UDVALGTE EMNER FRA

POTENTIALTEORI I

Revideret udgave udsendt i februar 1973.
Den reviderede udgave indeholder foruden enkelte rettelser et appendix der supplerer Kap. 4 §2,3. Det drejer sig i det væsentlige om et bevis for den på side 90 ønskede generalisering og et deraf afledet nyt bevis for sætning 4.11. Appendixet er tidligere udsendt i Matematisk Instituts Preprint Series, no 12, 1971.

Forelæsninger foråret 1971
ved
Christian Berg.

Indholdsfortegnelse :

Symbolliste.

Bedes fortsat af tilhøreren:

X lokalkompakt rum. Så betegner:

$\mathcal{K}(X)$ Kontinuerte funktioner $f: X \to \mathbb{C}$ med kompakt støtte.

$C_0(X)$ Kontinuerte funktioner $f: X \to \mathbb{C}$ gående mod 0 i ∞.

$C^b(X)$ Kontinuerte funktioner $f: X \to \mathbb{C}$ som er begrænsede.

$\mathcal{M}(X)$ Radonmålene på X.

$\mathcal{M}^b(X)$ Begrænsede Radonmål på X.

$\mathcal{M}_{\mathcal{K}}(X)$ Radonmål med kompakt støtte i X.

$\mathcal{M}^1(X)$ Radonsandsynlighedsmålene på X.

Hvert af ovenstående rum kan forsynes med et $+$ og det betegner så de positive elementer i rummet.

For $\mu \in \mathcal{M}_+^b(X)$ betegner $\|\mu\|$ den totale masse.

$\dot{U}(x)$ betegner omegnssystemet af et punkt $x \in X$.

$(P_t)_{t \geq 0}$ semigruppe, $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ dens resolvent, (A, D_A) dens frembringer

(N, D_N) potentialoperatoren for semigruppen.

Indledning.

Man kan definere generel potentialteori som studiet af "kerner" tilfredsstillende nogle af Newtonkernens egenskaber. Dette er det lineære aspekt af teorien. Man kan også sige, at det er studiet af normerede funktionsrum, hvor normen har egenskaber kopieret efter det klassiske Dirichlet-integral. Dette er det kvadratiske aspekt eller energi-aspektet. (Frit efter Deny).

Vi skal i dette kursus indgående beskæftige os med disse to aspekter og deres indbyrdes sammenhæng.

Kapitel 1. Klassisk potentialteori.

§1. Elementært om Newtons gravitationslov.

Newton forklarede planetbevægelserne ud fra sin gravitationslov:

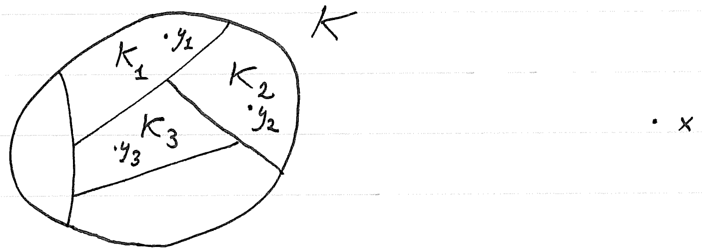
Enhver massepartikel i universet tiltrækker enhver anden sådan med en kraft, hvis retning er givet ved forbindelseslinien, og hvis størrelse er ligefrem proportional med massernes produkt og omvendt proportional med kvadratet på afstanden mellem partiklerne.

Har vi i punkterne P og Q af rummet (d.v.s. $\mathbb{R}^3$) placeret masserne m_1 og m_2, og betegner r afstanden mellem P og Q, er tiltrækningskraftens størrelse altså givet ved udtrykket

$$\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad ,$$

hvor γ er en universel konstant afhængig af de enheder, i hvilke vi måler masse og længde. Fra et matematisk synspunkt kan vi derfor antage $\gamma = 1$.

I praksis møder man tiltrækning mellem legemer af en vis udstrækning, så de ikke kan fortolkes som partikler. Lad os betragte den kraft hvormed et legeme K tiltrækker en partikel med masse 1 i et punkt $x \in \mathbb{R}^3$. Fra et matematisk synspunkt er K en "pæn" kompakt mængde i $\mathbb{R}^3$, og vi tænker os massen jævnt fordelt i K, altså proportionalt med Lebesguemålet. Antages desuden at denne proportionalitetsfaktor er 1, er den samlede masse i en kompakt delmængde $L \subset K$ lig Lebesguemålet $m(L)$ af L.



Vi tænker os nu, at legemet er uddelt i disjunkte kompakte mængder $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$, og lader $y_i \in K_i$ være udvalgte punkter. Tænker vi os hele massen $m(K_i)$ af K_i koncentreret i y_i, vil denne massepartikel tiltrække enhedsmassen i x med kraften

$$\frac{m(K_i)}{\|y_i - x\|^2} \cdot \frac{y_i - x}{\|y_i - x\|}$$

Summeres dette over $i = 1, \dots, n$ er det rimeligt at antage, at summen er en god approximation til den søgte kraft. Ifølge integralregningen vil udtrykket

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m(K_i)}{\|y_i - x\|^2} \cdot \frac{y_i - x}{\|y_i - x\|}$$

konvergere mod vektoren

$$\int_K \frac{y - x}{\|y - x\|^3} \, dy \qquad (1.1)$$

når inddelingen gøres finere og finere. Det er derfor rimeligt at antage, at (1.1) er den kraft hvormed K tiltrækker enhedspartiklen i $x \in \mathbb{R}^3$, $x \notin K$.

Formel (1.1) definerer et kraftfelt i $\mathbb{R}^3 \setminus K$, altså en afbildning

$$x \longmapsto \int_K \frac{y-x}{\|y-x\|^3}\, dy$$

af $\mathbb{R}^3 \setminus K$ ind i $\mathbb{R}^3$, og dens værdi i punktet x er den kraft, hvormed legemet K påvirker en enhedsmasse i x.

I matematik foretrækker man at tale om et positivt mål (underforstået: Radonmål) μ på $\mathbb{R}^3$ i stedet for et legeme med en vis massefordeling. Legemet er målets støtte $\mathrm{supp}(\mu)$. I eksemplet er μ restriktionen af Lebesguemålet til den kompakte mængde K.

Vi siger derfor:

<u>Et positivt Radonmål μ på $\mathbb{R}^3$ med kompakt støtte $\mathrm{supp}(\mu)$ giver anledning til kraftfeltet</u>

$$\vec{V}(x) = \int_{\mathrm{supp}(\mu)} \frac{y-x}{\|y-x\|^3}\, d\mu(y) \tag{1.2}$$

<u>i den åbne mængde $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{supp}(\mu)$.</u>

Inden vi undersøger feltet (1.2) nærmere, er det praktisk at indføre et par begreber.

<u>Definition</u>: Et kraftfelt $\vec{V} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ defineret i en åben mængde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ kaldes et <u>potentialfelt</u>, hvis der findes en C^1-funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ med egenskaben

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \vec{V}.$$

($\mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)$ kaldes gradienten af φ, som altså definerer et kraftfelt i Ω, det såkaldte gradientfelt hørende til φ).

Hvis $\vec{v}$ er et potentialfelt, kaldes enhver løsning φ til ligningen $\operatorname{grad} \varphi = \vec{v}$ en potentialfunktion for feltet. To potentialfunktioner afviger med en konstant fra hinanden i hver sammenhængskomponent af Ω. (I fysik er det ofte $-\varphi$ der kaldes potentialfunktion. Desuden møder man ordet konservativt kraftfelt, som synonymt med potentialfelt).

Sætning 1.1. Kraftfeltet (1.2) er et potentialfelt af klasse C^∞ i Ω, og dets divergens er 0 i Ω, d.v.s.

$$\operatorname{div} \vec{v} := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad i\ \Omega,$$

hvor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. En potentialfunktion for (1.2) er givet ved formlen

$$\varphi(x) = \int_{\operatorname{supp}(\mu)} \frac{1}{\|y-x\|}\, d\mu(y) \quad , x \in \Omega \qquad (1.3).$$

Bevis: At feltet (1.2) og funktionen (1.3) er af klasse C^∞ i Ω følger af en generel sætning om differentiation under integraltegnet. Sætningen formuleres nedenfor og dens bevis overlades som øvelse til læseren. Af formel 1.3 fås da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_{\operatorname{supp}(\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\|y-x\|^{-1}\right\} d\mu(y) = \int_{\operatorname{supp}(\mu)} \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|^3}\, d\mu(y),$$

hvilket viser at $\operatorname{grad} \varphi = \vec{v}$, altså at $\vec{v}$ er et konservativt kraftfelt, og at φ er en potentialfunktion for $\vec{v}$.

Af udtrykket

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{y_i - x_i}{\|y-x\|^3}\right\} = -\frac{1}{\|y-x\|^3} + \frac{3(y_i-x_i)^2}{\|y-x\|^5}$$

fås

$$\operatorname{div} \vec{v}(x) = \int_{\operatorname{supp}(\mu)} \sum_{i=1}^{3} \left(-\frac{1}{\|y-x\|^3} + \frac{3(y_i-x_i)^2}{\|y-x\|^5}\right) d\mu(y) = 0$$

$\blacksquare$

<u>Sætning 1.2.</u> <u>Lad følgende være givet:</u>
<u>T kompakt rum</u>
<u>μ Radonmål på T</u>
<u>Ω åben mængde i R^n</u>
<u>$F : T \times \Omega \to R$ en funktion med egenskaberne:</u>
<u>For hvert $t \in T$ er funktionen</u> $y \mapsto F(t,y)$
<u>af klasse C^∞ i Ω, og for hvert multiindex</u> $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$
$\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, n$, <u>er funktionen</u>

$$(t,y) \mapsto D^\alpha F(t,y)$$

<u>kontinuert på $T \times \Omega$.</u>
<u>Så er funktionen $G : \Omega \to R$ givet ved</u>

$$G(y) = \int_T F(t,y)\, d\mu(t)$$

<u>af klasse C^∞ i Ω, og de partielle afledede er givet ved differentiation under integraltegnet:</u>

$$D^\alpha G(y) = \int_T D^\alpha F(t,y)\, d\mu(t) .$$

(Vink. Opskriv differenskvotienten svarende til $\frac{\partial G}{\partial y_1}$ og brug middelværdisætningen under integraltegnet. Vis og udnyt dernæst at kontinuiteten af $\frac{\partial}{\partial y_1} F(t,y)$ i forbindelse med kompaktheden af T sikrer, at

$$\frac{\partial}{\partial y_1} F(t, y_n) \to \frac{\partial}{\partial y_1} F(t,y) \qquad \text{uniformt i } t \in T,$$

når $y_n \to y$ i Ω.)

<u>Bemærkninger:</u> Af sætning 1.1 fås at

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = 0 \quad \text{i } \Omega ,$$

eller anderledes udtrykt

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{i } \Omega .$$

Differentialoperatoren på venstre side kaldes <u>Laplaceoperatoren</u> og betegnes Δ, altså

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad} .$$

Løsninger af klasse C^∞ til differentialligningen $\Delta\varphi = 0$ kaldes <u>harmoniske funktioner.</u>

Funktionen 1.3 kaldes <u>(Newton)potentialet frembragt af målet μ</u>, og den er faktisk veldefineret for alle $x \in \mathbb{R}^3$, idet den dog kan være ∞ i visse punkter af supp(μ). Funktionen

$$N(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|x\|} & , \ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\ \infty & , \ x = 0 \end{cases}$$

(som kort skrives $\frac{1}{\|x\|}$ eller $\frac{1}{r}$) kaldes <u>Newtonkernen</u>, og potentialet er altså foldningen af N og μ. Det ses at N er nedad halvkontinuert, og derfor er potentialet det også (overvej dette). Det foregående kan med de nye navne rekapituleres således:

<u>Newtonpotentialet</u>

$$N\mu(x) = \int \frac{1}{\|x-y\|} d\mu(y) = N * \mu(x) \tag{1.4}$$

<u>frembragt af et positivt mål μ med kompakt støtte er en nedad halvkontinuert funktion, som er harmonisk udenfor målets støtte.</u>

(Sættes $\mu = \varepsilon_0 :=$ massen 1 i 0 fås $N\mu = N$ som altså er harmonisk i $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$).

Vi anfører nu en generel sætning om potentialfelter.

<u>Sætning 1.3. Lad Ω være en åben sammenhængende delmængde af $\mathbb{R}^3$ og lad $\vec{v}$ være et potentialfelt i Ω. For enhver differentiabel kurve Γ i Ω løbende fra $p \in \Omega$ til $q \in \Omega$ gælder</u>

$$\int_\Gamma \vec{v}(x)\,dx = \varphi(q) - \varphi(p),$$

<u>hvor φ er en vilkårlig potentialfunktion for feltet $\vec{v}$.</u>

<u>Bevis:</u> Kurveintegralet $\int_\Gamma \vec{v}(x)\,dx$ er per definition lig med

$$\int_0^1 \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)\,dt \qquad ,$$

hvor $\vec{\gamma} : [0,1] \to \Omega$ er en parameterfremstilling af klasse C^1 for Γ. Vi sætter $\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$, og der gælder $\vec{\gamma}(0) = p$, $\vec{\gamma}(1) = q$. Vi får derfor

$$\varphi(q) - \varphi(p) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\{\varphi(\vec{\gamma}(t))\}\,dt = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\vec{\gamma}(t))\gamma_i'(t)\Big)\,dt =$$

$$\int_0^1 \operatorname{grad}\varphi(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)\,dt = \int_0^1 \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)\,dt \quad . \quad \square$$

Lad os nu anvende denne sætning på potentialfeltet frembragt af en positiv massefordeling μ med kompakt støtte. Anbringes en enhedspartikel i p vil feltet bevirke, at partiklen bevæger sig langs en kurve Γ, og på et eller andet tidspunkt er den i q. Udtrykket

$$\int_\Gamma \vec{v}(x)\,dx$$

er det arbejde feltet udfører på partiklen under bevægelsen. Dette tal afhænger som vist kun af p og q og ikke af vejen fra p til q, og det er forskellen i potential. Af 1.4 fås at $\varphi(x) \to 0$ for $x \to \infty$ (supp(μ) er kompakt!), altså potentialet i ∞ er lig med 0. Heraf følger at <u>feltet udfører arbejdet $\varphi(p)$ når en partikel "hentes ind" til punktet p fra det uendeligt fjerne.</u>

Lad nu ν være et andet positivt mål med kompakt støtte, og vi antager at $\operatorname{supp}(\mu) \cap \operatorname{supp}(\nu) = \emptyset$. Tallet

$$E(\mu,\nu) = \int N\mu(x)\,d\nu(x) \qquad (1.5)$$

(der gælder $0 \le E(\mu,\nu) \le \infty$) kan derfor fortolkes som det arbejde μ-feltet udfører for at skabe ν-fordelingen.

Af Fubini's sætning fremgår at

$$E(\mu,\nu) = E(\nu,\mu) = \iint \frac{1}{\|x-y\|}\, d\mu(x)\, d\nu(y) \quad ,$$

altså ν-feltet udfører samme arbejde for at skabe μ-feltet som μ-feltet udfører for at skabe ν-feltet. Idet energi betyder arbejdsevne, er det rimeligt i fysik at kalde $\frac{1}{2}\cdot E(\mu,\nu)$ for <u>fordelingernes (fysiske) blandede energi.</u>

Selv om μ og ν ikke har disjunkte støtter, er 1.5 veldefineret fra et matematisk synspunkt – dette gælder endda for vilkårlige positive mål μ og ν – og vi benytter den samme intuitive fortolkning som ovenfor. Specielt taler vi om <u>målet μ's (fysiske) energi</u> $:= \frac{1}{2}E(\mu,\mu)$, hvor

$$E(\mu) := E(\mu,\mu) = \int N\mu(x)\, d\mu(x) = \iint \frac{1}{\|x-y\|}\, d\mu(x)\, d\mu(y) \quad (1.6)$$

Fra et matematisk synspunkt er faktoren irrelevant, og vi bruger derfor formlerne 1.5 og 1.6 for den blandede energi og energien.

Vi indfører $\mathcal{E}_+ = \{\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^3) \mid E(\mu) < \infty\}$. Det kan vises, at $E(\mu,\nu) < \infty$ for $\mu,\nu \in \mathcal{E}_+$, og at $\mathcal{E}_+$ er en konveks kegle. Hvis E fortsættes ved bilinearitet til vektorrummet $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ - \mathcal{E}_+$ udspændt af $\mathcal{E}_+$ viser det sig, at $\mathcal{E}$ på denne måde forsynes med et indre produkt. Studiet af prahilbertrummet $(\mathcal{E}, E(\mu,\nu))$ falder ind under det kvadratiske aspekt af potentialteorien, og vi vender senere tilbage til disse ting.

§2. <u>Harmoniske og hyperharmoniske funktioner i $\mathbb{R}^n$.</u>

Begrebet harmonisk funktion generaliseres umiddelbart til $\mathbb{R}^n$, idet <u>Laplaceoperatoren Δ</u> er veldefineret:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

<u>Definition:</u> En C^∞-funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ defineret i en åben mængde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kaldes <u>harmonisk</u> hvis $\Delta f = 0$ i Ω.

Umiddelbare egenskaber:

1) Mængden $\mathcal{H}(\Omega)$ af harmoniske funktioner i Ω udgør et vektorrum over $\mathbb{R}$.

2) De affine funktioner $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$ er harmoniske i enhver åben mængde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3) Funktionen

$$h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}} & \text{for } n \geq 3 \\ \log \dfrac{1}{\|x\|} & \text{for } n = 2 \\ |x| & \text{for } n = 1 \end{cases}$$

er harmonisk i $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. (Differentier selv!)

Funktionen h_n kaldes <u>den fundamentale harmoniske funktion i $\mathbb{R}^n$.</u> Den afhænger kun af $r = \|x\|$, og det viser sig, at denne egenskab sammen med harmoniciteten i det væsentlige karakteriserer h_n, hvilket er indholdet af følgende sætning.

<u>Sætning 1.4.</u> <u>Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ være en åben sammenhængende mængde og lad $f: \Omega \to \mathbb{R}$ være en harmonisk funktion, der kun afhænger af afstanden til 0. Der findes da tal $a, b \in \mathbb{R}$ så</u>

$$\underline{f(x) = a + b\, h_n(x) \quad \text{for alle } x \in \Omega.}$$

<u>Bevis:</u> Lad $I = \{r > 0 \mid \exists x \in \Omega : \|x\| = r\}$. Så er I et åbent interval, og vi ved at der findes en funktion $h: I \to \mathbb{R}$ med egenskaben

$$f(x) = h(\|x\|) \qquad \text{for } x \in \Omega.$$

Det er let at indse at h er af klasse C^∞, fordi f er det.
Ved differentiation fås

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{dh}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{dh}{dr} \cdot \frac{x_i}{r},$$

og videre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{d^2h}{dr^2}\cdot\frac{x_i^2}{r^2} + \frac{dh}{dr}\cdot\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right),$$

hvoraf

$$\Delta f = \frac{d^2h}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\cdot\frac{dh}{dr},$$

så h tilfredsstiller den sædvanlige differentialligning

$$\frac{d^2h}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{dh}{dr} = 0 \quad \text{på } I. \tag{1.7}$$

Denne ligning har imidlertid præcis to uafhængige løsninger, nemlig den konstante funktion og funktionen

$$h_n(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^{n-2}} & \text{for } n \geq 3 \\ \log\frac{1}{r} & \text{for } n = 2 \\ r & \text{for } n = 1 \end{cases}$$

og heraf følger sætningen. ▯

Funktionen h_n generaliserer Newtonkernen fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^n$ og er hvad man skal benytte, hvis man vil generalisere den foregående teori fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^n$.

