konvergens, som vi hidtil udelukkende har beskæftiget os med. (Et vist samspil er der dog, se §7.3, Sætning 2 og §7.4, Corollar 1 og 2.)

Med $f_n = \frac{1}{n}\cdot 1_{]0,n]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $n = 1,2,\cdots$, eller $f_n = n \cdot 1_{]0,\frac{1}{n}]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $n = 1,2,\cdots$, konvergerer talfølgen $f_1(x),f_2(x),\cdots$ mod 0 for hvert $x \in \mathbb{R}$, dvs. $f_1,f_2,\cdots$ konvergerer punktvis mod nulfunktionen. Men følgen $f_1,f_2,\cdots$ er ikke konvergent i 1-middel mod nulfunktionen.

Følgen $g_1,g_2,\dots \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ af indikatorfunktioner for intervallerne $]0,1]$, $]0,\frac{1}{2}]$, $]\frac{1}{2},1]$, $]0,\frac{1}{3}]$, $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, $]\frac{2}{3},1]$, $]0,\frac{1}{4}]$, $\cdots\cdot$ konvergerer mod nulfunktionen i 1-middel, men for hvert $x \in]0,1]$ er talfølgen $g_1(x),g_2(x),\cdots$ divergent.

7.2. Vektorrum med seminorm.

Ved en pseudometrik i en mængde V forstås en funktion $d: V \times V \to \mathbb{R}$, hvor

$$d(x,y) \geqq 0, \quad d(x,x) = 0,$$

$$d(x,y) = d(y,x),$$

$$d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z), \quad \text{(trekantsuligheden)},$$

for $x,y,z \in V$.

Bemærk, at der muligvis findes punkter $x \neq y$ med $d(x,y) = 0$. Er dette ikke tilfældet, kaldes d som bekendt en metrik.

For et pseudometrisk rum, dvs. en mængde V med en pseudometrik, defineres kugler, åbne og afsluttede mængder, osv., ganske som for et metrisk rum. En følge $x_1, x_2, \dots \in V$ vil således konvergere mod $x \in V$, netop hvis $d(x,x_n) \to 0$ for $n \to \infty$.

Når $d(x,y) = 0$, "følges" x og y: Af trekantsuligheden fås

$$\forall z \in V: d(x,z) = d(y,z),$$

specielt kommer kugler med centrum x eller y ud på ét, $K(x,r) = K(y,r)$. Dermed vil x og y samtidig være indre punkter, ydre punkter eller randpunkter for en mængde $A \subseteq V$. Er x grænsepunkt for en følge $x_1, x_2, \dots$ vil y også være det.

Ved en seminorm i et vektorrum V over $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$) forstås en funktion $N: V \to \mathbb{R}$, hvor

(i) $N(x) \geqq 0$,

(ii) $N(ax) = |a| N(x)$,

(iii) $N(x+y) \leqq N(x) + N(y)$, (trekantsuligheden),

for $x,y \in V$ og $a \in \mathbb{C}$ (henholdsvis $a \in \mathbb{R}$).

For $N(x)$ skrives sædvanligvis $\|x\|$. (Betegnelsen er først brugt af Erhard Schmidt 1907 for $\| \ \|_2$ i ℓ_2, se §7.3.)

Muligvis findes vektorer $x \neq 0$ med $N(x) = \|x\| = 0$. Er dette ikke tilfældet, er N som bekendt en norm.

I et vektorrum V med seminorm $\|\ \| = N$ indføres en pseudometrik ved definitionen

$$d(x,y) = \|y-x\| = N(y-x), \quad x,y \in V .$$

Vi kan så tale om kugler, åbne og afsluttede mængder, osv. Og foruden om følger også om rækker: En række $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ med led $x_k \in V$ siges at være <u>konvergent</u> i $(V, \|\ \|)$ <u>med sum</u> $s \in V$, hvis følgen er afsnit $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $n = 1,2,\cdots$, er konvergent med grænse s, dvs. hvis

$$d(s_n,s) = \|s-s_n\| = N(s-s_n) \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Bemærk, at $N: V \rightsquigarrow \mathbb{R}$ er kontinuert; endda gælder

$$|N(y) - N(x)| \leqq N(y-x) = d(x,y) .$$

Også kompositionerne er kontinuerte. Således kan man indse, at multiplikationen med skalarer er kontinuert i (a,x), ved brug af

$$N(by-ax) \leqq |b-a|N(y-x) + |b-a|N(x) + |a|N(y-x) ,$$

der fås af identiteten

$$by-ax = (b-a)(y-x) + (b-a)x + a(y-x) .$$

For additionen i V benyttes

$$N((y'+y") - (x'+x")) \leqq N(y'-x') + N(y"-x") .$$

Idet $V_0 = \{x \in V | N(x) = 0\}$ er et underrum af V, defineres ved

$$x \sim y \Leftrightarrow d(x,y) = N(y-x) = 0$$

er ækvivalensrelation i V, der harmonerer med vektorrummets kompositioner. Mængden $\mathrm{V} = V/V_0$ af ækvivalensklasser (sideunderrum)

$$[x] = \{y \in V | N(y-x) = 0\}$$

er da et vektorrum med kompositioner defineret ved repræsentanter,

$$[x] + [y] = [x+y], \quad a[x] = [ax] .$$

Da $N(x) = N(y)$, når $N(y-x) = 0$, defineres en funktion $N: V \rightsquigarrow \mathbb{R}$ ved

$$N([x]) = N(x) .$$

Denne funktion er en norm i V. Vi noterer:

<u>Et vektorrum</u> $\mathcal{V}$ <u>med seminorm går over i et vektorrum</u> V <u>med norm, når elementerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen</u>

$$x \sim y \Leftrightarrow \| y-x \| = 0 .$$

(Jvfr. også Opgave I.1.10.)

EKSEMPEL. For et vilkårligt målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ med $X \neq \emptyset$ defineres en seminorm i funktionsrummet $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ ved

$$\| f \|_1 = \int |f| d\mu , \quad f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu) .$$

Det tilsvarende konvergensbegreb er konvergens i 1-middel. (Se §7.1.)

<u>Funktionsrummet</u> $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ <u>med seminormen</u> $\| \ \|_1$ <u>går over i et vektorrum</u> $L = L(X, \mathbb{E}, \mu)$ <u>med norm</u> (som vi også skriver $\| \ \|_1$), <u>når funktionerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen</u> $\sim$ <u>givet ved</u>

$$f \sim g \Leftrightarrow \| g-f \|_1 = 0 ,$$

<u>dvs</u>.

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \underline{\text{næsten overalt m.h.t.}} \ \mu$$

Overgangen fra funktionsrummet $\mathcal{L}$ til Lebesgue rummet L består løst sagt i, at vi ophører at skelne mellem funktioner f og g, eller regner dem for lige gode, når $f = g$ næsten overalt m.h.t. μ. Præcist: de opfattes som repræsentanter for en og samme ting (nemlig for samme klasse).

En funktion defineret på et funktionsrum, eller eventuelt blot på et vektorrum, kaldes ofte en <u>funktional</u>. I nogle fremstillinger af integralteorien lægges der megen vægt på, at man skal opfatte integralet m.h.t. μ som funktionalen

$$f \rightsquigarrow \int_X f d\mu , \quad f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu) .$$

Denne funktional er lineær, og den er kontinuert, idet

$$\left|\int_X g\,d\mu - \int_X f\,d\mu\right| = \left|\int_X (g-f)\,d\mu\right| \leqq \int_X |g-f|\,d\mu = \|g-f\|_1 .$$

Specielt er $\int_X g\,d\mu = \int_X f\,d\mu$, når $\|g-f\|_1 = 0$. Integralet m.h.t. μ giver derfor anledning til en kontinuert, lineær funktional $[f] \rightsquigarrow \int_X f\,d\mu$ på $L(X,\mathbb{E},\mu)$, og man ser, at dens norm er ≤ 1, jvfr. I.4.3. (Se også Opg.7.21.)

7.3. <u>Funktionsrummene</u> $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$, $1 \leqq p < \infty$.

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$, medens p er et reelt tal, $1 \leqq p < \infty$.

En reel (eller kompleks) funktion f defineret på X siges at være p-<u>dobbelt</u> <u>integrabel</u> med hensyn til μ, hvis f er $\mathbb{E}$-målelig og

$$\int |f|^p d\mu < \infty .$$

Mængden af p-dobbelt integrable funktioner $f: X \rightsquigarrow \mathbb{R}$ (eller $f: X \rightsquigarrow \mathbb{C}$) betegnes $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\mu) = \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$.

Bemærk, at $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(X,\mathbb{E},\mu)$ netop er mængden $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ af μ-integrable funktioner på X. - I stedet for 2-dobbelt integrabel siges også <u>kvadratisk</u> <u>integrabel</u>.

<u>Mængden</u> $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>er et funktionsvektorrum over</u> $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$).

Thi er a en skalar og $f,g \in \mathcal{L}_p$, da er $af \in \mathcal{L}_p$ og $f+g \in \mathcal{L}_p$. Funktionerne af og $f+g$ er jo $\mathbb{E}$-målelige og

$$\int |af|^p d\mu = |a|^p \int |f|^p d\mu ,$$

$$\int |f+g|^p d\mu \leqq \int (|f|+|g|)^p d\mu \leqq 2^p \int |f|^p d\mu + 2^p \int |g|^p d\mu .$$

Den sidste ulighed følger af, at der for $b,c \in [0,\infty[$ gælder

$$(b+c)^p \leqq 2^p (b \vee c)^p = 2^p (b^p \vee c^p) \leqq 2^p (b^p + c^p) ,$$

med $b \vee c = \max\{b,c\}$.

BEMÆRKNING. Ovenstående gælder uden videre for ethvert $p > 0$, jvfr. Opg.7.5, men for det følgende er det væsentligt, at <u>$p \geq 1$</u>.

Vi skal se, at der ved

$$\| f \|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \qquad f \in \mathscr{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$$

defineres en seminorm $\| \ \|_p$ i $\mathscr{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Problemet ligger i trekantsuligheden. For $p = 1$ er også den triviel, således at kun tilfældet $1 < p < \infty$ står tilbage. Her benytter vi

HÖLDERS ULIGHED. <u>Når</u> $f \in \mathscr{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ <u>og</u> $g \in \mathscr{L}_q(X, \mathbb{E}, \mu)$, <u>hvor</u> $p, q > 1$ <u>og</u> $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, <u>da er</u> $fg \in \mathscr{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ <u>og</u>

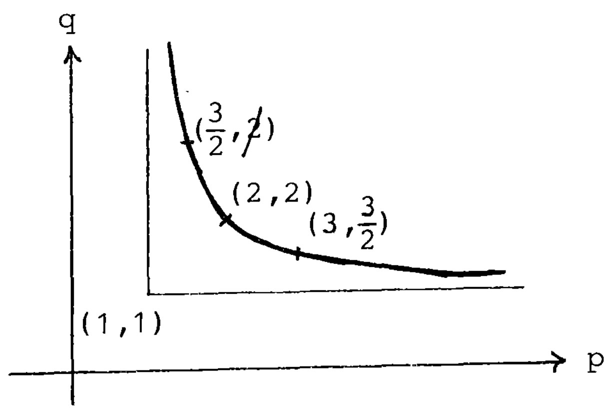
$$\| fg \|_1 = \int |fg| d\mu \leqq \| f \|_p \| g \|_q .$$

Bemærk, at $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ er ensbetydende med

$$\text{dels } (p-1)(q-1) = 1, \qquad \text{dels } (p-1)q = p .$$

Talpar $(p,q) \in]1, \infty[^2$ opfyldende $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ kaldes <u>duale eksponenter</u>. De duale eksponenter ligger på hyperbelgrenen

$$(p-1)(q-1) = 1, \ p,q > 1:$$

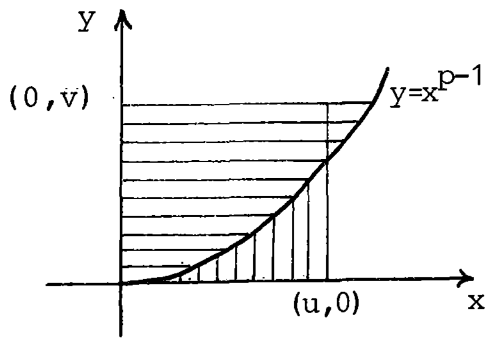


/3

Under forudsætningen $p, q >$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, viser vi først

$$(*) \qquad uv \leqq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \quad \text{for} \quad u, v \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} .$$

(For $p = q = 2$ er uligheden den velkendte $2uv \leqq u^2 + v^2$.)



Arealet af de to med skravering angivne punktmængder i $\mathbb{R}^2$ er

$$\int_0^u x^{p-1}dx = \frac{u^p}{p}, \quad \int_0^v y^{q-1}dy = \frac{v^q}{q}.$$

I sidste tilfælde er brugt

$$y = x^{p-1} \Leftrightarrow x = y^{q-1}.$$

Uligheden (*) fås nu straks, idet uv tolkes som arealet af et rektangel.

Ved beviset for Hölders ulighed kan vi antage $\|f\|_p \neq 0$ og $\|g\|_q \neq 0$, thi ellers er $fg = 0$ næsten overalt, altså $\|fg\|_1 = 0$. Vi kan så yderligere antage $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, idet f,g ellers erstattes med $f/\|f\|_p$, $g/\|g\|_q$. Ifølge (*) er nu

$$|f(x)||g(x)| \leqq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$

for alle $x \in X$, og dermed

$$\int |fg|d\mu \leqq \frac{1}{p}\int |f|^p d\mu + \frac{1}{q}\int |g|^q d\mu$$

$$= \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q < \infty.$$

Heraf fremgår påstandene i Hölders ulighed. (Ved beviset er stiltiende benyttet, at fg er $\mathbb{E}$-målelig.) □

MINKOWSKIS ULIGHED. <u>Når</u> $f,g \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$, <u>hvor</u> $1 \leqq p < \infty$, <u>da er</u> $f+g \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>og</u>

$$\|f+g\|_p \leqq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Vi ved allerede (p.7.5), at $f+g \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$, således at det kun er selve uligheden, vi skal vise. Vi kan antage $p > 1$ og lader q være givet ved $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Vi begynder med vurderingen

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p d\mu = \int |f+g||f+g|^{p-1}d\mu$$

$$\leqq \int |f||f+g|^{p-1}d\mu + \int |g||f+g|^{p-1}d\mu.$$

Funktionen $|f+g|^{p-1}$ er $\mathbb{E}$-målelig, og

$$\int |f+g|^{(p-1)q} d\mu = \int |f+g|^p d\mu < \infty ,$$

idet $f+g \in \mathcal{L}_p$. Altså er $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}_q$ med

$$\| \, |f+g|^{p-1} \|_q = \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{1/q} = \| f+g \|_p^{p/q} = \| f+g \|_p^{p-1} .$$

Hölders ulighed giver så

$$\int |f| \, |f+g|^{p-1} d\mu \leqq \| f \|_p \, \| f+g \|_p^{p-1} ,$$

$$\int |g| \, |f+g|^{p-1} d\mu \leqq \| g \|_p \, \| f+g \|_p^{p-1} .$$

Sammenholdt har vi

$$\| f+g \|_p^p \leqq (\| f \|_p + \| g \|_p) \, \| f+g \|_p^{p-1} ,$$

hvoraf Minkowskis ulighed fås ved multiplikation af venstre og højre side med $\| f+g \|_p^{1-p}$, forudsat $\| f+g \|_p > 0$. I modsat fald er uligheden triviel. □

SÆTNING 1. Ved

$$\| f \|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} , \quad f \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu) ,$$

<u>defineres en seminorm i funktionsrummet</u> $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$, <u>når</u> $1 \leqq p < \infty$.

Det eneste problem var trekantsuligheden, dvs. Minkowskis ulighed.

Det til seminormen $\| \; \|_p$ svarende konvergensbegreb kaldes <u>konvergens i</u> p-<u>middel</u> (for $p = 2$ også <u>konvergens i kvadratisk middel</u>). En følge $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ konvergerer således mod $f \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ i p-middel, netop hvis

$$\| f_n - f \|_p \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty ,$$

dvs. hvis

$$\int |f_n - f|^p d\mu \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Dette konvergensbegreb er et helt andet end punktvis konvergens (jvfr. §7.1). Der gælder dog

SÆTNING 2. <u>Lad</u> $f_n \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$, $n=1,2,\cdots$, <u>og lad</u> f <u>være en målelig funktion så</u> $\lim_n f_n(x) = f(x)$ <u>for</u> μ-<u>næsten alle</u> $x \in X$. <u>Hvis der findes</u> $g \in M^+(X,\mathbb{E})$ <u>med</u> $\int g^p d\mu < \infty$, – (<u>vi regner</u> $\infty^p = \infty$) – , <u>således at</u> $|f_n| \leq g$ μ-n.o. <u>for ethvert</u> $n \in \mathbb{N}$, <u>da er</u> $f \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>og</u>

$$\| f_n - f \|_p \to 0 \quad n \to \infty .$$

<u>Bevis</u>. Idet $|f| \leq g$ μ-n.o. ser man, at $\int |f|^p d\mu \leq \int g^p d\mu < \infty$ så $f \in \mathcal{L}_p$. Idet $|f_n(x)-f(x)|^p \to 0$ for μ-næsten alle x, og $|f_n - f|^p \leq 2^p g^p$ μ-n.o., giver udvidelsen af Lebesgue's majorantsætning (p.II.4.16)

$$\int |f_n - f|^p d\mu \to \int 0 d\mu = 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty . \qquad \square$$

For flere resultater om samspil med punktvis konvergens, se §7.4, Corollar 1 og 2.

Seminormen $\| \ \|_p$ er ikke i almindelighed en norm i $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$, idet

$$\| f \|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \mu\text{-næsten overalt.}$$

Men ved at samle funktionerne i $\mathcal{L}_p$ i klasser kan man, ifølge §7.2, føre seminormen over i en norm:

<u>Funktionsrummet</u> $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>med seminormen</u> $\| \ \|_p$ <u>går over i et vektorrum</u> $L_p = L_p(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>med norm</u> (som vi også skriver $\| \ \|_p$), <u>når funktionerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen</u>

$$f \sim g \Leftrightarrow \| g - f \|_p = 0 ,$$

<u>dvs.</u>

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \underline{\text{næsten overalt m.h.t.}}\ \mu .$$

Hermed er <u>Lebesgue rummene</u> $L_p = L_p(X,\mathbb{E},\mu)$ indført for $1 \leq p < \infty$. Bemærk, at $L_1(X,\mathbb{E},\mu) = L(X,\mathbb{E},\mu)$.

<u>Hvis</u> $\mu(X) < \infty$, <u>så er</u> $\mathcal{L}_r(X,\mathbb{E},\mu) \supseteq \mathcal{L}_s(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>for</u> $1 \leq r < s$. <u>Hvis</u> $\mu(X) = 1$, <u>gælder tillige</u> $\| f \|_r \leq \| f \|_s$, <u>når</u> $f \in \mathcal{L}_s(X,\mathbb{E},\mu)$.

Antag nemlig $\mu(X) < \infty$ og $f \in \mathcal{L}_s$. Anvendelse af Hölders ulighed på $|f|^r \in \mathcal{L}_{s/r}$ og den konstante funktion $1 \in \mathcal{L}_{s/(s-r)}$ giver da $|f|^r \in \mathcal{L}$, altså $f \in \mathcal{L}_r$, samt

$$\int |f|^r \cdot 1 \, d\mu \leqq \left(\int |f|^{r\cdot s/r} d\mu\right)^{r/s} \left(\int 1 \, d\mu\right)^{(s-r)/s}$$

dvs.

$$\| f \|_r \leqq \| f \|_s \, \mu(X)^{1/r-1/s} .$$

I tilfældet $\mu(X) = \infty$ gælder ikke i almindelighed resultater af lignende karakter. For Lebesgue målet på $\mathbb{R}$ er det således let at give eksempler på funktioner tilhørende henholdsvis $\mathcal{L}_r \smallsetminus \mathcal{L}_s$, $\mathcal{L}_r \cap \mathcal{L}_s$ og $\mathcal{L}_s \smallsetminus \mathcal{L}_r$.

Er $f \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ og $g \in \mathcal{L}_p(Y,\mathbb{F},\nu)$, hvor $1 \leqq p < \infty$, medens $\mu: \mathbb{E} \rightsquigarrow [0,\infty]$ og $\nu: \mathbb{F} \rightsquigarrow [0,\infty]$ er σ-endelige mål i mængder $X \neq \emptyset$ og $Y \neq \emptyset$, da er $f \otimes g \in \mathcal{L}_p(X\times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}, \mu\otimes\nu)$ med

$$\| f \otimes g \|_p = \| f \|_p \, \| g \|_p .$$

Thi $f \otimes g$ er $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$-målelig (§6.1), og ifølge Tonellis sætning er

$$\int_{X\times Y} |f\otimes g|^p d(\mu\otimes\nu) = \int_X \int_Y |f(x)|^p |g(y)|^p d\nu(y) \, d\mu(x)$$
$$= \int_X |f(x)|^p \, \| g \|_p^p \, d\mu(x) = \| f \|_p^p \, \| g \|_p^p < \infty .$$

For $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k, m_k)$ og $L_p(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k, m_k)$ skriver vi kort $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$, $L_p(\mathbb{R}^k)$. Ligeledes skrives $\mathcal{L}_p(A)$, $L_p(A)$ for $\mathcal{L}_p(A,m_k)$, $L_p(A,m_k)$, hvor A er en Borel mængde i $\mathbb{R}^k$.

Betegnelsen $\ell_p(J)$ bruges for $\mathcal{L}_p(J,\mu)$, når μ er tællemålet i $J \neq \emptyset$. Er en funktion på J skrevet som en familie $(a_j)_{j\in J}$ af reelle (eller komplekse) tal, har vi

$$(a_j)_{j\in J} \in \ell_p(J) \Leftrightarrow \sum_{j\in J} |a_j|^p < \infty ,$$

og i bekræftende fald

$$\| (a_j)_{j\in J} \|_p = \left(\sum_{j\in J} |a_j|^p \right)^{1/p} .$$

Her er $\| \ \|_p$ en norm (og ikke blot en seminorm).

For $\ell_p(\mathbb{N})$ skrives også ℓ_p. Altså

$$\ell_p = \{(a_1,a_2,\cdots) \mid \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty\} ,$$

$$\| (a_1,a_2,\cdots) \|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{1/p} \quad \text{når} \quad (a_1,a_2,\cdots) \in \ell_p .$$

Bemærk, at $\ell_p(\{1,\cdots,k\})$ netop er $\mathbb{R}^k$ (eller $\mathbb{C}^k$), med

$$\| (x_1,\cdots,x_k) \|_p = \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p \right)^{1/p} .$$

Som specialtilfælde af Hölders og Minkowskis uligheder har vi her

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j y_j| \leqq \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^q \right)^{1/q}$$

når $x_j, y_j \in \mathbb{C}$, $1 < p,q < \infty$ og $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, henholdsvis

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^p \right)^{1/p}$$

når $x_j, y_j \in \mathbb{C}$ og $1 \leqq p < \infty$. Det er disse uligheder, der skyldes henholdsvis Otto Hölder (1889) og Hermann Minkowski (1896).

Ligesom $\| \ \|_p$ i $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{C}^k$ er en generalisering ud fra det klassiske tilfælde $p = 2$, således er rummene ℓ_p og $\mathcal{L}_p([a,b])$ først indført og studeret for $p = 2$. (David Hilbert, Erhard Schmidt, Frédéric Riesz, Ernst Fischer, 1906-1908.) Tilfældet $p = 2$ er også langt det mest interessante, idet $L_2(X,\mathbb{E},\mu)$ er et <u>Hilbert rum</u>, dvs. et fuldstændigt vektorrum med skalarprodukt, som i dette tilfælde er givet ved

$$\langle [f],[g] \rangle = \int f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x) .$$

For vilkårligt p, $1 < p < \infty$, er $\mathcal{L}_p([a,b])$ indført af den ungarske matematiker Frédéric Riesz (Mathematische Annalen 69 (1910), p.449 ff.).

7.4. Fuldstændighedssætningen.

Begreberne Cauchy følge og fuldstændighed defineres i et pseudometrisk rum på nøjagtig samme måde som i et metrisk rum.

I et vektorrum V med seminorm $\|\ \|$ kaldes en uendelig række $\sum_1^\infty x_k$, $x_k \in V$, $k = 1,2,\cdots$, absolut konvergent, såfremt rækken af positive tal $\sum_1^\infty \|x_k\|$ er konvergent, altså såfremt $\sum_1^\infty \|x_k\| < \infty$.

Fra Mat 1 vides, at for rækker med komplekse led, vil absolut konvergens medføre konvergens. Dette skyldes fuldstændigheden af $\mathbb{C}$, og mere generelt gælder følgende fundamentale resultat:

SÆTNING 1. Et vektorrum V med seminorm er fuldstændigt, hvis og kun hvis "absolut konvergens medfører konvergens", altså hvis og kun hvis enhver række $\sum_1^\infty x_k$ med led fra V, hvor $\sum_1^\infty \|x_k\| < \infty$, er konvergent i V.

Bevis. 1° Antag først, at V er fuldstændigt, og at rækken Σx_k er absolut konvergent. Sættes $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$, har man

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|,$$

og da $\sum_{k=n+1}^\infty \|x_k\| \to 0$ for $n \to \infty$ følger, at (s_n) er en Cauchy følge, altså konvergent. Dermed er $\sum_1^\infty x_k$ konvergent.

2° Antag dernæst betingelsen opfyldt. Er (x_n) en Cauchy følge i V, kan vi tænke os $n_1 < n_2 < \cdots$ valgt, således at

$$\sum_{k=1}^\infty \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty .$$

(F.eks. kan man sætte $n_k = k + \max(m_1,\cdots,m_k)$, hvor $m_1, m_2, \cdots$ er valgt, så $\|x_n - x_m\| < 2^{-k}$ for $n,m \geq m_k$). Rækken

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^\infty (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

er altså absolut konvergent, og dermed konvergent, så der findes $x \in V$, så afsnitsfølgen $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots$ konvergerer mod x. Men så vil også (x_n) konvergere mod x, hvilket ses af uligheden

$$\| x - x_n \| \leq \| x - x_{n_k} \| + \| x_{n_k} - x_n \| ,$$

jvfr. Opg.I.5.1. □

Spørgsmålet om fuldstændighed af et vektorrum med seminorm, kan føres tilbage til det tilsvarende spørgsmål for normerede rum, idet der gælder:

SÆTNING 2. Lad $\mathcal{V}$ være et vektorrum med seminorm, V det tilsvarende normerede rum af ækvivalensklasser ved relationen $x \sim y \Leftrightarrow \|x-y\| = 0$. Så er $\mathcal{V}$ fuldstændigt, hvis og kun hvis V er fuldstændigt, altså et Banach rum.

Bevis. Idet der for $x, y \in \mathcal{V}$ gælder

$$\|x-y\| = \| [x]-[y] \| = \| [x-y] \| ,$$

så følger, at (x_n) er konvergent (henholdsvis en Cauchy følge) i $\mathcal{V}$, hvis og kun hvis $([x_n])$ er konvergent (henholdsvis en Cauchy følge) i V. □

Med $\| f \|_p = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{1/p}$, hvor $1 \leq p < \infty$, er det ofte langt mere hensigtsmæssigt med Lebesgue rummet $L_p([a,b])$ i stedet for f.eks. rummet $C([a,b])$ af kontinuerte funktioner, der ikke er fuldstændigt ved $\| \; \|_p$, (jvfr. Opg.7.18). Forholdet er som mellem $\mathbb{R}$ og $\mathbb{Q}$.

For et vilkårligt målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$, med $X \neq \emptyset$, og $1 \leq p < \infty$ gælder nemlig følgende hovedsætning:

Fischers fuldstændighedssætning. Med

$$\| f \|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu) ,$$

er funktionsrummet $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ fuldstændigt.

Anderledes sagt: Lebesgue rummet $L_p = L_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et Banach rum.

For $\mathcal{L}_2([a,b])$ skyldes sætningen den østrigske matematiker Ernst Fischer (1875-1959). (Sur la convergence en moyenne, Comptes Rendus 144, Paris 1907, p.1023. Han udnyttede straks resultatet til et elegant bevis (ibid.p.1024) for Riesz/Fischers sætning om Fourier rækker, - en af Lebesgue integralets største triumfer.)

Bevis. Vi benytter sætningen p. 7.12, betragter altså en række $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ med led $g_k \in \mathcal{L}_p$, hvor $\sum_{k=1}^{\infty} \| g_k \|_p < \infty$, og søger en funktion $f \in \mathcal{L}_p$, således at

$$\| f - \sum_{k=1}^{n} g_k \|_p \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Eftersøgningen viser sig at lykkes derved, at rækken $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ er punktvis konvergent næsten overalt, med en sumfunktion, der kan bruges:

1° Med

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| , \quad x \in X ,$$

vil $h: X \rightsquigarrow [0,\infty]$ tilhøre $M^+(X,\mathbb{E})$. Og rækken $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ er (absolut) konvergent i hvert punkt $x \in X$, hvor $h(x) < \infty$.

2° For $n \to \infty$ har vi $\sum_{k=1}^{n} |g_k(x)| \nearrow h(x)$ for alle $x \in X$ og dermed

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |g_k(x)| \right)^p \nearrow (h(x))^p ,$$

idet vi regner $\infty^p = \infty$. Lebesgues monotonisætning giver da

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} |g_k| \right)^p d\mu \nearrow \int h^p d\mu ,$$

altså

$$\| \sum_{k=1}^{n} |g_k| \|_p \nearrow \left(\int h^p d\mu \right)^{1/p} .$$

Idet $\| \sum_{k=1}^{n} |g_k| \|_p \leqq \sum_{k=1}^{n} \| g_k \|_p$ for alle $n \in \mathbb{N}$, finder vi som resultat:

$$\left(\int h^p d\mu \right)^{1/p} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \| g_k \|_p < \infty .$$

3° Da $\int h^p d\mu < \infty$, slutter vi (§4.1, Corollar 1), at

$$N = \{x \mid h(x) = \infty\} = \{x \mid (h(x))^p = \infty\} \in \mathbb{E}$$

har mål $\mu(N) = 0$. Rækken $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ er altså absolut konvergent for μ-næsten alle $x \in X$, og dermed kan vi definere $f: X \to \mathbb{C}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) & \text{for } x \in X \setminus N, \\ 0 & \text{for } x \in N. \end{cases}$$

4° $f \in \mathcal{L}_p$ og $\| f \|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \| g_k \|_p$.