Er μ et positivt mål med kompakt støtte i $\mathbb{R}^n$ defineres <u>potentialet frembragt af μ</u> som foldningen

$$N_n\mu(x) := h_n * \mu(x) = \int_{\mathrm{supp}(\mu)} h_n(x-y)\,d\mu(y),$$

og $N_n\mu$ er harmonisk udenfor $\mathrm{supp}(\mu)$.

Tilfældet $n=1$ er imidlertid for simpelt til at være interessant. Det plane tilfælde – det logaritmiske potential – er et studium for sig, idet teorien afviger fra den Newton'ske teori. En ikke uvæsentlig vanskelighed ligger i at $h_2(x) = \log\frac{1}{\|x\|}$ antager både positive og negative værdier i modsætning til h_n for $n \neq 2$. Teorien for det logaritmiske potential er uløseligt forbundet med kompleks funktionsteori og behandles lettest med dennes metoder. Tilfældene $n \geq 3$ udviser en forbavsende analogi, og vi indskrænker os derfor til at behandle disse tilfælde. Funktionen

$$N_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^{n-2}} & \text{for } x \neq 0, \\ \infty & \text{for } x = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

kaldes også Newtonkernen i det generelle tilfælde. Vi indfører den blandede energi og energien analogt med formlerne 1.5 og 1.6 i dette generelle tilfælde.

Vi indfører nogle betegnelser:

$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$

$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = r\}$

$\Omega_n = S(0,1)$ = enhedskugleoverfladen.

ω_n overflademålet på Ω_n.

$\|\omega_n\|$ = overflademålets totale masse. Der gælder $\|\omega_n\| = \dfrac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

Lebesguemålet $m(B(x_0, r))$ af kuglen med radius r er givet ved

$$m(B(x_0, r)) = \frac{\|\omega_n\|}{n} r^n .$$

Er f en reel Borelfunktion defineret på en mængde omfattende $B(x_0, r)$ defineres

$$\mathcal{A}_f^r(x_0) \quad \text{og} \quad \mathcal{M}_f^r(x_0)$$

som middelværdien af f over henholdsvis $B(x_0, r)$ og $S(x_0, r)$.
Vi har altså følgende formler

$$\mathcal{A}_f^r(x_0) = \frac{n}{\|\omega_n\| r^n} \int_{B(x_0,r)} f(x)\,dx \quad ; \quad \mathcal{M}_f^r(x_0) = \frac{1}{\|\omega_n\|} \int_{\Omega_n} f(x_0 + r\xi)\, d\omega_n(\xi) \tag{1.9}$$

Indføres polære koordinater i $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$x = r\xi \quad , \text{hvor } r = \|x\| > 0 \; , \; \xi \in \Omega_n$$

kan Lebesguemålet dx udtrykkes

$$dx = r^{n-1}\, dr\, d\omega_n(\xi) \tag{1.10}$$

Af 1.10 fås derfor

$$\mathcal{A}_f^r(x_0) = \frac{n}{\|\omega_n\| r^n} \int_0^r \int_{\Omega_n} f(x_0+\rho\xi)\, \rho^{n-1}\, d\rho\, d\omega_n(\xi) = \frac{n}{r^n} \int_0^r \mathcal{M}_f^\rho(x_0)\, \rho^{n-1}\, d\rho \tag{1.11}$$

Med disse forberedelser kan vi vise :

<u>Sætning 1.5. Lad $f : \Omega \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion defineret i den åbne mængde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Følgende to betingelser er da ensbetydende :</u>

<u>(1) For enhver kugle $B(x_0,r) \subset \Omega$ gælder $\mathcal{A}_f^r(x_0) = f(x_0)$.</u>

<u>(2) For enhver kugle $B(x_0,r) \subset \Omega$ gælder $\mathcal{M}_f^r(x_0) = f(x_0)$.</u>

Bevis : (2) $\Rightarrow$ (1) er en umiddelbar konsekvens af formel 1.11.

(1) $\Rightarrow$ (2). Lad $x_0 \in \Omega$ være vilkårlig og lad

$$R(x_0) = \sup\{r > 0 \mid B(x_0,r) \subset \Omega\}.$$

Funktionen

$$\varphi(r) = \int_{B(x_0,r)} f(x)\, dx$$

er defineret på intervallet $]0, R(x_0)[$, og er differentiabel med differentialkvotient

$$\varphi'(r) = \|\omega_n\| r^{n-1} \mathcal{M}_f^r(x_0).$$

Af 1.10 fås nemlig for $h > 0$

$$\frac{1}{h}\left(\varphi(r+h) - \varphi(r)\right) = \frac{1}{h} \int_{r < \|x-x_0\| \le r+h} f(x)\, dx = \frac{1}{h} \int_r^{r+h} \rho^{n-1} \int_{\Omega_n} f(x_0+\rho\xi)\, d\omega_n(\xi)\, d\rho =$$

$$\frac{\|\omega_n\|}{h} \int_r^{r+h} \psi(\rho)\, d\rho \quad , \text{ hvor } \quad \psi(\rho) = \rho^{n-1} \mathcal{M}_f^\rho(x_0) .$$

Lader vi $h \to 0$ fås det ønskede udtryk for $\varphi'(r)$, idet ψ er en kontinuert funktion på intervallet $]0, R(x_0)[$. (Overvej dette, og se på differenskvotienten for φ når $h < 0$).

Ifølge forudsætningen (1) gælder

$$\varphi(r) = \frac{\|\omega_n\|}{n} r^n f(x_0) \qquad \text{for } r \in]0, R(x_0)[.$$

Differentieres denne identitet fås

$$\|\omega_n\| r^{n-1} \mathcal{M}_f^r(x_0) = \|\omega_n\| r^{n-1} f(x_0)$$

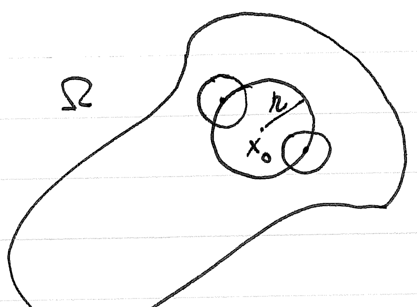
specielt $\mathcal{M}_f^r(x_0) = f(x_0)$. ∥

Betingelserne i sætning 1.5 vedrørende f er af global natur. Det er derfor overraskende, at disse betingelser medfører, at f er en C^∞-funktion i Ω (lokal egenskab).

<u>Lemma 1.6</u> <u>Hvis f opfylder betingelserne fra sætning 1.5 er $f \in C^\infty(\Omega)$.</u>

<u>Bevis:</u> Det er nok at vise $f \in C^\infty(\mathring{B}(x_0,r))$ for alle kugler $B(x_0,r) \subset \Omega$. For en sådan kugle vælges et $\varepsilon > 0$ så

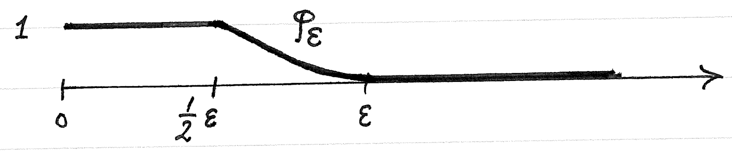
$$\varepsilon < \operatorname{dist}(B(x_0,r), C\Omega).$$



Lad nu $\varphi_\varepsilon : [0,\infty[\to \mathbb{R}_+$ være en C^∞-funktion, der opfylder

$$\varphi_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \le r \le \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{for } r \ge \varepsilon \end{cases}$$

altså med en graf af udseendet:



For $x \in \mathring{B}(x_0,r)$ vil $B(x,\varepsilon) \subset \Omega$, så funktionen

$$y \mapsto f(x-y)\varphi_\varepsilon(\|y\|)$$

er veldefineret for $y \in B(0,\varepsilon)$. Dermed er

$$F(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} f(x-y)\varphi_\varepsilon(\|y\|)\,dy = \int_0^\varepsilon \int_{\Omega_n} f(x - r\xi)\varphi_\varepsilon(r) r^{n-1}\,dr\,d\omega_n(\xi) =$$

$$\|\omega_n\| \int_0^\varepsilon \mathcal{M}_f^r(x)\,\varphi_\varepsilon(r) r^{n-1}\,dr = f(x)\|\omega_n\| \int_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon(r) r^{n-1}\,dr \quad \text{for}$$

$x \in \mathring{B}(x_0,r)$, så det er nok at vise at $F \in C^\infty(\mathring{B}(x_0,r))$.

For at se dette substitueres $y = x - z$ i første udtryk for F:

$$F(x) = \int_{B(x,\varepsilon)} f(z)\, \varphi_\varepsilon(\|x-z\|)\, dz = \int_T f(z)\, \varphi_\varepsilon(\|x-z\|)\, dz$$

hvor

$$T = \bigcup_{x \in B(x_0,r)} B(x,\varepsilon) = B(x_0, r+\varepsilon) \quad \text{er kompakt} \subset \Omega .$$

Af $F \in C^\infty(\mathring{B}(x_0,r))$ følger nu af sætning 1.2. ▯

<u>Lemma 1.7.</u> <u>Lad $f \in C^2(\Omega)$. For hvert $x_0 \in \Omega$ gælder</u>

$$\Delta f(x_0) = \lim_{r \to 0} \frac{2n}{r^2}\left(M_f^r(x_0) - f(x_0)\right) \tag{1.12}$$

<u>Bevis:</u>

Vi vælger $R > 0$ så $\mathring{B}(x_0,R) \subset \Omega$. For $h \in B(0,R)$ gælder Taylors grænseformel

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, h_i h_j + \alpha(h)\|h\|^2$$

hvor $\alpha(h) \to 0$ for $h \to 0$. Sættes $h = r\xi$, $0 < r \le R$ og $\xi \in \Omega_n$, og integreres efter $\xi \in \Omega_n$ ved hjælp af det normaliserede overflademål

$$\frac{1}{\|\omega_n\|}\, d\omega_n \quad \text{fås:}$$

$$M_f^r(x_0) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \frac{r}{\|\omega_n\|} \int_{\Omega_n} \xi_i \, d\omega_n(\xi)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \frac{r^2}{\|\omega_n\|} \int_{\Omega_n} \xi_i \xi_j \, d\omega_n(\xi) + \frac{r^2}{\|\omega_n\|} \int_{\Omega_n} \alpha(r\xi)\, d\omega_n(\xi). \tag{1.13}$$

Vi sætter $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, 1 på i'te plads, og dermed udgør $e_1,\dots,e_n$ en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ og $\xi \in \Omega_n$ kan udtrykkes

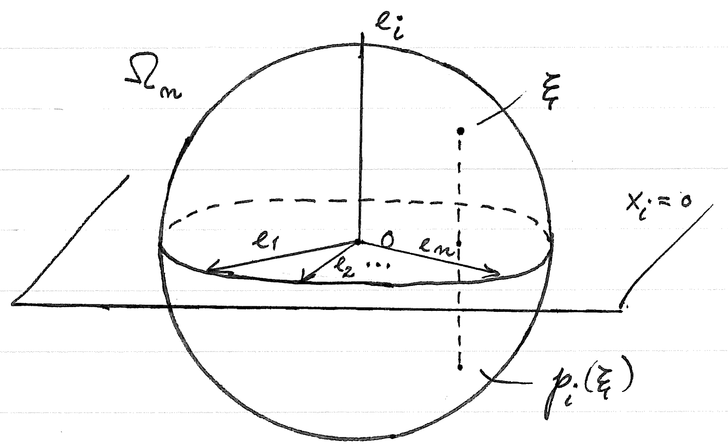
$$\xi = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n .$$

Lader vi p_i betyde spejling i hyperplanen $x_i = 0$ gælder altså

$$p_i(\xi) = (\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, -\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n),$$

idet det bemærkes, at e_j ligger i hyperplanen $x_i = 0$ for $j \neq i$. Er $f : \Omega_n \to R$ en kontinuert funktion, er det intuitivt klart (se tegning) at

$$\int_{\Omega_n} f(\xi)\, d\omega_n(\xi) = \int_{\Omega_n} f(p_i(\xi))\, d\omega_n(\xi) .$$



Dette hjælper os til at udregne følgende integraler hvor f er henholdsvis

$f(\xi) = \xi_i$

$f(\xi) = \xi_i \xi_j$ med $i \neq j$.

$$\int_{\Omega_n} \xi_i \, d\omega_n(\xi) = \int_{\Omega_n} (p_i(\xi))_i \, d\omega_n(\xi) = -\int_{\Omega_n} \xi_i \, d\omega_n(\xi)$$

$$\int_{\Omega_n} \xi_i \xi_j \, d\omega_n(\xi) = \int_{\Omega_n} (p_i(\xi))_i (p_i(\xi))_j \, d\omega_n(\xi) = -\int_{\Omega_n} \xi_i \xi_j \, d\omega_n(\xi)$$

og derfor er

$$\int_{\Omega_n} \xi_i \, d\omega_n(\xi) = \int_{\Omega_n} \xi_i \xi_j \, d\omega_n(\xi) = 0 \quad \text{for } \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \\ i \neq j \end{array}$$

Af symmetrigrunde er det endvidere klart at

$$\int_{\Omega_n} \xi_1^2 d\omega_n(\xi) = \int_{\Omega_n} \xi_2^2 d\omega_n(\xi) = \cdots = \int_{\Omega_n} \xi_n^2 d\omega_n(\xi) .$$

Betegner vi den fælles værdi med a fås:

$$\|\omega_n\| = \int_{\Omega_n} 1 \, d\omega_n(\xi) = \int_{\Omega_n} (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)\, d\omega_n(\xi) = n a .$$

Indsættes disse resultater i formel 1.13 fås

$$\mathcal{M}_f^r(x_0) - f(x_0) = \frac{r^2}{2n}\Delta f(x_0) + \frac{r^2}{\|\omega_n\|}\int_{\Omega_n}\alpha(r\xi)\,d\omega_n(\xi)$$

Da $\alpha(r\xi) \to 0$ når $r \to 0$, uniformt i $\xi \in \Omega_n$, gælder at

$$\lim_{r\to 0}\int_{\Omega_n}\alpha(r\xi)\,d\omega_n(\xi) = 0$$

og heraf kan vi slutte formel 1.12. ∎

Øvelse: Udled en analog formel med $\mathcal{A}_f^r(x_0)$ i stedet for $\mathcal{M}_f^r(x_0)$.

Sætning 1.8. Lad Ω være en åben mængde og lad $f:\Omega \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Da er følgende ensbetydende:

(1) For enhver kugle $B(x_0,r) \subset \Omega$ gælder $\mathcal{M}_f^r(x_0) = f(x_0)$.

(2) Funktionen f er harmonisk (i.e. $f \in C^\infty(\Omega)$ og $\Delta f = 0$ i Ω).

Bevis: (1) $\Rightarrow$ (2) følger af lemmaerne 1.6 og 1.7.

(2) $\Rightarrow$ (1). Vi vælger $x_0 \in \Omega$ og sætter

$$R(x_0) = \sup\{r>0 \mid B(x_0,r) \subset \Omega\}.$$

Er $\vec{v}$ et vektorfelt af klasse C^1 på Ω gælder ifølge Green's formel

$$\int_{B(x_0,r)} \operatorname{div}\vec{v}(x)\,dx = \int_{S(x_0,r)} \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma \qquad \text{for } r<R(x_0),$$

hvor $d\sigma$ er overflademålet på $S(x_0,r)$ og $\vec{n}$ den ydre enhedsnormal til $S(x_0,r)$. Parametriseres $S(x_0,r)$ ved $x_0+r\xi$, $\xi\in\Omega_n$ er $\vec{n}(\xi)=\xi$. Anvendes denne formel på feltet $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ fås

$$0 = \int_{B(x_0,r)}\Delta f(x)\,dx = \int_{\Omega_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+r\xi)\,\xi_i\,d\omega_n(\xi).$$

Nu er imidlertid

$$\frac{\partial}{\partial r} f(x_0+r\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+r\xi)\,\xi_i \quad ,$$

så vi har altså

$$\int_{\Omega_n} \frac{\partial}{\partial r} f(x_0+r\xi)\, d\omega_n(\xi) = 0 \qquad \text{for} \quad r < R(x_0) \quad ,$$

eller på grund af sætning 1.2 : $\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{M}_f^r(x_0) = 0$.
Dette viser at $\mathcal{M}_f^r(x_0)$ er konstant på intervallet $]0, R(x_0)[$, men da

$$\lim_{r\to 0} \mathcal{M}_f^r(x_0) = f(x_0) \quad ,$$

kan vi slutte $\quad \mathcal{M}_f^r(x_0) = f(x_0) \qquad \text{for} \quad r < R(x_0)$. $\square$

Ovennævnte resultat, at en harmonisk funktion kan karakteriseres ved en middelværdiegenskab, går tilbage til Gauss.

<u>Definition:</u> En funktion f defineret i en åben mængde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kaldes <u>hyperharmonisk</u> hvis

(1) Der gælder $-\infty < f(x) \leq \infty$ for alle $x \in \Omega$.

(2) f er nedad halvkontinuert (n. hk.).

(3) For enhver kugle $B(x_0, r) \subset \Omega$ gælder

$$\mathcal{M}_f^r(x_0) \leq f(x_0) \quad .$$

Umiddelbare konsekvenser af definitionen:

a) Mængden $\mathcal{H}^*(\Omega)$ af hyperharmoniske funktioner i Ω udgør en konveks kegle.

b) Keglen $\mathcal{H}^*(\Omega)$ er inf-stabil, i.e. $f, g \in \mathcal{H}^*(\Omega) \Rightarrow \inf(f,g) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$.

c) Hvis $(f_i)_{i\in I}$ er en opad filtrerende mængde af hyperharmoniske funktioner i Ω, er også $f = \sup_{i\in I} f_i$ en hyperharmonisk funktion.

d) For enhver kugle $B(x_0, r) \subset \Omega$ gælder $\mathcal{A}_f^r(x_0) \leq f(x_0)$, (følger af formel 1.11).

e) $\mathcal{H}(\Omega) \subseteq \mathcal{H}^*(\Omega)$ og $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{H}^*(\Omega) \cap (-\mathcal{H}^*(\Omega))$.

f) Funktionen identisk lig med ∞ er hyperharmonisk i enhver åben mængde.

Rummet $\mathbb{R}^n$ er lokalkompakt. Det kan derfor kompaktificeres ved tilføjelse af et "uendeligt fjernt punkt" skrevet ∞ og vi opnår etpunktskompaktificeringen (Alexandroff-kompaktificeringen) $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Vi minder nu at en delmængde $A \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ er en omegn af ∞ hvis og kun hvis $\infty \in A$ og $\mathbb{R}^n \setminus A$ er relativt kompakt (her = begrænset). Er $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ en åben mængde, vil vi i forbindelse med sætningen nedenfor indføre

$$\Omega^* = \text{randen af } \Omega \text{ i } \overline{\mathbb{R}^n},$$
$$\overline{\Omega} = \text{afslutningen af } \Omega \text{ i } \overline{\mathbb{R}^n},$$

så $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Omega^*$ er kompakt.

Præcis når Ω er begrænset er Ω^* og $\overline{\Omega}$ den sædvanlige rand og afslutning. I modsat fald opnås Ω^* og $\overline{\Omega}$ ved at ∞ føjes til den sædvanlige rand og afslutning.