At f er målelig følger af "Tuborg-resultatet" p.II.2.8 og sætningen om regning og grænseovergang med målelige funktioner. Videre har vi $|f(x)| \leq h(x)$, $x \in X$, hvoraf

$$\left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int h^p d\mu\right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \| g_k \|_p < \infty .$$

5° $\| f - \sum_{k=1}^{n} g_k \|_p \to 0$ for $n \to \infty$.

Dette følger umiddelbart af Sætning 2 p.7.9, idet $\sum_{1}^{n} g_k \to f$ μ-n.o., og h er en majorant af den ønskede type. □

Lad os notere:

<u>En række</u> $\sum_1^\infty g_k$ <u>med led fra</u> $\mathcal{L}_p$, <u>så</u> $\sum_1^\infty \|g_k\|_p < \infty$, <u>konvergerer punktvis absolut næsten overalt og i</u> p-<u>middel mod en funktion</u> $f \in \mathcal{L}_p$, <u>som opfylder</u>

$$\|f\|_p \leq \sum_1^\infty \|g_k\|_p .$$

BEMÆRKNING. Den sidste ulighed kan lidt farligt skrives

$$\|\sum_1^\infty g_k\|_p \leq \sum_1^\infty \|g_k\|_p ,$$

og fremtræder derved som en generalisation af Minkowskis ulighed.

COROLLAR 1. <u>En følge</u> $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, <u>der konvergerer i</u> p-<u>middel mod</u> $g \in \mathcal{L}_p$, <u>har altid en delfølge, der konvergerer punktvis mod</u> g <u>næsten overalt</u>.

Thi vælges $n_1 < n_2 < \cdots$, således at

$$\sum_{k=1}^\infty \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \infty$$

(jvfr. 2°,p.7.12), da vil følgen $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots$, - som afsnitsfølge for rækken $f_{n_1} + \sum_{k=1}^\infty (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$, - konvergere både næsten overalt og i p-middel mod en funktion $f \in \mathcal{L}_p$. Da også $f_{n_k} \to g$ i $\mathcal{L}_p$, sluttes at $\|g-f\|_p = 0$, altså $f = g$ næsten overalt.

COROLLAR 2. <u>Hvis en følge</u> $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ <u>konvergerer i</u> p-<u>middel mod</u> $g_1 \in \mathcal{L}_p$ <u>og punktvis mod</u> g_2 <u>næsten overalt, da er</u> $g_1 = g_2$ <u>næsten overalt</u>.

Thi en passende delfølge konvergerer næsten overalt mod g_1, foruden naturligvis tillige mod g_2.

7.5. Funktionsrummet $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$.

Betragtet med den uniforme norm,

$$\|f\|_u = \sup_{x\in X}|f(x)|$$

er funktionsrummet $\mathcal{B}(X)$ af begrænsede funktioner $f\colon X \curvearrowright \mathbb{R}$ (eller $f\colon X \curvearrowright \mathbb{C}$) på en mængde $X \neq \emptyset$ fuldstændigt, altså et Banach rum. (Jvfr. §I.5.2). Ifølge §§II.2.2 og II.2.3 er mængden $M_b(X,\mathbb{E})$ af begrænsede $\mathbb{E}$-målelige funktioner, et afsluttet underrum af $\mathcal{B}(X)$, altså også et Banach rum. Vi vil nu definere rummet $\mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$, der vil komme til at omfatte $M_b(X,\mathbb{E})$.

Et tal $a \in [0,\infty]$ siges at være et μ-essentielt overtal for funktionen $f\colon X \curvearrowright [0,\infty]$, hvis

$$f(x) \leqq a \quad \text{for } \mu\text{-næsten alle } x \in X .$$

Enhver funktion $f\colon X \curvearrowright [0,\infty]$ har et mindste essentielt overtal $M \in [0,\infty]$. Det kaldes det μ-essentielle supremum for f og betegnes ess. sup f .

Thi f har i hvert fald et essentielt overtal, nemlig ∞, og

$$M = \inf\{a \in [0,\infty] \mid f(x) \leqq a \quad \text{for } \mu\text{-næsten alle } x \in X\}$$

er selv et essentielt overtal for f, - og dermed det mindste. For hvert $k \in \mathbb{N}$ findes jo en mængde $N_k \in \mathbb{E}$ med $\mu(N_k) = 0$, således at

$$f(x) \leqq M + \frac{1}{k} \quad \text{for } x \notin N_k ,$$

men så er

$$f(x) \leqq M \quad \text{for } x \notin \cup_k N_k ,$$

hvor $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k) = 0$.

En funktion f defineret på X, med værdier i $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$, siges at være μ-essentielt begrænset, hvis der findes et $a \in [0,\infty[$, således at

$$|f(x)| \leqq a \quad \text{for } \mu\text{-næsten alle } x \in X ,$$

dvs. hvis ess. sup$|f| < \infty$.

Med $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ betegnes mængden af μ-essentielt begrænsede, $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f: X \curvearrowright \mathbb{R}$ eller $f: X \curvearrowright \mathbb{C}$. Man verificerer umiddelbart, at $\mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ er et funktionsvektorrum, og at der ved

$$\|f\|_\infty = \text{ess. sup}|f|, \quad f \in \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$$

defineres en seminorm $\|\ \|_\infty$ i $\mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$. Bemærk, at $M_b(X,\mathbb{E}) \subseteq \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$, og for $f \in M_b(X,\mathbb{E})$ gælder $\|f\|_\infty \leqq \|f\|_u$, men i almindelighed gælder der ikke lighedstegn.

Det til $\|\ \|_\infty$ svarende konvergensbegreb er uniform konvergens næsten overalt: Med $f_1, f_2, \cdots$ og f tilhørende $\mathcal{L}_\infty$ vil

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

hvis og kun hvis der findes en mængde $N \in \mathbb{E}$ med $\mu(N) = 0$, således at $f_n(x) \to f(x)$ uniformt for $x \in X \setminus N$.

Thi for hvert $n \in \mathbb{N}$ findes en mængde $N_n \in \mathbb{E}$ med $\mu(N_n) = 0$, således at uligheden

$$|f_n(x) - f(x)| \leqq \|f_n - f\|_\infty$$

er opfyldt for alle $x \notin N_n$. Med $N = \cup_n N_n$ vil der så være uniform konvergens i $X \setminus N$, hvis $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Omvendt: Uniform konvergens i $X \setminus N$ kommer ud på, at

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in X \setminus N\} \to 0 \quad \text{for} \quad n \to 0.$$

Og når $\mu(N) = 0$, er

$$\|f_n - f\|_\infty \leqq \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in X \setminus N\}, \; n = 1,2,\cdots.$$

<u>Med</u> $\|f\|_\infty = \text{ess. sup}|f|$, $f \in \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$, <u>er funktionsrummet</u> $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ <u>fuldstændigt.</u>

Funktionsrummet $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ går altså over i et Banach rum, betegnet $L_\infty = L_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$, når funktionerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen

$$f \sim g \Leftrightarrow \|g - f\|_\infty = 0,$$

dvs.

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \text{næsten overalt m.h.t. } \mu.$$

<u>Bevis</u>. Lad $f_1, f_2, \cdots$ være en Cauchy følge i $\mathcal{L}_\infty$.

For hvert $m,n \in \mathbb{N}$ kan vi tænke os valgt en mængde $N_{mn} \in \mathbb{E}$ med $\mu(N_{mn}) = 0$, således at

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqq \| f_m - f_n \|_\infty \quad \text{for} \quad x \notin N_{mn}.$$

Vi vælger yderligere en mængde $N_1 \in \mathbb{E}$ med $\mu(N_1) = 0$, således at restriktionen $f_1 | X \setminus N_1$ er begrænset, og sætter $N = N_1 \cup \bigcup_{mn} N_{mn}$. Så er $N \in \mathbb{E}$ med $\mu(N) = 0$, og

$$f_1 | X \setminus N, \quad f_2 | X \setminus N, \cdots$$

er en Cauchy følge i $\mathcal{B}(X \setminus N)$, betragtet med den uniforme norm. (Det er klart, at $X \setminus N \neq \emptyset$, medmindre vi er i det trivielle tilfælde $\mu(X) = 0$.) Følgen konvergerer da uniformt mod en funktion i $\mathcal{B}(X \setminus N)$. Med

$$f(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x) & \text{for} \quad x \in X \setminus N \\ 0 & \text{for} \quad x \in N \end{cases}$$

er så $f \in \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $\| f_n - f \|_\infty \to 0$. □

<u>Hölders ulighed</u> (§7.3) gælder også med $p = 1$, $q = \infty$: <u>Når</u> $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ <u>og</u> $g \in \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$, <u>da er</u> $fg \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og

$$\| fg \|_1 = \int |fg| d\mu \leqq \| f \|_1 \| g \|_\infty .$$

Thi $|f(x)g(x)| \leqq |f(x)| \| g \|_\infty$ for μ-næsten alle $x \in X$.

<u>Hvis</u> $\mu(X) < \infty$, <u>så er</u> $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu) \supseteq \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$ <u>for</u> $1 \leqq p < \infty$. <u>Hvis</u> $\mu(X) = 1$, <u>gælder tillige</u> $\| f \|_p \leqq \| f \|_\infty$, <u>når</u> $f \in \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Thi når $f \in \mathcal{L}_\infty$, er $|f(x)|^p \leqq \| f \|_\infty^p$ for μ-næsten alle $x \in X$ og dermed

$$\int |f|^p d\mu \leqq \int \| f \|_\infty^p d\mu = \| f \|_\infty^p \mu(X).$$

På grund af ovenstående kaldes parret $(1, \infty)$ for duale eksponenter.

Idet $\ell_\infty(J)$ står for $\mathcal{L}_\infty(J,\mu)$, hvor μ er tællemålet i $J \neq \emptyset$, har vi $\ell_\infty(J) = \mathcal{B}(J)$ og

$$\| (a_j)_{j\in J} \|_\infty = \| (a_j)_{j\in J} \|_u = \sup_{j\in J} |a_j| .$$

Det følger af, at $\emptyset$ er den eneste mængde med $\mu(\emptyset) = 0$.

Specielt er $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ rummet af begrænsede talfølger.

Til slut et par resultater vedrørende $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^k) = \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k, m_k)$:

En kontinuert funktion $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (eller $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$) tilhører $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^k)$, hvis og kun hvis den er begrænset. I bekræftende fald er

$$\| f \|_\infty = \| f \|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}^k} |f(x)| .$$

Thi er $|f(x_0)| > a$, så er $|f(x)| > a$ for alle x i en omegn af x_0, og dermed $m(\{x \mid |f(x)| > a\}) > 0$. Der er derfor ikke flere essentielle overtal for $|f|$, end der er overtal.

Ved til $f \in C_b(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^k)$ at knytte ækvivalensklassen $[f] \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ defineres en isometrisk (og dermed injektiv) afbildning af $C_b(\mathbb{R}^k)$ ind i $L_\infty(\mathbb{R}^k)$. Der gælder nemlig

$$\| [f] - [g] \|_\infty = \| [f-g] \|_\infty = \| f-g \|_\infty = \| f-g \|_u \quad \text{for} \quad f,g \in C_b(\mathbb{R}^k) .$$

Man tillader sig ofte at skrive $C_b(\mathbb{R}^k) \subset L_\infty(\mathbb{R}^k)$ på grund af indlejringen $f \to [f]$.

7.6. Approksimation i middel.

Sætningerne i denne paragraf er nyttige ved, at de ofte tillader generalisering af resultater, som man er i stand til at vise for simple eller pæne funktioner.

En delmængde A af et pseudometrisk rum (M,d) siges, ganske som i et metrisk rum, at være overalt tæt i M hvis $\overline{A} = M$, dvs. hvis

$$\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \, a \in A: d(x,a) < \varepsilon .$$

I ord betyder det, at ethvert element i M skal kunne approksimeres vilkårligt godt med elementer fra A.

En delmængde A af et vektorrum V med seminorm, siges at være total i V, hvis det af A udspændte underrum $\operatorname{span} A$ er tæt i V. Der kræves altså at ethvert element i V kan approksimeres vilkårligt godt med linearkombinationer af elementer fra A.

Lad os betragte $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ for $1 \le p < \infty$. Mængden af simple $\mathcal{L}_p$-funktioner, altså $\mathcal{L}_p$-funktionerne med kun endelig mange funktionsværdier, er lig med

$$\operatorname{span}\{1_A \mid A \in \mathbb{E},\ \mu(A) < \infty\} .$$

SÆTNING 1. For ethvert målrum $(X,\mathbb{E},\mu)$ og $1 \le p < \infty$ er mængden af simple $\mathcal{L}_p$-funktioner overalt tæt i $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$.

Bevis. Vi viser først at $f \in \mathcal{L}_p$, $f \ge 0$, kan approksimeres vilkårligt godt med simple $\mathcal{L}_p$-funktioner. Der findes en følge $0 \le g_1 \le g_2 \le \cdots$ af simple målelige funktioner, så $g_n \nearrow f$ (II.4.1, Sætning 1). Idet $0 \le g_n \le f$ og $f \in \mathcal{L}_p$, sluttes $g_n \in \mathcal{L}_p$, og $\|f-g_n\|_p \to 0$ (II.7.3, Sætning 2).

En reel funktion $f \in \mathcal{L}_p$ kan spaltes $f = f^+ - f^-$, og $f^+, f^- \in \mathcal{L}_p$ og er ≥ 0. Til givet $\varepsilon > 0$, kan vi ifølge det netop viste, finde positive simple $\mathcal{L}_p$-funktioner g_1 og g_2, så $\|f^+ - g_1\|_p < \varepsilon/2$, $\|f^- - g_2\|_p < \varepsilon/2$. Funktionen $g = g_1 - g_2$ er da en simpel $\mathcal{L}_p$-funktion, og

$$\|f-g\|_p \le \|f^+-g_1\|_p + \|f^--g_2\|_p < \varepsilon .$$

Det komplekse tilfælde reduceres let til det reelle. □

En version af Sætning 1 for $p = \infty$ findes i Opg.7.28.

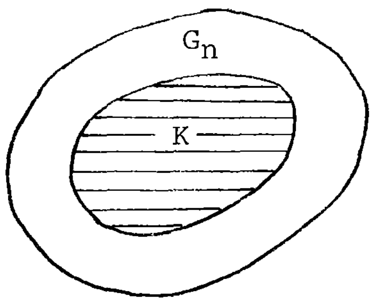
I resten af paragraffen antages at $X = \mathbb{R}^k$, $\mathbb{E} = \mathbb{B}_k$ og μ antages at være et Radon mål, altså et mål på $\mathbb{B}_k$, som er endeligt på begrænsede Borel mængder.

SÆTNING 2. For ethvert Radon mål μ på $\mathbb{R}^k$ og $1 \le p < \infty$, er rummet $C_c(\mathbb{R}^k)$ af kontinuerte funktioner med kompakt støtte, tæt i $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k,\mu)$.

<u>Bevis</u>. Til $B \in \mathbb{B}_k$ med $\mu(B) < \infty$ og $\varepsilon > 0$, kan man ifølge egenskab (ii) i bemærkningen p.II.5.8, finde en kompakt mængde $K \subseteq B$, så $\mu(B \setminus K) = \mu(B) - \mu(K) < \varepsilon$. Dermed er $\| 1_B - 1_K \|_p = \mu(B \setminus K)^{1/p} < \varepsilon^{1/p}$. Dette kombineret med Sætning 1 viser, at $\{1_K \mid K \text{ kompakt i } \mathbb{R}^k\}$ er total i $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k, \mu)$. Lad $K \subseteq \mathbb{R}^k$ være kompakt, og $\varepsilon > 0$. Det er nok at finde $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$, så $\| f - 1_K \|_p < \varepsilon$. Mængderne

$$G_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \mid d(x,K) < \frac{1}{n} \right\}, \qquad n = 1,2,\cdots$$

udgør en dalende følge af åbne mængder (jvfr. Opgave I.3.6) med $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = K$. Idet G_1 er begrænset, vil $\mu(G_n) \searrow \mu(K)$, så der findes $n \in \mathbb{N}$, så $\mu(G_n) < \mu(K) + \varepsilon^p$.



Funktionen (jvfr. Opg.I.3.7)

$$f(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^k \setminus G_n)}{d(x, \mathbb{R}^k \setminus G_n) + d(x,K)}, \qquad x \in \mathbb{R}^k,$$

er kontinuert, og opfylder $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 1$ for $x \in K$,

$$\{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) \neq 0\} = G_n \subseteq \{x \in \mathbb{R}^k \mid d(x,K) \leq \tfrac{1}{n}\},$$

og da højresiden er kompakt, ser man, at f's støtte er kompakt. Under brug af uligheden

$$0 \leq f - 1_K \leq 1_{G_n \setminus K}$$

finder man $\| f - 1_K \|_p \leq \mu(G_n \setminus K)^{1/p} < \varepsilon$. $\square$

ADVARSEL. Sætning 2 kan ikke opretholdes for $p = \infty$, jvfr. Opg.7.22).

Rummet $C_c(\mathbb{R}^k)$ er et normeret rum under 1-normen

$$f \rightsquigarrow \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^k} |f(x)|dm_k(x) ,$$

men det er ikke fuldstændigt. Ved at gå til det større rum $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k, m_k)$ opnår vi et fuldstændigt rum, men rummet er ikke større end at $C_c(\mathbb{R}^k)$ ligger overalt tæt deri. Situationen er altså helt analog til udvidelsen fra $\mathbb{Q}$ til $\mathbb{R}$, jvfr. p.II.i.7.

For at se, at $C_c(\mathbb{R}^k)$ ikke er fuldstændigt, kan vi betragte f.eks. indikatorfunktionen f for enhedskuglen $K(0,1)$. På grund af Sætning 2, findes en følge (f_n) fra $C_c(\mathbb{R}^k)$, så $\|f-f_n\|_1 \to 0$. Dermed er (f_n) en Cauchy følge i $C_c(\mathbb{R}^k)$, og antog vi, at $C_c(\mathbb{R}^k)$ var fuldstændigt, så kunne vi finde $g \in C_c(\mathbb{R}^k)$, så $\|g-f_n\|_1 \to 0$. Vi har da $\|f-g\|_1 = 0$, altså

$$m_k(\{x \in \mathbb{R}^k | f(x) \neq g(x)\}) = 0 .$$

Specielt er

$$\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| < 1, g(x) \neq 1\} \quad \text{og} \quad \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| > 1, g(x) \neq 0\}$$

begge Lebesgue nulmængder, men de er åbne, fordi g er kontinuert. Da $\emptyset$ er den eneste åbne Lebesgue nulmængde, har vi

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad \|x\| < 1 \\ 0 & \text{for} \quad \|x\| > 1 , \end{cases}$$

men det strider mod kontinuiteten af g.

Opgaver til §7.

7.1. Lad V være et vektorrum med seminorm $\| \ \|$ og antag, at rækken $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ med led $g_k \in V$ er konvergent med sum $f \in V$. Vis, at

$$\|f\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\| .$$

7.2. Betragt målrummet $(X, \mathcal{P}(x), \varepsilon_a)$, hvor ε_a er Dirac målet i $a \in X$. Vis, at $\mathcal{L}_p(X, \mathcal{P}(x), \varepsilon_a) = \mathbb{C}^X$ for alle $p \in [1,\infty[$, og at $\|f\|_p = |f(a)|$.
Beskriv det til $\| \ \|_p$ svarende konvergensbegreb. Gør rede for, at det normerede rum $L_p(X)$ er isometrisk isomorft med $\mathbb{C}$ ved afbildningen $[f] \curvearrowright f(a)$.

7.3. Lad $f_1, f_2, \cdots$ og f tilhøre $\mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, hvor $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et målrum. Vis, at

$$f_n \to f \text{ i 1-middel} \Rightarrow \int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu .$$

7.4. Vis, at

$$f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu) \Leftrightarrow |f|^{p-1} f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu) ,$$

når $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et målrum, $p \in]1,\infty[$ og $f: X \curvearrowright \mathbb{C}$.
(Glem ikke at vise, at

$$|f|^{p-1} f \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig} \Rightarrow f \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig} .)$$

7.5. 1° Lad $0 < p < 1$ være fast.
Vis uligheden

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \quad \text{for} \quad a,b \geq 0 .$$

Idet man for $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sætter $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$, skal man finde to talpar $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, så

$$\|x+y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p .$$

2^o For et målrum $(X,\mathbb{E},\mu)$ og $0 < p < 1$, defineres $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ som mængden af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f: X \to \mathbb{C}$ opfyldende

$$\int |f|^p d\mu < \infty .$$

Vis, at $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ er et funktionsvektorrum, og at

$$d_p(f,g) = \int |f-g|^p d\mu$$

er en pseudometrik på $\mathcal{L}_p$.

3^o Angiv funktioner $f,g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R},\mathbb{B},m)$, så

$$\| f+g \|_p > \| f \|_p + \| g \|_p ,$$

idet $\| f \|_p = (\int |f|^p dm)^{1/p}$.

7.6. HÖLDERS ULIGHED FOR POSITIVE FUNKTIONER.

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum, og antag $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p,q > 1$. Vis, at

$$\int fg d\mu \leqq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q d\mu\right)^{1/q}$$

for vilkårlige $f,g \in M^+(X,\mathbb{E})$. - Vi regner $\infty^s = \infty$ for $s \in \mathbb{R}_+$.

7.7. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$, og antag $\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell} = 1$, med $0 < k < 1$, $\ell < 0$. Vis,

$$\int fg d\mu \geqq \left(\int f^k d\mu\right)^{1/k} \left(\int g^\ell d\mu\right)^{1/\ell}$$

for vilkårlige $f,g \in M^+(X,\mathbb{E})$. - Her regnes $\infty^s = \infty$, $\infty^{-s} = 0$ og $0^{-s} = \infty$ for $s > 0$.

Bemærk, at Hölders ulighed er vendt.

(Vink. Antag $\mu(\{x \mid f(x) > 0\}) > 0$, $\mu(\{x \mid g(x) = 0\}) = 0$, samt $\mu(\{x \mid f(x) > 0,\ g(x) = \infty\}) = 0$, og anvend Opgave 7.6 med $p = 1/k$ og $(fg)^k$, g^{-k} i stedet for f,g.)

7.8. MINKOWSKIS ULIGHED FOR POSITIVE FUNKTIONER.

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum, og antag $1 < p < \infty$. Vis, at

$$\left(\int (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leqq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p} ,$$

for vilkårlige $f,g \in M^+(X,\mathbb{E})$. - Vi regner $\infty^s = \infty$ for $s > 0$.

7.9. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$, og antag $0 < k < 1$. Vis, at

$$\left(\int (f+g)^k d\mu\right)^{1/k} \geqq \left(\int f^k d\mu\right)^{1/k} + \left(\int g^k d\mu\right)^{1/k} ,$$

for vilkårlige $f,g \in M^+(X,\mathbb{E})$. - Vi regner $\infty^s = \infty$ for $s > 0$.

Bemærk, at Minkowskis ulighed er vendt.

(Vink. Antag $0 < \int (f+g)^k d\mu < \infty$, og anvend Opgave 7.7.)

7.10. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum, og antag $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, $p,q > 1$, samt $f \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$.

1° Sæt $g = |f|^{p-1}\operatorname{sgn} f$ og vis, at $g \in \mathcal{L}_q(X,\mathbb{E},\mu)$,

$$f = |g|^{q-1}\operatorname{sgn} g , \quad f\bar{g} = |f|^p = |g|^q ,$$

og

$$\int f\bar{g}\,d\mu = \|f\|_p \|g\|_q .$$

2° Vis, at

$$\|f\|_p = \max\left|\int fh\,d\mu\right| ,$$

hvor maksimum tages over alle $h \in \mathcal{L}_q(X,\mathbb{E},\mu)$ med $\|h\|_q \leqq 1$.

3° Vis, at $T_f: L_q(X,\mathbb{E},\mu) \to \mathbb{C}$ givet ved $T_f([h]) = \int fh\,d\mu$ er en kontinuert linearform med $\|T_f\| = \|f\|_p$.

7.11. Antag $k \in \mathcal{L}_p(X\times Y,\mathbb{E}\otimes\mathbb{F},\mu\otimes\nu)$, hvor $\mu: \mathbb{E} \to [0,\infty]$ og $\nu: \mathbb{F} \to [0,\infty]$ er σ-endelige mål i mængder X og Y, medens $p \in]1,\infty[$. Vi forudsætter $\mu(X) > 0$.

1° Vis, at snitfunktionen $y \sim k(x,y)$, $y \in Y$, tilhører $\mathcal{L}_p(Y,\mathbb{F},\nu)$ for μ-næsten alle $x \in X$.

Idet $g \in \mathcal{L}_q(Y,\mathbb{F},\nu)$, hvor $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, sætter vi

$$f(x) = \int_Y k(x,y)g(y)d\nu(y)$$

for hvert $x \in X$, hvor funktionen $y \sim k(x,y)g(y)$, $y \in Y$, er integrabel med hensyn til ν.

2° Begrund, at $f(x)$ er defineret for μ-næsten alle $x \in X$. Vis, at enhver $\mathbb{E}$-målelig udvidelse af f til hele X, tilhører $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$, og opfylder

$$\|f\|_p \leq \|k\|_p \|g\|_q ,$$

(idet udvidelsen stadig kaldes f).

3° Vis, at der ved $[g] \sim [f]$ defineres en kontinuert lineær afbildning $T: L_q(Y) \to L_p(X)$ med $\|T\| \leq \|k\|_p$.

7.12. Vis, at der hverken gælder $\mathcal{L}_r(\mathbb{R}) \subseteqq \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$ eller $\mathcal{L}_s(\mathbb{R}) \subseteqq \mathcal{L}_r(\mathbb{R})$, når $0 < r < s$.

7.13. Antag $J \neq \emptyset$. Vis, at $\ell_r(J) \subseteqq \ell_s(J)$ for $0 < r < s$, samt at $\|x\|_r \geqq \|x\|_s$, når $x = (x_j)_{j\in J} \in \ell_r(J)$. (<u>Vink</u>. Antag $\|x\|_r = 1$.)

7.14. Vis: (a) $\ell \subset \bigcap_{s>1} \ell_s$, (b) $\forall r \in \mathbb{R}_+ : \ell_r \subset \bigcap_{s>r} \ell_s$.

7.15. Antag $f \in \mathcal{L}_q(X,\mathbb{E},\mu) \cap \mathcal{L}_s(X,\mathbb{E},\mu)$, hvor $(X,\mathbb{E},\mu)$ er et målrum og $0 < q < s$.
Vis, at $f \in \mathcal{L}_r(X,\mathbb{E},\mu)$ for ethvert $r \in]q,s[$.

7.16. For hvilke $p > 0$ er $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)$, når

(a)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{for } 0 < x \leqq 1 \\ 0 & \text{for } 1 < x < \infty \end{cases} ?$$

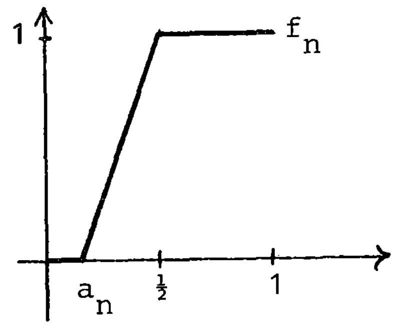
(b)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < x \leqq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{for } 1 < x < \infty \end{cases} ?$$

7.17. Vis, at $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow p = 2$, når

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+|\log x|)}, \quad x \in \mathbb{R}_+ .$$

7.18. Vis, at funktionsrummet $C([0,1])$ af kontinuerte funktioner $f: [0,1] \curvearrowright \mathbb{R}$ med normen $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ ikke er fuldstændigt.

(Vink. Betragt f.eks.



, $n = 2,3,\cdots$, med $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.)

FUNKTIONSRUMMET $\mathcal{L}_\infty$.

7.19. Vis: $\forall p \in \mathbb{R}_+ : \log \in \mathcal{L}_p(]0,1])$, men $\log \notin \mathcal{L}_\infty(]0,1])$,

$\forall p \in \mathbb{R}_+ : \frac{1}{\log} \notin \mathcal{L}_p(]1,\infty[)$, men $\frac{1}{\log} \in \mathcal{L}_\infty(]2,\infty[)$.

7.20. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum, og antag $f \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ for alle $p \in [p_0,\infty[$, hvor $p_0 \in \mathbb{R}_+$. Vis, at

$$\|f\|_p \to \text{ess.sup}\,|f| \quad \text{for} \quad p \to \infty .$$

(Heri ligger én motivering for definitionen af $\mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ og $\|\ \|_\infty$.)
(Vink. Vis, at $\|f\|_p \geqq a\mu(A)^{1/p}$, når $a < \text{ess.sup}|f|$, og $A = \{x \mid |f(x)| > a\}$ Vis desuden, at $\|f\|_p \leqq (\int |f|^{p_0} d\mu)^{1/p}$, når $\text{ess.sup}|f| = 1$.)

7.21.1° Antag $f \in \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$, hvor $(X,\mathbb{E},\mu)$ er et σ-endeligt målrum. Vis, at

$$\|f\|_\infty = \sup\left|\int fh d\mu\right|,$$

hvor supremum tages over alle $h \in L(X,\mathbb{E},\mu)$ med $\|h\|_1 \leqq 1$.

2° Vis, at $[h] \sim \int fh\,d\mu$ er en kontinuert lineær afbildning $T: L(X,\mathbb{E},\mu) \to \mathbb{C}$ med $\|T\| = \|f\|_{\infty}$.

7.22. Vis, at $1 \notin \overline{C_c(\mathbb{R})}$, hvor afslutningen refererer til rummet $\mathcal{L}_{\infty}(\mathbb{R})$. Er $C_b(\mathbb{R})$ afsluttet i $L_{\infty}(\mathbb{R})$?

7.23. Vis, at et delrum U af et separabelt, pseudometrisk rum V igen er separabelt. (Et pseudometrisk rum kaldes separabelt, hvis det har en endelig eller numerabel, tæt delmængde.)
(Vink. Lad følgen $y_1, y_2, \dots$ ligge tæt i V og sæt

$$d_n = \inf_{x \in U} d(y_n, x) .$$

Hvis $d_n > 0$, vælges $x_n \in U$, så $d(y_n, x_n) < 2d_n$, og hvis $d_n = 0$, vælges $x_{n1}, x_{n2}, \dots \in U$, så $d(y_n, x_{nk}) \to 0$ for $k \to \infty$.)

7.24. Vis, at et vektorrum med seminorm, der har en endelig eller numerabel, total delmængde, er separabelt.

7.25.1° Idet $J \neq \emptyset$, vil vi med $k(J)$ betegne mængden af familier $(a_j)_{j \in J}$ med $a_j \in \mathbb{R}$ (eller $a_j \in \mathbb{C}$), hvor $a_j \neq 0$ for højst endelig mange $j \in J$.
Vis, at $k(J)$ er tæt i $\ell_p(J)$ ved $\|\ \|_p$, for ethvert $p \in [1,\infty[$.

2° Vis, at $\ell_p = \ell_p(\mathbb{N})$ er separabelt for ethvert $p \in [1,\infty[$.

7.26.1° Lad V være et pseudometrisk rum og antag, at der findes et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ og en overnumerabel delmængde $A \subseteq V$, således at

$$d(x,y) > \varepsilon, \quad \text{når} \quad x \neq y,\ x,y \in A .$$

Vis, at V ikke er separabelt.

2° Vis, at $\mathcal{L}_{\infty}([0,1])$ og $\mathcal{L}_{\infty}(\mathbb{R}) \cap C^{\infty}(\mathbb{R})$ ikke er separable ved $\|\ \|_{\infty}$.

3^o Vis, at $\ell_p(J)$ ikke er separabelt ved $\| \ \|_p$, når J er overnumerabel og $1 \leqq p \leqq \infty$.
Vis, at $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ ikke er separabelt ved $\| \ \|_\infty$.

7.27. Med k, c_0 og c betegner vi mængden af reelle (eller komplekse) talfølger $x = (x_1, x_2, \cdots)$, hvor henholdsvis

(1) $x_n \neq 0$ for højst endelig mange $n \in \mathbb{N}$,

(2) $x_n \to 0$ for $n \to \infty$,

(3) $x_1, x_2, \cdots$ er konvergent i $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$).

1^o Bestem afslutningen af k, c_0 og c i ℓ_∞ betragtet med $\| \ \|_\infty$.

2^o Hvilke af rummene k, c_0 og c er Banach rum ved $\| \ \|_\infty$?

3^o Hvilke af rummene k, c_0 og c er separable ved $\| \ \|_\infty$?

7.28. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et vilkårligt målrum. Vis, at mængden $\{1_A \mid A \in \mathbb{E}\}$ er total i $\mathcal{L}_\infty(X)$.

INDEKS TIL Mat 2 MA, KAPITLERNE I OG II

Metriske rum og mål- og integralteori .

Udarbejdet af Holger Madsen .

Kapitel III KOMPLEKS FUNKTIONSTEORI

Indledning

I det følgende forudsættes kendskab til de komplekse tal $\mathbb{C}$, svarende til Mat 1 MA. Vi vil uden videre opfatte et tal $x+iy \in \mathbb{C}$ som repræsenterende punktet (x,y) i $\mathbb{R}^2$. En mængde af komplekse tal kan derfor opfattes som en punktmængde i $\mathbb{R}^2$. Vi tænker os altid $\mathbb{C}$ organiseret som metrisk rum ved metrikken $d(z,w) = |z-w|$, hvilket svarer til den euklidiske afstand i $\mathbb{R}^2$, når $\mathbb{C}$ opfattes som $\mathbb{R}^2$. Vi kan formulere dette ved at sige, at afbildningen af $\mathbb{R}^2$ på $\mathbb{C}$ givet ved $(x,y) \rightsquigarrow x+iy$ er en isometri. Det er praktisk, at indføre betegnelsen $K'(a,r)$ for den udprikkede cirkelskive

$$K'(a,r) = K(a,r)\setminus\{a\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |a-z| < r\} .$$

I dette kapitel skal vi betragte funktioner $f: G \to \mathbb{C}$ defineret i en åben delmængde G af $\mathbb{C}$, og studere differentiabilitet helt analogt med differentiabilitet af funktioner $f: I \to \mathbb{R}$, defineret på et åbent interval I. Da man kan regne med komplekse tal, helt som med reelle tal, er det naturligt at undersøge, om differenskvotienten

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, \quad z,z_0 \in G, \quad z \neq z_0,$$

har en grænseværdi for $z \to z_0$. Hvis dette er tilfældet, kaldes f (kompleks) differentiabel i z_0, og grænseværdien betegnes som i det reelle tilfælde $f'(z_0)$. Der viser sig nu det <u>forbløffende</u>, at hvis f er differentiabel i alle punkter $z_0 \in G$, så er f ikke blot kontinuert som i det reelle tilfælde, men f er <u>vilkårligt ofte differentiabel</u>, og fremstilles ved sin Taylorrække

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n ,$$

for alle z i den største cirkelskive $K(z_0,\rho)$ indeholdt i G. Kompleks differentiabilitet er en meget stærk betingelse på grund af, at differenskvotienten skal have en og samme grænseværdi uanset fra hvilken retning, man nærmer sig z_0. Dermed er den retningsafledede af f i z_0 i retningen $e^{i\theta}$ lig med $f'(z_0)e^{i\theta}$. En funktion, der er kompleks differentiabel i alle punkter af en åben mængde, kaldes holomorf i mængden.

Teorien for holomorfe funktioner blev fuldstændigt udviklet i det 19. århundrede, især af Cauchy, Riemann og Weierstrass, og den indeholder en mængde smukke og slående resultater, der ofte afviger væsentligt fra sætninger om tilsvarende begreber i reel analyse.

I studiet af f.eks. kontinuitet, målelighed og integrabilitet har vi set, at disse egenskaber ved en funktion med komplekse værdier suverænt afgøres af de tilsvarende egenskaber ved funktionens real- og imaginærdel.

Det vil være katastrofalt at tro, at dette princip kan overføres til holomorfi. Det viser sig nemlig, at en reel funktion $f: G \to \mathbb{R}$ på et område kun er holomorf, når den er konstant.

Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857)

§1. Holomorfe funktioner.

1.1. Simple egenskaber.

DEFINITION. Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde. En funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ kaldes (kompleks) differentiabel i $z_0 \in G$, såfremt differenskvotienten

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h},$$

har en grænseværdi for $h \to 0$. Denne grænseværdi kaldes differentialkvotienten af f i punktet z_0, og betegnes $f'(z_0)$. Hvis f er (kompleks) differentiabel i alle punkter af G, kaldes f holomorf, og for en sådan funktion kaldes $f'\colon G \to \mathbb{C}$ for differentialkvotienten eller den afledede funktion.

BEMÆRKNINGER. For $z_0 \in G$ findes $r > 0$, så $K(z_0,r) \subseteq G$ og differenskvotienten er i hvert fald defineret for $h \in K'(0,r)$.

Hvis funktionen f skrives $w = f(z)$, benyttes også betegnelserne

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{df}{dz}$$

for differentialkvotienten i $z \in G$.

At f er differentiabel i z_0 med differentialkvotient $f'(z_0) = a$ er ensbetydende med, at der gælder en ligning af formen

$$f(z_0+h) = f(z_0) + ha + h\varepsilon(h) \qquad \text{for } h \in K'(0,r),$$

hvor $r > 0$ er sådan, at $K(z_0,r) \subseteq G$, og $\varepsilon\colon K'(0,r) \to \mathbb{C}$ er en funktion, så

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

(Vi tænker os altid ε udvidet til 0 ved $\varepsilon(0) = 0$). Heraf ses, at når f er differentiabel i z_0, så er f også kontinuert i z_0.

Mængden af holomorfe funktioner $f: G \to \mathbb{C}$ betegnes $H(G)$. Nøjagtigt som for reelle funktioner på et interval bevises, at hvis f og g er differentiable i $z_0 \in G$ og $a \in \mathbb{C}$, så er også af, $f \pm g$, fg og $\frac{f}{g}$ differentiable i z_0, med differentialkvotienterne

$$(af)'(z_0) = af'(z_0) ,$$

$$(f\pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0) ,$$

$$(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0) ,$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2} , \quad \text{forudsat } g(z_0) \neq 0 .$$

At f.eks. sidste påstand er rigtig, når $g(z_0) \neq 0$, kan ses således: Da g specielt er kontinuert i z_0 findes $r > 0$, så $g(z_0+h) \neq 0$ for $|h| < r$, og for sådanne h har man

$$\frac{f(z_0+h)}{g(z_0+h)} - \frac{f(z_0)}{g(z_0)} = \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{g(z_0+h)} - f(z_0)\,\frac{g(z_0+h)-g(z_0)}{g(z_0+h)g(z_0)} .$$

Ved at dividere med $h \neq 0$, og dernæst lade $h \to 0$, fås det ønskede.

Specielt har man

SÆTNING 1. <u>Mængden $H(G)$ af holomorfe funktioner i en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$, er et komplekst vektorrum og en kommutativ ring (med ételement).</u>

Idet differentialkvotienten af $z \rightsquigarrow z$ er 1, og differentialkvotienten af en konstant er 0, ser man, at z^n er holomorf i $\mathbb{C}$ for $n \in \mathbb{N}_0$, og i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ for $n = -1, -2, \ldots$ med differentialkvotienten $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$. Dermed er et polynomium

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k , \qquad a_k \in \mathbb{C} , \quad k = 0,1,\ldots,n ,$$

holomorft i $\mathbb{C}$ med den "sædvanlige" differentialkvotient

$$p'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} .$$

Også sammensatte funktioner differentieres på sædvanlig måde:

$$(f\circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0) .$$

Her antages $f: G \to \mathbb{C}$ differentiabel i $g(z_0) \in G$, $g: U \to \mathbb{C}$ antages differentiabel i $z_0 \in U$, og naturligvis må vi forudsætte $g(U) \subseteq G$, for at kunne danne $f\circ g$. Endvidere bemærkes, at U kan være enten et åbent interval eller en åben mængde i $\mathbb{C}$.

Vi har nemlig

$$g(z_0+h) = g(z_0) + hg'(z_0) + h\varepsilon(h) \in G$$

$$f(g(z_0)+t) = f(g(z_0)) + tf'(g(z_0)) + t\delta(t) ,$$

blot h henholdsvis t er tilstrækkeligt små, og $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \lim_{t\to 0} \delta(t) = 0$. Sættes $t(h) = h(g'(z_0) + \varepsilon(h))$, har vi for h tilstrækkeligt lille

$$f(g(z_0+h)) = f(g(z_0)+t(h)) = f(g(z_0))+t(h)f'(g(z_0))+t(h)\delta(t(h))$$

$$= f(g(z_0)) + hf'(g(z_0))g'(z_0) + h\tilde{\varepsilon}(h)$$

med

$$\tilde{\varepsilon}(h) = \varepsilon(h)f'(g(z_0)) + \delta(t(h))(g'(z_0) + \varepsilon(h)) ,$$

som klart opfylder $\lim_{h\to 0} \tilde{\varepsilon}(h) = 0$.

Vedrørende omvendt funktion gælder:

SÆTNING 2. <u>Antag, at</u> $f: G \to \mathbb{C}$ <u>er holomorf i en åben mængde</u> $G \subseteq \mathbb{C}$, <u>og at</u> f <u>er injektiv. Så er</u> $f(G)$ <u>åben i</u> $\mathbb{C}$, <u>og den omvendte afbildning</u> $f^{\circ -1}: f(G) \to G$, <u>er holomorf med</u>

$$\left(f^{\circ -1}\right)' = \frac{1}{f'\circ f^{\circ -1}} \quad \underline{\text{eller}} \quad \left(f^{\circ -1}\right)'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \underline{\text{for}} \quad z \in G .$$

<u>Specielt er</u> $f'(z) \neq 0$ <u>for alle</u> $z \in G$.

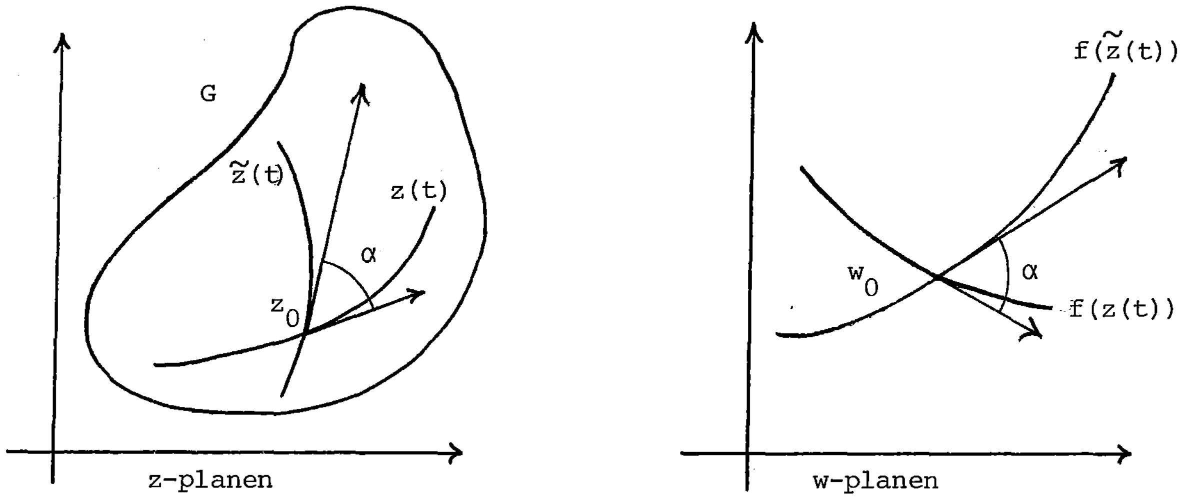
BEMÆRKNING. Sætningen er vanskelig at vise, så beviset overspringes. Jvfr. Sætning 4 p.I.3.4. Selve differentiationsformlen følger ved differentiation af den sammensatte funktion $f^{\circ -1}\circ f(z) = z$, når det vides, at $f^{\circ -1}$ er holomorf.

<u>Hvis man ved, at</u> $f'(z_0) \neq 0$ <u>og</u> $f^{\circ -1}$ <u>er kontinuert i</u> $w_0 = f(z_0)$, <u>er det trivielt, at</u> $f^{\circ -1}$ <u>er differentiabel i</u> w_0 <u>med den anførte differentialkvotient.</u> Thi hvis $w_n = f(z_n) \to w_0$, vil $z_n \to z_0$, og

$$\frac{f^{\circ -1}(w_n) - f^{\circ -1}(w_0)}{w_n - w_0} = \frac{z_n - z_0}{f(z_n) - f(z_0)} \to \frac{1}{f'(z_0)} .$$

1.2. <u>Differentiabilitetens geometriske betydning når</u> $f'(z_0) \neq 0$.

Lad der være givet en holomorf funktion $w = f(z)$ defineret i en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$, og antag, at $z_0 \in G$, $f(z_0) = w_0$.



Lad os betragte en differentiabel kurve $z\colon I \to G$ i G gennem z_0. Der findes altså t_0 i intervallet I, så $z(t_0) = z_0$. Ved f afbildes $z(t)$ i en differentiabel kurve $f(z(t))$ gennem w_0. Hvis $z'(t_0) \neq 0$, har $z(t)$ en tangent i z_0, som er parallel med $z'(t_0)$ opfattet som vektoren $(\mathrm{Re}\, z'(t_0),$ $\mathrm{Im}\, z'(t_0))$. En parameterfremstilling af tangenten kan f.eks. skrives

$$z_0 + uz'(t_0), \quad u \in \mathbb{R} .$$

Idet $f'(z_0) \neq 0$ er $(f \circ z)'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0$, så billedkurven har en tangent i w_0 med parameterfremstillingen

$$w_0 + uf'(z_0)z'(t_0) , \quad u \in \mathbb{R} .$$

Hvis vi skriver $f'(z_0) = re^{i\theta}$ med $r > 0$, $\theta \in [0,2\pi[$, fremkommer billedkurvens hastighedsvektor, altså ud fra den oprindelige kurves hastighedsvektor ved en strækning (homoteti) med faktor r og en drejning med vinkel θ. Vi siger, at f i punktet z_0 har <u>strækningsforholdet</u> $r = |f'(z_0)|$ og <u>drejningsvinklen</u> θ. Betragtes en anden kurve $\tilde{z}(t)$ gennem z_0 som skærer $z(t)$ under vinklen α, dvs. vinklen mellem kurvernes tangenter i z_0 er α, så vil også billedkurverne $f(\tilde{z}(t))$ og $f(z(t))$ skære hinanden under vinklen α. Man siger, at f er <u>vinkeltro</u> eller <u>konform</u> i punktet z_0. Specielt vil ortogonale kurver afbildes i ortogonale kurver.

1.3. <u>Cauchy-Riemanns differentialligninger</u>.

For en funktion $f: G \to \mathbb{C}$, hvor $G \subseteq \mathbb{C}$ er åben, anvender man ofte skrivemåden $f = u + iv$, hvor $u = \mathrm{Re} f$ og $v = \mathrm{Im} f$ er reelle funktioner på G, og de opfattes som funktioner af de to reelle variable x,y så $x + iy \in G$, altså

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{for} \quad x+iy \in G .$$

Den følgende sætning karakteriserer differentiabilitet af f udtrykt ved u og v's egenskaber.

SÆTNING 1. <u>Funktionen</u> f <u>er differentiabel i</u> $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$, <u>hvis og kun hvis</u> u <u>og</u> v <u>er differentiable i</u> (x_0,y_0), <u>og de partielle afledede i</u> (x_0,y_0) <u>opfylder</u>

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \;;\; \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) .$$

<u>I bekræftende fald er</u>

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

<u>Bevis</u>. Lad $r > 0$ være bestemt, så $K(z_0,r) \subseteq G$. For $t = h+ik \in K'(0,r)$ og $c = a+ib$, kan vi bestemme en funktion $\varepsilon: K'(0,r) \to \mathbb{C}$, så

(1) $f(z_0+t) = f(z_0) + tc + t\varepsilon(t)$ for $t \in K'(0,r)$,

og vi ved, at f er differentiabel i z_0 med $f'(z_0) = c$, hvis og kun hvis $\varepsilon(t) \to 0$ for $t \to 0$. Ved at spalte (1) i real- og imaginærdel og bemærke, at $t\varepsilon(t) = |t| \frac{t}{|t|} \varepsilon(t)$, ser man, at (1) er ensbetydende med de 2 reelle ligninger

(2') $u((x_0,y_0) + (h,k)) = u(x_0,y_0) + ha - kb + |t|\sigma(h,k)$,

(2") $v((x_0,y_0) + (h,k)) = v(x_0,y_0) + hb + ka + |t|\tau(h,k)$,

hvor

$$\sigma(h,k) = \mathrm{Re}\left(\frac{t}{|t|} \varepsilon(t)\right) \text{ og } \tau(h,k) = \mathrm{Im}\left(\frac{t}{|t|} \varepsilon(t)\right) .$$

Heraf ses

(3) $|\varepsilon(t)| = \sqrt{\sigma(h,k)^2 + \tau(h,k)^2}$.

Af (2') følger, at u er differentiabel i (x_0,y_0) med de partielle afledede

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -b ,$$

hvis og kun hvis $\sigma(h,k) \to 0$ for $(h,k) \to (0,0)$, og af (2") følger, at v er differentiabel i (x_0,y_0) med de partielle afledede

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = b, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = a ,$$

hvis og kun hvis $\tau(h,k) \to 0$ for $(h,k) \to (0,0)$. Sætningen er nu bevist, idet der ifølge (3) gælder

$$\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sigma(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \tau(h,k) = 0 . \qquad \square$$

BEMÆRKNING. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at $f = u + iv$ er holomorf i en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$ er altså, at u og v er differentiable, og at de partielle afledede af u og v opfylder de sammenhørende partielle differentialligninger

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; , \; \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{i} \quad G \; .$$

Disse ligninger kaldes <u>Cauchy-Riemann</u>'s <u>differentialligninger</u>.

Jacobi matricen for afbildningen $(x,y) \sim (u,v)$ er

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} ,$$

så ved Cauchy-Riemann's differentialligninger finder vi følgende udtryk for Jacobi determinanten

$$\det J = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = |f'|^2 \; .$$

Vi minder om, at en åben (kurve) sammenhængende mængde i $\mathbb{C}\,(\approx \mathbb{R}^2)$ kaldes et område, jvfr. Mat 1 MA VI.

COROLLAR 1. <u>Hvis</u> $f: G \to \mathbb{C}$ <u>er holomorf i et område</u> $G \subseteq \mathbb{C}$ <u>med</u> $f' = 0$, <u>så er</u> f <u>konstant</u>.

<u>Bevis</u>. Da

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \; ,$$

ser man, at de differentiable funktioner u og v begge har gradient 0 , og derfor er de konstante, jvfr. Mat 1 MA p.VI.4.3. □

COROLLAR 2. <u>Hvis</u> $f: G \to \mathbb{R}$ <u>er holomorf i et område</u> $G \subseteq \mathbb{C}$, <u>så er</u> f <u>konstant</u>.

<u>Bevis</u>. Da $v = 0$ i G , giver Cauchy-Riemann's differentialligninger, at $\operatorname{grad} u = 0$ i G , så u og dermed f er konstant. □

1.4. Potensrækker.

Konvergensforholdene for en potensrække $\sum_0^\infty a_n z^n$, hvor $a_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, er undersøgt i Mat 1 MA. Med potensrækken er associeret en konvergensradius $\rho \in [0,\infty]$, og rækken fremstiller en kontinuert funktion f i konvergenscirklen $K(0,\rho)$, forudsat $\rho > 0$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n , \qquad |z| < \rho ,$$

og konvergensen er uniform og absolut på enhver cirkelskive $\overline{K(0,r)}$, $r < \rho$.

SÆTNING. <u>Den ved potensrækken</u> $\sum_0^\infty a_n z^n$ <u>fremstillede funktion</u> f <u>er vilkårligt ofte differentiabel i konvergenscirklen</u> $K(0,\rho)$. <u>Summen af den</u> k <u>gange ledvist differentierede række er</u> $f^{(k)}(z)$, <u>og specielt er</u>

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \qquad k = 0,1,\dots .$$

<u>Bevis</u>. Lad $|z_0| < \rho$, og vælg r så $|z_0| < r < \rho$. For $h \in \mathbb{C}$, så $0 < |h| < r - |z_0|$, har vi

$$\frac{1}{h}(f(z_0+h) - f(z_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{h}((z_0+h)^n - z_0^n) .$$

Under udnyttelse af identiteten $\dfrac{x^n-y^n}{x-y} = \sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k-1}$ fås

$$g_n(h) = \frac{1}{h}((z_0+h)^n - z_0^n) = \sum_{k=1}^{n} (z_0+h)^{n-k} z_0^{k-1} ,$$

så

$$|g_n(h)| \le \sum_{k=1}^{n} |z_0+h|^{n-k}|z_0|^{k-1} < \sum_{k=1}^{n} r^{n-k}r^{k-1} = nr^{n-1} ,$$

og $\lim_{h\to 0} g_n(h) = n\, z_0^{n-1}$.

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(h)$ konvergerer altså ledvis mod rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z_0^{n-1}$, når $h \to 0$, og idet $\sum_1^\infty n|a_n|r^{n-1} < \infty$, da den ledvist differentierede række også har konvergensradius ρ, kan vi af Lebesgue's majorantsætning slutte, at

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,(f(z_0+h)-f(z_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n z_0^{n-1} ,$$

altså at f er differentiabel i z_0 med $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n z_0^{n-1}$.

Heraf fremgår, at også f' er differentiabel i $K(0,\rho)$. Ved successive anvendelser heraf ses, at $f^{(k)}$ er differentiabel i $K(0,\rho)$ for alle k , og den er summen af den k gange ledvist differentierede række. □

Fra Mat 1 MA vides, at funktionerne exp, sin, cos, sinh, cosh for $z \in \mathbb{C}$ er givet ved potensrækkerne

$$\exp z = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots ,$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots ,$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots ,$$
$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots ,$$
$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots .$$

De er altså holomorfe i hele $\mathbb{C}$, og ved ledvis differentiation ses, at f.eks.

$$\frac{d}{dz}\exp z = \exp z ,\quad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z ,\quad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z ,$$
$$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z ,\quad \frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z ,$$

hvilket er en udvidelse af de sædvanlige reelle formler til alle $z \in \mathbb{C}$.

Vi minder om Euler's formler

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} ,\quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} ,\qquad z \in \mathbb{C} ,$$

hvoraf man ser, at $\sin z = 0$ for $z = p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$ og $\cos z = 0$ for $z = \frac{\pi}{2} + p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$. Heraf følger, at

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} ,\quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

er holomorfe i henholdsvis $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$ og $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Opgaver til §1.

1.1. Vis, at $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ er vilkårligt ofte differentiabel i $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, og find et udtryk for $f^{(n)}(z)$ for alle $n \geq 0$.

1.2. Beskriv billedet af vandrette og lodrette linier i $\mathbb{C}$ under $\exp z = e^x e^{iy}$, $z = x+iy$. Vis, at $\exp$ er holomorf ved at eftervise Cauchy-Riemann's differentialligninger og vis, at $\exp' = \exp$.

1.3. De trigonometriske funktioner $\sin$ og $\cos$ defineres for alle $z \in \mathbb{C}$ ved

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Vis, at

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

og benyt dette til at vise, at $\sin$ er holomorf med $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$.
Beskriv billedet af vandrette og lodrette linier i $\mathbb{C}$ under $\sin$. (Ligningen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ fremstiller en hyperbel, og ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ fremstiller en ellipse.)
(At $\sin$ og $\cos$ er holomorfe følger naturligvis også af, at $\exp$ er holomorf).

1.4. Vis, at funktionerne $z \to \operatorname{Re} z$ og $z \to \bar{z}$ ikke er differentiable i nogen punkter i $\mathbb{C}$.

1.5. Lad ∂ og $\bar{\partial}$ være følgende differentialoperatorer virkende på differentiable funktioner $f\colon G \to \mathbb{C}$ defineret i en åben mængde $G \subseteq \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$:

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

altså

$$\partial f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{og} \quad \bar{\partial} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) .$$

Vis, at $f\colon G \to \mathbb{C}$ er holomorf, hvis og kun hvis f er differentiabel og $\bar{\partial} f = 0$, og at der i bekræftende fald gælder $\partial f = f'$.

1.6. Vis, uden at differentiere, at

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

tilfredsstiller Cauchy-Riemann's differentialligninger.

1.7. Lad $SL(2,\mathbb{R})$ betegne mængden af reelle 2×2 matricer med determinant 1. Vis, at

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}),$$

definerer en holomorf funktion i den øvre halvplan $H = \{z = x+iy \mid y > 0\}$. Vis, at φ afbilder H bijektivt på sig selv, og at $\varphi^{\circ -1}$ er givet ved den inverse matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} .$$

Ved denne tilordning defineres en afbildning $j\colon SL(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Hol}(H)$, hvor $\mathrm{Hol}(H)$ er mængden af bijektive holomorfe funktioner $f\colon H \to H$, som udgør en gruppe under sammensætning. Vis, at j er en gruppehomomorfi, og find kernen.

1.8. Vis, at hvis $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er holomorf og af formen $f(x+iy) = u(x) + iv(y)$, hvor u og v er reelle funktioner, så er $f(z) = \lambda z + c$ med $\lambda \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$.

1.9. Lad $(T, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og $G \subseteq \mathbb{C}$ en åben mængde. Antag at $f : T \times G \to \mathbb{C}$ opfylder

1) $f(t, \cdot) \in \mathcal{H}(G)$ for alle $t \in T$,

2) $f(\cdot, z) \in \mathcal{L}(T, \mathbb{E}, \mu)$ for alle $z \in G$,

3) $\exists\, g \in \mathcal{M}^+(T, \mathbb{E})$ med $\int g d\mu < \infty$ så $\left|\frac{df}{dz}(t,z)\right| \leq g(t)$ for alle $t \in T$, $z \in G$.

Vis, at

$$F(z) = \int_T f(t,z) d\mu(t) , \qquad z \in G$$

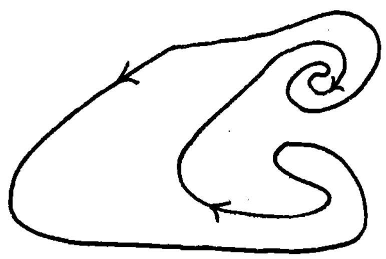
er holomorf i G og $F'(z) = \int_T \frac{df}{dz}(t,z) d\mu(t)$.

§2. Kurveintegraler og stamfunktioner.

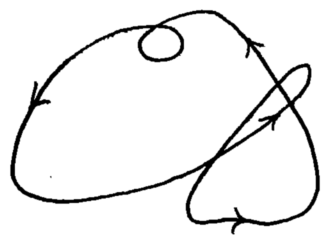
2.1. Komplekse kurveintegraler.