<u>Sætning 1.9. Minimumsprincippet for hyperharmoniske funktioner.</u>

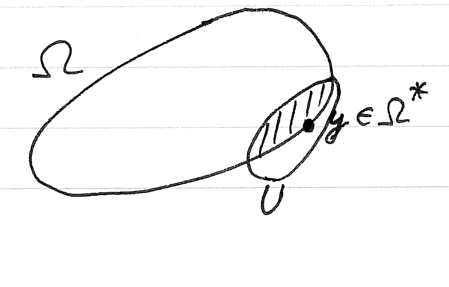
<u>Lad f være en hyperharmonisk funktion i en åben sammenhængende mængde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Hvis</u>

$$g(y) = \liminf_{x \to y} f(x) \geq 0$$

<u>for alle $y \in \Omega^*$, kan vi slutte $f \geq 0$ i Ω.</u>

<u>Bevis:</u> Per definition er

$$g(y) = \sup_{U \in \mathcal{U}(y)} \left(\inf f(U \cap \Omega) \right)$$



Heraf følger let, at funktionen

$$F(y) = \begin{cases} f(y) & \text{for } y \in \Omega \\ g(y) & \text{for } y \in \Omega^* \end{cases}$$

er nedad h.k. på rummet $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Omega^*$. Vi indfører dernæst

$$A = \{x \in \Omega \mid f(x) = \inf_{\overline{\Omega}} F\}$$

a) <u>A er åben:</u> Hvis $x_0 \in A$ gælder $f(x_0) \leq f(x)$ for alle $x \in \Omega$. Lad nu $\mathcal{B}(x_0, r) \subset \Omega$. Så må gælde $f(x_0) = f(x)$ for alle $x \in \mathring{\mathcal{B}}(x_0, r)$, thi ~~af~~ uligheden $f(x_0) < f(y)$ for et $y \in \mathring{\mathcal{B}}(x_0, r)$ gælder i en hel omegn af y, da f er nedad h.k., og så må der også gælde

$$f(x_0) < \mathcal{A}_f^r(x_0),$$

i strid med egenskab d) for hyperharmoniske funktioner. Altså gælder $\mathring{\mathcal{B}}(x_0, r) \subseteq A$ og derfor er A en åben delmængde af Ω.

b) <u>A er afsluttet:</u> Mængden $\Omega \setminus A = \{x \in \Omega \mid f(x) > \inf_{\overline{\Omega}} F\}$ er nemlig åben da f er nedad h.k. i Ω.

Vi skal bevise at $\inf_{\overline{\Omega}} F \geq 0$. Først bemærkes at den nedad halvkontinuerte funktion F antager sit infimum over det kompakte rum $\overline{\Omega}$, altså der findes $x_0 \in \overline{\Omega}$ så

$$F(x_0) = \inf_{\overline{\Omega}} F.$$

Beviset for at $F(x_0) \geq 0$ føres indirekte: Vi antager altså at $F(x_0) < 0$ og ledes til en modstrid på følgende snedige måde: Vi har forudsat at $g(y) \geq 0$ for $y \in \Omega^*$, så derfor må $x_0 \in \Omega$, altså $f(x_0) = F(x_0)$ og derfor $x_0 \in A$. Mængden A er altså ikke tom, åben og afsluttet i et sammenhængende rum, hvoraf vi slutter $A = \Omega$. Dette medfører at

$$f(x) = F(x_0) < 0 \quad \text{for alle } x \in \Omega,$$

men så må også $g(y) = F(x_0) < 0$ for $y \in \Omega^*$, hvilket er en modstrid. $\square$

<u>Bemærkning:</u> Det er væsentligt at huske, at $\infty \in \Omega^*$

når $\mathring{\Omega}$ er ubegrænset. Ex: Ω = halvrummet $x_1 < 0$, der er begrænset ved hyperplanen $x_1 = 0$. Her er

$$\Omega^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Funktionen $f(x) = x_1$ er harmonisk, specielt hyperharmonisk i Ω og der gælder

$$f(x) < 0 \quad \text{for alle } x \in \Omega$$

$$\liminf_{x \to y} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } y \in \Omega^*, \ y_1 = 0 \\ -\infty & \text{for } y = \infty \in \Omega^*. \end{cases}$$

Negligerede vi ∞, måtte konklusionen være $f \geq 0$ i Ω.

Vi vil nu udregne Newtonpotentialet af en jævn massefordeling af enhedsmassen på kugleoverfladen $S(x_0, r)$, altså Newtonpotentialet af det normaliserede overflademål for $S(x_0, r)$ som betegnes $\sigma_{x_0, r}$. Det er givet ved formlen

$$N_m \sigma_{x_0, r}(x) = \int \frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} \, d\sigma_{x_0, r}(y)$$

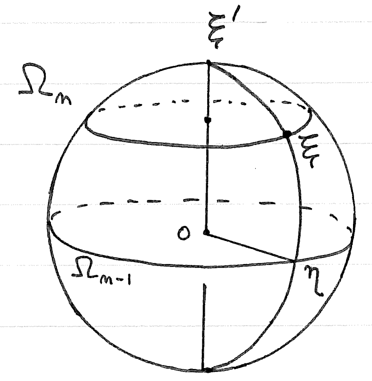
Dette er ikke helt let, og det kræver en vis viden om integration over en kugleflade.

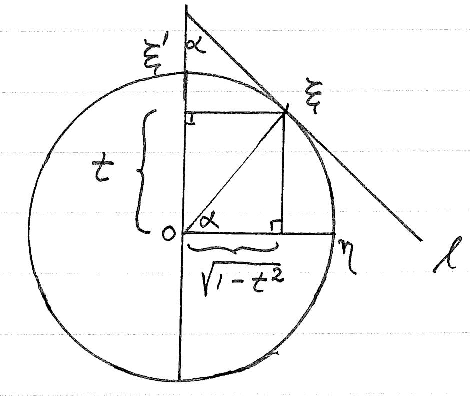
<u>Integralreduktion med fast pol:</u> Dette er en metode til at udregne et integral af formen

$$\int_{\Omega_n} f(\xi) \, d\omega_n(\xi),$$

altså et integral over kugleoverfladen. Vi har ved fashellige tricks på side 15 udregnet sådanne integraler.

Lad ξ' være valgt på Ω_n. Vi tænker på ξ' som nordpol på kuglen. Ækvator er da givet ved $\{\eta \in \Omega_n \mid \eta \cdot \xi' = 0\}$, hvilket er en enhedskugleoverflade i det $(n-1)$-dimensionale rum $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot \xi' = 0\}$. Vi identificerer derfor ækvator med Ω_{n-1} og benytter overflademålet ω_{n-1} på ækvator. Enhver vektor





$\xi \in \Omega_n$ kan skrives $\quad \xi = t\,\xi' + \sqrt{1-t^2}\,\eta \quad$ med $t \in [-1,1]$ og $\eta \in \Omega_{n-1}$.

Holdes t fast og lader vi η variere i Ω_{n-1} gennemløber ξ en breddekreds. Holdes η fast og lader vi t variere i $[-1,1]$ gennemløber ξ en meridian. En integration over Ω_n kan derfor erstattes af to på hinanden følgende integrationer, idet vi først integrerer langs en breddekreds, hvorved vi får en funktion der kun afhænger af bredden. Dernæst integreres efter en meridian. Dette kan også gøres i omvendt rækkefølge. Fra fast t vil en infinitesimal del $d\omega_{n-1}(\eta)$ af Ω_{n-1} modsvare en infinitesimal del af størrelsen

$$\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{n-2} d\omega_{n-1}(\eta)$$

på breddekredsen, fordi denne er en kugleoverflade med radius $\sqrt{1-t^2}$ af dimension $n-2$. Den todimensionale plan udspændt af ξ' og η skærer Ω_n i en sædvanlig cirkel (figuren til højre). Tangenten l til denne i ξ danner vinkelen α med linien gennem o og ξ'. Gives t en infinitesimal tilvækst dt, vil dette modsvare en infinitesimal tilvækst på tangenten l af størrelsen $dt/\cos\alpha$, fordi den skal projiceres i dt på linien fra o til ξ'. Nu er imidlertid

$$\cos\alpha = \sqrt{1-t^2}\,.$$

Heraf følger at

$$d\omega_n(\xi) = \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{n-2} d\omega_{n-1}(\eta)\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

eller

$$d\omega_n(\xi) = (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt\, d\omega_{n-1}(\eta)\,,$$

hvilket betyder at der gælder formlerne

$$\int_{\Omega_m} f(\xi)\,d\omega_m(\xi) = \int_{-1}^{1}\Big(\int_{\Omega_{m-1}} f(t\xi' + \sqrt{1-t^2}\,\eta)\,d\omega_{m-1}(\eta)\Big)(1-t^2)^{\frac{m-3}{2}}\,dt =$$

$$\int_{\Omega_{m-1}}\Big(\int_{-1}^{1} f(t\xi' + \sqrt{1-t^2}\,\eta)(1-t^2)^{\frac{m-3}{2}}\,dt\Big)\,d\omega_{m-1}(\eta)$$, hvor f er en Borel-

funktion på Ω_m.

Eksempler: $f = 1$. Så fås

$$\|\omega_m\| = \|\omega_{m-1}\| \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{m-3}{2}}\,dt = 2\|\omega_{m-1}\|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2}\theta\,d\theta.$$

Det sidste integral er kendt (se i en tabel), og vi får

$$\frac{\|\omega_m\|}{\|\omega_{m-1}\|} = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$$

Heraf kan udledes udtrykket p. 11 for $\|\omega_m\|$.

$f = \xi_i$ Vi vælger den i'te basisvektor $e_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots 0)$ som pol. Ækvator er da lig $\{\xi_i = 0\}$. Altså fås

$$f(\xi) = f(te_i + \sqrt{1-t^2}\,\eta) = t,$$

og dermed

$$\int_{\Omega_m} \xi_i\,d\omega_m(\xi) = \|\omega_{m-1}\|\int_{-1}^{1} t(1-t^2)^{\frac{m-3}{2}}\,dt = 0$$ fordi

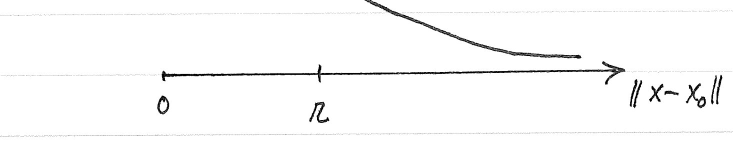
funktionen $t(1-t^2)^{\frac{m-3}{2}}$ er ulige.

$f(\xi) = \xi_i\xi_j$ og $f(\xi) = \xi_1^2$ udregnes på samme måde som øvelse.

Vi vender nu tilbage til det søgte potential:

Sætning 1.10. Newtonpotentialet af målet $\sigma_{x_0,r}$ er givet ved formlen

$$N_m\sigma_{x_0,r}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{r^{m-2}} & \text{for } \|x-x_0\| \le r \\[2ex] \dfrac{1}{\|x-x_0\|^{m-2}} & \text{for } \|x-x_0\| > r \end{cases}$$



Bevis: Af rotationssymmetriske grunde afhænger $N_m\sigma_{x_0,r}(x)$ kun af x's afstand fra x_0, og vi ved at $N_m\sigma_{x_0,r}$ er en harmonisk funktion såvel inden i som udenfor kuglefladen $S(x_0,r)$. Ifølge sætning 1.4 gælder da

$$N_m\sigma_{x_0,r}(x) = \begin{cases} a + b\dfrac{1}{\|x-x_0\|^{n-2}} & \text{for } 0<\|x-x_0\|<r \\[2ex] c + d\dfrac{1}{\|x-x_0\|^{n-2}} & \text{for } \|x-x_0\|>r \end{cases}$$

for passende konstanter a, b, c, d, som vi vil søge at bestemme. Det er klart at

$$N_m\sigma_{x_0,r}(x_0) = \frac{1}{r^{n-2}} ,$$

altså gælder

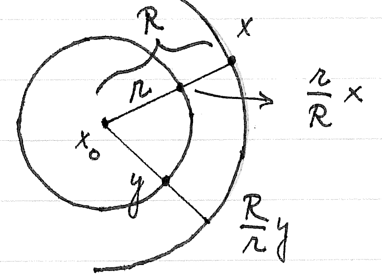
$$\lim_{x\to x_0}\left(a + b\frac{1}{\|x-x_0\|^{n-2}}\right) = \frac{1}{r^{n-2}} ,$$

og derfor sluttes at $\underline{b=0}$ og at $\underline{a=\frac{1}{r^{n-2}}}$.

Desuden gælder

$$\lim_{x\to\infty} N\sigma_{x_0,r}(x) = 0 ,$$

hvoraf følger at $\underline{c=0}$.



For at bestemme d vælges x så $\|x-x_0\| = R > r$. For $y\in S(x_0,r)$ gælder

$$\|x-y\| = \left\|\frac{R}{r}y - \frac{r}{R}x\right\| .$$

Heraf fås:

$$N_m\sigma_{x_0,r}(x) = \int_{S(x_0,r)} \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}}\,d\sigma_{x_0,r}(y) = \int_{S(x_0,r)} \frac{1}{\|\frac{R}{r}y - \frac{r}{R}x\|^{n-2}}\,d\sigma_{x_0,r}(y) =$$

$$\int_{S(x_0,R)} \frac{1}{\|z - \frac{r}{R}x\|^{n-2}}\,d\sigma_{x_0,R}(z) = \frac{1}{R^{n-2}} \quad \text{ifølge overvejelserne}$$

fra kuglens indre. Altså er $d=1$. Vi mangler nu blot at bestemme potentialets værdi i et punkt x' af $S(x_0,r)$. Vi sætter

$$y = x_0 + r\xi ,\quad \xi\in\Omega_n \quad \text{for } y\in S(x_0,r) ,$$

specielt $\quad x' = x_0 + r\xi'$, og finder

$$N_m\sigma_{x_0,r}(x') = \frac{1}{r^{m-2}\|\omega_m\|}\int_{\Omega_m}\frac{1}{\|\xi'-\xi\|^{m-2}}\,d\omega_m(\xi) .$$

Vi benytter nu integralreduktion med pol ξ'; vi skriver altså

$$\xi = t\,\xi' + \sqrt{1-t^2}\,\eta \quad , \quad \text{hvor} \quad \eta\cdot\xi' = 0 .$$

Så bliver

$$\|\xi'-\xi\|^{m-2} = \left(\|(1-t)\xi' - \sqrt{1-t^2}\,\eta\|^2\right)^{\frac{m-2}{2}} = \left((1-t)^2+(1-t^2)\right)^{\frac{m-2}{2}}$$

$= (2-2t)^{\frac{m-2}{2}}$ ifølge Pythagoras. Den generelle formel giver da

$$N_m\sigma_{x_0,r}(x') = \frac{\|\omega_{m-1}\|}{r^{m-2}\|\omega_m\|}\int_{-1}^{1}(2-2t)^{\frac{2-m}{2}}(1-t^2)^{\frac{m-3}{2}}\,dt .$$

Indføres $t=\cos\theta$ går selve integralet over i integralet

$$\int_0^{\pi}(2-2\cos\theta)^{\frac{2-m}{2}}\sin^{m-2}\theta\,d\theta = \int_0^{\pi}\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2-m}{2}}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^{m-2}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\cos^{m-2}\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-2}\theta\,d\theta = \frac{\|\omega_m\|}{\|\omega_{m-1}\|} \quad (\text{jvfr. p. 22}) ,$$

og vi har fundet $\quad N_m\sigma_{x_0,r}(x') = \dfrac{1}{r^{m-2}}$. $\square$

__Bemærk:__ 1) $N_m\sigma_{x_0,r}(x) \le N_m(x-x_0) = \dfrac{1}{\|x-x_0\|^{m-2}}$.

2) $N_m\sigma_{x_0,r}(x) = N_m\varepsilon_{x_0}(x) \quad$ for $\|x-x_0\| > r$,
altså potentialet udenfor kuglen $B(x_0,r)$ er det samme som potentialet frembragt af en enhedspartikel anbragt i kuglens centrum.

__Corollar 1.11.__ __Lad μ være et vilkårligt positivt mål på R^n. Så er potentialet $N_m\mu$ en hyperharmonisk funktion ≥ 0 på R^n.__

__Bevis:__

At $N_m\mu$ er nedad h.k. følger af Fatou's lemma: Hvis $x_p \to x$ vil $N_m(x_p-y) \to N_m(x-y)$ for alle $y\in R^n$, og derfor vil

$$N_m\mu(x) = \int N_m(x-y)\,d\mu(y) \le \liminf_{p\to\infty}\int N_m(x_p-y)\,d\mu(y) = \liminf_{p\to\infty} N_m\mu(x_p).$$

Middelværdiegenskaben indses således:

$$\mathcal{M}^{r}_{N_n\mu}(x_0) = \int N_n\mu \, d\sigma_{x_0,r} = \int N_n\sigma_{x_0,r}\, d\mu \le \int N_n(x_0-x)\, d\mu(x) = N_n\mu(x_0),$$

idet det andet lighedstegn beror på Fubini's sætning (jvfr. den blandede energi). ‖

<u>Øvelser:</u> 1) Find et positivt mål μ på $\mathbb{R}^n$ så $N_n\mu \equiv \infty$.

2) Find energien $E(\sigma_{x_0,r})$ af målet $\sigma_{x_0,r}$.

3) Find potentialet og energien af det normaliserede Lebesgue-mål på kuglen $B(x_0,r)$.

<u>Lemma 1.12.</u> <u>Hvis f er en positiv kontinuert funktion med kompakt støtte er $N_n f = N_n * f$ en positiv kontinuert funktion, der går mod 0 i det uendeligt fjerne.</u>

<u>Bevis:</u> $N_n f(x) = \int \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} f(y)\,dy = \int f(x-y)\frac{1}{\|y\|^{n-2}}\,dy$

Vi vil vise at $N_n f$ er kontinuert i et punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Vi vælger en kompakt omegn V af x_0 og dernæst en kontinuert positiv funktion φ med kompakt støtte som er 1 på den kompakte mængde

$$V - \mathrm{supp}(f).$$

Er $\varepsilon > 0$ givet, findes en omegn U af x_0, $U \subset V$ så

$$|f(x-y) - f(x_0-y)| \le \varepsilon \quad \text{for } x \in U,\ y \in V-\mathrm{supp}(f).$$

Heraf fås

$$|f(x-y) - f(x_0-y)| \le \varepsilon\varphi(y) \quad \text{for } x \in U,\ y \in \mathbb{R}^n,$$

og dermed

$$|N_n f(x) - N_n f(x_0)| \le \varepsilon \int \frac{\varphi(y)}{\|y\|^{n-2}}\,dy \quad \text{for } x \in U,$$

hvilket viser kontinuiteten i x_0.

At $N_n f \to 0$ i ∞ ses således:

Til $\varepsilon > 0$ findes $R > 0$ så

$$\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \le \frac{\varepsilon}{\int f(x)\,dx} \quad \text{for } \|x\| \ge R,\ y \in \mathrm{supp}(f).$$

Heraf fås $\frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}} \le \frac{\varepsilon}{\int f(x)\,dx} f(y)$ for $\|x\| > R$, $y \in \mathbb{R}^n$,

og endelig $N_n f(x) \le \varepsilon$ for $\|x\| > R$. ‖

<u>Bemærkninger</u>: 1) Heraf følger at $f \mapsto N_n * f$ definerer en positiv lineær afbildning af rummet $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ ind i rummet $C_0(\mathbb{R}^n)$. Funktionen $N_n * f$ kaldes Newtonpotentialet frembragt af f også når f ikke er positiv.
2) Der gælder generelt at $\mu * f$ er kontinuert når μ er et Radonmål og $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Her er $\mu = \frac{1}{\|y\|^{n-2}} dy$. Overvej dette.

<u>Hovedsætning 1.13.</u> <u>Newtonkernen opfylder det fuldstændige maksimumprincip, hvilket vil sige at uligheden</u>

$$N_n f(x) \le N_n g(x) + a \quad , \text{hvor } f, g \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R}^n),\ a \ge 0$$

<u>automatisk er opfyldt for alle $x \in \mathbb{R}^n$, når blot den gælder for alle $x \in \operatorname{supp}(f)$.</u>

<u>Bevis:</u> Lad $f, g \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R}^n)$, $a \ge 0$, og lad os antage at funktionen

$$u(x) = N_n g(x) + a - N_n f(x)$$

er ≥ 0 i $\operatorname{supp}(f)$. Vi skal vise at $u \ge 0$ i den åbne mængde $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(f)$. Funktionen $N_n g(x) + a$ er hyperharmonisk i $\mathbb{R}^n$, specielt i Ω, hvor $N_n f$ er harmonisk. Heraf følger at u er hyperharmonisk i Ω. Vi vil nu forsøge at anvende minimumsprincippet på u. Vi vælger en sammenhængskomponent Ω' af Ω og påstår at

$$\liminf_{x \to y} u(x) \ge 0 \qquad \text{for alle } y \in (\Omega')^*.$$

Hvis $y = \infty$ følger dette af lemma 1.12 fordi $\lim_{x \to \infty} N_n f(x) = 0$. Hvis $y \in \mathbb{R}^n$ er et sædvanligt randpunkt for Ω', er y også randpunkt for Ω, og derfor vil $y \in \operatorname{supp}(f)$. Ifølge lemma 1.12 har vi da

$$\liminf_{x \to y} u(x) = \lim_{x \to y} \left(N_n g(x) + a - N_n f(x) \right) = N_n g(y) + a - N_n f(y)$$

hvilket er ≥ 0 ifølge forudsætningen. Forudsætningen for anvendelse af 1.9 er altså opfyldt, og vi slutter at $u \ge 0$ i Ω' og dermed $u \ge 0$ i Ω.

$\square$

<u>Bemærkninger:</u> 1) Sættes $a = 0$ opnås <u>dominationsprincippet:</u>
For alle $f, g \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R}^n)$: $N_m f \leq N_m g$ på $\operatorname{supp}(f) \Rightarrow N_m f \leq N_m g$ i $\mathbb{R}^n$.

2) Sættes $g = 0$ opnås <u>maximumsprincippet:</u>
For alle $f \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R}^n)$, $a \geq 0$: $N_m f \leq a$ på $\operatorname{supp}(f) \Rightarrow N_m f \leq a$ i $\mathbb{R}^n$.
Dette princip udtrykker at $N_m f$ antager sit maksimum i et punkt af $\operatorname{supp}(f)$.

3) Alle 3 principper bevarer deres gyldighed for visse klasser af positive Radonmål på f og g's plads. Det er ikke simpelt at finde maksimale klasser af sådanne mål.

Vi har her mødt 3 principper fra klassisk potentialteori som Newtonkernen opfylder. Vi citerer uden beviser endnu et:

<u>Fejningsprincippet eller balayageprincippet:</u>
Til ethvert positivt mål μ på $\mathbb{R}^n$ med kompakt støtte, og til hver åben relativt kompakt mængde $\omega \subset \mathbb{R}^n$ findes et positivt mål μ' med egenskaberne:
(1) μ' koncentreret på $\bar{\omega}$ $(\operatorname{supp}(\mu') \subseteq \bar{\omega})$.
(2) $N_m \mu = N_m \mu'$ i mængden ω.
(3) $N_m \mu' \leq N_m \mu$.
(4) $\|\mu'\| \leq \|\mu\|$.
Målet μ' kaldes <u>det fejede mål</u> af μ på ω.

To naturlige problemer vedrørende det lineære aspekt af den generelle potentialteori er:
<u>Problem A:</u> Find de logiske relationer mellem de fundamentale principper.
<u>Problem B:</u> Bestem samtlige kerner der tilfredsstiller et bestemt princip.

Disse to problemer har givet anledning til megen forskning i de sidste 15 år. Mange resultater er fundet, men teorien er slet ikke udtømt. I det følgende kapitel vil vi lægge den abstrakte ramme for behandlingen af disse problemer.

Kapitel 2. Kerner på lokalkompakte rum.

§1. De fundamentale principper.

Overalt i dette kapitel betegner X et lokalkompakt topologisk rum. Vi henviser læseren til at konsultere Bourbaki: Intégration, Chap. 1–4 vedrørende teorien for Radonmål på X. Vi minder om nogle resultater som vi ofte får brug for.

Lemma 2.1 En funktion $f: X \to [0,\infty]$ er nedad halvkontinuert hvis og kun hvis

$$f = \sup\{\varphi \in \mathcal{K}_+ \mid \varphi \leq f\}.$$

Beviset følger umiddelbart af definitionerne.

Lemma 2.2. (Dini) Lad $(f_i)_{i\in I}$ være en opad filtrerende familie af nedad halvkontinuerte funktioner på X, og antag at $f = \sup\limits_{i\in I} f_i$ er en kontinuert funktion. Så vil $f_i \to f$ ligeligt over kompakte delmængder af X, i.e.

$\forall K$ kompakt $\subset X$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists i_0 \in I$, så der for alle $i \in I$, $i \geq i_0$ gælder

$$f(x) - \varepsilon \leq f_i(x) \leq f(x) \quad \text{for alle } x \in K.$$

Beviset er et simpelt kompakthedsargument.

Lemma 2.3. Lad μ være et positivt Radonmål på X. For enhver opad filtrerende familie $(f_i)_{i\in I}$ af positive nedad halvkontinuerte funktioner er $f = \sup\limits_{i\in I} f_i$ nedad halvkontinuert, og der gælder

$$\int f(x)\,d\mu(x) = \int\Big(\sup_{i\in I} f_i(x)\Big)\,d\mu(x) = \sup_{i\in I}\int f_i(x)\,d\mu(x).$$

(Vi skelner ikke mellem sædvanligt integral og øvre integral for nedad halvkontinuerte positive funktioner. Se Bourbaki: Intégration, Chap. 4, théorème 1).

To vektorrum E og F over $\mathbb{C}$ (eller over $\mathbb{R}$) siges at udgøre et <u>dualt par ved en bilinearform</u> $\mathcal{B}: E \times F \to \mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$), hvis der gælder axiomerne

Dp. 1: $\forall e \in E,\ e \neq 0,\ \exists f \in F$ så $\mathcal{B}(e,f) \neq 0$

Dp. 2: $\forall f \in F,\ f \neq 0,\ \exists e \in E$ så $\mathcal{B}(e,f) \neq 0$.

For hvert $f \in F$ defineres en seminorm p_f på E ved

$$p_f(e) = |\mathcal{B}(e,f)|,$$

og vi udstyrer E med topologien bestemt ved familien af seminormer p_f, $f \in F$. Den betegnes $\sigma(E,F)$ og kaldes den svage topologi for det duale par. E udstyres herved til et lokalkonvekst topologisk vektorrum. Topologien $\sigma(E,F)$ er Hausdorff på grund af Dp. 1, og den er den groveste topologi på E i hvilken linearformerne $e \mapsto \mathcal{B}(e,f)$, $f \in F$ er kontinuerte. Det kan omvendt vises, at enhver kontinuert linearform φ på E har denne form, altså der findes $f \in F$ (og på grund af Dp. 2 præcis et) så $\mathcal{B}(e,f) = \varphi(e)$ for alle $e \in E$. Hermed kan det topologisk duale rum E' til E identificeres med F. Jvfr. F.4 p. 4.13 mat. 6 eller Robertson: Topological vector spaces p. 33. Den svage topologi $\sigma(F,E)$ på F defineres analogt.

Rummene $\mathcal{K}(X)$ og $\mathcal{M}(X)$ udgør et dualt par ved bilinearformen

$$(f,\mu) \mapsto \langle f,\mu\rangle := \int f(x)\,d\mu(x).$$

På samme måde udgør rummene $\mathcal{C}(X)$ og $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}(X)$ et dualt par ved bilinearformen

$$(f,\mu) \mapsto \langle f,\mu\rangle := \int f(x)\,d\mu(x).$$

I det følgende tænkes $\mathcal{M}(X)$ og $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}(X)$ udstyret med de svage topologier $\sigma(\mathcal{M}(X),\mathcal{K}(X))$ og $\sigma(\mathcal{M}_{\mathcal{K}}(X),\mathcal{C}(X))$.

<u>Lemma 2.4.</u> <u>Lad $N: \mathcal{K}(X) \to \mathcal{C}(X)$ være en positiv lineær afbildning. Linearformen $N^*\mu$ på $\mathcal{K}(X)$ givet ved</u>

$$N^*\mu: f \mapsto \langle Nf,\mu\rangle \quad , \mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}(X)$$

er et Radonmål på X. Hermed defineres en afbildning
$$N^*: \mathcal{M}_{\mathcal{K}}(X) \to \mathcal{M}(X)$$
som er kontinuert, lineær og positiv. Afbildningen N^* kaldes den til N transponerede afbildning. Der gælder
$$\langle f, N^*\mu \rangle = \langle Nf, \mu \rangle \quad , f \in \mathcal{K}(X), \mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}(X).$$

Bevis: Vi udelader X i symbolerne $\mathcal{K}(X)$, $\mathcal{M}(X)$ ect., da der ikke er mulighed for misforståelse. Er $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^+$ er $N^*\mu$ klart en positiv linearform, altså et positivt Radonmål. Et vilkårligt $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ kan spaltes $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$ hvor $\mu_k \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^+$, $k=1,\dots,4$. Heraf følger at $N^*\mu$ er linearkombination af positive Radonmål, altså selv et Radonmål.

For at indse at N^* er kontinuert, skal vi vise at afbildningerne $\mu \mapsto \langle f, N^*\mu \rangle = \langle Nf, \mu \rangle$ af $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ ind i $\mathbb{C}$ er kontinuerte for fast $f \in \mathcal{K}$. Da $Nf \in \mathcal{C}$ er dette en direkte konsekvens af definitionen på $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$'s topologi. ▯

Vi kan generalisere Newtonkernen og Newtonpotentialet til X på følgende måder:

1) Funktionskerne: Herved forstås en funktion $N: X \times X \to [0,\infty]$, som antages nedad halvkontinuert. Potentialet frembragt af et positivt mål $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ er funktionen
$$N\mu(x) = \int N(x,y)\, d\mu(y) .$$
(Af 2.1 og 2.3 fremgår det, at $N\mu$ er en positiv nedad halvkontinuert funktion). Eks: $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $N(x,y) = N_n(x-y)$, hvor N_n er Newtonkernen. Potentialet er det sædvanlige Newtonpotential.

2) Kontinuert kerne: Herved forstås en positiv lineær afbildning $N: \mathcal{K} \to \mathcal{C}$. For $f \in \mathcal{K}$ resp. $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ kaldes Nf resp. $N^*\mu$ potentialet frembragt af f resp. μ (jvfr. 2.4).

Forbindelsen til Newtonpotentialet fremgår af lemma 1.12, idet N er givet ved $f \mapsto N_n * f$. Af udregningen
$$\langle f, N^*\mu \rangle = \langle Nf, \mu \rangle = \langle N_n * f, \mu \rangle = \int\left(\int N_n(x-y) f(y)\, dy\right) d\mu(x) =$$

$$\int\left(\int N_m(y-x)\,d\mu(x)\right) f(y)\,dy = \int N_m\mu(y)\, f(y)\,dy ,$$

følger at $N^*\mu = (N_m\mu)\,dx$, altså $N^*\mu$ er et mål med tæthed givet ved det sædvanlige Newtonpotential $N_m\mu$ af μ.

Vi skal ikke her beskæftige os med funktionskerner, men henvise til en artikel af Bent Fuglede i Acta Math. vol. 103, 1960 pp. 139-215, og vil kun betragte kontinuerte kerner.

Lad N være en kontinuert kerne. For fast $x \in X$ er afbildningen $\mathcal{K} \to \mathbb{C}$ givet ved $f \mapsto Nf(x)$ et positivt Radonmål på X, nemlig målet $N^*\varepsilon_x$. Der gælder altså

$$Nf(x) = \int f(y)\; d(N^*\varepsilon_x)(y) \qquad \text{for } f \in \mathcal{K},\ x \in X.$$

Denne formel kan benyttes til at definere Nf for alle funktioner på X som er integrable i udvidet forstand med hensyn til alle målene $N^*\varepsilon_x$, $x \in X$, hvilket er tilfældet f.eks. for alle positive universelt målelige funktioner, eller ~~mere~~ specielt for alle positive nedad halvkontinuerte funktioner. Generelt kan man bemærke at sætningen om mål via formlen

$$Nf(x) = \int f\, dN^*\varepsilon_x$$

giver sætninger om kontinuerte kerner.

<u>Lemma 2.5.</u> <u>Lad $\mathcal{J}_+$ betegne mængden af nedad halvkontinuerte funktioner $f: X \to [0,\infty]$. For $f \in \mathcal{J}_+$ er $Nf \in \mathcal{J}_+$ og afbildningen $N: \mathcal{J}_+ \to \mathcal{J}_+$ (som er induceret af N) har egenskaberne</u>

1) $N(af) = a\,Nf$, $a \geq 0$, $f \in \mathcal{J}_+$
2) $N(f+g) = Nf + Ng$, $f, g \in \mathcal{J}_+$
3) <u>For en opad filtrerende familie $(f_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{J}_+$ gælder</u>

$$N(\sup_{i\in I} f_i) = \sup_{i\in I} Nf_i$$

4) $f \leq g \Rightarrow Nf \leq Ng$.

<u>Bevis:</u> Af 2.1 og 2.3 fremgår det at $Nf = \sup\{N\varphi \mid \varphi \in \mathcal{K}_+,\ \varphi \leq f\}$ for $f \in \mathcal{J}_+$, og da $N\varphi$ er kontinuert er $Nf \in \mathcal{J}_+$ ifølge 2.1. Egenskaberne 1) - 4) er en umiddelbar følge af tilsvarende egenskaber

vedmål, eksempelvis følge 3) af lemma 2.3. $\square$

En N og M kontinuerte kerner definerer $f \mapsto N(Mf)$ ifølge 2.5 en afbildning af $\mathcal{J}_+$ ind i $\mathcal{J}_+$ med egenskaberne 1) – 4). Denne afbildning betegnes NM, og den er induceret af en kontinuert kerne hvis og kun hvis $N(Mf)$ er kontinuert for alle $f \in \mathcal{K}_+$. I dette tilfælde siger vi at N og M kan sammensættes. Hvis $N = M$ skrives $N^2 = NM$.

Den transponerede kerne N^* kan undertiden defineres for en større klasse af mål end $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$. Vi definerer

$$\mathcal{D}^+(N^*) = \{\mu \in \mathcal{M}_+ \mid \langle Nf, \mu \rangle < \infty \text{ for alle } f \in \mathcal{K}_+\},$$

hvilket er en konveks kegle omfattende $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^+$. Underrummet frembragt af $\mathcal{D}^+(N^*)$ kaldes domænet $\mathcal{D}(N^*)$ for N^*. Der gælder

$$\mathcal{D}(N^*) = \mathcal{D}^+(N^*) - \mathcal{D}^+(N^*) + i\left(\mathcal{D}^+(N^*) - \mathcal{D}^+(N^*)\right).$$

For $\mu \in \mathcal{D}^+(N^*)$ er $f \mapsto \langle Nf, \mu \rangle$ en positiv linearform på $\mathcal{K}$, og det derved definerede positive Radonmål betegnes $N^*\mu$. Vi definerer N^* på $\mathcal{D}(N^*)$ ved linearitet, og får dermed en positiv lineær afbildning $N^* : \mathcal{D}(N^*) \to \mathcal{M}$ opfyldende

$$\langle f, N^*\mu \rangle = \langle Nf, \mu \rangle \quad \text{for } f \in \mathcal{K},\ \mu \in \mathcal{D}(N^*).$$

Der gælder desuden

$$\langle f, N^*\mu \rangle = \langle Nf, \mu \rangle \quad \text{for } f \in \mathcal{J}_+,\ \mu \in \mathcal{D}^+(N^*),$$

idet begge led eventuelt kan være $+\infty$.

<u>Lemma 2.6. Antag at N og M kan sammensættes. Så vil $N^*(\mathcal{M}_{\mathcal{K}}) \subseteq \mathcal{D}(M^*)$, og der gælder $M^*(N^*\mu) = (NM)^*\mu$ for alle $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}$.</u>

<u>Bevis:</u> For $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^+$, $f \in \mathcal{K}_+$ gælder ifølge formlen ovenfor, at

$$\langle Mf, N^*\mu \rangle = \langle N(Mf), \mu \rangle,$$

og denne fælles værdi er $< \infty$ fordi $N(Mf)$ er kontinuert. Dette viser at $N^*\mu \in \mathcal{D}^+(M^*)$ og at

$$\langle f, M^*(N^*\mu) \rangle = \langle N(Mf), \mu \rangle = \langle f, (NM)^*\mu \rangle, \quad f \in \mathcal{K}_+,$$

altså $M^*(N^*\mu) = (NM)^*\mu$ for $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^+$. Den generelle påstand følger ved linearitet. $\square$

Definitioner: Vi siger at den kontinuerte kerne N

1) gå mod 0 i ∞, hvis $Nf \in C_0(X)$ for alle $f \in \mathcal{K}(X)$.

2) er begrænset, hvis $N1$ er en begrænset funktion, altså hvis $\sup_{x\in X} N1(x) = \sup_{x\in X} \|N^*\varepsilon_x\| < \infty$.

3) er strengt positiv, hvis $N^*\varepsilon_x \neq 0$ for alle $x \in X$, eller ensbetydende hermed $N1(x) > 0$ for alle $x \in X$.

4) er en Markovkerne (resp. sub-Markovkerne), hvis $N1 = 1$, (resp. $N1 \le 1$).

Bemærkninger: a) Newtonkernen går mod 0 i ∞ (1.12), den er strengt positiv og ikke begrænset. Der gælder nemlig

$$N^*\varepsilon_x = \|y-x\|^{2-n}dy ,$$

hvoraf

$$\|N^*\varepsilon_x\| = N1(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \|y-x\|^{2-n}dy = \infty \quad \text{for alle } x \in X.$$

b) En kerne N er strengt positiv, hvis og kun hvis man til hver kompakt mængde $K \subset X$ kan finde $f \in \mathcal{K}_+$ så $Nf \ge 1$ på K. (Kompakthedsargument).

c) Er φ en positiv kontinuert funktion på X, defineres en kontinuert kerne N_φ ved $N_\varphi(f) = \varphi f$. Denne kerne går mod 0 i ∞, den er begrænset resp. strengt positiv præcis når φ er begrænset resp. strengt positiv. Der gælder $N^*\mu = \varphi\mu$, idet $\varphi\mu$ er målet med tæthed φ og basis μ: $\int f\, d(\varphi\mu) = \int f\cdot\varphi\, d\mu$.

d) Kan Newtonkernen skrives på formen N_φ for passende positiv kontinuert φ?

e) Er N en kontinuert kerne er $\mu_x = N^*\varepsilon_x$, $x \in X$ en familie af positive mål på X, så afbildningen $X \to \mathcal{M}(X)$ givet ved $x \mapsto \mu_x$ er kontinuert. Har vi omvendt en familie $(\mu_x)_{x\in X}$ af positive mål på X så afbildningen $x \mapsto \mu_x$ er kontinuert, defineres en kontinuert kerne N ved

$$Nf(x) = \int f\, d\mu_x .$$

Vi indfører nu en række principper som N eventuelt kan opfylde:

<u>Definitioner:</u> En kontinuert kerne N på X opfylder

1) <u>Det fuldstændige maksimumprincip</u>, hvis
$\forall f, g \in \mathcal{K}_+$, $\forall a \geq 0$: $Nf(x) \leq Ng(x) + a$ for $x \in supp(f)$ $\Rightarrow$
$Nf(x) \leq Ng(x) + a$ for alle $x \in X$.