En kontinuert afbildning γ af et kompakt interval $[a,b]$ ind i $\mathbb{C}$ bestemmer en orienteret kontinuert kurve i $\mathbb{C}$. Punkterne $\gamma(a)$ og $\gamma(b)$ kaldes henholdsvis begyndelsespunkt og endepunkt, og γ kaldes en parameterfremstilling for kurven. Den kaldes lukket hvis $\gamma(a) = \gamma(b)$. Mængden af kurvepunkter betegnes kort γ^*, dvs. $\gamma^* = \gamma([a,b])$. Mere præcist vil vi ved en orienteret kontinuert kurve i $\mathbb{C}$ forstå en ækvivalensklasse af kontinuerte parameterfremstillinger, idet to sådanne $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ og $\tau: [c,d] \to \mathbb{C}$ kaldes ækvivalente, hvis der findes en kontinuert strengt voksende afbildning φ af $[a,b]$ på $[c,d]$, så $\tau \circ \varphi = \gamma$: I modsætning til Mat 1 MA kap.VI kræver vi altså, at ækvivalente parameterfremstillinger fremstiller kurven med samme gennemløbsretning. Hvis $\gamma: [a,b] \curvearrowright \mathbb{C}$ er parameterfremstilling for en orienteret kontinuert kurve, vil $t \curvearrowright \gamma(a+b-t)$ være en parameterfremstilling for kurven med modsat gennemløbsretning.

En lukket kontinuert kurve $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ kaldes simpel, hvis den ikke skærer sig selv, altså hvis γ's restriktion til $[a,b[$ er injektiv.



simpel kurve



ikke-simpel kurve

En simpel lukket kontinuert kurve γ kaldes ofte en Jordan kurve på grund af Jordans kurvesætning:

En Jordan kurve deler $\mathbb{C}$ i to områder: Et indre begrænset område og et ydre ubegrænset område, der begge har kurven som rand.

En sådan kurve vil vi normalt orientere positivt, dvs. mod uret, så vi under et gennemløb hele tiden har det indre område til venstre.

En orienteret kontinuert kurve med parameterfremstilling $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ vil vi kalde en vej, hvis γ er stykkevis kontinuert differentiabel, dvs. hvis der findes endeligt mange punkter $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, så $\gamma|[t_{j-1},t_j]$ er C^1 for $j = 1,\cdots,n$; imidlertid behøver den venstre afledede af $\gamma|[t_{j-1},t_j]$ i t_j ikke være lig med den højre afledede af $\gamma|[t_j,t_{j+1}]$ i t_j.

DEFINITION. Lad $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ være parameterfremstilling for en vej og lad $f\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ være kontinuert. Ved kurveintegralet af f langs vejen γ forstås det komplekse tal

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt .$$

BEMÆRKNINGER.

1. At $\gamma'(t)$ ikke er veldefineret i punkterne $t_1,\cdots,t_{n-1}$, spiller naturligvis ingen rolle for integralets eksistens.
2. Definitionen har mening, idet udtrykket til højre ikke ændres, når parameterfremstillingen γ erstattes af en ækvivalent $\gamma\circ\varphi$, hvor $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ er en bijektiv (stykkevis) C^1-funktion med $\varphi'(x) > 0$ for alle x på nær endeligt mange.
3. Betegner $-\gamma$ den modsatte vej til γ gælder

$$\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f .$$

4. Skrives $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x+iy$ og $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ser man, at

$$\int_\gamma f = \int_a^b \Big(u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\Big)\Big(x'(t) + iy'(t)\Big)dt$$

$$= \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy ,$$

så det komplekse kurveintegrals real- og imaginærdel er to sædvanlige kurveintegraler.

5. Der gælder den vigtige vurdering

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \max_{\gamma^*} |f| \; L(\gamma) ,$$

hvor $L(\gamma)$ er længden af vejen γ. Thi

$$\left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b \left|f(\gamma(t))\right|\left|\gamma'(t)\right|dt \leq \max_{t\in[a,b]} \left|f(\gamma(t))\right| \left|\int_a^b\right|\gamma'(t)\left|dt\right.$$

og $\int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$ er netop længden $L(\gamma)$ af vejen.

6. Heraf følger, at $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$ hvis $f_n \to f$ uniformt på γ^*.

2.2. Stamfunktion.

To vilkårlige punkter i et område $G \subseteq \mathbb{C}$ kan forbindes med en kontinuert kurve, der forløber helt i G, og endda med en trappelinie, jvfr. Mat 1 MA p.VI.4.2.

DEFINITION. Lad $f\colon G \to \mathbb{C}$ være defineret i et område $G \subseteq \mathbb{C}$. En funktion $F\colon G \to \mathbb{C}$ kaldes en <u>stamfunktion</u> til f, såfremt F er holomorf i G og $F' = f$.

Hvis F er en stamfunktion til f er $F+k$ også stamfunktion til f for vilkårligt $k \in \mathbb{C}$, og på denne måde finder vi alle stamfunktioner til f. Er nemlig Φ en anden stamfunktion til f, er $(\Phi-F)' = f-f = 0$, så $\Phi-F$ er konstant ifølge Corollar 1 i §1.3.

I analogi med stamfunktions problemet for differentialformer gælder der følgende resultat:

SÆTNING 1. <u>En kontinuert funktion</u> $f\colon G \to \mathbb{C}$ <u>i et område</u> $G \subseteq \mathbb{C}$ <u>har en stamfunktion, hvis og kun hvis det for vilkårlige punkter</u> $z_1, z_2 \in G$ <u>gælder, at</u> $\int_\gamma f$ <u>har samme værdi for enhver vej fra</u> z_1 <u>til</u> z_2, <u>eller, hvad der kommer ud på det samme, at</u>

$$\int_\gamma f = 0 ,$$

for enhver lukket vej i G. Når betingelsen er opfyldt, finder man en stamfunktion F til f ved at vælge et punkt $z_0 \in G$, og sætte $F(z) = \int_\gamma f$, hvor γ er en vilkårlig vej fra z_0 til z.

Bevis. Lad $F = U + iV$, $f = u+iv$. Betingelsen $F' = f$ er ifølge Sætning 1 i §1.3 ensbetydende med, at U og V er differentiable funktioner opfyldende

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial y}\right) = u + iv\,,$$

eller ensbetydende hermed

$$\operatorname{grad} U = (u,-v)\,, \qquad \operatorname{grad} V = (v,u)\,.$$

Udnyttes, at

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy$$

ser man, at sætningen følger af den tilsvarende sætning om stamfunktioner til differentialformer, jvfr. Sætning 6 p.VI.4.6 i Mat 1 MA.

Vi vil imidlertid give et bevis, der er uafhængigt af Mat 1, og deler sætningen op i to:

SÆTNING 2. Hvis en kontinuert funktion $f: G \to \mathbb{C}$ i et område $G \subseteq \mathbb{C}$ har en stamfunktion $F: G \to \mathbb{C}$, gælder

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

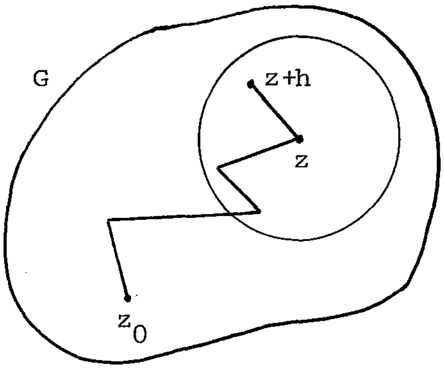
for enhver vej γ fra z_1 til z_2.

Bevis. Hvis $\gamma: [a,b] \to G$ er en vej, så $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$, finder vi

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,. \quad \square$$

SÆTNING 3. <u>Lad</u> $f: G \to \mathbb{C}$ <u>være en kontinuert funktion i et område</u> $G \subseteq \mathbb{C}$ <u>og antag, at</u> $\int_\gamma f = 0$ <u>for enhver lukket polygonal vej i</u> G. <u>Da har</u> f <u>en stamfunktion</u>.

<u>Bevis</u>. Vi vælger $z_0 \in G$. For $z \in G$ defineres $F(z) = \int_{\gamma_z} f$, hvor γ_z vælges som en polygonal vej fra z_0 til z. Sådanne veje findes, idet der endda findes trappelinier fra z_0 til z, og kurveintegralet er uafhængigt af valget i henhold til forudsætningen.



For $z \in G$ findes $r > 0$ så $\overline{K(z,r)} \subseteq G$, og hvis $0 < |h| < r$ vil liniestykket ℓ fra z til $z+h$ tilhøre $K(z,r)$, og dermed G. Ved at føje ℓ efter γ_z har vi en polygonal vej $\gamma_z \cup \ell$ fra z_0 til $z+h$. Vi har da

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_z \cup \ell} f - \int_{\gamma_z} f = \int_\ell f = \int_0^1 f(z+th)h\,dt$$

altså

$$\frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) - f(z) = \int_0^1 (f(z+th) - f(z))\,dt .$$

Da f er kontinuert i z, kan vi til givet $\varepsilon > 0$ finde $0 < \delta < r$, så $|f(w)-f(z)| \le \varepsilon$ for $w \in K(z,\delta)$, altså

$$\left|\frac{1}{h}\Big(F(z+h) - F(z)\Big) - f(z)\right| \le \int_0^1 \varepsilon\,dt = \varepsilon \quad \text{for} \quad 0 < |h| < \delta ,$$

hvilket viser, at F er differentiabel i z med $F'(z) = f(z)$. □

EKSEMPEL. Lad C_r betegne cirklen $|z| = r$ gennemløbet positivt en gang, $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. Så er for $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{r^n e^{int}}\,dt = ir^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{it(1-n)}\,dt = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ 2\pi i, & n = 1. \end{cases}$$

Resultatet følger også for $n \neq 1$ af, at z^{-n} har stamfunktionen $(1-n)^{-1}z^{1-n}$, i $\mathbb{C}$ for $n \le 0$, i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ for $n \ge 2$. Da integralet er $\neq 0$ for $n = 1$ kan vi slutte, at $\frac{1}{z}$ ikke har nogen stamfunktion i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Opgaver til §2.

2.1. Udregn kurveintegralerne

$$\int_0^i \frac{dz}{(1-z)^2} \; , \quad \int_i^{2i} \cos z \, dz \quad \text{og} \quad \int_0^{i\pi} e^z dz \; ,$$

idet det er underforstået, at der skal integreres langs liniestykket fra nedre grænse til øvre grænse. Find endelig værdien af de tre integraler ved stamfunktionsbestemmelse.

2.2. Udregn $\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z}$, idet $\gamma_n: [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ er en parameterfremstilling for enhedscirklen med $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gennemløb: $\gamma_n(t) = e^{itn}$.

2.3. Vis, at

$$\int_\gamma \frac{z}{(z^2+1)^2} \, dz = 0 \; ,$$

når γ betegner en lukket vej i $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

2.4. Vis, at

$$\int_\gamma P(z)dz = 0$$

for ethvert polynomium P, og enhver lukket vej i $\mathbb{C}$.

2.5. Vis, at $\int_\gamma \bar{z}\, dz$ er rent imaginær for enhver lukket vej γ i $\mathbb{C}$.

2.6. Lad $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ være en vej, og $f: \gamma^* \to \mathbb{C}$ en kontinuert funktion. Vis, at der til $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$, så der for $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ og $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$, $t_i - t_{i-1} \leq \delta$, $i = 1, \cdots, n$ gælder

$$\left| \int_\gamma f - \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(\tau_i))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right| \leq \varepsilon \; .$$

2.7. I en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$ indføres relationen x forb y ved, at der findes en kontinuert kurve i G fra x til y. Vis, at "forb" er en ækvivalensrelation i G, og at ækvivalensklasserne er områder, kaldet <u>sammenhængskomponenterne for</u> G. Vis, at mængden af sammenhængskomponenter er tællelig.

§3. Cauchy's sætninger.

3.1. Cauchy's integralsætning.

Lad $f\colon G \to \mathbb{C}$ være holomorf i et område $G \subseteq \mathbb{C}$ og γ en lukket vej i G. Med $f = u+iv$ gælder

$$\int_\gamma f = \int_\gamma udx - vdy + i\int vdx + udy\,,$$

så $\int_\gamma f = 0$, hvis differentialformerne $udx - vdy$ og $vdx + udy$ er eksakte. En nødvendig betingelse herfor (hvis u og v er C^1) er, at differentialformerne er lukkede, men denne betingelse er opfyldt på grund af Cauchy-Riemann's differentialligninger. Hvis området G er enkeltsammenhængende, er lukkede differentialformer eksakte, jvfr. Mat 1 MA, VI §4.

Et område $G \subseteq \mathbb{C}$ kaldes <u>enkeltsammenhængende</u>, hvis der om to vilkårlige kontinuerte kurver γ_0, γ_1 i G med samme begyndelsespunkt a og samme endepunkt b gælder, at den ene kan "deformeres kontinuert" over i den anden. Idet vi kan antage, at begge kurver har parameterinterval $[0,1]$ vil vi præcist forlange, at der findes en kontinuert funktion $H\colon [0,1]\times[0,1] \to G$ så

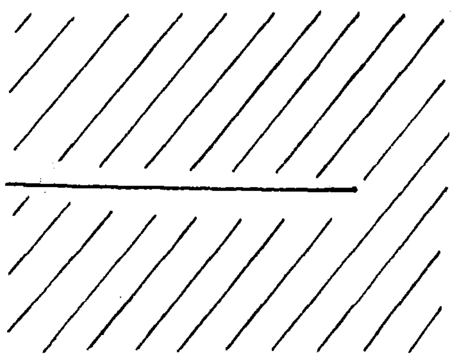
$$H(0,t) = \gamma_0(t)\,,\ H(1,t) = \gamma_1(t) \quad \text{for} \quad t \in [0,1]\,,$$

og så $H(s,0) = a$, $H(s,1) = b$ for $s \in [0,1]$. For hvert $s \in [0,1]$ er $t \rightsquigarrow H(s,t)$ en kontinuert kurve fra a til b, og når s varierer fra 0 til 1 varierer kurven fra γ_0 til γ_1. Funktionen H kaldes en <u>homotopi</u>.

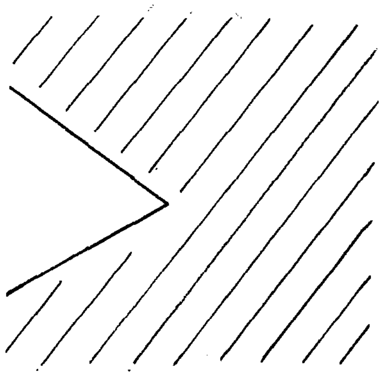
Intuitivt er et enkeltsammenhængende område et <u>område uden huller</u>.

Vi nævner uden bevis, at hvis et område G er <u>stjerneformet omkring et punkt</u> $a \in G$, dvs. for ethvert $z \in G$ er liniestykket fra a til z indeholdt i G, så er G enkeltsammenhængende, jvfr. Opg.3.3. Da en konveks mængde er stjerneformet omkring ethvert af sine punkter, er et <u>konvekst</u> område enkeltsammenhængende.

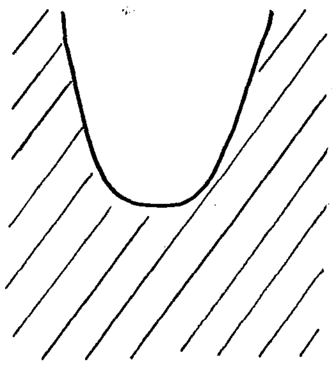
A



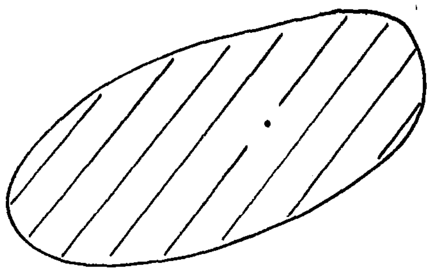
B



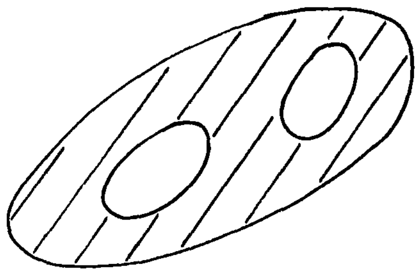
C



D



E



Fjernes en halvlinie fra $\mathbb{C}$ fås et område, der er stjerneformet omkring ethvert punkt på den modsatte halvlinie (eks.A). Et vinkelrum er stjerneformet (eks.B). Området udenfor en parabel (eks.C) er enkeltsammenhængende, men ikke stjerneformet. Fjernes et punkt (eks.D) eller en eller flere lukkede cirkelskiver (eks.E) fra et åbent område fås et ikke enkeltsammenhængende område.

CAYCHY's INTEGRALSÆTNING. For en holomorf funktion $f: G \to \mathbb{C}$ i et enkeltsammenhængende område $G \subseteq \mathbb{C}$ og en lukket vej γ i G gælder

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 .$$

BEMÆRKNING. Hvis vi ved, at f' er kontinuert når $f \in \mathcal{H}(G)$, så følger Cauchy's integralsætning af resultatet: Enhver lukket C^1-differentialform i et enkeltsammenhængende område er eksakt. På denne måde viste Cauchy resultatet i 1825, idet han om en holomorf funktion forudsatte, at f' er kontinuert.

Som antydet i indledningen er f' automatisk kontinuert, når f er holomorf. Dette blev opdaget af den franske matematiker Goursat i 1899, idet han gav et bevis for Cauchy's integralsætning uden at forudsætte, at f' er kontinuert. Nedenstående bevis for Goursat's lemma skyldes Pringsheim.

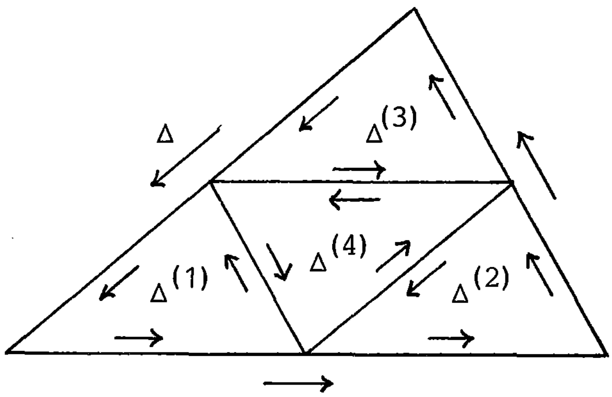
Hvis området ikke er enkeltsammenhængende, kan sætningen normalt ikke opretholdes som eksemplet p.2.5 viser.

GOURSAT's LEMMA (1899). Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $f \in H(G)$. Så er

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

for enhver (massiv) trekant $\Delta \subseteq G$.

Bevis. Kurveintegralet langs randen af en trekant skal her altid fortolkes således, at siderne gennemløbes i rækkefølge i positiv omløbsretning. Midtpunkterne af siderne i Δ forbindes.



Dermed er Δ delt i fire trekanter $\Delta^{(1)},\ldots,\Delta^{(4)}$ som vist på tegningen, og med de viste orienteringer. Idet f.eks. $\Delta^{(1)}$ og $\Delta^{(4)}$ har en fælles side med modsatte orienteringer, har vi

$$I = \int_{\partial\Delta} f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial\Delta^{(i)}} f .$$

Mindst et af de fire tal $\int_{\partial\Delta^{(i)}} f$ må have en absolut værdi $\geq \frac{1}{4}|I|$. Kaldes den tilsvarende trekant for Δ_1 har vi altså

$$|I| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f \right| .$$

Anvendes samme procedure på Δ_1 vil en af de 4 trekanter, hvori Δ_1 deles - lad os kalde den Δ_2 - opfylde

$$|I| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f \right| \leq 4^2 \left| \int_{\partial\Delta_2} f \right| .$$

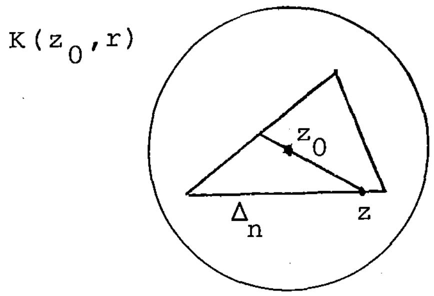
Fortsættes på denne måde fås en dalende følge $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$ af trekanter med netop et fælles punkt z_0, og der gælder

(1) $$|I| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f \right| \quad \text{for} \quad n = 1,2,\cdots .$$

Hvis L betegner længden af $\partial\Delta$ er længden af $\partial\Delta_n$ lig med $2^{-n}L$. Da f er differentiabel i z_0, kan vi til givet $\varepsilon > 0$ finde $r > 0$, så

(2) $$|f(z)-f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| \leq \varepsilon|z-z_0| \quad \text{for} \quad z \in K(z_0,r) \subseteq G ,$$

og der findes N, så $\Delta_n \subseteq K(z_0,r)$ for $n \geq N$. For $n \geq N$ og $z \in \partial\Delta_n$ er $|z-z_0|$ højst halvdelen af omkredsen af Δ_n, altså $|z-z_0| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-n}L$. Funktionen $z \rightsquigarrow f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)$ er et første grads polynomium, og har dermed en stamfunktion, så ifølge Sætning 2 i §2.2 har vi



$$\int_{\partial\Delta_n} \Big(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\Big)dz = 0 ,$$

altså ifølge (2)

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} \Big(f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)\Big)dz\right| \leq \varepsilon \cdot \max_{z\in\partial\Delta_n}|z-z_0| \cdot 2^{-n}L$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\left(2^{-n}L\right)^2 .$$

Af (1) får vi da

$$|I| \leq 4^n \frac{\varepsilon}{2}\left(2^{-n}L\right)^2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon L^2 ,$$

og da $\varepsilon > 0$ er vilkårlig, må $I = 0$. □

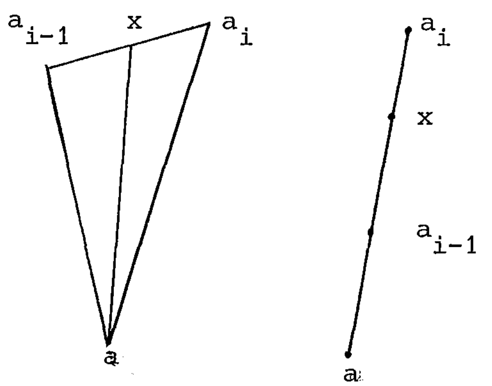
For at bevise Cauchy's integralsætning skal vi ifølge Sætning 2 og 3 i §2.2 eftervise, at integralet af f langs enhver lukket polygonal vej er 0. Vi ved dette for trekanter. Den nærliggende ide - at dele polygonen op i trekanter - virker ikke umiddelbart, idet visse af hjælpelinierne kan løbe udenfor G. For konkrete områder er det sædvanligvis let at gøre, men et alment stringent bevis er vanskeligt, og bygger på Jordan's kurvesætning.

Vi vil udføre beviset i et specialtilfælde, der rækker til de anvendelser af sætningen vi får brug for.

CAUCHY's INTEGRALSÆTNING for et STJERNEFORMET OMRÅDE. Lad G være et stjerneformet område og antag, at $f \in H(G)$. For enhver lukket vej γ i G gælder

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 .$$

Bevis. Antag, at G er stjerneformet omkring a, og lad γ være en lukket polygonal vej med knækpunkter $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, $a_n = a_0$. Et vilkårligt punkt x på vejen ligger på et af liniestykkerne fra a_{i-1} til a_i, $i=1,\cdots,n$, og da G er stjerneformet med hensyn til a, vil liniestykket fra a til x tilhøre G. Dermed vil hele trekanten $\{a, a_{i-1}, a_i\}$ tilhøre G. Integralet af f langs randen der går fra a til a_{i-1}, fra a_{i-1} til a_i og fra a_i til a, er da 0. For enten danner punkterne en egentlig trekant, som gennemløbes positivt eller negativt, og så følger påstanden af Goursat's lemma, eller også ligger punkterne på linie, og så er påstanden klar. Vi har altså



$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\{a, a_{i-1}, a_i\}} f = 0 .$$

Hvert af liniestykkerne fra a til a_i, $i = 1,\cdots,n$, giver to bidrag, der hæver hinanden, og resten er netop $\int_\gamma f$, som altså er lig med 0. □

BEMÆRKNING. Selv om G er et ikke enkeltsammenhængende område, vil der naturligvis ofte alligevel gælde $\int_\gamma f = 0$ for visse $f \in H(G)$, og visse lukkede veje γ i G. F.eks. i følgende tilfælde (a): f har en stamfunktion i G, eller (b): γ forløber i et enkeltsammenhængende delområde G_1 af G. Således er

$$\int_{\partial K(a,r)} \frac{dz}{z} = 0$$

for $a \neq 0$, $0 < r < |a|$.

Ved kombination af Cauchy's integralsætning og Sætning 1 i §2.2 finder vi

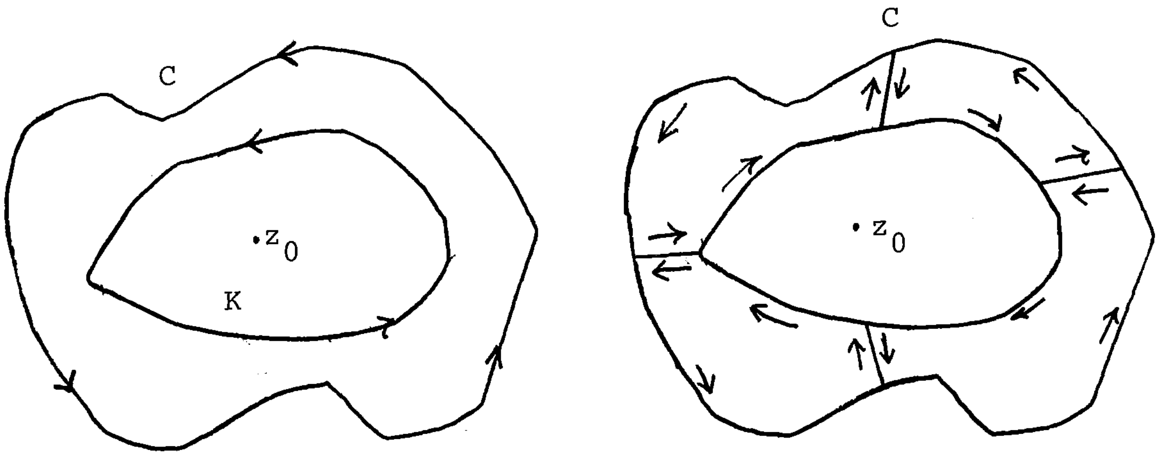
SÆTNING. <u>Enhver holomorf funktion i et enkeltsammenhængende område har en stamfunktion.</u>

§3.2. Cauchy's integralformel.

Lad G være et område, $z_0 \in G$, og antag, at $f \in H(G \setminus \{z_0\})$ Vi ønsker at udregne integralet af f langs en simpel lukket vej C i G som omslutter z_0. Vi tænker os, at C er orienteret mod uret. Vi vil se, at vi ved Cauchy's integralsætning ofte kan erstatte C med en anden simpel lukket vej K i G, orienteret mod uret og som også omslutter z_0, altså at

$$(1) \qquad \int_C f(z)dz = \int_K f(z)dz .$$

Ideen er at lægge en række snit fra C til K (på tegningen 4), og dermed lave et endeligt antal lukkede "småveje" γ_i, der hver består af 1) en del af C, 2) et snit, 3) en del af K med modsat orientering, 4) et snit. Vi antager, at det er muligt at lægge snittene således, at hvert γ_i forløber i et stjerneformet



delområde af $G \setminus \{z_0\}$, hvorved $\int_{\gamma_i} f = 0$. Idet hvert snit giver anledning til to bidrag, der hæver hinanden, vil

$$0 = \Sigma \int_{\gamma_i} f = \int_C f + \int_{-K} f ,$$

hvoraf

$$\int_C f = \int_K f .$$

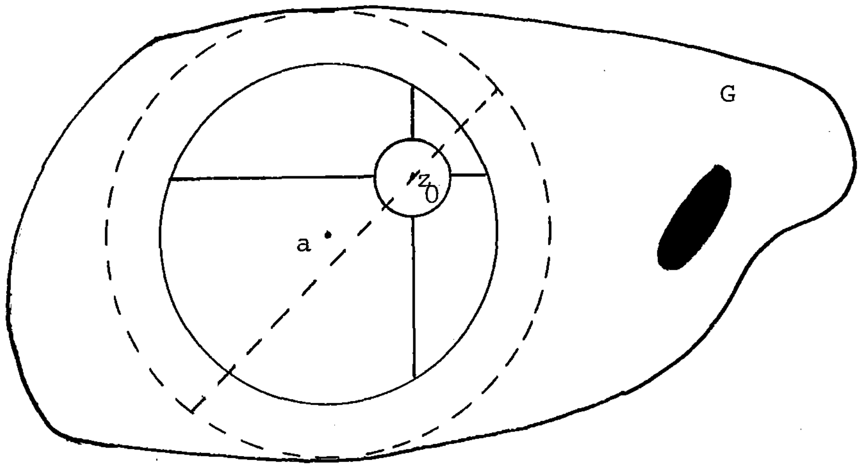
EKSEMPEL. Antag, at $f \in H(G \setminus \{z_0\})$, og at kurverne C og K er randen af to cirkler $K(a,r)$ og $K(z_0,s)$ opfyldende

$$\overline{K(z_0,s)} \subseteq K(a,r) , \quad \overline{K(a,r)} \subseteq G .$$

Så er

$$\int_{\partial K(a,r)} f = \int_{\partial K(z_0,s)} f .$$

Her og i det følgende gennemløbes cirklerne en gang mod uret.