2) <u>Dominationsprincippet</u>, hvis
$\forall f, g \in \mathcal{K}_+$: $Nf(x) \leq Ng(x)$ for $x \in supp(f) \Rightarrow Nf(x) \leq Ng(x)$ for alle $x \in X$.

3) <u>Maksimumprincippet</u>, hvis
$\forall f \in \mathcal{K}_+$, $\forall a \geq 0$: $Nf(x) \leq a$ for $x \in supp(f) \Rightarrow Nf(x) \leq a$ for alle $x \in X$.

4) <u>Fejningsprincippet (balayage-princippet)</u>, hvis der
$\forall \omega$, åben, relativt kompakt delmængde af X
$\forall \mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^+$
$\exists \mu' \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^+$ (det fejede mål af μ på ω) så

(i) $supp(\mu') \subseteq \overline{\omega}$
(ii) $N^*\mu' \leq N^*\mu$
(iii) Målene $N^*\mu'$ og $N^*\mu$ har samme restriktion til ω.

5) <u>Fejningsprincippet med massetab</u>, hvis der gælder som under 4), men målet μ' skal opfylde endnu en betingelse:
(iv) $\|\mu'\| \leq \|\mu\|$ (massetabet).

Det er klart, at det fuldstændige maksimumprincip medfører såvel dominationsprincippet som maksimumprincippet, og at fejningsprincippet med massetab medfører fejningsprincippet. Der gælder nu følgende rigtige sætning:

<u>Sætning 2.7. En kontinuert kerne N opfylder det fuldstændige maksimumprincip hvis og kun hvis den opfylder fejningsprincippet med massetab.</u>

Bevis: 1) Antag at N opfylder fejningsprincippet med massetab, og antag at $Nf(x) \leq Ng(x) + a$ for $x \in \text{supp}(f)$, hvor $f, g \in \mathcal{K}_+$, $a \geq 0$. For $x \in X$ betegner ε_x' det fejede mål af ε_x på den åbne relativt kompakte mængde $\omega = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$. Vi får da for vilkårligt $x \in X$: ((i) under et lighedstegn betyder at vi anvender egenskaben (i) etc.)

$$Nf(x) = \langle f, N^*\varepsilon_x \rangle \underset{(iii)}{=} \langle f, N^*\varepsilon_x' \rangle = \langle Nf, \varepsilon_x' \rangle \underset{(i)}{\leq} \langle Ng + a, \varepsilon_x' \rangle$$

$$= \langle g, N^*\varepsilon_x' \rangle + a\|\varepsilon_x'\| \underset{(iv)}{\leq} \langle g, N^*\varepsilon_x' \rangle + a \underset{(ii)}{\leq} \langle g, N^*\varepsilon_x \rangle + a =$$

$Ng(x) + a$, hvilket viser, at det fuldstændige maksimumprincip er opfyldt.

2) Antag at det fuldstændige maksimumprincip er opfyldt. Til en åben relativt kompakt delmængde $\omega \subset X$ indføres

$A_\omega = \{\mu \in \mathcal{M}_+(X) \mid \text{supp}\,\mu \subseteq \complement\omega\}$, hvilket er en afsluttet konveks kegle i $\mathcal{M}$ (som jo er forsynet med topologien $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$).

$\mathcal{M}_\omega^1 = \{\mu \in \mathcal{M}_+(X) \mid \text{supp}(\mu) \subseteq \overline{\omega}, \|\mu\| \leq 1\}$, hvilket er en kompakt konveks delmængde af $\mathcal{M}_\mathcal{K}$ med topologien $\sigma(\mathcal{M}_\mathcal{K}, \mathcal{C})$.

Kompaktheden af $\mathcal{M}_\omega^1$: Lad $\mathfrak{U}$ være et ultrafilter på $\mathcal{M}_\omega^1$. For $f \in \mathcal{C}$ vil $\mu \mapsto \langle f, \mu \rangle$ være en afbildning af $\mathcal{M}_\omega^1$ ind i cirkelskiven

$$D_f = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \sup_\omega |f|\},$$

hvorved $\mathfrak{U}$ går over i en ultrafilterbasis $\mathfrak{U}(f)$ på D_f. Det ved $\mathfrak{U}(f)$ bestemte ultrafilter $\mathfrak{U}^*(f)$ konvergerer på det kompakte rum D_f mod et tal, som vi betegner $\sigma(f)$, hvorved der bestemmes en afbildning $\sigma: \mathcal{C} \to \mathbb{C}$. Filterbasen $\mathfrak{U}^*(f) + \mathfrak{U}^*(g)$ konvergerer mod $\sigma(f) + \sigma(g)$. Da filtret $\mathfrak{U}^*(f+g)$ er finere end $\mathfrak{U}^*(f) + \mathfrak{U}^*(g)$ (verificer det!), vil $\mathfrak{U}^*(f+g)$ have samme grænseværdi, og deraf sluttes at $\sigma(f+g) = \sigma(f) + \sigma(g)$. Det er endnu simplere at overveje at $\sigma(\lambda f) = \lambda\sigma(f)$ for $\lambda \in \mathbb{C}$, og at $\sigma(f) \geq 0$ når $f \geq 0$. Hermed definerer σ en positiv linearform på $\mathscr{C}$, og dens restriktion til $\mathscr{K}$ er derfor et positivt Radonmål μ_0. For $f \in \mathscr{K}_+$ så $\operatorname{supp}(f) \cap \overline{\omega} = \emptyset$, er $\langle f, \mu \rangle = 0$ for alle $\mu \in \mathcal{M}^1_\omega$, og derfor er $\mathfrak{U}(f) = \{0\}$, så $\langle f, \mu_0 \rangle = \sigma(f) = 0$, hvilket viser at $\operatorname{supp}(\mu_0) \subseteq \overline{\omega}$. Hvis $f \in \mathscr{K}_+$, $f \leq 1$ er

$$0 \leq \langle f, \mu \rangle \leq 1 \qquad \text{for alle } \mu \in \mathcal{M}^1_\omega,$$

og derfor vil alle filtermængderne i $\mathfrak{U}(f)$ tilhøre intervallet $[0,1]$, og så vil $\sigma(f) = \langle f, \mu_0 \rangle \leq 1$, hvoraf følger at $\|\mu_0\| \leq 1$. Vi har hermed indset at $\mu_0 \in \mathcal{M}^1_\omega$. Indtil nu ved vi blot, at σ er en linearform, der forlænger μ_0 fra $\mathscr{K}$ til $\mathscr{C}$, og kan ikke på forhånd vide om

$$\sigma(f) = \langle f, \mu_0 \rangle \qquad \text{for } f \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{K}.$$

For at se at dette er rigtigt, vælges $\varphi_0 \in \mathscr{K}_+$ så φ_0 er 1 på en kompakt omegn af $\overline{\omega}$. For $\mu \in \mathcal{M}^1_\omega$ gælder derfor

$$\langle f, \mu \rangle = \langle f\varphi_0, \mu \rangle,$$

men så må $\mathfrak{U}(f) = \mathfrak{U}(f\varphi_0)$, og følgelig

$$\sigma(f) = \sigma(f\varphi_0) = \langle f\varphi_0, \mu_0 \rangle = \langle f, \mu_0 \rangle, \qquad f \in \mathscr{C}.$$

Da topologien på $\mathcal{M}^1_\omega$ er den groveste, i hvilken alle afbildningerne $\mu \mapsto \langle f, \mu \rangle$, $f \in \mathscr{C}$, er kontinuerte, og da billedfiltrene $\mathfrak{U}^*(f)$ ved disse afbildninger konvergerer mod $\langle f, \mu_0 \rangle$, følger af lemma 2.16.1, T.2, mat. 6, at ultrafiltret $\mathfrak{U}$ er konvergent i topologien $\sigma(\mathcal{M}_\mathscr{K}, \mathscr{C})$ med grænseværdien μ_0. ‖

Vi sætter videre:

$U^1_\omega = N^*(\mathcal{M}^1_\omega)$, som er en kompakt konveks mængde i $\mathcal{M}$ med topologien $\sigma(\mathcal{M}, \mathscr{K})$. ($N^*$ er nemlig kontinuert, lemma 2.4).

$U = N^*(\{\mu \in \mathcal{M}^+_\mathscr{K} \mid \|\mu\| = 1\})$.

Lad os nu vise, at vi til $\mu \in \mathcal{M}^+_\mathscr{K}$ kan finde et fejet mål μ' med egenskaberne (i) – (iv). Er $\mu = 0$ vælges $\mu' = 0$. Er $\mu \neq 0$ betragtes $\frac{\mu}{\|\mu\|}$, og kan vi til dette mål finde et fejet mål μ', vil $\|\mu\|\mu'$ være et fejet mål til μ. Det er derfor nok at finde $\mu' \in \mathcal{M}^+_\mathscr{K}$ med egenskaberne (i) – (iv) for $\mu \in \mathcal{M}^+_\mathscr{K}$ hvor $\|\mu\| = 1$, og da er problemet ækvivalent med inklusionen

$$U \subseteq U^1_\omega + A_\omega.$$

Denne inklusion foregår helt indenfor det reelle vektorrum $\mathcal{M}(X,\mathbb{R})$ af reelle Radonmål på X, og $U_\omega^1 + A_\omega$ er en afsluttet konveks delmængde af $\mathcal{M}(X,\mathbb{R})$. Antages at der findes $\mu_0 \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^+$, $\|\mu_0\| = 1$, altså $N^*\mu_0 \in U$, så

$$N^*\mu_0 \notin U_\omega^1 + A_\omega ,$$

når vi til en modstrid på følgende måde: Ifølge Hahn-Banach's sætning findes $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{R})$ og $a \in \mathbb{R}$ så

$$\langle f, N^*\mu_0 \rangle \quad > \quad a \quad > \quad \langle f, \nu \rangle \qquad (*)$$

for alle $\nu \in U_\omega^1 + A_\omega$. Da $0 \in U_\omega^1$ følger at $\langle f, \nu \rangle < a$ for alle $\nu \in A_\omega$. For $\nu = 0$ fås $a > 0$, og for $\nu = n \cdot \varepsilon_x$, $x \notin \omega$, $n \in \mathbb{N}$ fås $n f(x) < a$, hvoraf $f(x) \leq 0$ for $x \notin \omega$. Spaltes f i positiv- og negativdel: $f = f^+ - f^-$, $f^+ = \sup(f,0)$, $f^- = -\inf(f,0)$, følger at <u>$\operatorname{supp}(f^+) \subseteq \overline{\omega}$.</u>

Da også $0 \in A_\omega$, følger af $(*)$ at

$$\langle f, N^*\mu \rangle = \langle Nf, \mu \rangle \quad < \quad a \qquad \text{for alle } \mu \in \mathcal{M}_\omega^1.$$

Vælges $\mu = \varepsilon_x$, $x \in \overline{\omega}$ fås

$$N(f^+)(x) \; < \; N(f^-)(x) + a \qquad \text{for alle } x \in \overline{\omega},$$

og det fuldstændige maksimumprincip medfører da at $Nf \leq a$, hvoraf $\langle f, N^*\mu_0 \rangle = \langle Nf, \mu_0 \rangle \leq \langle a, \mu_0 \rangle = a$, hvilket er en modstrid med $(*)$. ▯

Der gælder en hel række sætninger analoge med 2.7, hvor de to principper begge er afsvækket. Beviserne for dem er meget lig beviserne for sætning 2.7. Vi nøjes med at anføre et par af sætningerne til læserens orientering.

<u>Sætning 2.7. (sekundo) Lad N være en kontinuert kerne. Hvis N opfylder fejningsprincippet, så opfylder N også dominationsprincippet.
Hvis kernen N desuden forudsættes strengt positiv, er det omvendte også rigtigt.</u>

Sætning 2.7 (tertio). En kontinuert kerne N opfylder maksimumprincippet hvis og kun hvis den opfylder "pseudofejningsprincippet" d.v.s.: For enhver åben relativt kompakt mængde $\omega \subset X$, og for hvert $\mu \in \mathcal{M}^+_{\mathcal{K}}$ findes $\mu' \in \mathcal{M}^+_{\mathcal{K}}$ med egenskaberne

(i) $\mathrm{supp}(\mu') \subseteq \overline{\omega}$.

(iii)' $N^*\mu' \geq N^*\mu$ i ω (i.e.: $\langle f, N^*\mu' \rangle \geq \langle f, N^*\mu \rangle$ for alle $f \in \mathcal{K}_+$, hvor $\mathrm{supp}(f) \subseteq \omega$).

(iv) $\|\mu'\| \leq \|\mu\|$.

(Bevis for de to sidstnævnte sætninger findes hos Deny: Les principes fondamentaux de la théorie du potentiel. Séminaire Brelot, Choquet, Deny 1960/61. Der findes også forklaret hvorfor vi må kræve N strengt positiv i den ene halvdel af sætning 2.7 sekundo.)

Opgaver: 1) Vis at kernen $N_\varphi : f \mapsto \varphi f$ (φ given positiv kontinuert funktion på X) opfylder det fuldstændige maksimumprincip, og vis at $\mu' = \mu/_\omega$ (= restriktionen af μ til ω) er et fejet mål af μ på ω.

2) Lad N være Newtonkernen i $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, og lad $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, der opfylder $\varphi(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, men $\varphi(0) = 0$. Vis at kernen $Gf = \varphi \cdot Nf$ opfylder dominationsprincippet. Vis dernæst at

$$\lim_{x \to \infty} \|x\|^{n-2} Nf(x) = \int f(y)\,dy \quad \text{for } f \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R}^n),$$

og udnyt dette til at vise, at kernen G ikke tilfredsstiller det fuldstændige maksimumprincip når $\varphi(x) = \|x\|^n$.

3) Lad N være en kontinuert kerne på et lokalkompakt rum X. Vis at følgende to principper er ækvivalente

a) Det stærke maksimumprincip: For enhver kontinuert reel funktion $f: X \to \mathbb{R}$ med kompakt støtte gælder $Nf \leq 1$, hvis blot $Nf(x) \leq 1$ for alle $x \in \mathrm{supp}(f)$.

b) Beurling's princip om det konvekse hylster:

For enhver kontinuert funktion $\varphi : X \to R^n$ $(n=1,2,\cdots)$ med kompakt støtte gælder

$$N\varphi(x) \in \operatorname{conv}\left(\underline{0}, \{N\varphi(z) \mid z \in \operatorname{supp}\varphi\}\right) \quad \text{for alle } x \in X.$$

(Funktionen φ har koordinatfunktioner $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ så $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x))$ og vi sætter $N\varphi(x) = (N\varphi_1(x), \cdots, N\varphi_n(x))$. Betegnelsen conv( ) betyder det konvekse hylster af den i parantesen nævnte delmængde af R^n.)

Vis at det fuldstændige maksimumprincip medfører a) og b).

§2. Elementære kerner.

Vi skal nu indføre en simpel klasse af kerner - kaldet elementære - der opfylder de vigtigste principper. Det er kerner af en meget speciel karakter, men deres betydning ligger i at de "gode kerner" i potentialteori kan approximeres med elementære kerner. Dette vender vi tilbage til i et senere kapitel. De elementære kerner er introduceret af Jacques Deny (1951).

<u>Definition:</u> Lad N være en kontinuert kerne. En positiv nedad halvkontinuert funktion f $(f \in \mathcal{J}_+)$ kaldes <u>N-excessiv (excessiv m.h.t. N) hvis $Nf \le f$.</u>

Umiddelbare egenskaber:

a) Mængden $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}_N$ hvis man vil fremhæve afhængigheden af N) af excessive funktioner er en inf-stabil konveks kegle.

b) Hvis $(f_i)_{i\in I}$ er en opad filtrerende mængde af excessive funktioner er $f = \sup_{i\in I} f_i$ excessiv. ($Nf = \sup Nf_i \le \sup f_i$, lemma 2.3).

c) Hvis $f \in \mathcal{E}_N$ gælder $f \ge Nf \ge N^2 f \ge N^3 f \ge \cdots$. Alle funktionerne $N^n f$ er excessive.

Definition: En kontinuert kerne G kaldes en elementær kerne, hvis der findes en kontinuert kerne N så

$$Gf = f + Nf + N^2 f + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} N^n f \quad \text{for } f \in \mathcal{K}_+ .$$

Da $Gf \geq f$ for alle $f \in \mathcal{K}_+$ er G strengt positiv.
Hvis $N1 \leq a < 1$ er $G1 \leq \frac{1}{1-a}$, altså begrænset.

Lemma 2.8. For en elementær kerne G gælder:
(1) For hvert $n \in \mathbb{N}$ er N^n en kontinuert kerne (N kan sammensættes med sig selv n gange), og der gælder $G = \sum_{n=0}^{\infty} N^n$.
(2) $Gf = \sum_{n=0}^{\infty} N^n f$ for alle $f \in \mathcal{I}_+$.
(3) Kernerne N og G kan sammensættes uafhængigt af rækkefølgen, og der gælder

$$NG + I = GN + I = G ,$$

idet I er den identiske kerne.

Bevis: (1) For hvert $f \in \mathcal{K}_+$, $m \in \mathbb{N}$ er $Gf = N^m f + R_m f$, hvor $R_m f = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{\infty} N^k f$. Både $N^m f$ og $R_m f$ er nedad halvkontinuerte, men da deres sum er lig den kontinuerte funktion Gf, er de selv begge kontinuerte. Altså $N^m f \in \mathcal{C}_+$ for $f \in \mathcal{K}_+$, så N^m er en kontinuert kerne. Ved linearitet ses nu at

$$Gf = \sum_{m=0}^{\infty} N^m f \qquad \text{for alle } f \in \mathcal{K} ,$$

hvilket symbolsk skrives

$$G = \sum_{m=0}^{\infty} N^m .$$

(2) For $f \in \mathcal{I}_+$ betragtes mængden $A_f = \{\varphi \in \mathcal{K}_+ \mid \varphi \leq f\}$. Ifølge lemmaerne 2.1 og 2.5 fås

$$Gf = \sup_{A_f} G\varphi = \sup_{A_f}\Big(\sup_m \sum_{k=0}^{m} N^k \varphi\Big) = \sup_m \Big(\sup_{A_f} \sum_{k=0}^{m} N^k \varphi\Big) =$$

$$\sup_m \Big(\sum_{k=0}^{m} N^k f\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} N^k f .$$

(3) For $f \in \mathcal{K}_+$ gælder $N(Gf) = N\Big(\sup_m \sum_{k=0}^{m} N^k f\Big) = \sup_m \Big(\sum_{k=0}^{m} N^{k+1} f\Big) =$

$\sum_{k=1}^{\infty} N^k f$, hvoraf $N(Gf) + f = Gf$. Heraf ses at $N(Gf)$ er kontinuert og derfor kan N og G sammensættes. Af (2) fås $G(Nf) = \sum_{k=0}^{\infty} N^{k+1} f$ for $f \in \mathcal{K}_+$, altså $G(Nf) + f = Gf$, og igen er konklusionen at $G(Nf)$ er kontinuert og derfor kan G og N sammensættes. ▯

<u>Corollar 2.9. For hvert $f \in \mathcal{J}_+$ er Gf en N-excessiv funktion.</u>

<u>Corollar 2.10. (1) Kernen G opfylder princippet om "massens entydighed": Hvis der gælder $Gf = Gg$ for $f, g \in \mathcal{J}_+$, må $f(x) = g(x)$ for alle $x \in X$ hvor $Gf(x) = Gg(x) < \infty$.</u>

<u>Afbildningen $G : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ er injektiv.</u>

<u>(2) Kernen N er entydigt bestemt ved G, altså hvis $G = \sum_{n=0}^{\infty} N^n = \sum_{n=0}^{\infty} M^n$, kan vi slutte $M = N$.</u>

<u>Bevis</u>: (1). Af (3) lemma 2.8 fås

$$N(Gf)(x) + f(x) = Gf(x) \quad , \quad N(Gg)(x) + g(x) = Gg(x) \quad \text{for alle } x \in X.$$

Hvis $Gf(x) = Gg(x) < \infty$ er også $N(Gf)(x) = N(Gg)(x) < \infty$, og vi kan da slutte at $f(x) = g(x)$. Hvis specielt $f, g \in \mathcal{K}_+$ vil $Gf = Gg \in \mathcal{C}$, og vi kan slutte at $f = g$. Hvis $f \in \mathcal{K}$ opfylder $Gf = 0$, kan vi slutte $f = 0$, fordi f kan spaltes $f = \varphi_1 - \varphi_2 + i(\varphi_3 - \varphi_4)$ hvor $\varphi_k \in \mathcal{K}_+$, og der må gælde $G\varphi_1 = G\varphi_2$, $G\varphi_3 = G\varphi_4$.