Vi bemærker først, at der findes $R > r$ så $K(a,R) \subseteq G$. Dette er klart, hvis $G = \mathbb{C}$, og hvis $G \neq \mathbb{C}$ sættes $R = d(a, \complement G) \geq r$, og så vil $K(a,R) \subseteq G$. For at se at $R > r$ vælges en følge (z_n) fra $\complement G$ så $|a-z_n| \to R$. Idet denne kan udtyndes til en konvergent delfølge, vil der findes $z' \in \complement G$, så $|a-z'| = R$, men så må $R > r$, thi ellers ville $z' \in \overline{K(a,r)} \subseteq G$. Lægges fire snit mellem cirklerne ved to på hinanden vinkelrette linier gennem z_0, ser man, at hver af de fire "småveje" ligger i et cirkelafsnit af $K(a,R)$ afgrænset af en korde gennem z_0, altså i en konveks mængde, og dermed har vi det ønskede.

CAUCHY's INTEGRALFORMEL. <u>Lad</u> $f: G \to \mathbb{C}$ <u>være holomorf i en åben mængde</u> G <u>og antag</u> $\overline{K(a,r)} \subseteq G$. <u>For alle</u> $z_0 \in K(a,r)$ <u>gælder</u>

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz ,$$

<u>idet cirklen gennemløbes en gang mod uret</u>.

<u>Bevis</u>. Lad $z_0 \in K(a,r)$ være fast. Af eksemplet anvendt på den i $G \setminus \{z_0\}$ holomorfe funktion

$$z \curvearrowright \frac{f(z)}{z-z_0}$$

følger, at

$$\int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int_{\partial K(z_0,s)} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

for $0 < s < r - |a-z_0|$. Indføres parameterfremstillingen $\theta \curvearrowright z_0 + se^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi]$ for $\partial K(z_0,s)$ finder vi

$$\int_{\partial K(z_0,s)} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{sie^{i\theta}}{se^{i\theta}}\, d\theta = 2\pi i ,$$

hvoraf

$$I = \int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz - 2\pi i\, f(z_0) = \int_{\partial K(z_0,s)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz .$$

Dermed har vi

$$|I| \leq \sup\left\{\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \;\Big|\; |z-z_0| = s\right\} 2\pi s =$$

$$2\pi \sup\left\{\left|f(z)-f(z_0)\right| \;\Big|\; |z-z_0| = s\right\},$$

men da f specielt er kontinuert i z_0, vil det anførte supremum gå mod 0 for $s \to 0$, og vi kan slutte at $I = 0$. □

COROLLAR. Lad $f: G \to \mathbb{C}$ være holomorf i en åben mængde G, og antag $\overline{K(a,r)} \subseteq G$. Så gælder

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta .$$

Bevis. Vi anvender sætningen for $z_0 = a$ og indfører parameterfremstillingen

$$\theta \rightsquigarrow a + re^{i\theta}, \quad \theta \in [0,2\pi] .$$ □

Cauchy's integralformel viser, at blot man kender en holomorf funktions værdier på en cirkel $\partial K(a,r)$, så er funktionens værdier inde i cirkelskiven fastlagt. Corollaret siger specielt, at værdien i centrum er middelværdien af værdierne på periferien.

EKSEMPEL. Cauchy's integralformel kan benyttes til udregning af kurveintegraler.

$$\int_{\partial K(0,2)} \frac{\sin z}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2i}\int_{\partial K(0,2)} \frac{\sin z}{z-i}\,dz - \frac{1}{2i}\int_{\partial K(0,2)} \frac{\sin z}{z+i}\,dz$$

$$= \pi \sin(i) - \pi\sin(-i) = 2\pi\sin(i) = \pi i\left(e - \frac{1}{e}\right) .$$

EKSEMPEL. Ved hjælp af Cauchy's integralsætning vil vi vise formlen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itb}\,dt = e^{-\frac{b^2}{2}}, \qquad b \in \mathbb{R} .$$

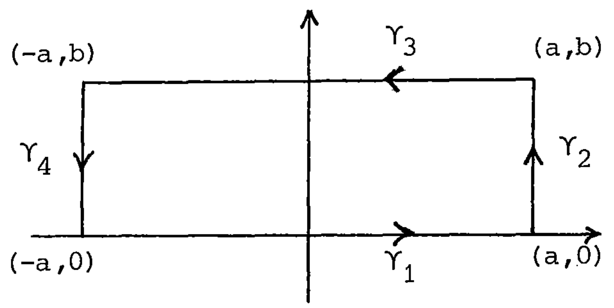
Formlen udtrykker, at $e^{-\frac{t^2}{2}}$ er sin egen Fourier transformerede.

For $b = 0$ følger formlen af udregningen p.II.6.16. Idet cos er lige og sin ulige har vi

$$\int e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itb}\,dt = \int e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(tb)\,dt ,$$

så det er tilstrækkeligt, at vise formlen for $b > 0$.

Vi integrerer den i hele $\mathbb{C}$ holomorfe funktion $f(z) = \exp(-\frac{1}{2}z^2)$ langs med randen af det på figuren viste rektangel, og får 0 ifølge Cauchy's integralsætning. De fire sider har parameterfremstillingerne



$$\gamma_1(t) = t, \quad t \in [-a,a],$$
$$\gamma_2(t) = a+it, \quad t \in [0,b],$$
$$\gamma_3(t) = -t+ib, \quad t \in [-a,a],$$
$$\gamma_4(t) = -a+i(b-t), \quad t \in [0,b],$$

og vi finder

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt, \quad \int_{\gamma_3} f = -e^{\frac{1}{2}b^2} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{itb}\,dt,$$

$$\int_{\gamma_2} f = ie^{-\frac{1}{2}a^2} \int_0^b e^{\frac{1}{2}t^2} e^{-iat}\,dt, \quad \int_{\gamma_4} f = -ie^{-\frac{1}{2}a^2} \int_0^b e^{\frac{1}{2}(b-t)^2} e^{ia(b-t)}\,dt,$$

hvoraf

$$\left|\int_{\gamma_2} f\right|, \left|\int_{\gamma_4} f\right| \leq e^{-\frac{1}{2}a^2}\, b\, e^{\frac{1}{2}b^2} \to 0 \quad \text{for} \quad a \to \infty .$$

Idet $e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{itb}$ er Lebesgue integrabel, finder vi for $a \to \infty$, at

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\gamma_3} f = -e^{\frac{1}{2}b^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{itb}\,dt ,$$

og

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\gamma_1} f = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \sqrt{2\pi} ,$$

hvoraf formlen fremgår.

Opgaver til §3.

3.1. Udregn

$$\int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$$

når (i) $|a|, |b| < 1$, (ii) $|a| < 1$, $|b| > 1$, (iii) $|a|, |b| > 1$.

3.2. Udregn

$$\int_{\partial K(0,2)} \frac{e^z}{z-1}\,dz \quad \text{og} \quad \int_{\partial K(0,2)} \frac{e^z}{\pi i - 2z}\,dz \,.$$

3.3. Vis, at ethvert stjerneformet område $G \subseteq \mathbb{C}$ er enkelt-sammenhængende. (Vink. Deformer først kurven γ_0 fra a til b til den brudte linie, der består af liniestykket fra a til z_0 efterfulgt af liniestykket fra z_0 til b. Her betegner z_0 et punkt hvorom G er stjerneformet.)

3.4. Lad γ være en vej i $\mathbb{C}$ og lad $f: \gamma^* \to \mathbb{C}$ være kontinuert. Vis, at

$$\varphi(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$$

er en holomorf funktion i den åbne mængde $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, og at

$$\varphi'(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\,d\xi \,.$$

Vis, at φ' er kontinuert. Udnyt ovenstående til at vise, at f' er kontinuert, når f er holomorf i en åben mængde.

§4. Anvendelser af Cauchy's integralformel.

4.1. Udvikling af holomorfe funktioner i potensrække.

Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde. Hvis $G \neq \mathbb{C}$ vil der til hvert $a \in G$ findes en største åben cirkelskive $K(a,\rho)$ indeholdt i G, og radius er $\rho = d(a,\mathbb{C}\setminus G)$. Hvis $G = \mathbb{C}$ sætter vi $K(a,\infty) = \mathbb{C}$ og taler også i dette tilfælde om den største åbne cirkelskive indeholdt i G.

Ved hjælp af Cauchy's integralformel vil vi nu vise, at $f \in \mathcal{H}(G)$ er vilkårligt ofte differentiabel. For $a \in G$ kaldes rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ for f's Taylorrække med centrum a.

SÆTNING. Lad $f \in \mathcal{H}(G)$. Så er f vilkårligt ofte differentiabel, og Taylorrækken med centrum $a \in G$ er konvergent med sum f i den største åbne cirkelskive $K(a,\rho) \subseteq G$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \text{for} \quad z \in K(a,\rho).$$

For $\overline{K(a,r)} \subseteq G$ og $z_0 \in K(a,r)$ gælder Cauchy's integralformel for den n'te afledede

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \qquad n = 0,1,\cdots.$$

Bevis. Idet $z \curvearrowright \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ er holomorf i $G\setminus\{a\}$, følger af §3.2, at tallene

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

er uafhængige af r for $0 < r < \rho$, og vi kalder dem derfor blot a_n, $n = 0,1,\cdots$.

For $z_0 \in K(a,\rho)$ vælges $r > 0$ så $|z_0-a| < r < \rho$, og Cauchy's integralformel giver

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

For $z \in \partial K(a,r)$ har vi

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-a+a-z_0} = \frac{1}{z-a} \frac{1}{1-\frac{z_0-a}{z-a}} ,$$

og idet $\left|\frac{z_0-a}{z-a}\right| = \frac{|z_0-a|}{r} < 1$, kan ovenstående skrives som sum af en uendelig kvotientrække

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^n ,$$

hvoraf

$$(*) \qquad \frac{f(z)}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$$

med

$$g_n(z) = \frac{f(z)(z_0-a)^n}{(z-a)^{n+1}} .$$

Da $\partial K(a,r)$ er kompakt, er $M = \sup\{|f(z)| \mid z \in \partial K(a,r)\} < \infty$. Rækken $\sum_0^{\infty} g_n(z)$ konvergerer uniformt for $z \in \partial K(a,r)$, idet

$$|g_n(z)| \leq \frac{M}{r}\left(\frac{|z_0-a|}{r}\right)^n , \quad \sum_0^{\infty}\left(\frac{|z_0-a|}{r}\right)^n < \infty .$$

Af pkt.6 p.2.3 følger, at det er tilladeligt at integrere ledvist i (*), hvoraf

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r)} g_n(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0-a)^n .$$

Potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^n$ er altså konvergent med sum $f(z_0)$ for alle $z_0 \in K(a,\rho)$. Dermed er f vilkårligt ofte differentiabel i $K(a,\rho)$, og da koefficienterne i potensrækken $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ er fastlagt ved $a_n = g^{(n)}(0)/n!$ (jvfr. §1.4), og $f(z) = g(z-a)$, finder vi $a_n = f^{(n)}(a)/n!$. Dermed gælder

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz , \qquad 0 < r < \rho ,$$

men ifølge §3.2 kan vi erstatte $\partial K(a,r)$ med en vilkårlig cirkel $\partial K(b,s)$ så $a \in K(b,s) \subseteq \overline{K(b,s)} \subseteq G$. □

BEMÆRKNINGER. 1. Som støtte for hukommelsen noteres, at Cauchy's integralformler for de afledede fremkommer ved at differentiere Cauchy's integralformel under integraltegnet. Denne ide kan også udbygges til et andet bevis for sætningen.

2. Man kalder en funktion $f: G \to \mathbb{C}$ i et område $G \subseteq \mathbb{C}$ for (komplekst) <u>analytisk</u>, hvis der til hvert punkt $a \in G$ findes en potensrække $\sum_0^\infty a_n(z-a)^n$ med sum $f(z)$ i en cirkelskive $K(a,r) \subseteq G$, idet r tillades at variere med a. Ifølge §1.4 er en analytisk funktion holomorf, og den til nu udviklede teori viser, at en holomorf funktion er analytisk, og at den til a hørende potensrække er Taylorrækken. Begreberne analytisk og holomorf er altså helt ensbetydende. K. Weierstrass (1815-1897) gav den første eksakte behandling af kompleks funktionsteori baseret på begrebet analytisk funktion.

4.2. Harmoniske funktioner.

At en holomorf funktion $f \in H(G)$ er vilkårligt ofte differentiabel medfører, at to differentiable funktioner $u,v: G \to \mathbb{R}$ som opfylder Cauchy-Riemann's differentialligninger

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{i } G$$

<u>automatisk</u> er C^∞-funktioner i G, opfattet som åben delmængde af $\mathbb{R}^2$. Ved fortsat differentiation finder vi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

altså $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, og analogt $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

Differentialoperatoren $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ i $\mathbb{R}^2$ kaldes <u>Laplace</u>'s <u>operator</u>, og den betegnes sædvanligvis Δ. En reel C^2-funktion φ

i en åben mængde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ kaldes harmonisk i G, hvis $\Delta\varphi = 0$ i G. Vi har altså, at realdelen og imaginærdelen af en holomorf funktion er harmoniske.

Vi vil nu vise, at det omvendte er rigtigt lokalt. Mere præcist gælder

SÆTNING. Lad u være en harmonisk funktion i et enkeltsammenhængende område $G \subseteq \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$. Så findes en holomorf funktion $f: G \to \mathbb{C}$ med $\mathrm{Re} f = u$, og f er fastlagt på nær addition af en rent imaginær konstant.

Bevis. Funktionen $g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ er holomorf i G, idet Cauchy-Riemann's differentialligninger er opfyldt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Ifølge §3.1 findes en stamfunktion $f \in \mathcal{H}(G)$ til g, altså $f' = g$, eller

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Re} f) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Re} f) = \frac{\partial u}{\partial y},$$

som viser, at $u - \mathrm{Re} f$ er en reel konstant. Ved at lægge denne til f, opnår vi en holomorf funktion med u som realdel. Betegner f og f_1 holomorfe funktioner med $\mathrm{Re} f = \mathrm{Re} f_1 = u$, er $i(f-f_1)$ åbenbart en reel holomorf funktion, og dermed konstant (§1.3, Corollar 2). $\square$

Til en harmonisk funktion u i en åben enkeltsammenhængende mængde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ findes altså en harmonisk funktion v i G, så $f = u+iv$ er holomorf. Funktionen v er bestemt på nær addition af en konstant, og kaldes en til u konjugeret harmonisk funktion.

Hvis u er harmonisk i en vilkårlig åben mængde G, kan vi til hver kugle $K(a,r) \subseteq G$ finde en konjugeret harmonisk funktion v, så $u+iv$ er holomorf i $K(a,r)$. Dermed er $u \in C^\infty(G)$.

4.3. Morera's sætning og dens anvendelse.

I reel analyse ved vi, at en kontinuert funktion på et interval har en stamfunktion. I kompleks funktionsteori er situationen helt anderledes:

SÆTNING 1. Hvis en funktion $f: G \to \mathbb{C}$ i et område $G \subseteq \mathbb{C}$ har en stamfunktion, da er den holomorf.

Thi hvis $F \in \mathcal{H}(G)$ er en stamfunktion til f er også $f = F'$ holomorf iflg. sætningen i §4.1. □

Vi minder om, at en holomorf funktion i et område G ikke behøver at have en stamfunktion i G ($f(z) = \frac{1}{z}$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, §2.2), men at den har en sådan, hvis G er enkeltsammenhængende, §3.1.

Den følgende sætning af italieneren G. Morera fra 1886 er en omvendt sætning til Cauchy's integralsætning, dog behøver området ikke at være enkeltsammenhængende.

MORERA's SÆTNING. Lad $f: G \to \mathbb{C}$ være kontinuert i et område $G \subseteq \mathbb{C}$. Hvis $\int_\gamma f = 0$ for enhver lukket vej i G, eller blot $\int_{\partial\Delta} f = 0$ for enhver trekant $\Delta \subseteq G$, så er f holomorf i G.

Bevis. Det er nok at vise, at f er holomorf i $K(a,\rho)$ for hvert $a \in G$, hvor $K(a,\rho)$ er den største åbne cirkelskive i G med centrum a. Som i beviset for Cauchy's integralsætning for et stjerneformet område vises, at integralet af f langs enhver lukket polygonal vej i $K(a,\rho)$ er lig med 0, og dermed har f en stamfunktion i $K(a,\rho)$. Af Sætning 1 følger nu, at f er holomorf i $K(a,\rho)$. □

Af Morera's sætning vil vi udlede:

SÆTNING 3. Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben. Hvis en følge $f_1, f_2, \cdots$ fra $\mathcal{H}(G)$ konvergerer punktvis mod en funktion f, og konvergensen er uniform i enhver kompakt delmængde af G, da er $f \in \mathcal{H}(G)$. Følgen $f_1', f_2', \cdots$ af afledede konvergerer mod f' uniformt i enhver kompakt delmængde af G.

BEMÆRKNING. Ved gentagen anvendelse af sætningen ses, at $\forall k \in \mathbb{N}$: $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$, uniformt over kompakte delmængder af G.

Bevis. Lad $\overline{K(a,r)} \subseteq G$. Da $\overline{K(a,r)}$ er kompakt er restriktionen af f til $\overline{K(a,r)}$ åbenbart kontinuert. For enhver trekant $\Delta \subseteq K(a,r)$ gælder $\int_{\partial\Delta} f_n = 0$ ifølge Cauchy's integralsætning, så for alle n har vi

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\right| = \left|\int_{\partial\Delta}(f-f_n)\right| \leq \sup\left\{|f(z)-f_n(z)| \;\middle|\; z \in \partial\Delta\right\} L(\partial\Delta),$$

hvor $L(\partial\Delta)$ er trekantens omkreds. Da $f_n \to f$ uniformt over $\partial\Delta$, kan højresiden blive vilkårligt lille, altså $\int_{\partial\Delta} f = 0$. Ifølge Morera's sætning er f holomorf i $K(a,r)$, og da cirkelskiven var vilkårlig, er $f \in \mathcal{H}(G)$.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Af Cauchy's integralformler følger, at der for $z_0 \in \overline{K(a,\frac{r}{2})}$ gælder

$$f_n'(z_0) - f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(a,r)} \frac{f_n(z)-f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz .$$

For $z_0 \in \overline{K(a,\frac{r}{2})}$ og $z \in \partial K(a,r)$ gælder $|(z-z_0)^2| \geq \left(\frac{r}{2}\right)^2$, hvoraf

$$|f_n'(z_0)-f'(z_0)| \leq \frac{2\pi r}{2\pi}\left(\frac{2}{r}\right)^2 \sup_{\partial K(a,r)} |f_n(z)-f(z)|,$$

hvilket viser, at $f_n' \to f'$ uniformt over $\overline{K(a,\frac{r}{2})}$.

Lad $K \subseteq G$ være kompakt. Vi har netop vist, at der til hvert $a \in G$ findes $r_a > 0$ så $f_n' \to f'$ uniformt over $\overline{K(a,r_a)}$. Endeligt mange af kuglerne $K(a,r_a)$ overdækker K, hvoraf det følger, at $f_n' \to f'$ uniformt over K. □

Sætningen i §1.4 om ledvis differentiation af en potensrække, er naturligvis et specialtilfælde af ovenstående.

4.4. Hele funktioner. Liouville's sætning.

En holomorf funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kaldes en hel funktion (eng. entire function). Polynomier, exp, sin, cos, sinh, cosh er hele funktioner. En hel funktion fremstilles for ethvert $z \in \mathbb{C}$ ved sin Taylorrække med vilkårligt centrum. Om hele funktioner findes en række dybtliggende sætninger, af hvilke vi uden bevis fremhæver:

PICARD's SÆTNING. For en ikke konstant hel funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er enten $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ eller $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ for passende $a \in \mathbb{C}$. Hvis f ikke er et polynomium, er $f^{-1}(\{w\})$ en uendelig mængde for alle $w \in \mathbb{C}$ på nær højst et.

Som illustration af sætningen kan man tænke på exp, hvor $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Picard's sætning viser, at en begrænset hel funktion må være konstant. Vi skal give et simpelt bevis for dette resultat.

LIOUVILLE's SÆTNING. En begrænset hel funktion er konstant.

Bevis. Antag, at $|f(z)| \le M$ for alle $z \in \mathbb{C}$. For $r > 0$ gælder da, ifølge Cauchy's integralformler

$$\left|f^{(n)}(0)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial K(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\,\frac{M}{r^{n+1}}\,2\pi r = \frac{M\cdot n!}{r^n} .$$

Ved at lade $r \to \infty$ ser man, at $f^{(n)}(0) = 0$ for alle $n \ge 1$, og påstanden følger af Taylorudviklingen for f. □

Dybden i Liouville's sætning antydes af, at den kan bruges til at give et enkelt bevis for algebraens fundamentalsætning:

Ethvert polynomium $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ af grad $n \ge 1$, har mindst en rod i $\mathbb{C}$.

Bevis. Antages, at $p(z) \ne 0$ for alle $z \in \mathbb{C}$, vil $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ være en hel funktion.

Vi har

$$p(z) = a_n z^n \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n}\right),$$

så

$$\frac{p(z)}{a_n z^n} \to 1 \qquad \text{for} \quad |z| \to \infty .$$

Der findes altså $r > 0$, så der for $|z| \geq r$ gælder

$$\left|\frac{p(z)}{a_n z^n}\right| \geq \frac{1}{2}$$

eller

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{2}{|a_n| r^n} \qquad \text{for} \quad |z| \geq r .$$

Idet $\frac{1}{|p(z)|}$ også er begrænset på den kompakte cirkelskive $\overline{K(0,r)}$, er $\frac{1}{p}$ altså en begrænset hel funktion og dermed konstant, hvilket er en modstrid. □

Opgaver til §4.

4.1. Lad $f \in H(G)$, og antag $f'(a) \neq 0$. Vis, at der findes $r > 0$, så $|f'(z)-f'(a)| < |f'(a)|$ for $z \in K(a,r) \subseteq G$. Vis, at for $z_1, z_2 \in K(a,r)$ gælder

$$f(z_2)-f(z_1) = (z_2-z_1)\int_0^1 f'(tz_2+(1-t)z_1)\,dt$$

og slut, at $f|K(a,r)$ er injektiv. Vi har altså vist: f er injektiv i en omegn af et punkt a hvor $f'(a) \neq 0$.
Giv et eksempel på en ikke injektiv holomorf funktion f med $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in \mathbb{C}$.

4.2. Find Taylor rækken med centrum $\frac{\pi}{4}$ for sin på følgende to måder: (i) Brug additionsformlen. (ii) Bestem koefficienterne ved differentiation.

4.3. Hvad er det største område G i hvilket $f(z) = 1/(1-z+z^2)$ er holomorf ? Vis, at $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ for $|z| < 1$, og at $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 0$ og $a_{n+3} = -a_n$, $n \geq 0$.

4.4. Udregn

$$\int_{\partial K(i,2)} \frac{e^z}{(z-1)^n}\,dz \quad \text{for} \quad n \geq 1 .$$

4.5. Lad $u: G \to \mathbb{R}$ være en harmonisk funktion i en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$. Vis, at hvis $\overline{K(a,r)} \subseteq G$, så er

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})\,d\theta \;.$$

4.6. Vis, at

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{og} \quad u(x,y) = x^2-y^2$$

er harmoniske funktioner i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ henholdsvis $\mathbb{R}^2$, og find de konjugerede harmoniske funktioner.

4.7. Lad (f_n) være en følge af holomorfe funktioner i en åben mængde G og antag, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_K |f_n(z)| < \infty$$

for enhver kompakt mængde $K \subseteq G$. Vis, at

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

er holomorf i G, og at $f'(z) = \sum_1^{\infty} f_n'(z)$, idet rækken konvergerer uniformt i enhver kompakt delmængde af G.

4.8. Lad K, L være kompakte mængder i $\mathbb{C}$ så $K \subseteq \mathring{L}$, og lad d være afstanden mellem K og $\mathbb{C} \setminus \mathring{L}$, dvs.

$$d = \inf\{|x-y| \mid x \in K, \ y \in \mathbb{C} \setminus \mathring{L}\} .$$

Gør rede for, at $d > 0$, og at der for enhver åben mængde $G \supseteq L$, og for enhver $f \in H(G)$ gælder

$$\sup_K |f'(z)| \leq \frac{1}{d} \sup_L |f(z)| .$$

<u>Vink</u>. Gør rede for at man kan bruge Cauchy's integralformel

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,d)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^2} d\xi \quad \text{for} \quad a \in K .$$

4.9. Lad f være en hel funktion, og antag at

$$|f(z)| \leq A + B|z|^n \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{C},$$

hvor $A,B \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Vis, at f er et polynomium af grad $\leq n$.

4.10. Lad f være en ikke konstant hel funktion. Vis (uden at benytte Picard's sætning), at $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$. (<u>Vink</u>. Antag $\overline{f(\mathbb{C})} \neq \mathbb{C}$, og forsøg at anvende Liouville's sætning).

4.11. Vis, at hvis f er en hel funktion og opfylder $f' = af$ for $a \in \mathbb{C}$, så findes $c \in \mathbb{C}$ så

$$f(z) = c\exp(az), \quad z \in \mathbb{C}.$$

4.12. Lad $\varphi \in H(G)$. Vis, at

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\varphi(z)}{n^2}\right)$$

definerer en holomorf funktion i G.

4.13. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og $G \subseteq \mathbb{C}$ en åben mængde. Antag at $f : X \times G \to \mathbb{C}$ opfylder

(i) $\forall x \in X$: $f(x,\cdot) \in H(G)$.

(ii) $\forall z \in G$: $f(\cdot,z) \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$.

(iii) $\exists g \in M^+(X,\mathbb{E})$ med $\int g\,d\mu < \infty$, så

$$|f(x,z)| \leq g(x) \quad \text{for} \quad x \in X,\ z \in G.$$

Vis, at

$$F(z) = \int_X f(x,z)\,d\mu(x), \quad z \in G$$

er holomorf i G, og

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{d^n}{dz^n} f(x,z)\,d\mu(x), \quad z \in G,\ n = 1,2,\cdots.$$

Vis herved, at hvis $f: [a,b] \times G \to \mathbb{C}$ er kontinuert og $f(x,\cdot) \in H(G)$ for alle $x \in [a,b]$, så er

$$F(z) = \int_a^b f(x,z)\,dx, \qquad z \in G$$

holomorf i G, og

$$F^{(n)}(z) = \int_a^b \frac{d^n}{dz^n} f(x,z)\,dx.$$

§5. Argument. Logaritme. Potens.

5.1. Argumentfunktion.

For $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ betegner $\arg z$ mængden af argumenter for z, altså mængden af tal $\theta \in \mathbb{R}$, så $z = |z|e^{i\theta}$. Hovedargumentet $\operatorname{Arg} z$ er det entydigt bestemte argument, der tilhører $[-\pi,\pi[$, altså

$$\operatorname{Arg} z \in \arg z \cap [-\pi,\pi[\,, \quad \arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi\mathbb{Z} \,.$$

Ved en argumentfunktion for en delmængde $G \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ forstås en funktion $\theta: G \to \mathbb{R}$, så $\theta(z) \in \arg z$ for $z \in G$, eller ensbetydende hermed $z = |z|e^{i\theta(z)}$ for $z \in G$.

Hovedargumentet Arg er en kontinuert argumentfunktion for den opskårne plan $\mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$. Dette er geometrisk klart, men følger også af at

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arccot} \frac{x}{y}, \quad \text{når } z = x+iy,\ y > 0\,,$$

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}, \quad \text{når } z = x+iy,\ x > 0\,,$$

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arccot} \frac{x}{y} - \pi, \text{ når } z = x+iy,\ y < 0\,,$$

hvoraf man ser, at Arg faktisk er C^∞ på den opskårne plan.

Tilsvarende kan vi for hvert reelt α bestemme en argumentfunktion $\operatorname{Arg}_\alpha$ for den opskårne plan $\mathbb{C}\setminus\{re^{i\alpha} \mid r \leq 0\}$ ved

$$\operatorname{Arg}_\alpha z \in \arg z \cap \,]\alpha-\pi,\alpha+\pi[\,.$$

Idet

$$\operatorname{Arg}_\alpha z = \operatorname{Arg}\left(e^{-i\alpha}z\right) + \alpha \quad \text{for } z \in \mathbb{C}\setminus\{re^{i\alpha} \mid r \leq 0\}\,,$$

er $\operatorname{Arg}_\alpha$ C^∞ på den opskårne plan.

Hvis $\theta: G \to \mathbb{R}$ er en kontinuert argumentfunktion for et område $G \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$, så er for hvert $p \in \mathbb{Z}$ også $\theta + 2\pi p$ en kontinuert argumentfunktion, og der er ikke andre. Hvis nemlig $\theta_1: G \to \mathbb{R}$ er en kontinuert argumentfunktion, vil $\varphi = \theta-\theta_1$ være en kontinuert afbildning af G ind i $2\pi\mathbb{Z}$. Hvis $z_0 \in G$ og $\varphi(z_0) = 2\pi p_0$, så er $\varphi^{-1}(\{2\pi p_0\})$ både åben og afsluttet relativt til G, da $\{2\pi p_0\}$ er både åben og afsluttet relativt til $2\pi\mathbb{Z}$, men så må $\varphi^{-1}(\{2\pi p_0\}) = G$ i henhold til det følgende lemma, som vi af hensyn til anvendelserne formulerer for $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$:

LEMMA. <u>Lad</u> $G \subseteq \mathbb{R}^k$ <u>være et område. De eneste delmængder</u> $A \subseteq G$, <u>som er både åbne og afsluttede relativt til</u> G, <u>er</u> $A = \emptyset$ <u>og</u> $A = G$.

<u>Bevis</u>. Antages $A \neq \emptyset$ og $A \neq G$ kan vi vælge $a \in A$ og $b \in G \setminus A$ og en kontinuert kurve $\gamma: [0,1] \to G$, så $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Da $\gamma^{-1}(A)$ er afsluttet relativt til $[0,1]$, og da $1 \notin \gamma^{-1}(A)$, må $\alpha = \sup \gamma^{-1}(A)$ opfylde $\alpha < 1$, $\alpha \in \gamma^{-1}(A)$. Da $\gamma^{-1}(A)$ også er åben relativt til $[0,1]$, findes et $\varepsilon > 0$ så $[\alpha, \alpha+\varepsilon[\subseteq \gamma^{-1}(A)$, men det strider mod definitionen af α. □

5.2. <u>Logaritmefunktion</u>.

Idet $\exp(x+iy) = e^x e^{iy}$ ser man, at en vandret linie $y = \alpha$ afbildes bijektivt på halvlinien $\{re^{i\alpha} \mid r > 0\}$, og dermed afbildes enhver vandret strimmel

$$\{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Im} z < a+2\pi\}$$

bijektivt på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. For $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ findes der altså uendelig mange løsninger $w \in \mathbb{C}$ til ligningen $\exp w = z$, og hvis $w = u+iv$ ser man, at $e^u = |z|$, $v \in \arg z$. Løsningsmængden er altså

$$\log|z| + i \arg z = \{\log|z| + iv \mid v \in \arg z\},$$

og den betegnes $\log z$. Den værdi af $\log z$, der svarer til hovedargumentet for z, kaldes <u>hovedlogaritmen</u> og betegnes $\operatorname{Log} z$, altså

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z,$$

og den er den omvendte funktion til restriktionen af $\exp$ til strimlen $\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi \leq \operatorname{Im} z < \pi\}$.

For et positivt tal r, kan $\log r$ altså betyde enten tallet $\operatorname{Log} r$ eller den uendelige mængde $\operatorname{Log} r + 2\pi i\mathbb{Z}$, men normalt vil denne tvetydighed ikke give anledning til misforståelser.

Ved en <u>logaritmefunktion</u> for en delmængde $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ forstås en funktion $\ell: G \to \mathbb{C}$, så $\ell(z) \in \log z$ for $z \in G$, altså så $\exp(\ell(z)) = z$ for $z \in G$. Hvis α er en argumentfunktion for G, så er $\ell(z) = \log|z| + i\alpha(z)$ en logaritmefunktion for G, og hvis ℓ er en logaritmefunktion for G, så er $\alpha = \operatorname{Im}\ell$ en argumentfunktion for G. Heraf ses, at et område $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ har en kontinuert argumentfunktion, netop hvis det har en kontinuert logaritmefunktion. I stedet for argument- eller logaritmefunktion siger man også en <u>gren af argumentet</u> eller <u>af logaritmen</u>.

For $\alpha \in \mathbb{R}$, er

$$\exp: \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha-\pi < \operatorname{Im} z < \alpha+\pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} \mid r \leq 0\}$$

en bijektiv kontinuert afbildning, og den omvendte afbildning er

$$\operatorname{Log}_\alpha z = \log|z| + i \operatorname{Arg}_\alpha(z) ,$$

som er kontinuert. Ifølge bemærkningen efter Sætning 2 i §1.1, er $\operatorname{Log}_\alpha$ holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} \mid r \leq 0\}$, og den afledede er

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log}_\alpha z = \frac{1}{\exp(\operatorname{Log}_\alpha z)} = \frac{1}{z} .$$

Funktionen $\operatorname{Log}_\alpha$ er altså en holomorf gren af logaritmen i den opskårne plan $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} \mid r \leq 0\}$, og er der en stamfunktion til $1/z$.

Mere almindeligt gælder:

SÆTNING 1. <u>Lad</u> $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ <u>være et område. Hvis der findes en kontinuert argumentfunktion</u> α <u>for</u> G, <u>så er</u>

$$\ell(z) = \log|z| + i\alpha(z), \ z \in G$$

<u>en holomorf gren af logaritmen, og den er en stamfunktion til</u> $1/z$, <u>dvs.</u>

$$\ell'(z) = \frac{1}{z} \quad \underline{\text{for}} \quad z \in G .$$

<u>Ethvert enkeltsammenhængende område</u> $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ <u>har en kontinuert argumentfunktion</u>.

BEMÆRKNING. For $p \in \mathbb{Z}$ er også $\ell(z) + 2p\pi i$ en holomorf gren af logaritmen på G, og der er ikke andre. Endda enhver kontinuert logaritmefunktion ℓ_1 for G har denne form, idet $\operatorname{Im} \ell_1$ er en kontinuert argumentfunktion for G, og dermed lig med $\alpha + 2p\pi$ for et $p \in \mathbb{Z}$.

<u>Bevis for sætningen</u>. Til $z_0 \in G$ findes $r > 0$, så $K(z_0,r) \subseteq G$, og det er tilstrækkeligt at vise, at ℓ er holomorf i $K(z_0,r)$. Den ved $\operatorname{Arg}_{\alpha(z_0)}$ bestemte kontinuerte gren af argumentet for $\mathbb{C} \setminus \{r \exp(i\alpha(z_0)) \mid r \leq 0\}$ er specielt en kontinuert argumentfunktion for $K(z_0,r)$. Idet $\alpha | K(z_0,r)$ også er en kontinuert argumentfunktion for $K(z_0,r)$, og de begge har værdien $\alpha(z_0)$ i z_0, kan vi slutte, at

$$\operatorname{Arg}_{\alpha(z_0)}(z) = \alpha(z) \qquad \text{for} \quad z \in K(z_0,r),$$

altså

$$\operatorname{Log}_{\alpha(z_0)}(z) = \ell(z) \qquad \text{for} \quad z \in K(z_0,r),$$

hvilket viser, at ℓ er holomorf i $K(z_0,r)$ og $\ell'(z) = 1/z$.

Hvis G er enkeltsammenhængende har $1/z$ en stamfunktion $f \in H(G)$ ifølge en sætning i §3.1, og idet en stamfunktion er bestemt på nær addition af en konstant, kan vi tænke os f valgt, så der for et forelagt $z_0 \in G$ gælder $f(z_0) \in \log z_0$. Funktionen $\varphi(z) = z \exp(-f(z))$ er holomorf i G, og $\varphi'(z) = \exp(-f(z))(1-zf'(z)) = 0$, $\varphi(z_0) = 1$. Dette viser, at $\varphi \equiv 1$, men så er f en holomorf gren af logaritmen, og $\operatorname{Im} f$ er en kontinuert argumentfunktion for G. □

SÆTNING 2. <u>For</u> $|z| < 1$ <u>gælder potensrækkeudviklingen</u>

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \cdots .$$

Bevis. Funktionen $f(z) = \mathrm{Log}(1+z)$ er holomorf i $G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq -1\}$, og idet $f'(z) = (1+z)^{-1}$ ser man, at $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+z)^{-n}$. Dermed bliver Taylor rækken med centrum 0 givet ved

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n ,$$

og dens sum er lig med $\mathrm{Log}(1+z)$ i $K(0,1)$, som er den største åbne cirkelskive i G med centrum 0. □

5.3. Potens.

Potenser z^{α}, hvor $z,\alpha \in \mathbb{C}$, defineres for $z \neq 0$ ved $z^{\alpha} = \exp(\alpha \log z)$, og dermed er z^{α} i almindelighed en uendelig mængde, f.eks.

$$i^i = e^{i \log i} = \left\{ e^{-\frac{\pi}{2} - 2p\pi} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Vi er interesseret i holomorfe grene af potensfunktionen. Hvis ℓ er en holomorf gren af logaritmen for et område $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, så er $\exp(\alpha\ell(z))$ en holomorf gren af z^{α} med den afledede

$$\alpha\ell'(z)\exp(\alpha\ell(z)) = \frac{\alpha}{z}\exp(\alpha\ell(z)) = \alpha \exp((\alpha-1)\ell(z)) ,$$

idet $\exp(\ell(z)) = z$. Disse formler er uoverskuelige, og man tillader sig derfor - praktisk men ukorrekt - at skrive

$$\frac{d}{dz} z^{\alpha} = \alpha z^{\alpha-1} ,$$

idet man tænker sig z^{α} som en eller anden holomorf gren.

Idet $\mathrm{Log}(1+z)$ er en holomorf funktion i den opskårne plan $G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq -1\}$, er $z \mapsto \exp(\alpha \mathrm{Log}(1+z))$ en holomorf gren af $(1+z)^{\alpha}$ i G. Vi vil finde dens potensrækkeudvikling med centrum 0.

SÆTNING. (Binomialrækken). Lad $\alpha \in \mathbb{C}$. For $|z| < 1$ gælder

$$(1+z)^{\alpha} = \exp(\alpha \mathrm{Log}(1+z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n ,$$

idet

$$\binom{\alpha}{0} = 1 , \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{for} \quad n \geq 1 .$$

Bevis. Den største åbne cirkelskive i G med centrum 0 er $K(0,1)$. For $z \in G$ har man

$$\frac{d}{dz}(1+z)^{\alpha} = \alpha(1+z)^{\alpha-1} ,$$

og ved gentagen anvendelse heraf

$$\left[\frac{d^n}{dz^n}(1+z)^{\alpha}\right]_{z=0} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) .$$

Påstanden i sætningen følger nu af sætningen i §4.1. □

Lad $f \in H(G)$ og antag, at f er nulpunktsfri, dvs. at $f(z) \neq 0$ for alle $z \in G$. Hvis $f(G)$ er indeholdt i et enkeltsammenhængende område $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, kan vi uden problem opskrive holomorfe grene af $\log f$ og f^{α}, $\alpha \in \mathbb{C}$, nemlig $\ell \circ f$ og $\exp(\alpha\ell)$, hvor ℓ er en holomorf logaritme for Ω. Selv om denne betingelse på $f(G)$ ikke er opfyldt kan man undertiden alligevel finde en holomorf gren. F.eks. er $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, og $z \curvearrowright z$ er jo en holomorf gren af $\log e^z$.

Der gælder følgende:

SÆTNING 2. Om et område $G \subseteq \mathbb{C}$ er følgende betingelser ensbetydende:

(a) G er enkeltsammenhængende.

(b) For enhver $f \in H(G)$ og enhver lukket vej γ i G gælder

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0 .$$

(c) Enhver $f \in H(G)$ har en stamfunktion.

(d) Enhver nulpunktsfri $f \in H(G)$ har en holomorf logaritme, dvs. en funktion $\ell \in H(G)$ så $\exp \ell = f$.

(e) Enhver nulpunktsfri $f \in H(G)$ har en holomorf kvadratrod, dvs. en funktion $g \in H(G)$ så $g^2 = f$.

<u>Bevis</u>.

(a) $\Rightarrow$ (b) er Cauchy's integralsætning.

(b) $\Rightarrow$ (c) er indeholdt i Sætning 1 i §2.2.

(c) $\Rightarrow$ (d) ses således: Hvis $f \in H(G)$ er nulpunktsfri, så er $f'/f \in H(G)$, og den har ifølge (c) en stamfunktion ℓ, der endda kan vælges så $\ell(z_0) \in \log f(z_0)$ for givet $z_0 \in G$. Funktionen $\varphi = f\exp(-\ell)$ opfylder $\varphi' \equiv 0$, $\varphi(z_0) = 1$, så der gælder $\varphi \equiv 1$, hvilket viser, at $\ell \in H(G)$ er en logaritme til f.

(d) $\Rightarrow$ (e). Hvis ℓ er en holomorf logaritme til den nulpunktsfrie funktion $f \in H(G)$, så er $g = \exp(\frac{1}{2}\ell)$ en holomorf kvadratrod til f.

(e) $\Rightarrow$ (a). Denne implikation er vanskelig. Den beror på, at man i tilfældet $G \neq \mathbb{C}$ kan finde $\varphi \in H(G)$ som afbilder G bijektivt på $K(0,1)$, hvilket hænger sammen med

RIEMANN's AFBILDNINGSSÆTNING. <u>Lad</u> G <u>være et enkeltsammenhængende område forskelligt fra</u> $\mathbb{C}$. <u>Så findes en bijektiv holomorf funktion</u> $\varphi: G \to K(0,1)$.

BEMÆRKNINGER. Beviset for Riemann's sætning og implikationen (e) $\Rightarrow$ (a) kan findes i Rudin's bog: Real and complex analysis.

Den omvendte funktion φ^{-1} er ligeledes holomorf (§1.1). Man kalder derfor en sådan afbildning for <u>biholomorf</u>.

Da (a) $\Leftrightarrow$ (b), er enkeltsammenhæng både en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at Cauchy's integralsætning gælder.

Når G er enkeltsammenhængende, og $f \in H(G)$ er nulpunktsfri, findes ikke blot en holomorf kvadratrod, men en holomorf gren af f^α for hvert $\alpha \in \mathbb{C}$, nemlig $\exp(\alpha\ell)$, hvor ℓ er en holomorf gren af logaritmen til f.

Opgaver til §5.

5.1. 1° Vis, at enhver kontinuert funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ har en kontinuert argumentfunktion $\theta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, dvs. en kontinuert funktion, så $\theta(x) \in \arg f(x)$ for alle $x \in [a,b]$.

Vink. Vis først påstanden, hvis der findes $\alpha \in \mathbb{R}$ så $f([a,b]) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} \mid r \leq 0\}$ og vis, at man kan reducere til dette tilfælde ved at udnytte den uniforme kontinuitet.

2° Vis, at hvis θ er en kontinuert argumentfunktion for f, så er samtlige sådanne af formen $\theta + 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, og vis derved, at tallet $\operatorname{argvar}(f) = \theta(b) - \theta(a)$ er uafhængigt af den valgte kontinuerte argumentfunktion θ for f. Tallet kaldes argumentvariationen for den kontinuerte kurve med parameterfremstilling f.

3° Vis, at hvis $f\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er parameterfremstilling for en lukket kontinuert kurve, så er $\operatorname{argvar}(f)/2\pi$ et helt tal, kaldet kurvens omløbstal om 0.

4° Lad $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ være parameterfremstilling for en lukket kontinuert kurve. For hvert $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ betegner $\operatorname{Ind}(\gamma,z)$ kurvens omløbstal om z, dvs. omløbstallet om 0 for kurven $t \mapsto \gamma(t) - z$.
Vis, at $\operatorname{Ind}(\gamma,z)$ er en kontinuert funktion af z, som derfor er konstant i hver sammenhængskomponent af $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$.

5.2. Vis, at $\log(x^2+y^2)$ er harmonisk i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, og at $\operatorname{Arctan} \frac{y}{x}$ er harmonisk i $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

5.3. Idet summen af to delmængder $A,B \subseteq \mathbb{C}$ defineres som

$$A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\},$$

skal man vise, at der for $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gælder

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$
$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2.$$

Vis, at hvis $\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2 > 0$, så er

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 ,$$
$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 ,$$

og vis ved eksempler, at de to sidste ligninger ikke kan opretholdes for vilkårlige $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5.4. Find billedet af den opskårne plan $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ under den holomorfe gren af $z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$ når $0 < \alpha < 1$.

5.5. (Her benyttes opg.4.13). Lad Ω betegne den opskårne plan $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$.

1° Vis, at

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x+z} = 1$$

ligeligt for z i kompakte delmængder af Ω (dvs. for enhver kompakt delmængde $K \subseteq \Omega$, og ethvert $\varepsilon > 0$ findes $x_0 > 0$, så

$$\left|1 - \frac{x+1}{x+z}\right| < \varepsilon \quad \text{for} \quad x > x_0,\ z \in K.)$$

2° Vis ved hjælp heraf, at der til en kompakt delmængde $K \subseteq \Omega$ findes en konstant $M_K > 0$, så

$$\left|\frac{x+1}{x+z}\right| \leq M_K \quad \text{for} \quad x \geq 0,\ z \in K .$$

3° Lad μ være et Borel mål på $[0,\infty[$ så

$$\int_0^\infty \frac{d\mu(x)}{x+1} < \infty .$$

Vis, at der ved fastsættelsen

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{d\mu(x)}{x+z} , \quad z \in \Omega$$

defineres en holomorf funktion i Ω med egenskaberne

(i) $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, $z \in \Omega$,

(ii) $\operatorname{Im} f(z) \leq 0$ når $\operatorname{Im} z > 0$,

(iii) $f \geq 0$, $f' \leq 0$, $f'' \geq 0$, $f''' \leq 0, \cdots$ på $]0,\infty[$,

(iv) $f(\Omega) \subseteq \Omega$, bortset fra tilfældet $\mu = 0$, hvor $f(\Omega) = \{0\}$.

(Funktionen f kaldes den Stieltjes transformerede af målet μ).

5.6. Lad G være åben og antag, at $f \in H(G)$ er nulpunktsfri. Vis, at $\log|f|$ er en harmonisk funktion i G.

5.7. Vis, at $\sqrt{z}$ har to værdier for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, og at $\cos\sqrt{z}$ giver en afbildning af $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$. Vis, at denne afbildning er holomorf, og find potensrækken med centrum 0.

§6. Residuesætningen for meromorfe funktioner.

6.1. Nulpunkter.

SÆTNING 1. Lad f være holomorf i et område G og antag, at $a \in G$ er et nulpunkt for f, dvs. $f(a) = 0$.

Enten er $f^{(n)}(a) = 0$ for $n = 1,2,\cdots$, og i så fald er $f(z) = 0$ for alle $z \in G$,

eller også findes et mindste $n \geq 1$, så $f^{(n)}(a) \neq 0$.

I sidste tilfælde kaldes a et nulpunkt af n'te orden, og funktionen

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-a)^n}, & z \in G \setminus \{a\} \\[2ex] \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}, & z = a \end{cases},$$

er holomorf i G og opfylder $f(z) = (z-a)^n g(z)$, $z \in G$.

Bevis. Mængden

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left\{ z \in G \mid f^{(n)}(z) = 0 \right\}$$

er afsluttet relativt til G, da $f^{(n)}$ er kontinuert for alle n. For $z_0 \in A$ er Taylor rækken med centrum z_0 lig nulrækken, og derfor er $f(z) = 0$ for alle z i den største åbne cirkelskive $K(z_0,\rho) \subseteq G$. Dermed er $K(z_0,\rho) \subseteq A$, men dette viser, at A er åben i $\mathbb{C}$ og dermed åben relativt til G. Ifølge lemmaet i §5.1 er enten $A = G$ eller $A = \emptyset$, og det svarer netop til de to alternativer i sætningen.

Hvis andet tilfælde indtræffer, så gælder

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = (z-a)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+n)}(a)}{(k+n)!}(z-a)^k$$

for z i den største åbne cirkelskive $K(a,\rho) \subseteq G$. Funktionen

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-a)^n} & \text{for } z \in G \setminus \{a\} \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+n)}(a)}{(k+n)!}(z-a)^k & \text{for } z \in K(a,\rho) \end{cases}$$

er veldefineret på grund af (1) og holomorf i G, og den opfylder

$$f(z) = (z-a)^n g(z), \; z \in G \quad \text{og} \quad g(a) = f^{(n)}(a)/n! \neq 0 . \qquad \square$$

Sætningen viser, at ordenen af et nulpunkt a for $f \not\equiv 0$ er det største n, for hvilket der gælder en faktorisering $f(z) = (z-a)^n g(z)$ med $g \in H(G)$. Hvis $f(a) \neq 0$, kan det være bekvemt at sige, at f har et nulpunkt af orden 0 i a.

COROLLAR. Antag, at f er holomorf i et område G og lad $Z(f) = \{a \in G \mid f(a) = 0\}$ være mængden af nulpunkter for f. Et af følgende alternativer indtræffer:

(i) $Z(f) = \emptyset$, dvs. f er nulpunktsfri.

(ii) $Z(f) = G$, dvs. f er nulfunktionen.

(iii) Hvert nulpunkt $a \in Z(f)$ er isoleret, dvs. der findes $r > 0$ så $f(z) \neq 0$ for $z \in K'(a,r)$, og $Z(f)$ er en endelig eller numerabel mængde.

Bevis. Hvis $f(a) = 0$ og $f \not\equiv 0$, så viser ligningen $f(z) = (z-a)^n g(z)$ med $g(a) \neq 0$, at $g(z) \neq 0$ i en tilstrækkelig lille cirkelskive $K(a,r)$, men dermed er $f(z) \neq 0$ for $z \in K'(a,r)$. At $Z(f)$ er tællelig er en konsekvens af følgende lemma, hvorved corollaret er bevist. $\square$

LEMMA. Lad G være et område i $\mathbb{C}$. Hvis $P \subseteq G$ ikke har fortætningspunkt i G, så er P afsluttet relativt til G og tællelig.

Bevis. Da $z \in G \setminus P$ ikke er fortætningspunkt for P er det heller ikke kontaktpunkt, og dermed er P afsluttet relativt til G. Til hvert $a \in P$ findes $r_a > 0$ så $K(a,r_a)$ kun indeholder endelig mange punkter fra P. Hvis $K \subseteq G$ er kompakt, kan den åbne overdækning $\{K(a,r_a) \mid a \in K \cap P\}$ af den kompakte mængde $K \cap P$ udtyndes til en endelig overdækning, men dermed er $K \cap P$ endelig.

Enhver åben delmængde $G \subseteq \mathbb{C}$ er foreningsmængde af numerabelt mange kompakte mængder, nemlig f.eks. af mængderne

$$K_n = \left\{z \in \overline{K(0,n)} \mid d(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \frac{1}{n}\right\} , \quad n = 1,2,\cdots ,$$

hvis $G \neq \mathbb{C}$, ellers sættes $K_n = \overline{K(0,n)}$. Dermed er P foreningsmængde af numerabelt mange endelige mængder. □

Man kan omvendt vise, at hvis $P \subseteq G$ er en vilkårlig mængde uden fortætningspunkt i G, så findes $f \in H(G)$, så $Z(f) = P$, og man kan endda vælge f så nulpunkterne har forelagte vilkårlige multipliciteter (multiplicitet lig med orden).

EKSEMPLER. Eksponentialfunktionen er nulpunktsfri i $\mathbb{C}$. Funktionen $\sin z$ har i $\mathbb{C}$ de numerabelt mange nulpunkter $z = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. Funktionen $\sin(1/z)$ er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, og har nulpunkterne $(p\pi)^{-1}$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, som har 0 som fortætningspunkt, men indenfor $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ er nulpunktsmængden uden fortætningspunkt.

Analogt gælder naturligvis, at for $\lambda \in \mathbb{C}$ er mængden $\{z \in G \mid f(z) = \lambda\}$ enten $\emptyset$, G eller tællelig bestående af isolerede punkter. Dette ses ved at anvende nulpunktsresultatet på den holomorfe funktion $f-\lambda$. Det er væsentligt, at G er sammenhængende. Hvis $G = K(0,1) \cup K(2,1)$ kan vi opnå at $f \in H(G)$, ved at sætte $f = 0$ i den ene kugle, og $f = 1$ i den anden.

SÆTNING 2. (<u>Identitetssætningen for holomorfe funktioner</u>). <u>Hvis to holomorfe funktioner</u> f,g <u>i et område</u> G <u>stemmer overens i en delmængde</u> $A \subseteq G$, <u>som har et fortætningspunkt i</u> G, <u>da er</u> $f(z) = g(z)$ <u>for alle</u> $z \in G$.

<u>Bevis</u>. Nulpunktsmængden $Z(f-g)$ kan altså ikke bestå af isolerede punkter fra G, men så er $Z(f-g) \neq G$. □

Sætningen anvendes hyppigt ved, at det f.eks. vides, at $\mathbb{R} \cap G \neq \emptyset$, og at $f(x) = g(x)$ for alle $x \in \mathbb{R} \cap G$. Idet $\mathbb{R} \cap G$ må indeholde et ikke udartet interval, kan man slutte at $f = g$.

EKSEMPEL. Alle de sædvanlige trigonometriske formler gælder også for komplekse tal for så vidt som de indgående udtryk er holomorfe. F.eks. er $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ for alle $z \in \mathbb{C}$. Venstre og højre side er nemlig holomorfe i $\mathbb{C}$ og stemmer overens for reelle z.

6.2. Isolerede singulariteter.

DEFINITION. Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $a \in G$. Hvis $f \in H(G \setminus \{a\})$, kaldes a en isoleret singularitet. Hvis f kan tillægges en kompleks værdi i a så f bliver holomorf i G, siges singulariteten at være hævelig.

Hvis $f \in H(G)$ og $f \not\equiv 0$, så er den reciprokke funktion $1/f$ holomorf i $G \setminus Z(f)$, og alle punkter $a \in Z(f)$ er isolerede singulariteter.

SÆTNING 1. Antag, at $f \in H(G \setminus \{a\})$, og at f er begrænset i $K'(a,r)$ for et $r > 0$. Så har f en hævelig singularitet i a.

Bevis. Vi definerer $h(a) = 0$ og $h(z) = (z-a)^2 f(z)$ for $z \in G \setminus \{a\}$. Så er h klart holomorft i $G \setminus \{a\}$, og for $z \neq a$ har vi

$$\frac{h(z)-h(a)}{z-a} = (z-a)f(z) ,$$

som har grænseværdien 0 for $z \to a$, idet f er antaget begrænset i en udprikket cirkelskive.

Dette viser, at $h \in H(G)$ og $h'(a) = 0$, så ifølge Sætning 1 i §6.1 findes $g \in H(G)$, så $h(z) = (z-a)^2 g(z)$ for $z \in G$. Dermed er g en holomorf udvidelse af f til G, hvilket viser, at singulariteten i a er hævelig. □

F.eks. har $\frac{\sin z}{z}$ en hævelig singularitet for $z = 0$, idet $\lim_{z\to 0} \sin z/z = 1$.

Hvis f i punktet a har en isoleret singularitet, der ikke er hævelig, så er $f(K'(a,r))$ altså ubegrænset uanset hvor lille r er. Specielt kan $f(z)$ ikke have nogen grænseværdi for $z \to a$. Det er da nærliggende at undersøge, om $(z-a)^m f(z)$ har en hævelig singularitet for $m \in \mathbb{N}$ passende stor. I så fald kaldes a en pol.

DEFINITION. En isoleret singularitet a kaldes en <u>pol af orden</u> $m \in \mathbb{N}$ for f, hvis $(z-a)^m f(z)$ har en grænseværdi for $z \to a$, og

$$\lim_{z\to a} (z-a)^m f(z) \neq 0 .$$

En pol af orden en kaldes en <u>simpel pol</u>.

Ordenen af en pol a er entydigt fastlagt, thi hvis

$$\lim_{z\to a} (z-a)^m f(z) = c \neq 0$$

så vil $\lim_{z\to a} (z-a)^k f(z) = 0$ for $k > m$, medens $(z-a)^k f(z)$ ikke har nogen grænseværdi for $z \to a$, når $k < m$. Bemærk også, at $|f(z)| \to \infty$ for $z \to a$ idet $|z-a|^m |f(z)| \to |c|$.

Antag nu, at $f \in H(G \setminus \{a\})$ har en pol af orden m i punktet a. Funktionen

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^m f(z) & , \quad z \in G \setminus \{a\} \\ \lim_{z\to a} (z-a)^m f(z) & , \quad z = a \end{cases}$$

er da holomorf i G, og har en potensrække

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

i den største åbne cirkelskive $K(a,\rho) \subseteq G$. Dermed gælder

$$(2) \qquad f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^m} + \frac{a_1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k}(z-a)^k , \quad z \in K'(a,\rho).$$

Funktionen

$$p\left(\frac{1}{z-a}\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{m-k}}{(z-a)^k} , \qquad \text{hvor} \quad p(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{m-k} z^k ,$$

kaldes <u>den principale del</u> af f i a.

Når man fra f trække den principale del, får man en holomorf funktion med en hævelig singularitet i a. Singulariteten er altså "koncentreret" i den principale del.

En isoleret singularitet, der hverken er hævelig eller en pol, kaldes en <u>væsentlig</u> <u>singularitet</u>. I omegnen af en sådan singularitet, er f's opførsel meget kompliceret. Der gælder <u>Picard's sætning</u>: For ethvert $r > 0$ så $K(a,r) \subseteq G$ er billedmængden $f(K'(a,r))$ enten hele $\mathbb{C}$, eller $\mathbb{C}$ på nær et punkt.

Vi nøjes her med at vise et svagere, men alligevel overraskende resultat:

CASORATI-WEIERSTRASS' SÆTNING. <u>Hvis</u> $f \in H(G \setminus \{a\})$ <u>har en væsentlig singularitet i</u> a, <u>så er</u> $f(K'(a,r))$ <u>overalt tæt i</u> $\mathbb{C}$ <u>for ethvert</u> $r > 0$ <u>så</u> $K(a,r) \subseteq G$.

<u>Bevis</u>. Hvis påstanden ikke er rigtig, kan vi finde $r > 0$ og en kugle $K(c,\varepsilon) \subseteq \mathbb{C}$, så

$$K(c,\varepsilon) \cap f(K'(a,r)) = \emptyset$$

altså $|f(z)-c| \geq \varepsilon$ for $z \in K'(a,r)$. Dermed er $g(z) = 1/(f(z)-c)$ holomorf i $K'(a,r)$, og begrænset ved $1/\varepsilon$. Ifølge Sætning 1 har g en hævelig singularitet i a, så g kan tillægges en værdi $g(a)$ i a, og dermed blive holomorf i $K(a,r)$.

Hvis $g(a) \neq 0$ har vi $\lim_{z\to a} f(z) = c + \frac{1}{g(a)}$, altså har f en hævelig singularitet i a i strid med antagelsen.

Hvis $g(a) = 0$, har g et nulpunkt af orden $m \geq 1$ i a, og ifølge Sætning 1 i §6.1 findes $g_1 \in H(K(a,r))$ så

$$g(z) = (z-a)^m g_1(z), \quad g_1(a) \neq 0 .$$

Af udtrykket $f(z) = c+1/g(z)$ finder vi

$$\lim_{z\to a} (z-a)^m f(z) = \lim_{z\to a}\left((z-a)^m c + \frac{1}{g_1(z)}\right) = \frac{1}{g_1(a)} \neq 0 ,$$

hvilket betyder, at f har en pol af orden m i a, men dette er også i strid med antagelsen. □

EKSEMPEL. For en hel funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er $\varphi(z) = f(1/z)$ holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Der foreligger da tre tilfælde:

(i) φ har en hævelig singularitet i 0. Specielt findes $M > 0$ og $r > 0$ så $|\varphi(z)| \leq M$ for $z \in K'(0,r)$, altså $|f(z)| \leq M$ for $|z| > 1/r$, men f er også begrænset på den kompakte cirkelskive $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1/r\}$. Af Liouville's sætning følger, at f er konstant.