(2) Hvis $G = \sum_{n=0}^{\infty} N^n = \sum_{n=0}^{\infty} M^n$ gælder ifølge (3) lemma 2.8 at

$$G(Nf)(x) = G(Mf)(x) = Gf(x) - f(x) < \infty \quad \text{for alle } x \in X,$$

og for alle $f \in \mathcal{K}_+$. Af bevisets første del følger da at $Nf = Mf$ for alle $f \in \mathcal{K}_+$, altså $N = M$. ▯

<u>Bemærkning</u>: $I = G(I-N) = (I-N)G$ som afbildninger defineret på $\mathcal{K}$. Formelt gælder altså

$$\text{"} \; G = \frac{1}{I-N} = \sum_{n=0}^{\infty} N^n \; \text{"}$$

som ved sædvanlige uendelige kvotientrækker.

<u>Sætning 2.11. Lad u være en N-excessiv funktion, og lad $f \in \mathcal{K}_+$. Hvis $u \geq Gf$ på supp(f), gælder $u \geq Gf$ på hele X.</u>

<u>Bevis:</u> Antag at $u \geq Gf$ på supp(f). Funktionen $v = \inf(u, Gf)$ er N-excessiv og endelig i alle punkter af X. Alle funktionerne $N^n v$ er derfor endelige og $\varphi = v - Nv$ er en positiv funktion. Heraf fås

$$N^k \varphi = N^k v - N^{k+1} v \quad , k = 0, 1, 2, \cdots ,$$

og ved summation

$$\sum_{k=0}^{n} N^k \varphi = v - N^{n+1} v \leq v \quad \text{for alle } n \geq 0 .$$

Lader vi $n \to \infty$ opnås $\underline{G\varphi \leq v}$. Anvendes N på uligheden $v \leq Gf$ fås

$$f + Nv \leq f + NGf = Gf .$$

For $x \in \operatorname{supp} f$ gælder $u(x) \geq Gf(x)$, og derfor også $v(x) = Gf(x)$ for $x \in \operatorname{supp} f$. Af den lige beviste ulighed følger da $f \leq \varphi$ på supp f, og dermed overalt. Heraf fås

$$Gf \leq G\varphi \leq v \leq u ,$$

hvilket skulle vises. ▯.

<u>Corollar 2.12. En elementær kerne G opfylder dominationsprincippet. Hvis N er sub-Markov'sk ($\Leftrightarrow 1 \in \mathcal{E}_N$) opfylder G endda det fuldstændige maksimumprincip.</u>

<u>Bevis:</u> Funktionen $u = Gg$, $g \in \mathcal{K}_+$ er N-excessiv ifølge 2.9. Hvis N er en sub-Markov kerne, altså $N1 \leq 1$, er funktionen 1 en N-excessiv funktion, og så er også $a + Gg$, $a \geq 0$, $g \in \mathcal{K}_+$, en N-excessiv funktion. ▯

Den transponerede kerne G^* til en elementær kerne er givet ved

$$G^* = \sum_{n=0}^{\infty} (N^*)^n ,$$

og der gælder $N^* G^* + I = G^* N^* + I = G^*$.

Kapitel 3. Semigrupper af operatorer.

Indledende bemærkninger.

Overalt i dette kapitel betegner E et Banach-rum over $\mathbb{C}$. Mængden af kontinuerte linearformer på E betegnes E' (det duale rum) og for $x \in E$, $\varphi \in E'$ skrives

$$\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x),$$

og den derved definerede bilinearform $\langle , \rangle$ på $E \times E'$ gør E og E' til et dualt par. (Dp.1 er en konsekvens af Hahn-Banach's sætning).

Lad nu X være et lokalkompakt rum, μ et positivt Radonmål på X, og $f: X \to E$ en kontinuert funktion med kompakt støtte. Vi ønsker at tillægge integralet

$$\int f(x)\, d\mu(x)$$

en mening. Det skal være et element i Banachrummet E.

Lemma 3.1. Der findes præcis et element $a \in E$ så

$$\langle a, \varphi \rangle = \int \langle f(x), \varphi \rangle \, d\mu(x) \quad \text{for alle } \varphi \in E'.$$

Dette element betegnes $a = \int f(x)\, d\mu(x) = \int f\, d\mu$ og kaldes integralet af f med μ. Integralet afhænger lineært af f og der gælder

$$\left\| \int f(x)\, d\mu(x) \right\| \leq \int \|f(x)\|\, d\mu(x).$$

Bevis: To elementer $a, b \in E$ med ovennævnte egenskab opfylder $\varphi(a-b) = 0$ for alle $\varphi \in E'$, og derfor må $a = b$. For at se eksistensen af et $a \in E$ med den ønskede egenskab bemærkes at

$$T(\varphi) = \int \langle f(x), \varphi \rangle \, d\mu(x)$$

definerer en linearform $T: E' \to \mathbb{C}$, hvorom der gælder

$$|T(\varphi)| \leq \|\varphi\| \int \|f(x)\|\, d\mu(x),$$

og derfor vil $T \in E''$.

Nu ved vi (jvfr. Mat.6) at der findes en kanonisk indlejring $j : E \to E''$, og påstanden i lemma 3.1 er nu, at der findes $a \in E$ så $T = j(a)$. Mængden $f(X)$ er kompakt i E, og det samme gælder derfor om det afsluttede absolut konvekse hylster

$$A = \text{clabsconv}\, f(X).$$

(jvfr. opg. 30, 31 T.V.R. Mat. 6. absconv = absolut konvekse hylster $\underset{\text{Def}}{=}$ konvekse symmetrisk stjerneformede hylster. cl = closure = afslutning). Så er også billedet $j(A)$ kompakt i E'', og så meget des mere kompakt i den grovere topologi $\sigma(E'', E')$ på E''.

Vi vælger nu $\psi \in \mathcal{K}_+(X)$ så $\psi = 1$ på $\text{supp}(f)$. Hvis $\lambda = \int \psi \, d\mu = 0$ vil

$$|T(\varphi)| \leq \|\varphi\| \sup_{x \in X} \|f(x)\| \, \lambda = 0 \quad \text{for alle } \varphi \in E',$$

altså $T = 0$, og dermed kan $a = 0$ bruges.

Hvis $\lambda > 0$ gælder

$$\frac{1}{\lambda} T \in j(A),$$

for i modsat fald findes en åben absolut konveks (:= konveks, symmetrisk stjerneformet) omegn $\mathcal{O}$ af 0 så $0 \notin j(A) - \frac{1}{\lambda} T - \mathcal{O}$, som er åben og konveks. Ifølge Hahn-Banach's sætning anvendt i det topologiske vektorrum E'' med topologien $\sigma(E'', E')$, kan vi da finde $\varphi_0 \in E'$ så

$$\langle \varphi_0, j(a) \rangle - \frac{1}{\lambda} \langle \varphi_0, T \rangle \neq 0 \quad \text{for alle } a \in A.$$

Nu er $\{ \langle \varphi_0, j(a) \rangle = \langle a, \varphi_0 \rangle \mid a \in A \}$ en kompakt absolut konveks mængde i $\mathbb{C}$, altså en afsluttet cirkelskive med radius R,

$$R = \sup \{ |\langle a, \varphi_0 \rangle| \mid a \in A \},$$

og der gælder altså

$$\frac{1}{\lambda} |\langle \varphi_0, T \rangle| > R.$$

På den anden side gælder

$$\frac{1}{\lambda} |\langle \varphi_0, T \rangle| = \frac{1}{\lambda} \left| \int \langle f(x), \varphi_0 \rangle \, d\mu(x) \right| = \frac{1}{\lambda} \left| \int \langle f(x), \varphi_0 \rangle \psi(x) \, d\mu(x) \right|$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\int \sup_{x\in X} |\langle f(x),\varphi_0\rangle|\, \psi(x)\,d\mu(x) \leq \frac{R}{\lambda}\int \psi(x)\,d\mu(x) = R ,$$

hvilket er en modstrid.

Vi har altså $T = \lambda j(x)$ for passende $x \in A$, og dermed vil $a = \lambda x$ kunne bruges i lemmaet.

For vilkårligt $a \in E$ gælder (ifølge Hahn-Banach)

$$\|a\| = \sup\{|\langle a,\varphi\rangle| \mid \varphi\in E',\ \|\varphi\|\leq 1\} ,$$

og anvendes dette på $a = \int f(x)\,d\mu(x)$ fås

$$\left\|\int f\,d\mu\right\| \leq \sup\left\{\int |\langle f(x),\varphi\rangle|\,d\mu(x) \mid \varphi\in E',\ \|\varphi\|\leq 1\right\} \leq \int \|f(x)\|\,d\mu(x).$$

$\square$

<u>Sætning 3.2. En kontinuert funktion $f: X \to E$ for hvilken</u>

$$\int \|f(x)\|\,d\mu(x) < \infty$$

<u>er integrabel i den forstand, at der findes præcis et $a \in E$ med egenskaben</u>

$$\langle a,\varphi\rangle = \int \langle f(x),\varphi\rangle\,d\mu(x) \quad \text{for alle } \varphi\in E' . \tag{3.1}$$

<u>Vi skriver $a = \int f\,d\mu$, og der gælder</u>

$$\left\|\int f\,d\mu\right\| \leq \int \|f(x)\|\,d\mu(x) . \tag{3.2}$$

<u>Bevis</u>: Som før findes der højst et $a \in E$ med egenskaben 3.1. Til hvert $\varepsilon > 0$ findes $g \in \mathcal{K}_+$, $g \leq \|f\|$ så

$$\int (\|f(x)\| - g(x))\,d\mu(x) < \varepsilon .$$

(Jvfr. 2.1 og 2.3). For $K = \operatorname{supp} g$ gælder derfor

$$\int_{X\setminus K} \|f(x)\|\,d\mu(x) \leq \int (\|f(x)\| - g(x))\,d\mu(x) < \varepsilon .$$

Heraf ses, at man kan vælge en stigende følge af kompakte mængder K_n i X så

$$\int_{X\setminus K_n} \|f(x)\|\,d\mu(x) < \frac{1}{n} .$$

Vi vælger nu funktioner $g_n \in \mathcal{K}_+$ så $g_n \leq 1$, $g_n(x) = 1$ for alle $x \in K_n$, og sætter

$$a_n = \int f(x) g_n(x) d\mu(x),$$

hvilket har mening ifølge lemma 3.1. Punktfølgen $a_n \in E$ er en Cauchy-følge, thi for $n, m \geq N$ gælder

$$\|a_n - a_m\| \leq \int \|f(x)\| \, |g_n(x) - g_m(x)| \, d\mu(x) = \int_{X \setminus K_N} \|f(x)\| \, |g_n(x) - g_m(x)| \, d\mu(x) \leq \frac{1}{N}.$$

Da E er et Banachrum, findes en grænseværdi $a \in E$ for følgen a_n. Ved grænseovergang i formlen

$$\langle a_n, \varphi \rangle = \int \langle f(x) g_n(x), \varphi \rangle \, d\mu(x) \qquad , \varphi \in E'$$

fås 3.1:

$$\langle a, \varphi \rangle = \int \langle f(x), \varphi \rangle \, d\mu(x) \qquad , \varphi \in E',$$

der gælder nemlig

$$\left| \int \langle f(x) - f(x) g_n(x), \varphi \rangle \, d\mu(x) \right| \leq \|\varphi\| \int (1 - g_n(x)) \|f(x)\| \, d\mu(x) \leq$$

$$\|\varphi\| \int_{X \setminus K_n} \|f(x)\| \, d\mu(x) \leq \frac{\|\varphi\|}{n}.$$

Formel 3.2. vises som under lemma 3.1. $\square$.

Lad nu F være et andet Banachrum og $T: E \to F$ en kontinuert lineær afbildning, $T^*: F' \to E'$ den transponerede afbildning givet ved

$$\langle e, T^* \psi \rangle = \langle Te, \psi \rangle \qquad , e \in E, \psi \in F'.$$

Sætning 3.2 udsiger bl.a. at en kontinuert linearform kan flyttes inden for integraltegnet. Dette kan generaliseres til T, som den næste sætning viser:

<u>Sætning 3.3.</u> <u>Lad $f: X \to E$ være en kontinuert funktion for hvilken $\int \|f(x)\| d\mu(x) < \infty$, og lad T være en kontinuert operator fra E til F. Så gælder</u>

$$T\left(\int f \, d\mu\right) = \int T(f(x)) \, d\mu(x).$$

Bevis: Da $\int \|Tf(x)\| \, d\mu(x) \le \|T\| \int \|f(x)\| \, d\mu(x) < \infty$, er $T \circ f$ integrabel ifølge 3.2, og for $\psi \in F'$ gælder

$$< \int Tf(x) \, d\mu(x), \psi > = \int < Tf(x), \psi > d\mu(x) = \int < f(x), T^* \psi > d\mu(x)$$

$$= < \int f \, d\mu, T^* \psi > = < T(\int f \, d\mu), \psi >$$, hvilket viser påstanden. $\square$

<u>Motivering for begrebet semigruppe af operatorer.</u>

Det er velkendt, at enhver kontinuert løsning $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ til funktionalligningen

$$\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t) \quad , \quad \varphi(0) = 1 \qquad (3.3)$$

har formen

$$\varphi(t) = \exp(at) = e^{at} \quad \text{for passende } a \in \mathbb{C}.$$

Her er tallet a givet ved

$$a = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \qquad (3.4).$$

I mange grene af matematikken støder man på denne funktionalligning, hvor $\mathbb{C}$ er afløst af Banachalgebraen $\mathcal{L}(E)$ af begrænsede operatorer på et Banachrum E, eller af endnu mere generelle algebraer. Vi betragter altså en afbildning $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$, hvor $\varphi(t) = P_t$ er en begrænset operator i E, så der gælder

$$P_t P_s = P_{t+s} \quad , \quad P_0 = I \text{ (identiteten)} \qquad (3.5)$$

og vi siger, at φ eller $(P_t)_{t \ge 0}$ er en <u>semigruppe af operatorer.</u>

Hvis φ er kontinuert, når $\mathcal{L}(E)$ er udstyret med topologien udspringende af operatornormen, siger vi at <u>semigruppen er normkontinuert</u>.

Hvis A er en begrænset operator i Banachrummet E, er

$$\varphi(t) = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \quad , \ t \ge 0$$

en <u>normkontinuert semigruppe</u> af begrænsede operatorer på E.

Der gælder
$$A = \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} \quad , \qquad (3.6)$$

hvor grænseværdien er i normtopologien på $\mathcal{L}(E)$, altså $\lim_{t\to 0} \| \frac{1}{t}(\varphi(t)-\varphi(0)) - A\| = 0$. Vi skal senere se, at enhver normkontinuert semigruppe af begrænsede operatorer på E har denne form $\varphi(t) = \exp(tA)$ for præcis en begrænset operator A kaldet den infinitesimale generator for semigruppen. Et sådant A findes ved formel 3.6. Vi har således den pænest mulige generalisering fra tilfældet $\mathbb{C}$ til tilfældet $\mathcal{L}(E)$.

De semigrupper man møder i praksis er imidlertid sjældent normkontinuerte, de opfylder den svagere betingelse:

For hvert $f \in E$ er afbildningen $t \mapsto \varphi(t)f = P_t f$ af $\mathbb{R}_+$ ind i E kontinuert. Vi kalder en sådan semigruppe for stærkt kontinuert, hvilket kommer ud på at $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ er kontinuert, når $\mathcal{L}(E)$ udstyres med den stærke topologi (der er grovere end normtopologien) bestemt ved familien af seminormer p_f, $f \in E$:
$$p_f(T) = \|Tf\| \quad \text{for } T \in \mathcal{L}(E).$$

Hovedresultatet i dette kapitel er, at enhver stærkt kontinuert semigruppe φ har formen
$$\text{"}\varphi(t) = \exp(tA)\text{"},$$
hvor som før A er givet ved 3.6. Dette skal dog forstås med varsomhed, thi A er nu i almindelighed en ubegrænset tæt defineret operator og $\exp(tA)$ er kun defineret via en grænseovergang. Men holder man sig dette for øje, er det simpelt at gennemskue de følgende tekniske detaljer, der desværre er nødvendige.

Yderligere information om semigrupper kan f.eks. findes i Yosida: Functional Analysis.

§1. Kontraktionssemigrupper.

<u>Definition:</u> Ved en <u>kontraktionssemigruppe</u> af operatorer på E forstås en familie $(P_t)_{t\geq 0}$ af begrænsede operatorer i E opfyldende

(1) $P_s P_t = P_{s+t}$ for $s,t \geq 0$, $P_0 = I$

(2) $\|P_t\| \leq 1$ for $t \geq 0$ (operatorerne er kontraktioner).

Bemærk at to operatorer i en semigruppe kommuterer: $P_s P_t = P_t P_s = P_{t+s}$.

Vi indfører følgende standardbetegnelser:

$$E_0 = \{f \in E \mid P_t f \to f \text{ for } t \to 0\}$$

$$\mathcal{D}_A = \{f \in E \mid \lim_{t\to 0} \frac{P_t f - f}{t} \text{ eksisterer}\}.$$

Det er klart at E_0 og $\mathcal{D}_A$ er underrum af E, $\mathcal{D}_A \subseteq E_0$, og for $f \in \mathcal{D}_A$ defineres en operator $A: \mathcal{D}_A \to E$ ved

$$Af = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f - f) \qquad \text{(jvf. 3.6).}$$

Operatoren A (mere præcist $(A, \mathcal{D}_A)$) kaldes den <u>infinitesimale generator (frembringer)</u> for semigruppen.

<u>Sætning 3.4.</u> <u>E_0 er et afsluttet underrum af E. For hvert $f \in E_0$ er afbildningen $t \mapsto P_t f$ kontinuert, og der gælder $P_t(E_0) \subseteq E_0$ for alle $t \geq 0$, $A(\mathcal{D}_A) \subseteq E_0$.</u>

<u>Bevis:</u> Lad $f_n \in E_0$, $f_n \to f \in E$. Da $\|P_t\| \leq 1$ for alle $t \geq 0$ fås $\|P_t f - f\| \leq 2\|f_n - f\| + \|P_t f_n - f_n\|$. Til givet $\varepsilon > 0$ findes $n_0 \in N$ så $\|f_{n_0} - f\| \leq \varepsilon/3$, og ifølge definitionen af E_0 findes $\delta > 0$ så

$$\|P_t f_{n_0} - f_{n_0}\| \leq \varepsilon/3 \quad \text{for } t \leq \delta.$$

Der gælder altså

$$\|P_t f - f\| \leq \varepsilon \quad \text{for } t \leq \delta,$$

hvilket viser, at $f \in E_0$. Dermed er vist at E_0 er afsluttet.