(ii) φ har en pol af orden m. I følge (2) findes $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$, $c_m \neq 0$ så

$$\varphi(z) - \sum_{k=1}^{m} c_k z^{-k}$$

har en hævelig singularitet i 0. Den hele funktion

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} c_k z^{k}$$

falder altså under tilfældet (i), og er derfor konstant, dvs. f er et polynomium af grad m.

(iii) φ har en væsentlig singularitet. Men ser, at Picard's sætning medfører Picard's sætning om hele funktioner (§4.4).

Man siger, at den hele funktion f har henholdsvis en hævelig singularitet i ∞, en pol af orden m i ∞ og en væsentlig singularitet i ∞ i de tre tilfælde, der altså svarer til henholdsvis de konstante funktioner, polynomierne af grad m og de hele funktioner, der ikke er polynomier. Disse sidste kaldes <u>hele transcendente funktioner</u>.

Funktionerne $\sin(\frac{1}{z})$, $\exp(\frac{1}{z})$ er holomorfe i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, og har væsentlige singulariteter i 0.

6.3. <u>Meromorfe funktioner</u>.

En holomorf funktion, der ikke har andre isolerede singulariteter end poler og hævelige, kaldes en meromorf funktion. Idet det er naturligt at tillægge funktionen værdien ∞ i polerne, kan vi præcisere begrebet på følgende måde:

DEFINITION. Ved en <u>meromorf</u> funktion i et område $G \subseteq \mathbb{C}$ forstås en afbildning $h: G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ med egenskaberne:

(i) $P = \{z \in G \mid h(z) = \infty\}$ har ikke fortætningspunkt i G.

(ii) Restriktionen $f = h|(G \setminus P)$ er holomorf i den åbne mængde $G \setminus P$.

(iii) Ethvert punkt $a \in P$ er pol for f.

Det bemærkes, at polmængden P for f er afsluttet relativt til G ifølge lemmaet p.6.2.

En holomorf funktion i G er meromorf med $P = \emptyset$.

Vi vil nu vise, hvorledes en kvotient f/g af to holomorfe funktioner $f,g \in H(G)$, $g \not\equiv 0$, definerer en meromorf funktion h i G.

Hvis $f \equiv 0$ sættes $h \equiv 0$, så vi kan antage at $f \not\equiv 0$.

Idet $Z(g)$ er en afsluttet tællelig mængde uden fortætningspunkt i G er $h = f/g$ holomorf i $G \setminus Z(g)$, og alle punkterne i $Z(g)$ er isolerede singulariteter for h. Hvis $a \in Z(g)$ er et nulpunkt af orden $q \geq 1$ for g, og et nulpunkt af orden $p \geq 0$ for f, har vi fremstillinger

$$f(z) = (z-a)^p f_1(z), \quad g(z) = (z-a)^q g_1(z),$$

hvor $f_1, g_1 \in H(G)$ og $f_1(a), g_1(a)$ er begge forskellig fra nul, hvoraf

$$h(z) = (z-a)^{p-q} \frac{f_1(z)}{g_1(z)}$$

for $z \in K'(a,r)$, hvor r er så lille, at g_1 er nulpunktsfri i $K(a,r)$. Hvis $p \geq q$ har h altså en hævelig singularitet i a, og a er et nulpunkt af orden $p-q$. Hvis $p < q$ har h en pol af orden $m = q-p$, og vi sætter $h(a) = \infty$. Dette viser, at h er en meromorf funktion, hvis polmængde er de $a \in Z(g)$, hvor ordenen som nævnernulpunkt er større end ordenen som tællernulpunkt.

Hvis $h: G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ er meromorf og $a \in G$ er en pol af orden m, så er $f(z) = (z-a)^m h(z)$ holomorf i en passende cirkelskive $K(a,r)$, altså $h(z) = f(z)/(z-a)^m$ i $K'(a,r)$. Enhver meromorf funktion h er altså lokalt en kvotient af holomorfe funktioner, men dette gælder endda globalt: Der findes $f,g \in H(G)$, $g \not\equiv 0$ så $h = f/g$. Hvis P er polmængden for h, så findes nemlig, som omtalt i §6.1, en holomorf funktion $g \in H(G)$ med $Z(g) = P$, og g kan vælges, så ordenen af hvert nulpunkt $a \in Z(g)$ er lig med ordenen af polen a for h. Funktionen hg er holomorf i $G \setminus P$, men med hævelige singulariteter i punkterne af P. Der findes altså $f \in H(G)$, så $f = hg$ i $G \setminus P$, og dermed er $h = f/g$.

Man kan på naturlig måde addere og multiplicere to meromorfe funktioner $h_1, h_2: G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, idet sum og produkt er holomorfe udenfor den samlede polmængde, men visse af polerne kan vise sig at være hævelige singulariteter for summen eller produktet. Hvis h er meromorf og ikke nulfunktionen, så er den reciprokke funktion $1/h$ også meromorf. Nulpunkterne for h af orden n er poler for $1/h$ af orden n, og polerne for h af orden m er nulpunkter af orden m for $1/h$. Man overbeviser sig nu let om, at mængden af meromorfe funktioner i området G er et kommutativt legeme. Fremstillingen $h = f/g$ af en vilkårlig meromorf funktion som kvotient af holomorfe funktioner viser, at legemet af meromorfe funktioner er isomorft med brøklegemet for integritetsområdet $H(G)$ (jvfr.Opg.6.2).

En meromorf funktion, der er kvotient af to polynomier, kaldes en rational funktion. En sådan har kun endelig mange poler.

Lad $h: G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ være en meromorf funktion med polmængde P, og lad a være en pol af orden m. Hvis vi fra h trækker den principale del i a, så får vi en meromorf funktion φ i G med polmængde $P \setminus \{a\}$, altså

$$h(z) = \frac{c_m}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{c_1}{z-a} + \varphi(z),$$

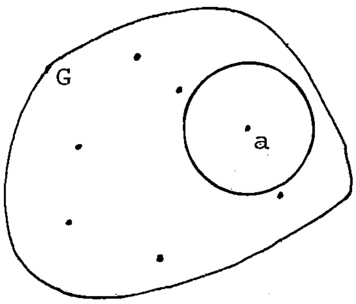
hvor φ er holomorf i $G \setminus (P \setminus \{a\})$, specielt i en omegn af a. Koefficienten c_1 til $(z-a)^{-1}$ kaldes residuet af h i punktet a og betegnes $\mathrm{Res}(h,a)$. Hvis a er en simpel pol, er residuet $\neq 0$.

SÆTNING. Residuet i punktet a af den meromorfe funktion $h: G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ er givet ved

$$\mathrm{Res}(h,a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r)} h(z)\,dz ,$$

hvor $r > 0$ er vilkårlig opfyldende $\overline{K(a,r)} \subseteq G \setminus (P \setminus \{a\})$.

Bevis.



For hvert af de betragtede r gælder

$$\int_{\partial K(a,r)} \varphi(z)\,dz = 0$$

på grund af Cauchy's integralsætning, anvendt på den største åbne cirkelskive $K(a,\rho) \subset G \setminus (P \setminus \{a\})$, og da $(z-a)^{-k}$ har en stamfunktion når $k \geq 2$, får vi

$$\int_{\partial K(a,r)} h(z)\,dz = c_1 \int_{\partial K(a,r)} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i\, c_1 . \qquad \square$$

Residuer er indført af Cauchy. Det er den rest (= résidu på fransk), der bliver tilbage, bortset fra faktoren $2\pi i$, når funktionen h integreres rundt om singulariteten. Ifølge §3.2 kan vi erstatte cirklen $\partial K(a,r)$ med andre simple lukkede veje, der løber en gang rundt om singulariteten.

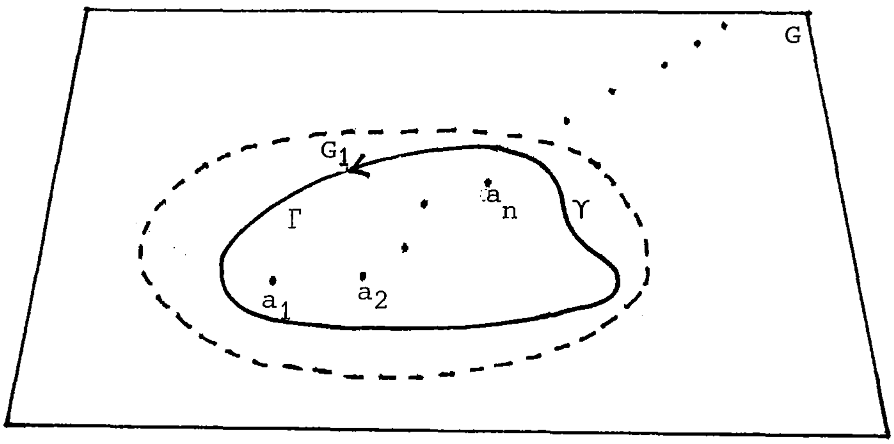
6.4. Residuesætningen.

Vi vil nu formulere og bevise Cauchy's residuesætning, der på grund af dens mange anvendelser vel nok er en af den komplekse funktionsteoris vigtigste sætninger. Man ser, at den indeholder både Cauchy's integralsætning og integralformel.

CAUCHY's RESIDUESÆTNING. Lad h være en meromorf funktion i et åbent enkeltsammenhængende område G, og lad P være polmængden. Hvis γ er en simpel lukket vej i $G \setminus P$, som omslutter polerne $a_1, \cdots, a_n$, så er

$$\int_\gamma h(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(h,a_i) .$$

Bevis. I beviset vil vi gøre brug af følgende egenskaber ved G og γ, som klart vil være opfyldt i konkrete anvendelser: Den simple vej γ omslutter et begrænset område Γ. Der findes et enkeltsammenhængende område $G_1 \subseteq G$ så $\gamma^* \cup \Gamma \subseteq G_1$, og så G_1 ikke indeholder andre af h's poler end $a_1, \cdots, a_n$.



Et bevis for disse påstande bygger på Jordans kurvesætning og en nøjere analyse af enkeltsammenhæng, som vil blive for vidtløftig her.

Lad p_i betegne den principale del af h i punktet a_i, $i=1,\cdots,n$. Så har $\varphi = h-(p_1 + \cdots + p_n)$ en hævelig singularitet i hvert af punkterne $a_1, \cdots, a_n$, og kan derfor udvides til en holomorf funktion i $G \setminus (P \setminus \{a_1, \cdots, a_n\})$, specielt er $\varphi \in H(G_1)$, så vi fra Cauchy's integralsætning ved $\int_\gamma \varphi = 0$, altså

$$\int_\gamma h = \sum_{i=1}^{n} \int_\gamma p_i .$$

Den principale del p_i er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{a_i\}$. Af ideerne i §3.2 følger at

$$\int_\gamma p_i = \int_{\partial K(a_i,r)} p_i ,$$

hvor r er tilstrækkelig lille, men af den principale del p_i, vil kun leddet $c/(z-a_i)$ give et bidrag $\neq 0$, nemlig $2\pi i \cdot c$, og $c = \mathrm{Res}(h,a_i)$ ifølge definitionen, og dermed er sætningen vist. $\square$

Inden vi giver eksempler på anvendelser af residuesætningen, vil vi give en række simple anvisninger på at udregne residuer. Vi antager, at $h = \frac{f}{g}$ er meromorf med en pol i a og vil udregne $\mathrm{Res}(h,a)$:

1° h har en simpel pol i a. Så er $\mathrm{Res}(h,a) = \lim\limits_{z\to a}(z-a)h(z)$.

I en omegn af a har man nemlig

$$h(z) = \frac{\mathrm{Res}(h,a)}{z-a} + \varphi(z) ,$$

hvor φ er holomorf.

2° Antag $f(a) \neq 0$, $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$. Så er $\mathrm{Res}(h,a) = \dfrac{f(a)}{g'(a)}$.

Vi ved, at h har en simpel pol i a, så af 1° fås

$$\mathrm{Res}(h,a) = \lim_{z\to a} f(z)\frac{z-a}{g(z)} = \lim_{z\to a} f(z)\left(\frac{g(z)-g(a)}{z-a}\right)^{-1} = \frac{f(a)}{g'(a)} .$$

3° Antag, at h har en pol af orden $m \geq 1$ i a. Så er

$$\mathrm{Res}(h,a) = \frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} ,$$

hvor $\varphi(z) = (z-a)^m h(z)$, så φ har en hævelig singularitet i a.

Vi har nemlig

$$\varphi(z) = c_m + c_{m-1}(z-a) + \cdots + c_1(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m + \cdots$$

i en omegn af a, hvor $c_1 = \mathrm{Res}(h,a)$, og heraf følger påstanden.

EKSEMPLER. (i) Residuet af den rationale funktion $z \rightsquigarrow 1/(1+z^2)$ i punkterne $z = \pm i$, er $\mp \frac{i}{2}$. Dette følger af 2^o, men også umiddelbart af omskrivningen

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2(z+i)} - \frac{i}{2(z-i)} .$$

(ii) Den meromorfe funktion $z \rightsquigarrow 1/\sin z$ har en simpel pol for $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Residuet for $z = n\pi$ er $1/\cos(n\pi) = (-1)^n$.

(iii) Funktionen

$$h(z) = \frac{z \sin z}{1-\cos z}$$

er meromorf i $\mathbb{C}$. Nævnerens nulpunkter er $2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, som alle er dobbelte nulpunkter. Tælleren har et dobbelt nulpunkt for $z = 0$, og simple nulpunkter for $z = p\pi$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Heraf følger, at $z = 0$ er en hævelig singularitet, og $z = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ er simple poler.

For at finde værdien i den hævelige singularitet $z = 0$ udvikles tæller og nævner i potensrække ved hjælp af de kendte potensrækker for $\sin$ og $\cos$.

$$h(z) = \frac{z\left(z - \frac{z^3}{3!} + - \cdots\right)}{\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + - \cdots} = \frac{1 - \frac{z^2}{3!} + - \cdots}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + - \cdots} \to 2 \quad \text{for} \quad z \to 0 .$$

Residuet i $2p\pi$, $p \neq 0$ findes ved at sætte $w = z-2p\pi$ og udnytte, at $\sin$ og $\cos$ er periodiske. For $w \to 0$ finder vi

$$\operatorname{Res}(h,2p\pi) = \lim_{z\to 2p\pi} (z-2p\pi)h(z) = \lim_{w\to 0} \frac{w(w+2p\pi)\sin w}{1-\cos w} = 4p\pi .$$

(iv) $h(z) = z^2(z^2+1)^{-2}$ er en rational funktion med poler af orden 2 i punkterne $z = \pm i$. Sættes

$$\varphi(z) = (z-i)^2 h(z) = \frac{z^2}{(z+i)^2} ,$$

er

$$\varphi'(z) = \frac{2iz}{(z+i)^3} ,$$

så $\mathrm{Res}(h,i) = \varphi'(i) = -\frac{i}{4}$. Analogt findes $\mathrm{Res}(h,-i) = \frac{i}{4}$.

6.5. Anvendelser af residuesætningen.

Residuesætningen kan benyttes til at beregne antallet af nulpunkter og poler for en meromorf funktion.

SÆTNING 1. Lad $h: G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ være meromorf i et enkeltsammenhængende område G, og lad γ være en simpel lukket vej i G, der ikke går igennem nogen af h's nulpunkter og poler. Så er

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz$$

lig med antallet af nulpunkter minus antallet af poler for h i det delområde af G som γ omslutter. Ved udregningen tælles et nulpunkt eller en pol af orden m som tallet m.

Bevis. Lad D være mængden af nulpunkter eller poler for h. Så er h'/h holomorf i $G \setminus D$. Vi vil se, at h'/h er meromorf med polmængde D. Betegner a et nulpunkt for h af orden n, har vi i en vis cirkelskive $K(a,r)$

$$h(z) = a_n(z-a)^n + a_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots, \quad a_n \neq 0,$$

altså

$$h'(z) = n\, a_n (z-a)^{n-1} + (n+1)a_{n+1}(z-a)^n + \cdots,$$

hvilket viser, at h'/h har en simpel pol i a med residuet n. Betegner a en pol for h af orden m, har vi i en vis udprikket cirkelskive $K'(a,r)$

$$h(z) = a_{-m}(z-a)^{-m} + a_{-(m-1)}(z-a)^{-(m-1)} + \cdots, \quad a_{-m} \neq 0,$$

altså

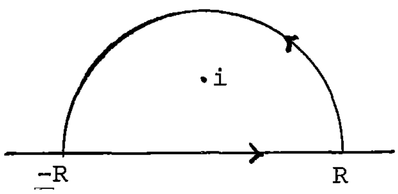
$$h'(z) = -m\, a_{-m}(z-a)^{-(m+1)} - (m-1)a_{-(m-1)}(z-a)^{-m} - \cdots,$$

hvilket viser, at h'/h har en simpel pol i a med residuet $-m$. Sætningen følger nu umiddelbart af residuesætningen. □

Residuesætningen kan benyttes til udregning af integraler. En ide til udregning af $\int f(x)dx$ når $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ kan groft skitseret være: Man vælger en lukket vej γ i $\mathbb{C}$, der indeholder $[-R,R]$, f.eks. en halvcirkel eller et rektangel, og betragter en meromorf funktion F, som stemmer overens med f på den reelle akse (sædvanligvis skal man bare skrive $f(z)$ i stedet for $f(x)$). Integralet af f fra $-R$ til R plus integralet over resten af vejen er $2\pi i$ multipliceret med summen af residuerne. Lader man $R \to \infty$, vil bidraget over "resten af vejen" ofte gå mod 0, og i grænsen finder man det søgte integral.

EKSEMPEL 1. Lad os finde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx .$$



Vi lægger halvcirklen $\varphi(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$ i den øvre halvplan, og sammen med intervallet $[-R,R]$ har vi en simpel lukket vej. For $R > 1$ omslutter vejen polen $z = i$ for den meromorfe funktion $f(z) = z^2/(z^2+1)^2$, som har residuet $-i/4$ for $z = i$, jvfr. Eksempel (iv) i §6.4. Altså har vi

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_0^{\pi} \frac{R^2e^{2it}}{(1+R^2e^{2it})^2}\, Rie^{it}dt = 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2} .$$

Den numeriske værdi af integranden i $\int_0^{\pi}\cdots$ er

$$\frac{R^3}{|1+R^2e^{2it}|^2} \le \frac{R^3}{(R^2-1)^2} ,$$

så det andet integral er højst

$$\pi \frac{R^3}{(R^2-1)^2} ,$$

som går mod 0 for $R \to \infty$. Vi finder dermed

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Generelt gælder

SÆTNING 2. <u>Lad</u> f <u>være en rational funktion</u>

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n}, \qquad a_m \neq 0,\ b_n \neq 0,$$

<u>og antag, at</u> $n \geq m+2$, <u>og at</u> f <u>ikke har nogen poler på den reelle akse. Så er</u> $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ <u>og</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f,z_j),$$

<u>hvor</u> $z_1,\cdots,z_k$ <u>er polerne i den øvre halvplan</u>.

<u>Bevis</u>. Idet

$$\lim_{|z|\to\infty} z^{n-m} f(z) = \frac{a_m}{b_n}$$

findes $R_0 > 0$, så

$$|z|^{n-m}|f(z)| \leq M = \frac{|a_m|}{|b_n|} + 1 \quad \text{for} \quad |z| \geq R_0,$$

eller

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad \text{for} \quad |z| \geq \max(1,R_0).$$

Da f er kontinuert på $\mathbb{R}$, viser denne ulighed, at f er Lebesgue integrabel. Hvis $R > 0$ vælges større end $\max(1,R_0)$ og så stor, at $K(0,R)$ indeholder alle f's poler i den øvre halvplan, så har vi

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(Re^{i\theta})\, i\, Re^{i\theta}\,d\theta = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f,z_j),$$

men det andet integral er numerisk begrænset af $\pi R(M/R^2)$, som går mod 0 for $R \to \infty$, og sætningen er bevist. □

BEMÆRKNING. Hvis $w_1,\cdots,w_m$ er f's poler i den nedre halvplan, ses analogt at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f,w_j).$$

Metoden fra Sætning 2 kan også anvendes på andre funktioner end rationale. Det afgørende er, at

$$\max_{0\le t\le\pi} |f(Re^{it})| \to 0 \quad \text{for} \quad R \to \infty .$$

SÆTNING 3. <u>Lad f være meromorf i $\mathbb{C}$ uden poler på den reelle akse og med kun endelig mange poler</u> $z_1,\cdots,z_k$ <u>i den øvre halvplan. Hvis</u>

$$\max_{0\le t\le\pi} |f(Re^{it})| \to 0 \quad \text{for} \quad R \to \infty$$

<u>så vil</u>

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f(z)e^{i\lambda z},z_j) \quad \text{for} \quad \lambda > 0 .$$

<u>Bevis</u>. Vi betragter en simpel lukket vej bestående af $[-R,R]$ og halvcirklen $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \ge 0$, og betragter kun så store R, at vejen omslutter alle polerne $z_1,\cdots,z_k$. Cauchy's residuesætning anvendt på $f(z)e^{i\lambda z}$ giver da

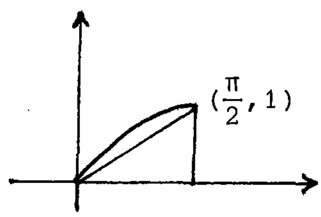
$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\lambda x}dx + \int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{i\lambda Re^{it}} iRe^{it}dt =$$

$$2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\lambda z},z_j\right) .$$

Det andet integral kan numerisk vurderes op ved

$$I = \max_{0\le t\le\pi} |f(Re^{it})| \int_0^{\pi} Re^{-\lambda R\sin t}dt ,$$

men idet $\sin t \ge \frac{2}{\pi}t$ for $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, får man med $a = 2\lambda R/\pi$



$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda R\sin t}dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R\sin t}dt \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-at}dt$$

$$= \frac{2}{a}\left(1 - e^{-a\frac{\pi}{2}}\right) \le \frac{2}{a} = \frac{\pi}{\lambda R} ,$$

altså

$$I \leq \frac{\pi}{\lambda} \max_{0 \leq t \leq \pi} |f(Re^{it})| ,$$

som går mod 0 for $R \to \infty$, og sætningen er bevist. □

Funktionen f behøver ikke være integrabel. Hvis den er integrabel er

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{i\lambda x}dx = \int f(x)e^{i\lambda x}dx$$

den Fourier transformerede af f i punktet $-\lambda$.

EKSEMPEL 2. Vi vil udregne, at

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x \sin \lambda x}{x^2+1}\, dx = \pi\, e^{-\lambda} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 .$$

Funktionen $f(z) = z/(z^2+1)$ er meromorf med polerne $z = \pm i$, og $\operatorname{Res}(f(z)e^{i\lambda z}, i)$ er $\frac{1}{2}e^{-\lambda}$. Idet

$$\max_{0 \leq t \leq \pi} |f(Re^{it})| \leq \frac{R}{R^2-1} \quad \text{for} \quad R > 1 ,$$

er betingelserne i Sætning 3 opfyldt, så

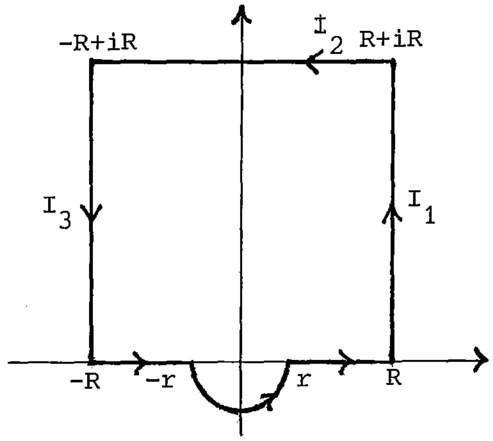
$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x\, e^{i\lambda x}}{x^2+1}\, dx = \pi i\, e^{-\lambda} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 ,$$

og tages imaginærdelen, fås det ønskede.

EKSEMPEL 3. Vi vil udregne, at

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi .$$

Lad $f(z) = e^{iz}/z$. Så har f en simpel pol for $z = 0$ med residue 1. Vi integrerer f rundt langs figuren med positiv omløbsretning og får $2\pi i$ af residuesætningen. Den lille halvcirkel med parameterfremstilling



$$c_r(t) = r\,e^{it},\ t\in[-\pi,0]$$

giver bidraget

$$\int_{c_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{c_r} \frac{dz}{z} + \int_{c_r} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz = i\pi + \alpha(r),$$

men da

$$\varphi(z) = \frac{e^{iz}-1}{z} \to i \quad \text{for} \quad z \to 0$$

vil

$$|\alpha(r)| \le \pi r \max_{-\pi\le t\le 0} |\varphi(re^{it})| \to 0 \quad \text{for} \quad r \to 0,$$

altså

$$\lim_{r\to 0} \int_{c_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = i\pi .$$

Integralet I_1 langs den lodrette side $z = R+it,\ t \in [0,R]$ er

$$I_1 = \int_0^R \frac{e^{iR-t}}{R+it}\,i\,dt$$

så

$$|I_1| \le \int_0^R \frac{e^{-t}}{R}\,dt \le \frac{1}{R}\int_0^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{R} \to 0 \quad \text{for} \quad R \to \infty .$$

Integralet I_2 langs den øverste side $z = -t+iR,\ t\in[-R,R]$ er

$$I_2 = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{-it-R}}{-t+iR}\,dt$$

så

$$|I_2| \le e^{-R}\int_{-R}^{R} \frac{dt}{R} = 2e^{-R} \to 0 \quad \text{for} \quad R \to \infty .$$

Integralet I_3 langs den lodrette side $z = -R+i(R-t)$, $t \in [0,R]$ er

$$I_3 = -i\int_0^R \frac{e^{-iR+t-R}}{-R+i(R-t)}\,dt$$

så

$$|I_3| \le \frac{1}{R}\int_0^R e^{t-R}dt \le \frac{1}{R} \to 0 \quad \text{for} \quad R \to \infty .$$

Idet

$$I_1+I_2+I_3 + \int_{-R}^{-r} + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx + i\pi + \alpha(r) = 2\pi i ,$$

får vi ved at tage imaginærdelen og lade $r \to 0$

$$\operatorname{Im}(I_1+I_2+I_3) + \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi .$$

Ved dernæst at lade $R \to \infty$, fås

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi .$$

Med en lidt farlig symbolik kan skrives

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi , \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} .$$

Idet $\sin x/x$ ikke er integrabel, jvfr.Opg.II.5.14, skal disse uegentlige integraler opfattes som grænseværdier.

Et integral af formen

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\,dt$$

kan ofte med fordel omskrives til et kurveintegral

$$\int_{\partial K(0,1)} f\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\ \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right) \frac{1}{iz}\,dz$$

ved at $z = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ er en parameterfremstilling for cirklen. Kurveintegralet udregnes ved residuesætningen.

EKSEMPEL 4. Udregn

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} \quad \text{for} \quad a > 1 .$$

Vi finder

$$I(a) = \int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{iz(a+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))} = -2i \int_{\partial K(0,1)} \frac{dz}{z^2+2az+1} .$$

Nævnerpolynomiet har rødderne $p = -a + \sqrt{a^2-1}$, $q = -a - \sqrt{a^2-1}$, hvoraf $q < -1 < p < 0$. I området $K(0,1)$ har integranden altså den simple pol $z = p$ med residuet

$$\left[\frac{1}{2z+2a}\right]_{z=p} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}},$$

hvoraf

$$I(a) = (-2i)(2\pi i)\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Som en sidste anvendelse af residuesætningen vil vi bestemme <u>partialbrøk fremstillingen</u> for $1/\sin z$.

SÆTNING 4. <u>For</u> $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ <u>gælder</u>

$$\frac{1}{\sin z} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^p}{z-p\pi} = \frac{1}{z} + 2z\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{z^2-p^2\pi^2}$$

<u>i den forstand, at</u>

$$\sum_{p=-m}^{n}\frac{(-1)^p}{z-p\pi} \to \frac{1}{\sin z} \quad \text{for} \quad n,m \to \infty$$

<u>uniformt for</u> z <u>i enhver begrænset delmængde af</u> $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

<u>Bevis</u>. For $a \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ betragtes

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)\sin z}$$

som har simple poler for $z = a$ og $z = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$ med residuerne

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{\sin a}, \quad \operatorname{Res}(f,p\pi) = \frac{(-1)^p}{p\pi-a}.$$

Vi integrerer langs randen af rektanglet

$$F_{n,m} = \{z=x+iy \mid -(m+\tfrac{1}{2})\pi \le x \le (n+\tfrac{1}{2})\pi,\ |y| \le n+m\},$$

hvor $n,m \in \mathbb{N}$ vælges så store, at $a \in \overset{\circ}{F}_{n,m}$. Vi har da

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F_{n,m}} \frac{dz}{(z-a)\sin z} = \frac{1}{\sin a} - \sum_{p=-m}^{n}\frac{(-1)^p}{a-p\pi},$$

og sætningen er vist, når vi har godtgjort at $I \to 0$ for $n,m \to \infty$, uniformt for a tilhørende en begrænset delmængde af $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Ved udregning fås

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y .$$

På de lodrette sider af $F_{n,m}$ har vi

$$|\sin z| = \cosh y = \tfrac{1}{2}(e^{y}+e^{-y}) \geq \tfrac{1}{2}\, e^{|y|} ,$$

altså

$$\frac{1}{|\sin z|} \leq 2\, e^{-|y|} .$$

På de vandrette sider $y = \pm(n+m)$ af $F_{n,m}$ har vi

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 (n+m) + \cos^2 x \sinh^2 (n+m)$$
$$\geq (\sin^2 x+\cos^2 x)\sinh^2(n+m) = \sinh^2(n+m) ,$$

altså

$$\frac{1}{|\sin z|} \leq \frac{1}{\sinh(n+m)} .$$

Heraf fås

$$|I| \leq \frac{1}{2\pi} \sup\left\{ \frac{1}{|z-a|} \;\middle|\; z \in \partial F_{n,m} \right\} \left(4 \int_{-(n+m)}^{n+m} e^{-|y|} dy + 2\pi \frac{n+m+1}{\sinh(n+m)} \right) ,$$

men idet

$$4 \int_{-(n+m)}^{n+m} e^{-|y|} dy = 8 \int_0^{n+m} e^{-y} dy \leq 8 \quad \text{og} \quad \frac{x+1}{\sinh x} \leq \frac{3}{\sinh 2} \quad \text{for} \quad x \geq 2 ,$$

findes en konstant K, der ikke afhænger af n og m, så

$$|I| \leq K \sup\left\{ \frac{1}{|z-a|} \;\middle|\; z \in \partial F_{n,m} \right\} ,$$

hvilket viser det ønskede. □

Opgaver til §6.

6.1. Lad G være et område i $\mathbb{C}$ og antag, at $f \in H(G)$ kun har endelig mange nulpunkter i G. Vis, at der findes et polynomium $p(z)$ og en nulpunktsfri funktion $\varphi \in H(G)$, så $f(z) = p(z)\varphi(z)$ for $z \in G$.

6.2. Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben. Vis, at ringen $H(G)$ er et integritetsområde, hvis og kun hvis G er sammenhængende. (En kommutativ ring kaldes et integritetsområde, hvis man af $ab = 0$ kan slutte at $a = 0$ eller $b = 0$).

6.3. Spejlingsprincippet.

1° Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben, og $f \in H(G)$. Den i x-aksen spejlede mængde og spejlede funktion defineres ved

$$G^* = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in G\}$$

$$f^*: G^* \to \mathbb{C}, \quad f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}, \quad z \in G^*.$$

Vis, at $f^* \in H(G^*)$.

2° Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være et område som er spejlingsinvariant, dvs. $G = G^*$. Vis, at $G \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Vis dernæst, at hvis $f \in H(G)$ er reel på $G \cap \mathbb{R}$, så er f spejlingsinvariant, dvs. $f = f^*$ eller

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad \text{for alle} \quad z \in G.$$

3° Vis, at en hel funktion $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ er spejlingsinvariant hvis og kun hvis $a_n \in \mathbb{R}$ for $n=0,1,\cdots$.

6.4. Bestem $a \in \mathbb{C}$ så $\sin z - z(1+az^2)\cos z$ får et nulpunkt af femte orden for $z = 0$.

6.5. Antag, at $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ er meromorf med endelig mange poler $z_1, \cdots, z_n$ og antag, at der findes $k > 0$, $N \in \mathbb{N}$ og $R > 0$ så $|h(z)| \leq k\,|z|^N$ for $|z| > R$. Vis, at h er en rational funktion. (Vink. Benyt Opg.4.9.)

6.6. Find polerne, deres orden og de tilhørende residuer for $f(z) = 1/(e^{z^2} - 1)$.

6.7. (Opgaven bygger på 6.3.) Lad $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ være en meromorf funktion med polmængde P. Vis, at hvis $h(\mathbb{R} \setminus P) \subseteq \mathbb{R}$, så gælder

(i) $h(\overline{z}) = \overline{h(z)}$ for $z \in \mathbb{C} \setminus P$.

(ii) Hvis a er en pol af orden m, så er også $\overline{a}$ en pol af orden m, og hvis den principale del i a er

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{(z-a)^j},$$

så er

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\overline{c_j}}{(z-\overline{a})^j}$$

den principale del i $\overline{a}$.

(iii) Vis, at $\operatorname{Res}(h,\overline{a}) = \overline{\operatorname{Res}(h,a)}$ for $a \in P$.

6.8. Lad $f,g \in H(G)$ og antag, at f har et nulpunkt af orden $n > 0$ i $a \in G$, og at g har et nulpunkt af orden $n+1$ i a. Vis, at

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g},a\right) = (n+1)\,\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n+1)}(a)}.$$

6.9. Lad $h\colon G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ være meromorf i det enkeltsammenhængende område G, og lad $\varphi \in H(G)$. Lad γ være en simpel lukket vej i G, der ikke går gennem nogen af h's nulpunkter og poler, og antag, at γ omslutter nulpunkterne $a_1,\dots,a_p$ og polerne $b_1,\dots,b_q$ for h, hver angivet så ofte som ordenen angiver. Vis, at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\,\varphi(z)\,dz = \sum_{j=1}^{p}\varphi(a_j) - \sum_{j=1}^{q}\varphi(b_j).$$

6.10. Vis, at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(0,n+\frac{1}{2})} z^{2k}\cot(\pi z)\,dz = 2\sum_{j=1}^{n} j^{2k}$$

for $n,k \in \mathbb{N}_0$.

6.11. Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad , \quad \int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4} \; .$$

6.12. Udregn, at $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{3}$.

6.13. Udregn, at $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi x}}{x^2-2x+2}\,dx = -\pi e^{-\pi}$.

6.14. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{a+\cos x}\,dx = 2\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)$ for $a > 1$.

6.15. Vis, at

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{2n} \, , \qquad n \geq 1 \; .$$

(Vink. Integrer langs randen af et cirkeludsnit $z = |z|e^{i\theta}$, $|z| \leq R$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$).

6.16. Udregn, at

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)} \qquad \text{for} \quad 0 < a < 1 \; .$$

(Vink. Integrer langs randen af et rektangel med vinkelspidser i punkterne $z = \pm R$, $z = \pm R + 2\pi i$).

6.17. Vis, at

$$\int_0^\infty x^{4n+3} e^{-x} \sin x \, dx = 0 \quad \text{for} \quad n = 0,1,2,\cdots .$$

(Vink. Integrer $f(z) = z^{4n+3} e^{-z}$ langs randen af cirkeludsnittet $z = |z| e^{i\theta}$, $0 \leq |z| \leq R$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$).
Vis, at

$$\int_0^\infty t^n e^{-\sqrt[4]{t}} \sin \sqrt[4]{t} \, dt = 0 , \quad n = 0,1,2,\cdots .$$

(For hvert $c \in [-1,1]$ betragtes Borelmålet μ_c på $[0,\infty[$ med tæthedsfunktionen
$(1+c \sin \sqrt[4]{t}) e^{-\sqrt[4]{t}}$ med hensyn til Lebesgue målet. Formlen viser, at alle målene μ_c har de samme momenter. Dette er Stieltjes' eksempel på et indetermineret momentproblem).

6.18. Vis partialbrøk fremstillingen

$$\cot z = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=-n}^{n} \frac{1}{z-p\pi} , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} .$$

(Vink. For $a \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ integreres $f(z) = \dfrac{\cot z - 1/z}{z(z-a)}$ rundt langs $F_{n,n}$.)

værdi uanset fra hvilken retning, man nærmer sig z_0. Dermed er den retningsafledede af f i z_0 i retningen $e^{i\theta}$ lig med $f'(z_0)e^{i\theta}$. En funktion, der er kompleks differentiabel i alle punkter af en åben mængde, kaldes <u>holomorf</u> i mængden.

Teorien for holomorfe funktioner blev fuldstændigt udviklet i det 19. århundrede, især af Cauchy, Riemann og Weierstrass, og den indeholder en mængde smukke og slående resultater, der ofte afviger væsentligt fra sætninger om tilsvarende begreber i reel analyse.

I studiet af f.eks. kontinuitet, målelighed og integrabilitet har vi set, at disse egenskaber ved en funktion med komplekse værdier suverænt afgøres af de tilsvarende egenskaber ved funktionens real- og imaginærdel.

Det vil være katastrofalt at tro, at dette princip kan overføres til holomorfi. Det viser sig nemlig, at en reel funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ på et område kun er holomorf, når den er konstant.

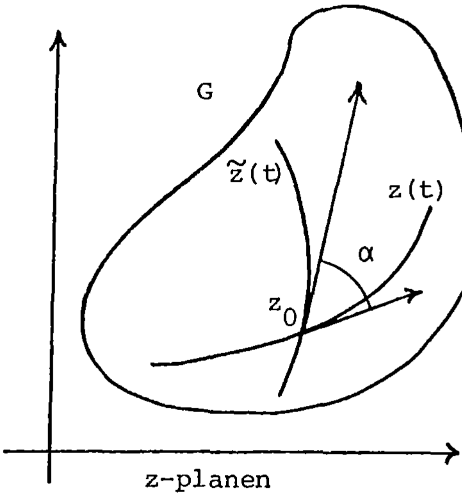
Ekstra kopier
af sider med figurer

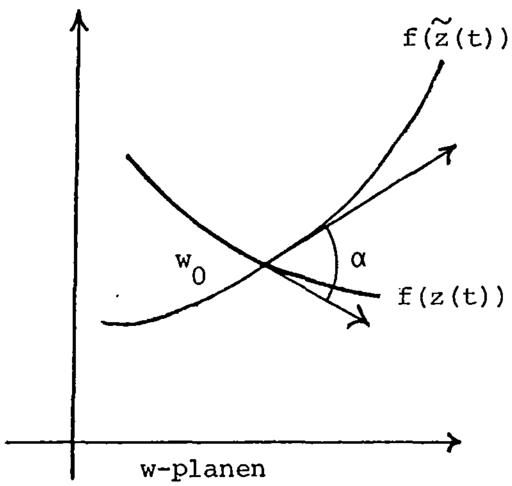
Hvis man ved, at $f'(z_0) \neq 0$ og $f^{\circ -1}$ er kontinuert i $w_0 = f(z_0)$, er det trivielt, at $f^{\circ -1}$ er differentiabel i w_0 med den anførte differentialkvotient. Thi hvis $w_n = f(z_n) \to w_0$, vil $z_n \to z_0$, og

$$\frac{f^{\circ -1}(w_n) - f^{\circ -1}(w_0)}{w_n - w_0} = \frac{z_n - z_0}{f(z_n) - f(z_0)} \to \frac{1}{f'(z_0)} .$$

1.2. Differentiabilitetens geometriske betydning når $f'(z_0) \neq 0$.

Lad der være givet en holomorf funktion $w = f(z)$ defineret i en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$, og antag, at $z_0 \in G$, $f(z_0) = w_0$.





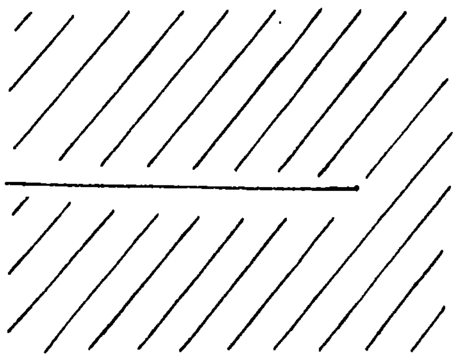
Lad os betragte en differentiabel kurve $z: I \to G$ i G gennem z_0. Der findes altså t_0 i intervallet I, så $z(t_0) = z_0$. Ved f afbildes $z(t)$ i en differentiabel kurve $f(z(t))$ gennem w_0. Hvis $z'(t_0) \neq 0$, har $z(t)$ en tangent i z_0, som er parallel med $z'(t_0)$ opfattet som vektoren $(\operatorname{Re} z'(t_0), \operatorname{Im} z'(t_0))$. En parameterfremstilling af tangenten kan f.eks. skrives

$$z_0 + uz'(t_0), \quad u \in \mathbb{R} .$$

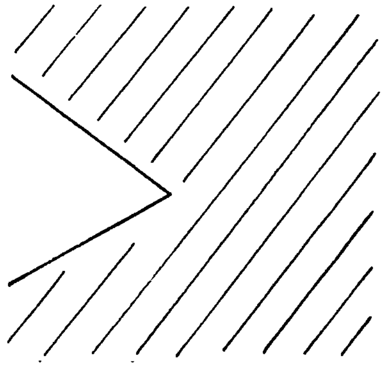
Idet $f'(z_0) \neq 0$ er $(f \circ z)'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0$, så billedkurven har en tangent i w_0 med parameterfremstillingen

$$w_0 + uf'(z_0)z'(t_0), \quad u \in \mathbb{R} .$$

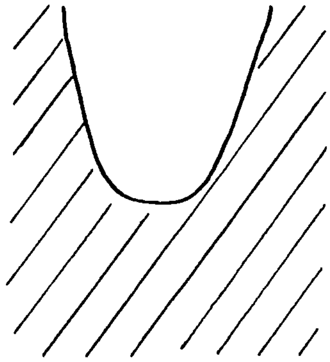
A



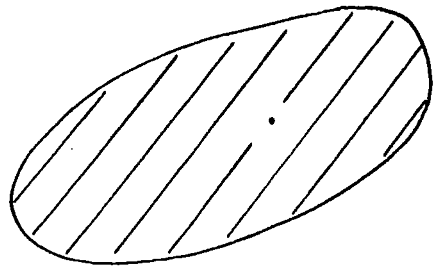
B



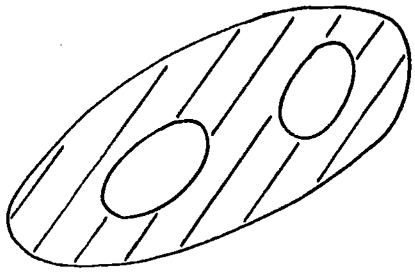
C



D



E



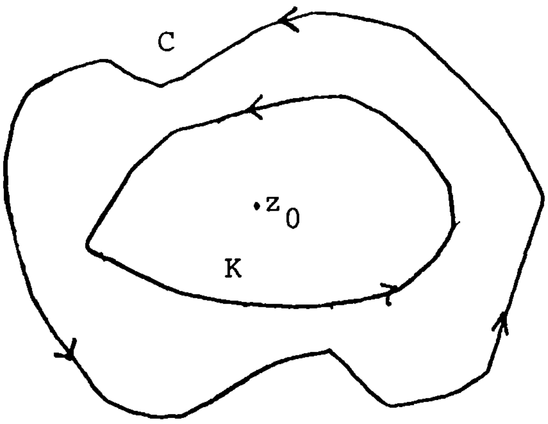
Fjernes en halvlinie fra $\mathbb{C}$ fås et område, der er stjerneformet omkring ethvert punkt på den modsatte halvlinie (eks.A). Et vinkelrum er stjerneformet (eks.B). Området udenfor en parabel (eks.C) er enkeltsammenhængende, men ikke stjerneformet. Fjernes et punkt (eks.D) eller en eller flere lukkede cirkelskiver (eks.E) fra et åbent område fås et ikke enkeltsammenhængende område.

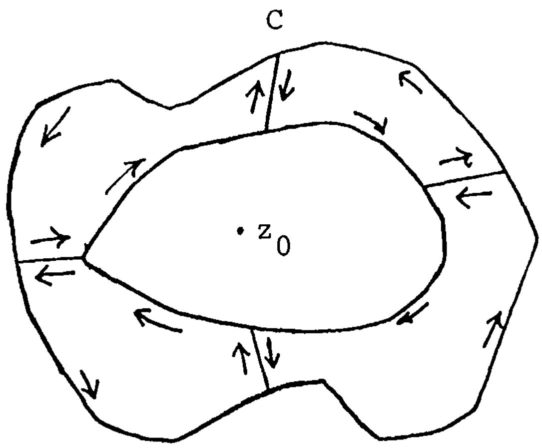
CAYCHY's INTEGRALSÆTNING. For en holomorf funktion $f: G \to \mathbb{C}$ i et enkeltsammenhængende område $G \subseteq \mathbb{C}$ og en lukket vej γ i G gælder

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 .$$

BEMÆRKNING. Hvis vi ved, at f' er kontinuert når $f \in \mathcal{H}(G)$, så følger Cauchy's integralsætning af resultatet: Enhver lukket C^1-differentialform i et enkeltsammenhængende område er eksakt. På denne måde viste Cauchy resultatet i 1825, idet han om en holomorf funktion forudsatte, at f' er kontinuert.

Som antydet i indledningen er f' automatisk kontinuert, når f er holomorf. Dette blev opdaget af den franske matematiker Goursat i 1899, idet han gav et bevis for Cauchy's integralsætning uden at forudsætte, at f' er kontinuert. Nedenstående bevis for Goursat's lemma skyldes Pringsheim.





delområde af $G \setminus \{z_0\}$, hvorved $\int_{\gamma_i} f = 0$. Idet hvert snit giver anledning til to bidrag, der hæver hinanden, vil

$$0 = \Sigma \int_{\gamma_i} f = \int_C f + \int_{-K} f ,$$

hvoraf

$$\int_C f = \int_K f .$$

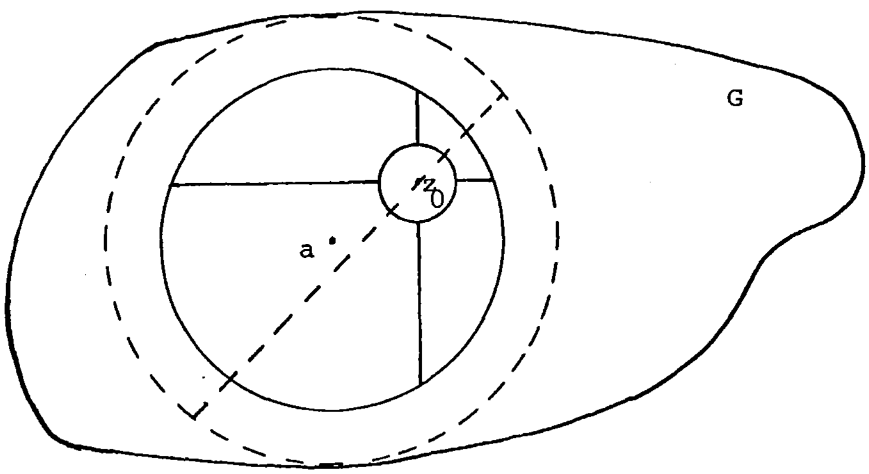
EKSEMPEL. Antag, at $f \in H(G \setminus \{z_0\})$, og at kurverne C og K er randen af to cirkler $K(a,r)$ og $K(z_0,s)$ opfyldende

$$\overline{K(z_0,s)} \subseteq K(a,r) , \quad \overline{K(a,r)} \subseteq G .$$

Så er

$$\int_{\partial K(a,r)} f = \int_{\partial K(z_0,s)} f .$$

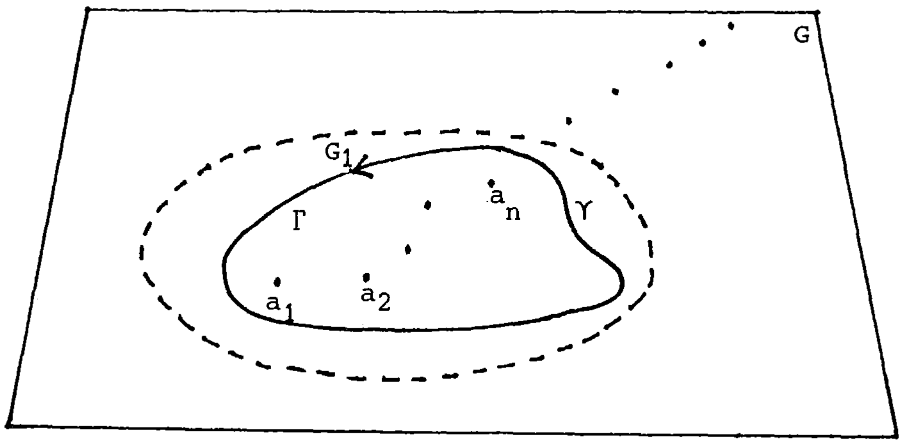
Her og i det følgende gennemløbes cirklerne en gang mod uret.



CAUCHY's RESIDUESÆTNING. Lad h være en meromorf funktion i et åbent enkeltsammenhængende område G, og lad P være polmængden. Hvis γ er en simpel lukket vej i $G \setminus P$, som omslutter polerne $a_1, \cdots, a_n$, så er

$$\int_\gamma h(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(h, a_i) \ .$$

Bevis. I beviset vil vi gøre brug af følgende egenskaber ved G og γ, som klart vil være opfyldt i konkrete anvendelser: Den simple vej γ omslutter et begrænset område Γ. Der findes et enkeltsammenhængende område $G_1 \subseteq G$ så $\gamma^* \cup \Gamma \subseteq G_1$, og så G_1 ikke indeholder andre af h's poler end $a_1, \cdots, a_n$.



Et bevis for disse påstande bygger på Jordans kurvesætning og en nøjere analyse af enkeltsammenhæng, som vil blive for vidtløftig her.

Lad p_i betegne den principale del af h i punktet a_i, $i=1,\cdots,n$. Så har $\varphi = h-(p_1 + \cdots + p_n)$ en hævelig singularitet i hvert af punkterne $a_1, \cdots, a_n$, og kan derfor udvides til en holomorf funktion i $G \setminus (P \setminus \{a_1, \cdots, a_n\})$, specielt er $\varphi \in H(G_1)$, så vi fra Cauchy's integralsætning ved $\int_\gamma \varphi = 0$, altså

$$\int_\gamma h = \sum_{i=1}^{n} \int_\gamma p_i \ .$$

Den principale del p_i er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{a_i\}$. Af ideerne i §3.2 følger at

Metoden fra Sætning 2 kan også anvendes på andre funktioner end rationale. Det afgørende er, at

$$\max_{0\le t\le\pi} |f(Re^{it})| \to 0 \quad \text{for} \quad R \to \infty .$$

SÆTNING 3. <u>Lad f være meromorf i $\mathbb{C}$ uden poler på den reelle akse og med kun endelig mange poler $z_1,\dots,z_k$ i den øvre halvplan. Hvis</u>

$$\max_{0\le t\le\pi} |f(Re^{it})| \to 0 \quad \text{for} \quad R \to \infty$$

<u>så vil</u>

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f(z)e^{i\lambda z}, z_j) \quad \text{for} \quad \lambda > 0 .$$

<u>Bevis</u>. Vi betragter en simpel lukket vej bestående af $[-R,R]$ og halvcirklen $|z| = R$, $\mathrm{Im}\, z \ge 0$, og betragter kun så store R, at vejen omslutter alle polerne $z_1,\dots,z_k$. Cauchy's residuesætning anvendt på $f(z)e^{i\lambda z}$ giver da

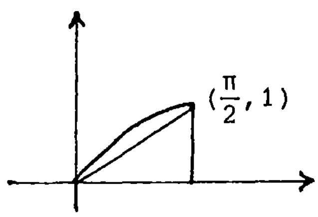
$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\lambda x}dx + \int_0^\pi f(Re^{it})e^{i\lambda Re^{it}} iRe^{it}dt =$$

$$2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}\Big(f(z)e^{i\lambda z}, z_j\Big) .$$

Det andet integral kan numerisk vurderes op ved

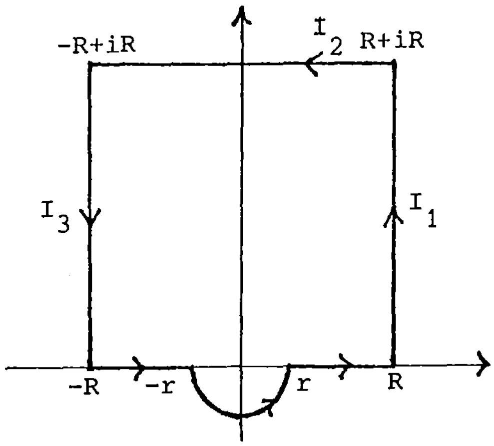
$$I = \max_{0\le t\le\pi} |f(Re^{it})| \int_0^\pi Re^{-\lambda R \sin t}dt ,$$

men idet $\sin t \ge \frac{2}{\pi} t$ for $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, får man med $a = 2\lambda R/\pi$



$$\int_0^\pi e^{-\lambda R \sin t}dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t}dt \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-at}dt$$

$$= \frac{2}{a}\left(1 - e^{-a\frac{\pi}{2}}\right) \le \frac{2}{a} = \frac{\pi}{\lambda R} ,$$



$$c_r(t) = r\,e^{it}, \quad t \in [-\pi, 0]$$

giver bidraget

$$\int_{c_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{c_r} \frac{dz}{z} + \int_{c_r} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz = i\pi + \alpha(r)$$

men da

$$\varphi(z) = \frac{e^{iz}-1}{z} \to i \quad \text{for} \quad z \to 0$$

vil

$$|\alpha(r)| \le \pi r \max_{-\pi \le t \le 0} |\varphi(re^{it})| \to 0 \quad \text{for} \quad r \to 0,$$

altså

$$\lim_{r \to 0} \int_{c_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = i\pi .$$

Integralet I_1 langs den lodrette side $z = R+it$, $t \in [0,R]$ er

$$I_1 = \int_0^R \frac{e^{iR-t}}{R+it}\,i\,dt$$

så

$$|I_1| \le \int_0^R \frac{e^{-t}}{R}\,dt \le \frac{1}{R}\int_0^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{R} \to 0 \quad \text{for} \quad R \to \infty .$$

Integralet I_2 langs den øverste side $z = -t+iR$, $t \in [-R,R]$ er

$$I_2 = -\int_{-R}^R \frac{e^{-it-R}}{-t+iR}\,dt$$

så

$$|I_2| \le e^{-R}\int_{-R}^R \frac{dt}{R} = 2e^{-R} \to 0 \quad \text{for} \quad R \to \infty .$$

Integralet I_3 langs den lodrette side $z = -R+i(R-t)$, $t \in [0,R]$ er

$$I_3 = -i\int_0^R \frac{e^{-iR+t-R}}{-R+i(R-t)}\,dt$$

så

$$|I_3| \le \frac{1}{R}\int_0^R e^{t-R}dt \le \frac{1}{R} \to 0 \quad \text{for} \quad R \to \infty .$$

værdi uanset fra hvilken retning, man nærmer sig z_0. Dermed er den retningsafledede af f i z_0 i retningen $e^{i\theta}$ lig med $f'(z_0)e^{i\theta}$. En funktion, der er kompleks differentiabel i alle punkter af en åben mængde, kaldes <u>holomorf</u> i mængden.

Teorien for holomorfe funktioner blev fuldstændigt udviklet i det 19. århundrede, især af Cauchy, Riemann og Weierstrass, og den indeholder en mængde smukke og slående resultater, der ofte afviger væsentligt fra sætninger om tilsvarende begreber i reel analyse.

I studiet af f.eks. kontinuitet, målelighed og integrabilitet har vi set, at disse egenskaber ved en funktion med komplekse værdier suverænt afgøres af de tilsvarende egenskaber ved funktionens real- og imaginærdel.

Det vil være katastrofalt at tro, at dette princip kan overføres til holomorfi. Det viser sig nemlig, at en reel funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ på et område kun er holomorf, når den er konstant.

Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857)

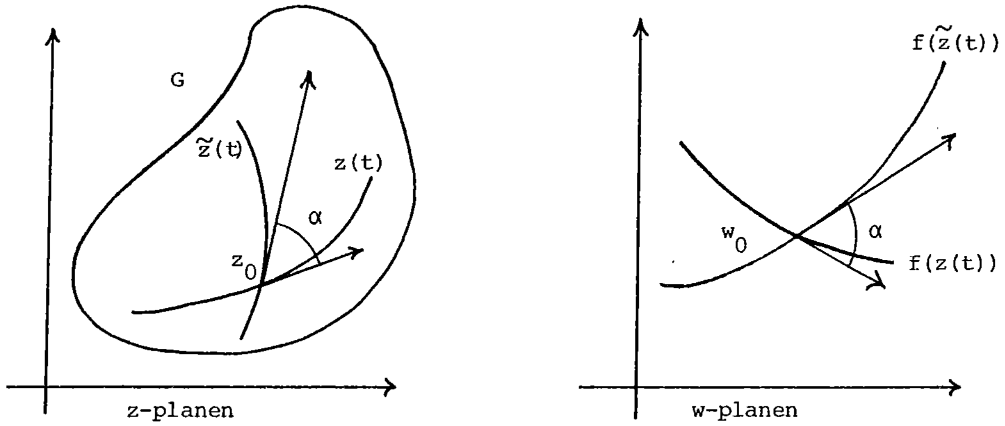
86 % reduktion
90 % er bedre, til nyskrivningen i TeX 1992

<u>Hvis man ved, at</u> $f'(z_0) \neq 0$ <u>og</u> $f^{\circ-1}$ <u>er kontinuert i</u> $w_0 = f(z_0)$, <u>er det trivielt, at</u> $f^{\circ-1}$ <u>er differentiabel i</u> w_0 <u>med den anførte differentialkvotient.</u> Thi hvis $w_n = f(z_n) \to w_0$, vil $z_n \to z_0$, og

$$\frac{f^{\circ-1}(w_n) - f^{\circ-1}(w_0)}{w_n - w_0} = \frac{z_n - z_0}{f(z_n) - f(z_0)} \to \frac{1}{f'(z_0)} .$$

1.2. <u>Differentiabilitetens geometriske betydning når</u> $f'(z_0) \neq 0$.

Lad der være givet en holomorf funktion $w = f(z)$ defineret i en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$, og antag, at $z_0 \in G$, $f(z_0) = w_0$.



Lad os betragte en differentiabel kurve $z: I \to G$ i G gennem z_0. Der findes altså t_0 i intervallet I, så $z(t_0) = z_0$. Ved f afbildes $z(t)$ i en differentiabel kurve $f(z(t))$ gennem w_0. Hvis $z'(t_0) \neq 0$, har $z(t)$ en tangent i z_0, som er parallel med $z'(t_0)$ opfattet som vektoren $(\text{Re}\, z'(t_0), \text{Im}\, z'(t_0))$. En parameterfremstilling af tangenten kan f.eks. skrives

$$z_0 + uz'(t_0), \quad u \in \mathbb{R} .$$

Idet $f'(z_0) \neq 0$ er $(f \circ z)'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0$, så billedkurven har en tangent i w_0 med parameterfremstillingen

$$w_0 + uf'(z_0)z'(t_0), \quad u \in \mathbb{R} .$$