For $f \in E_0$ gælder

$$\|P_{t+h}f - P_t f\| = \|P_t(P_h f - f)\| \le \|P_h f - f\| \quad , t \ge 0, \ h > 0,$$
$$\|P_t f - P_{t-h} f\| = \|P_{t-h}(P_h f - f)\| \le \|P_h f - f\| \quad , t > 0, \ 0 < h < t,$$

hvilket viser at $t \mapsto P_t f$ er kontinuert, og følgelig gælder $P_t f \in E_0$ for alle $t \ge 0$.

For $f \in \mathcal{D}_A$ vil $Af \in E_0$, fordi Af er grænseværdi for følgen
$$n(P_{\frac{1}{n}} f - f) \quad \in E_0 \ . \quad \blacksquare$$

<u>Corollar 3.5. Semigruppens restriktion til E_0 udgør en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på Banachrummet E_0.</u>

<u>Sætning 3.6. Domænet $\mathcal{D}_A$ er tæt i E_0, altså $\overline{\mathcal{D}_A} = E_0$.</u>

<u>Bevis:</u>

For $f \in E_0$, $a > 0$ sættes $f^a = \int_0^a P_s f\, ds \quad \in E_0$. Ifølge 3.3 gælder
$$\frac{1}{t}(P_t f^a - f^a) = \frac{1}{t}\int_0^a P_{t+s} f\, ds - \frac{1}{t}\int_0^a P_s f\, ds =$$
$$\frac{1}{t}\int_t^{a+t} P_s f\, ds - \frac{1}{t}\int_0^a P_s f\, ds = \frac{1}{t}\int_a^{a+t} P_s f\, ds - \frac{1}{t}\int_0^t P_s f\, ds \to P_a f - f$$

for $t \to 0$. Dette viser at $f^a \in \mathcal{D}_A$ og $A(f^a) = P_a f - f$. Desuden gælder
$$\frac{1}{a} f^a \to f \quad \text{for } a \to 0 \ ,$$
altså $f \in \overline{\mathcal{D}_A}$. $\blacksquare$

<u>Sætning 3.7. For $f \in \mathcal{D}_A$ er afbildningen $t \mapsto P_t f$ kontinuert differentiabel med differentialkvotient</u>
$$\frac{d}{dt}(P_t f) = P_t(Af) = A(P_t f)$$

<u>og $P_t(\mathcal{D}_A) \subseteq \mathcal{D}_A$ for alle $t \ge 0$.</u>

<u>Bevis:</u> Lad $f \in \mathcal{D}_A$, $h > 0$, $t \ge 0$. Så gælder
$$\frac{1}{h}(P_h(P_t f) - P_t f) = P_t\left(\frac{1}{h}(P_h f - f)\right) \to P_t(Af) \quad \text{for } h \to 0.$$

Dette viser dels at $P_t f \in \mathcal{D}_A$ for $t \geq 0$ og at $A(P_t f) = P_t(Af)$, dels at $t \mapsto P_t f$ er differentiabel fra højre med den angivne differentialkvotient. At den er differentiabel fra venstre med samme differentialkvotient ses således. Lad $0 < h < t$.

$$\| \tfrac{1}{h}(P_t f - P_{t-h} f) - P_t Af \| = \| P_{t-h}(\tfrac{1}{h}(P_h f - f) - P_h(Af))\| \leq$$

$$\| \tfrac{1}{h}(P_h f - f) - P_h(Af)\| \to 0 \text{ for } h \to 0 \text{, fordi } f \in \mathcal{D}_A \text{, } Af \in E_0 \text{.} \ \blacksquare$$

<u>Corollar 3.8.</u> <u>For $f \in \mathcal{D}_A$ gælder</u>

$$P_t f - f = \int_0^t A(P_s f)\, ds = \int_0^t P_s(Af)\, ds$$

<u>Bevis:</u> Dette følger af formlen $\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t)\,dt$, som også gælder for kontinuert differentiable funktioner med værdier i et Banachrum. (Jvf. opgave 3). $\blacksquare$

<u>Sætning 3.9. Den infinitesimale generator A er en afsluttet operator.</u>

<u>Bevis:</u> Antag at $f_n \in \mathcal{D}_A$, $f_n \to f$, $Af_n \to g$. Påstanden kommer ud på at vise, at $f \in \mathcal{D}_A$, og at $Af = g$. Ifølge 3.8 gælder

$$P_t f_n - f_n = \int_0^t P_s(Af_n)\, ds ,$$

som ved grænseovergangen $n \to \infty$ giver

$$P_t f - f = \int_0^t P_s g\, ds .$$

Ifølge 3.4 vil $g = \lim Af_n \in E_0$, og så er $s \to P_s g$ kontinuert. Heraf fås

$$\lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t}(P_t f - f) = \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t} \int_0^t P_s g\, ds = g ,$$

altså $f \in \mathcal{D}_A$ og $Af = g$. $\blacksquare$

<u>Definition:</u> Vi indfører en operator $N : \mathcal{D}_N \to E$ kaldet <u>potentialoperatoren</u> hørende til semigruppen ved

$$\mathcal{D}_N = \{ f \in E_0 \mid \lim_{t \to \infty} \int_0^t P_s f\, ds \text{ eksisterer} \}, \quad Nf = \lim_{t \to \infty} \int_0^t P_s f\, ds \text{ for } f \in \mathcal{D}_N .$$

<u>Bemærkning:</u> Lad $f \in E_0$. Hvis $\int_0^\infty \|P_s f\| ds < \infty$ følger af 3.2 at $\int_0^\infty P_s f ds$ eksisterer og

$$\left\| \int_0^\infty P_s f ds - \int_0^t P_s f ds \right\| = \left\| \int_t^\infty P_s f ds \right\| \leq \int_t^\infty \|P_s f\| ds ,$$

hvilket går mod 0 for $t \to \infty$ fordi $\int_0^\infty \|P_s f\| ds < \infty$. Heraf følger at $f \in \mathcal{D}_N$ og at

$$N f = \int_0^\infty P_s f ds .$$

(Det kan indtræffe at $f \in \mathcal{D}_N$ og at $\int_0^\infty \|P_s f\| ds = \infty$; sammenlign med hvad der er kendt om uegentlige integraler og Lebesgue-integralet).

<u>Sætning 3.10.</u> Om potentialoperatoren $(N, \mathcal{D}_N)$ gælder:

a) $P_t(\mathcal{D}_N) \subseteq \mathcal{D}_N$ og $N P_t f = P_t N f$ <u>for alle</u> $f \in \mathcal{D}_N$, $t \geq 0$.

b) $P_t(Nf) = Nf - \int_0^t P_s f ds$ <u>for alle</u> $f \in \mathcal{D}_N$, $t \geq 0$.

c) $N(\mathcal{D}_N) \subseteq \{ f \in E \mid \lim_{t \to \infty} P_t f = 0 \}$

d) N <u>er injektiv og afbilder</u> $\mathcal{D}_N$ <u>ind i</u> $\mathcal{D}_A$ <u>og der gælder</u>

$$A(Nf) = -f \quad \underline{\text{for alle}} \quad f \in \mathcal{D}_N .$$

<u>Bevis:</u> a) For $f \in \mathcal{D}_N$ vil $\int_0^a P_s f ds \to Nf$ for $a \to \infty$. Heraf fås at

$$\int_0^a P_s(P_t f) ds = P_t \left(\int_0^a P_s f ds \right) \to P_t N f \quad \text{for } a \to \infty, \text{ hvilket viser at}$$

$$P_t f \in \mathcal{D}_N , \text{ og at } N(P_t f) = P_t(Nf) .$$

b) $P_t(Nf) = \lim_{a \to \infty} \int_0^a P_{s+t} f ds = \lim_{a \to \infty} \int_t^{a+t} P_s f ds = \lim_{a \to \infty} \left(\int_0^{a+t} P_s f ds - \int_0^t P_s f ds \right)$

$$= Nf - \int_0^t P_s f ds .$$

c) Af b) følger umiddelbart at $\lim_{t\to\infty} P_t(Nf) = 0$.

d) Af b) følger videre, at

$$\frac{1}{t}\left(P_t(Nf) - Nf\right) = -\frac{1}{t}\int_0^t P_s f\,ds \qquad \text{for } f \in \mathcal{D}_N,\ t>0.$$

Lader vi nu $t \to 0$ går højresiden mod $-f$, og vi ser at $Nf \in \mathcal{D}_A$ og at $A(Nf) = -f$. Denne formel viser, at N er injektiv. ▯

Sætning 3.11. Hvis $P_t f \to 0$ når $t \to \infty$ for alle $f \in \mathcal{D}_A$ (og dermed for alle $f \in E_0$), er A en bijektiv afbildning af $\mathcal{D}_A$ på $\mathcal{D}_N$, og den inverse operator er $-N$. Der gælder

$$N(Af) = -f \quad \text{for } f \in \mathcal{D}_A \ ; \quad A(Nf) = -f \quad \text{for } f \in \mathcal{D}_N.$$

Bevis: For $f \in \mathcal{D}_A$ er $Af \in \mathcal{D}_N$, thi ifølge 3.8 gælder

$$\int_0^t P_s(Af)\,ds = P_t f - f \ ,$$

som går mod $-f$ for $t \to \infty$, fordi $P_t f \to 0$ når $t \to \infty$. Altså gælder ligningen $N(Af) = -f$, der viser at A er injektiv. At A er surjektiv følger af 3.10. ▯

For $\lambda > 0$ konstrueres en ny kontraktionssemigruppe på E: $P_t^\lambda = e^{-\lambda t} P_t$. Dens infinitesimale generator betegnes A_λ, og potentialoperatoren V_λ.

Lemma 3.12. For alle $\lambda > 0$ gælder

(i) $\mathcal{D}_{A_\lambda} = \mathcal{D}_A$ og $A_\lambda = A - \lambda I$.

(ii) $\mathcal{D}_{V_\lambda} = E_0$ og V_λ er en kontinuert operator af norm $\|V_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$ på E_0 givet ved $V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f\,dt$.

(iii) $P_t^\lambda f \to 0$ for $t \to \infty$ for alle $f \in E$.

<u>Bevis</u>: (i) For $f \in \mathcal{D}_A$ gælder

$$\left\| \frac{e^{-\lambda t} P_t f - f}{t} - Af + \lambda f \right\| \le \left\| \frac{e^{-\lambda t} - 1}{t} P_t f + \lambda f \right\| + \left\| \frac{P_t f - f}{t} - Af \right\|$$

hvilket går mod 0 for $t \to 0$. Dette viser at

$$f \in \mathcal{D}_{A_\lambda} \quad \text{og} \quad A_\lambda f = Af - \lambda f .$$

Hvis omvendt $f \in \mathcal{D}_{A_\lambda}$, gælder

$$\left\| \frac{P_t f - f}{t} - A_\lambda f - \lambda f \right\| \le \left\| \frac{e^{-\lambda t} P_t f - f}{t} - A_\lambda f \right\| + \left\| \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t} P_t f - \lambda f \right\|$$

hvilket går mod 0 for $t \to 0$, altså $f \in \mathcal{D}_A$ og $Af = A_\lambda f + \lambda f$.

(ii) For $f \in E_0$ er $\| e^{-\lambda t} P_t f \| \le e^{-\lambda t} \|f\|$ og $\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$. Ifølge bemærkningen redefrende potentialoperatoren gælder derfor at $f \in \mathcal{D}_{V_\lambda}$, altså $\mathcal{D}_{V_\lambda} = E_0$, og

$$V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f \, dt ,$$

hvoraf følger at $\|V_\lambda f\| \le \frac{1}{\lambda} \|f\|$.

(iii) følger umiddelbart af vurderingen $\| P_t^\lambda f \| \le e^{-\lambda t} \|f\|$. $\square$

<u>Corollar 3.13. For hvert $\lambda > 0$ vil $\lambda \in \rho(A)$ (:= resolventmængden for operatoren A) og $(\lambda I - A)^{-1} = V_\lambda$ afbilder E_0 bijektivt på $\mathcal{D}_A$. Der gælder resolventligningen</u>

$$\underline{V_\lambda - V_\mu = (\mu - \lambda) V_\lambda V_\mu \qquad \text{for } \lambda, \mu > 0 .}$$

<u>Bevis</u>: Ifølge 3.11 er $A_\lambda = A - \lambda I$ en bijektiv afbildning af $\mathcal{D}_{A_\lambda} = \mathcal{D}_A$ på $\mathcal{D}_{V_\lambda} = E_0$, og den inverse operator er den kontinuerte operator $-V_\lambda$. Dette viser per definition at $\lambda \in \rho(A)$ (relativt til Banachalgebraen $\mathcal{L}(E_0)$). Resolventligningen udregnes som i Mat 6:

$$V_\lambda - V_\mu = (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} \big((\mu I - A) - (\lambda I - A) \big) (\mu I - A)^{-1} =$$

$$V_\lambda \big((\mu - \lambda) I \big) V_\mu = (\mu - \lambda) V_\lambda V_\mu . \qquad \square$$

Opgaver:

1) En funktion $\varphi :]a,b[\to E$ kaldes differentiabel i $x \in]a,b[$ med differentialkvotient $\varphi'(x) \in E$, hvis

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \varphi'(x)$$

Differentiabilitet fra højre og venstre defineres analogt.
Antag at φ er differentiabel for alle $x \in]a,b[$ og at $\varphi'(x)=0$ for alle $x \in]a,b[$. Vis at φ er konstant.
(Gør det f. eks. indirekte og udnyt Hahn-Banach).

2) Lad $f : [a,b] \to E$ være kontinuert. Vis at funktionen

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

er differentiabel for alle $x \in [a,b]$ (fra højre i a, fra venstre i b) og at $F'(x) = f(x)$.

3) Lad $f : [a,b] \to E$ være kontinuert differentiabel. Vis at

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx \; .$$

4) Vis følgende version af Lebesgue's sætning:
X lokalkompakt rum, μ positivt Radonmål.
f_n, f kontinuerte afbildninger $X \to E$.
Antag at der findes en kontinuert funktion $g : X \to \mathbb{R}_+$ så $\|f_n(x)\| \le g(x)$ for alle $x \in X$, og så $\int g(x)\,d\mu(x) < \infty$.
Hvis $f_n(x) \to f(x)$ for alle $x \in X$, $n \to \infty$, vil

$$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu \, .$$

Vink: Udnyt den sædvanlige Lebesgue's sætning om majoriseret konvergens til at vise dels at $a_n = \int f_n \, d\mu$ er en Cauchy-følge, dels at $\int \langle f_n(x), \varphi \rangle \, d\mu(x) \to \int \langle f(x), \varphi \rangle \, d\mu(x)$ for alle $\varphi \in E'$. Heraf uddrages den ønskede konklusion.

§2. Den Brown'ske semigruppe.

For $t>0$ betragtes tæthedsfunktionen $g_t : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ for normalfordelingen med middelværdi 0 og varians $\sigma^2 = 2t$:

$$g_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) .$$

Fra Mat. 5 er det velkendt at målet $g_t(x)dx$ er et sandsynlighedsmål, altså at

$$\int_{\mathbb{R}^m} g_t(x)\,dx = 1 \tag{3.7}$$

men vi gengiver udregningen ved indførelse af polære koordinater $x = r\xi$, $r = \|x\|$, $\xi \in \Omega_m$:

$$\int g_t(x)\,dx = \frac{\|\omega_m\|}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) r^{m-1}\,dr = \frac{\|\omega_m\|}{2\,\pi^{\frac{m}{2}}} \int_0^\infty u^{\frac{m}{2}-1} e^{-u}\,du = 1 ,$$

idet vi har substitueret $u = \frac{r^2}{4t}$, og udnyttet formlen p. 11 for $\|\omega_m\|$.

En vigtig egenskab ved disse tætheder er at

$$g_t * g_s = g_{t+s} \tag{3.8}$$

hvilket har den sandsynlighedsteoretiske fortolkning, at når X_1 og X_2 er indbyrdes uafhængige stokastiske variable normalt fordelt med parametre $(0,t)$ og $(0,s)$, så er $X_1 + X_2$ normalt fordelt med parametre $(0,t+s)$, jvfr. Mat 5 (kap. V sætning 20).

$$g_t * g_s(x) = \{(4\pi t)(4\pi s)\}^{-\frac{m}{2}} \int \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}\right) \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{4s}\right) dy .$$

Udnyttes den simple identitet

$$\frac{\|x-y\|^2}{4t} + \frac{\|y\|^2}{4s} = \frac{\|x\|^2}{4(s+t)} + \frac{s+t}{4st}\|y-\xi\|^2 \quad \text{hvor } \xi = \frac{s}{s+t}x$$

fås

$$g_t * g_s(x) = \{(4\pi t)(4\pi s)\}^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4(s+t)}\right) \int \exp\left(-\frac{s+t}{4st}\|y-\xi\|^2\right) dy .$$

Ifølge 3.7 er

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp\left(-\frac{s+t}{4st}\|y-\xi\|^2\right) dy = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left(-\frac{s+t}{4st}\|y\|^2\right) dy = \left(4\pi \frac{st}{s+t}\right)^{\frac{m}{2}} ,$$

og heraf fremgår at $g_t * g_s(x) = g_{t+s}(x)$.

Vi vil nu se, hvordan tæthederne $(g_t)_{t>0}$ giver anledning til en semigruppe på Banachrummet $C_0(\mathbb{R}^n)$, hvor normen er givet ved

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

<u>Lemma 3.14. En integrabel funktion $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folder $C_0(\mathbb{R}^n)$ i sig selv. Mere præcist:</u>
<u>For hvert $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ vil $f*g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ og</u>
<u>$\|f*g\| \le \|g\|_1 \|f\|$.</u>

<u>Bevis</u>:

a) $f*g$ er kontinuert.
Lad $\varepsilon>0$ være givet. Da f er uniformt kontinuert findes $\delta>0$ så

$$|f(x)-f(y)| \le \varepsilon \quad \text{når blot } \|x-y\| \le \delta.$$

For $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ så $\|x_1 - x_2\| \le \delta$ gælder da

$$|f*g(x_1) - f*g(x_2)| \le \int |f(x_1-y) - f(x_2-y)|\,|g(y)|\,dy \le \varepsilon \int |g(y)|\,dy = \varepsilon \|g\|_1,$$

hvilket viser, at f er kontinuert (endda uniformt kontinuert).

b) $f*g \to 0$ i ∞.
Lad $\varepsilon>0$ være givet. Da $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ findes $R>0$ så $\int_{\|y\|>R} |g(y)|\,dy \le \varepsilon$, og da $f \to 0$ i ∞ findes $K>0$ så

$$|f(x-y)| \le \varepsilon \quad \text{for } \|x\| \ge K,\ \|y\| \le R.$$

For $\|x\| \ge K$ gælder da

$$|f*g(x)| \le \int_{\|y\|\le R} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy + \int_{\|y\|>R} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \le \varepsilon \int_{\|y\|\le R} |g(y)|\,dy$$

$$+ \|f\| \int_{\|y\|>R} |g(y)|\,dy \le \varepsilon(\|g\|_1 + \|f\|),$$ hvilket viser at $f*g \to 0$ i ∞.

c) $|f*g(x)| \le \int |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \le \|f\| \int |g(y)|\,dy = \|g\|_1 \|f\|$, for alle $x \in \mathbb{R}^n$. $\blacksquare$

Lemmaet i forbindelse med formel 3.7 viser, at der for $t>0$ defineres en begrænset operator $P_t \in \mathcal{L}(C_0(\mathbb{R}^n))$ med $\|P_t\| \leq 1$ ved

$$P_t f = g_t * f .$$

Af formel 3.8 følger

$$P_t(P_s f) = g_t * (g_s * f) = (g_t * g_s) * f = g_{t+s} * f = P_{t+s} f .$$

Sættes $P_0 = I$ er det hermed eftervist, at familien af operatorer $(P_t)_{t\geq 0}$ er en kontraktionssemigruppe på $C_0(\mathbb{R}^n)$. Denne semigruppe kaldes <u>den Brown'ske semigruppe</u> efter den engelske botaniker Robert Brown, der i 1827 konstaterede de efter ham opkaldte Brown'ske bevægelser i en opslemning af støv fra sommerfuglevinger. Støvpartiklernes bevægelse skyldes molekylebombardement.

Sammenhængen med semigruppen er, at man matematisk beskriver en Brown'sk bevægelse af en partikel ved de ovenfor definerede normale fordelinger: Har man til tiden 0 observeret partiklen i punktet $x_0 \in \mathbb{R}^n$, så er sandsynligheden for at den til tiden $t>0$ vil befinde sig i en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ givet ved tallet

$$\int_A g_t(x_0 - y)\,dy = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_A \exp\left(-\frac{\|x_0-y\|^2}{4t}\right) dy .$$

Vi vil nu undersøge den Brown'ske semigruppe nærmere.

<u>Lemma 3.15. Den Brown'ske semigruppe er stærkt kontinuert og $P_t f \to 0$ for $t \to \infty$ for alle $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.</u>

<u>Bevis:</u>

At semigruppen er stærkt kontinuert kommer ud på at

$$\lim_{t\to 0} \|P_t f - f\| = 0 \qquad \text{for alle } f \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

jvfr. corollar 3.5.

Lad nu $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$. Da f er uniformt kontinuert findes $\delta > 0$ så $|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon$ når blot $\|x_1 - x_2\| \le \delta$. For alle $x \in \mathbb{R}^n$ gælder derfor

$$|f(x) - P_t f(x)| \le \int_{\|y\| \le \delta} |f(x) - f(x-y)|\, g_t(y)\,dy + \int_{\|y\| > \delta} |f(x) - f(x-y)|\, g_t(y)\,dy$$

$$\le \varepsilon + 2\|f\| \int_{\|y\|>\delta} g_t(y)\,dy = \varepsilon + 2\|f\|\,\|\omega_n\|\,(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_\delta^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) r^{n-1}\,dr$$

$$= \varepsilon + \|f\|\,\|\omega_n\|\,\pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\frac{\delta^2}{4t}}^\infty u^{\frac{n}{2}-1} e^{-u}\,du \,.$$

For $t \to 0$ vil $\frac{\delta^2}{4t} \to \infty$, og derfor vil $\int_{\frac{\delta^2}{4t}}^\infty u^{\frac{n}{2}-1} e^{-u}\,du \to 0$

for $t \to 0$ f.eks. ifølge Lebesgue's sætning om majoriseret konvergens. Heraf indses, at der findes $\eta > 0$ så

$$\|f - P_t f\| \le 2\varepsilon \quad \text{for } t \le \eta,$$

hvilket viser den stærke kontinuitet.

Til givet $\varepsilon > 0$ findes $R > 0$ så $|f(x)| \le \varepsilon$ for $\|x\| \ge R$. Hermed fås for $x \in \mathbb{R}^n$

$$|P_t f(x)| \le \int_{\|y\| \ge R} g_t(x-y)\,|f(y)|\,dy + \int_{\|y\|<R} g_t(x-y)\,|f(y)|\,dy \le$$

$$\varepsilon + \|f\| \int_{\|y\|<R} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\,dy \,, \text{ altså } \|P_t f\| \le \varepsilon + \|f\| \int_{\|y\|<R} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\,dy \,,$$

hvilket går mod ε for $t \to \infty$.

Der findes altså $K > 0$ så $\|P_t f\| \le 2\varepsilon$ for $t \ge K$, hvilket viser at $\lim_{t\to\infty} P_t f = 0$. ∎

Vi vil nu finde den infinitesimale generator A med domæne $\mathcal{D}_A$. Det viser sig at A er lig Laplaceoperatoren Δ.

<u>Lemma 3.16.</u> For hvert $f \in C_0$ og for hvert $t > 0$ vil $P_t f \in \mathcal{D}_A$ ~~og~~

$$A(P_t f) = (\Delta g_t) * f .$$

<u>Bevis:</u> En simpel differentiation (regn efter!) viser at

$$\Delta g_t(y) = \frac{d}{dt}(g_t(y)) = \left(\frac{\|y\|^2}{4t^2} - \frac{m}{2t}\right) g_t(y) .$$

Heraf ses at funktionen Δg_t er integrabel. Ifølge 3.14 vil $(\Delta g_t) * f \in C_0(\mathbb{R}^m)$ for alle $f \in C_0(\mathbb{R}^m)$.

Lad $t > 0$ være fast. Så findes en konstant A (afhængig af t) så

$$g_s(y) \le \frac{A}{(1 + \|y\|^2)^{m+1}} \quad \text{for } s \in [t, t+1] ,\ y \in \mathbb{R}^m ,$$

thi

$$(1 + \|y\|^2)^{m+1} g_s(y) \le (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} (1 + \|y\|^2)^{m+1} \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{4(t+1)}\right) ,$$

og dette er begrænset for $y \in \mathbb{R}^m$, da en potensfunktion vokser langsommere end en eksponentialfunktion.

Lad $0 < h < 1$. Vi har følgende vurdering

$$\left\| \frac{1}{h}(P_{t+h} f - P_t f) - (\Delta g_t) * f \right\| \le \|f\| \int \left| \frac{1}{h}(g_{t+h}(y) - g_t(y)) - \Delta g_t(y) \right| dy .$$

Ifølge middelværdisætningen er

$$\frac{1}{h}(g_{t+h}(y) - g_t(y)) = \frac{d}{dt} g_{t+\theta h}(y) = \Delta g_{t+\theta h}(y)$$

hvor $\theta \in]0,1[$ afhænger af h og af y, og derfor bliver integranden lig med

$$|\Delta g_{t+\theta h}(y) - \Delta g_t(y)| ,$$

som konvergerer punktvis mod 0 når $h \to 0$. Hvis vi viser at denne integrand har en integrabel absolut majorant for $0 < h < 1$, følger det af Lebesgue's sætning at

$$\left\| \frac{1}{h}(P_{t+h} f - P_t f) - (\Delta g_t) * f \right\| \to 0 \quad \text{for } h \to 0 ,$$

og dette er netop påstanden i lemmaet.

En integrabel majorant opnås ved vurderingen

$$|\Delta g_{t+\theta h}(y) - \Delta g_t(y)| \le \left(\frac{\|y\|^2}{4t^2} + \frac{n}{2t}\right)\left(g_{t+\theta h}(y) + g_t(y)\right)$$

$$\le \frac{\|y\|^2 + 2nt}{2t^2} \cdot \frac{A}{(1+\|y\|^2)^{n+1}} \le \frac{A \cdot \max(1, 2nt)}{2t^2} \cdot \frac{1}{(1+\|y\|^2)^n} \quad \text{for } 0<h<1,$$

og at dette er integrabelt over $\mathbb{R}^n$, altså at $\int \frac{1}{(1+\|y\|^2)^n} dy < \infty$, følger af at $\underline{\frac{1}{\|y\|^\alpha}}$ er integrabel i ∞ hvis og kun hvis $\alpha > n$.

Indføres polære koordinater gælder nemlig

$$\int_{\|y\|\ge 1} \frac{1}{\|y\|^\alpha} dy = \|\omega_n\| \int_1^\infty r^{n-1-\alpha} dr < \infty \iff n-1-\alpha < -1$$

hvilket er ensbetydende med at $\alpha > n$.

Integranden $\frac{1}{(1+\|y\|^2)^n}$ opfører sig i ∞ som $\frac{1}{\|y\|^{2n}}$ og er derfor integrabel i ∞. $\square$

<u>Sætning 3.17.</u> <u>Vektorrummet $\mathcal{K} \cap C^2$ (de to gange kontinuert differentiable funktioner med kompakt støtte) er indeholdt i domænet $\mathcal{D}_A$ for den infinitesimale generator, og for $f \in \mathcal{K} \cap C^2$ er</u>

$$\underline{Af = \Delta f.}$$

<u>Bevis:</u> For $f \in \mathcal{K} \cap C^2$ er $(\Delta g_t) * f = g_t * \Delta f = P_t(\Delta f)$ for alle $t > 0$. Dette følger ved partiel integration:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_t\right) * f(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_t\right)(x-y) f(y)\, dy_i \right) dy_1 \cdots \cancel{dy_i} \cdots dy_n =$$

$$- \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(g_t(x-y)\right) f(y)\, dy_i \right) dy_1 \cdots \cancel{dy_i} \cdots dy_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} g_t(x-y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(y)\, dy_i \right) dy_1 \cdots \cancel{dy_i} \cdots dy_n = g_t * \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

idet produktleddet falder bort da f har kompakt støtte. På samme måde fås

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g_t\right) * f = g_t * \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} ,$$

og påstanden følger ved addition.

Vi sætter nu $g = \Delta f$ og ved at $g \in C_0$.
Ifølge 3.16 vil

$$P_{\frac{1}{m}} f \in \mathcal{D}_A \quad \text{og} \quad A(P_{\frac{1}{m}} f) = (\Delta g_{\frac{1}{m}}) * f = g_{\frac{1}{m}} * \Delta f$$

$= P_{\frac{1}{m}} g$ for alle $m \in \mathbb{N}$. For $m \to \infty$ vil $P_{\frac{1}{m}} f \to f$ og $A(P_{\frac{1}{m}} f) \to g$. Da A er en afsluttet operator (sætning 3.9), kan vi heraf slutte at $f \in \mathcal{D}_A$ og at $Af = g = \Delta f$. ∎.

Vi kan opnå mere information om den infinitesimale generator, hvis vi benytter distributionsteori. Det følgende kan tages som et tilbud til dem, der kender disse ting.

En funktion $f \in C_0$ er en tempereret distribution ($f \in \mathcal{S}'$) og derfor er $\Delta f \in \mathcal{S}'$. Det er klart at $g_t \in \mathcal{S}$ for alle $t > 0$, og da distributioner fra $\mathcal{S}$ og $\mathcal{S}'$ kan foldes, gælder

$$(\Delta g_t) * f = g_t * \Delta f$$

<u>Sætning 3.18. Der gælder $\mathcal{D}_A = \{ f \in C_0 \mid \Delta f \in C_0 \}$ og for $f \in \mathcal{D}_A$ er $Af = \Delta f$.</u>

<u>Bevis:</u>

1) $\mathcal{D}_A \subseteq \{ f \in C_0 \mid \Delta f \in C_0 \}$.

Hvis $f \in \mathcal{D}_A$ ved vi ifølge 3.7 at $A(P_t f) = P_t(Af)$ for alle $t > 0$, og ifølge 3.16 har vi da

$$g_t * Af = P_t(Af) = (\Delta g_t) * f = g_t * \Delta f .$$

Ved Fouriertransformation fås

$$\mathcal{F}(g_t)\, \mathcal{F}(Af) = \mathcal{F}(g_t)\, \mathcal{F}(\Delta f) ,$$

og da

$$\mathcal{F}(g_t)(x) = \exp(-4\pi^2 t \|x\|^2) > 0 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}^m,$$

kan vi slutte at $\mathcal{F}(Af) = \mathcal{F}(\Delta f)$ og dermed $Af = \Delta f$, hvilket viser at $\Delta f \in C_0$.

2) $D_A \supseteq \{f \in C_0 \mid \Delta f \in C_0\}$.

Lad $f \in C_0$ så $g = \Delta f \in C_0$. Ifølge 3.16 gælder da $P_t f \in D_A$ og $A(P_t f) = (\Delta g_t) * f = g_t * \Delta f = P_t g$.

Heraf fås $P_{\frac{1}{n}} f \to f$, $A(P_{\frac{1}{n}} f) \to g$, fordi semigruppen er stærkt kontinuert. Da A er en afsluttet operator (3.9), kan vi konkludere at $f \in D_A$, og at $Af = g = \Delta f$. $\square$

<u>Bemærkning:</u> For <u>$n=1$</u> følger heraf at $D_A \subseteq C^2$, så $D_A = \{f \in C_0 \cap C^2 \mid f'' \in C_0\}$.

Vi vil nu finde den Brown'ske semigruppes potentialoperator (N, D_N). Det viser sig, at den er proportional med Newtonkernen.

Da den Brown'ske semigruppe opfylder hypotesen i sætning 3.11, ved vi at $D_N = A(D_A)$, og derfor får vi følgende information om D_N af sætning 3.17

$$\{\Delta f \mid f \in \mathcal{K} \cap C^2\} \subseteq D_N$$

og af sætning 3.18

$$D_N = \{f \in C_0 \mid \exists\, g \in C_0 : \Delta g = f\}.$$

For at finde N må vi foretage en simpel regning:

<u>Lemma 3.19. Der gælder</u>

$$\int_0^\infty g_t(y)\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} \cdot \dfrac{1}{\|y\|^{n-2}} & \text{for } n \geq 3,\ y \neq 0 \\ \infty & \text{for } n \geq 3,\ y = 0 \\ \infty & \text{for alle } y \in \mathbb{R}^n,\ n = 1,2. \end{cases}$$

<u>Bevis:</u> <u>a) $n=1$:</u>

$$\int_0^\infty g_t(y)\,dt \geq \int_1^\infty (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) dt \geq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \infty$$

for alle $y \in \mathbb{R}$.

b) $\underline{n=2}$: $\int_0^\infty g_t(y)\,dt \geq \int_1^\infty (4\pi t)^{-1} \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{4t}\right) dt \geq \frac{1}{4\pi} \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{4}\right) \int_1^\infty \frac{1}{t}\,dt = \infty$

for alle $y \in \mathbb{R}^2$.

c) $\underline{n \geq 3}$: Da $g_t(0) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}$ fås $\int_0^\infty g_t(0)\,dt = -(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{2}{n-2} \left[t^{\frac{2-n}{2}}\right]_0^\infty$

$= \infty$, fordi $\frac{2-n}{2} < 0$.

For $y \neq 0$ substitueres $s = \frac{\|y\|^2}{4t}$ i integralet $\int_0^\infty g_t(y)\,dt$, og vi finder

$$\int_0^\infty g_t(y)\,dt = \frac{1}{4\pi^{\frac{n}{2}} \|y\|^{n-2}} \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{n}{2}-2}\,ds = \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{n}{2}} \|y\|^{n-2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-2)} \cdot \frac{1}{\|y\|^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} \cdot \frac{1}{\|y\|^{n-2}} \quad . \quad \blacksquare .$$

Dette lemma viser at $\int_0^\infty g_t(y)\,dt$ på nær faktoren $\frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|}$ bliver lig Newtonkernen, men kun for $\underline{n \geq 3}$, hvorimod vi får identisk ∞ for $n = 1, 2$. Der er altså en afgørende forskel på den Brown'ske semigruppe i dimensionerne $n = 1$ og 2 og de højere dimensioner.

Man taler nu at den Brown'ske bevægelse er <u>rekurrent</u> for dimensionerne $n = 1, 2$, hvilket kommer ud på at en partikel vender tilbage til enhver åben relativt kompakt mængde uendeligt ofte og til vilkårligt sent tidspunkt. Den Brown'ske bevægelse i $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ er derimod <u>transient</u>, hvilket kommer ud på at en partikel forlader enhver åben relativt kompakt mængde uden at vende mere tilbage dertil.

<u>Sætning 3.20.</u> For $n \geq 3$ er $\mathcal{K} \subseteq D_N$, og for $f \in \mathcal{K}$ er

$$Nf = \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} N_n * f$$

hvor N_n er Newtonkernen.

<u>Bevis:</u> Det er nok at vise påstanden for $f \in \mathcal{K}_+$. For sådant f og for $x \in \mathbb{R}^n$ har vi

$$\int_0^t P_s f(x)\,ds = \int \left(f(x-y) \int_0^t g_s(y)\,ds \right) dy \quad ,$$

og fra lemma 3.19 ved vi at

$$\sup_{t>0} \int_0^t g_s(y)\,dy = \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} N_n(y) .$$

Da $f(x-y) \geq 0$, følger det af lemma 2.3 at

$$\sup_{t>0} \int_0^t P_s f(x)\,ds = \sup_{t>0} \int \Big(f(x-y) \int_0^t g_s(y)\,ds \Big) dy = \int \Big(f(x-y) \sup_{t>0} \int_0^t g_s(y)\,dy \Big) dy$$

$$= \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} \int f(x-y) N_n(y)\,dy = \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} N_n * f(x) .$$

Sættes $f_t = \int_0^t P_s f\,ds$ vil $f_t \in C_0(\mathbb{R}^n)$, og for $x \in \mathbb{R}^n$ er $\varepsilon_x : f \mapsto f(x)$ en kontinuert linearform på $C_0(\mathbb{R}^n)$. Derfor er

$$f_t(x) = \langle f_t, \varepsilon_x \rangle = \langle \int_0^t P_s f\,ds , \varepsilon_x \rangle = \int_0^t \langle P_s f, \varepsilon_x \rangle\,ds = \int_0^t P_s f(x)\,ds ,$$

og vi ved altså at $\sup_{t>0} f_t(x) = \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} N_n * f(x)$.

Ifølge 1.12 vil $\frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} N_n * f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Til $\varepsilon > 0$ findes derfor $R > 0$ så

$$f_t(x) \leq \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} N_n * f(x) \leq \varepsilon \qquad \text{for } \|x\| \geq R .$$

Ifølge Dini's sætning (2.2) findes $t_0 \in \mathbb{R}_+$ så

$$\Big| \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} N_n * f(x) - f_t(x) \Big| \leq \varepsilon \quad \text{for } t \geq t_0,\ \|x\| \leq R$$

fordi $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$ er en kompakt delmængde. Denne ulighed gælder imidlertid også for $\|x\| \geq R$ på grund af vurderingen ovenfor. Dette viser at

$$\Big\| \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} N_n * f - f_t \Big\| < \varepsilon \quad \text{for } t \geq t_0 ,$$

og derfor vil $f \in D_N$ og $Nf = \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} N_n * f$. ∎

<u>Bemærkninger:</u> (1). Af sætningerne 3.18 og 3.20 fremgår at

$$\Delta(N_n * f) = -(n-2)\|\omega_n\| f \qquad \text{for alle } f \in \mathcal{K} ,$$

idet ligningen må fortolkes som distributioner med mindre $N_n * f \in C^2$. De som kender til distributionsteori vil bemærke,

at denne ligning medfører at
$$\Delta\left(-\frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|}N_n\right) = \varepsilon_0 ,$$

og derfor er $-\frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|}N_n$ fundamentalløsning til differentialoperatoren Δ $(n \geq 3)$.

(2) Det fremgår af 3.19 og af beviset for 3.20, at $f \in \mathcal{K}_+$ aldrig vil tilhøre $\mathcal{D}_N$ når $n=1,2$, med mindre $f=0$. Reelle funktioner i $\mathcal{D}_N$ må derfor antage såvel positive som negative værdier.

(3) Vi nævner uden bevis følgende resultater:

a) For $n=1$ vil $\{f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \mid \int f(x)dx = \int x f(x)dx = 0\} \subseteq \mathcal{D}_N$, og for sådanne f er
$$Nf(x) = -\frac{1}{2}\int f(x-y)|y|\,dy = -\frac{1}{2} f * h_1(x) ,$$
hvor h_1 er funktionen defineret p. 9: $h_1(x) = |x| = r$.

b) For $n=2$ vil $\{f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \mid \int f(x)dx = 0\} \subseteq \mathcal{D}_N$, og for sådanne f er
$$Nf(x) = \frac{1}{2\pi}\int f(x-y)\log\frac{1}{\|y\|}\,dy = \frac{1}{2\pi} f * h_2(x) ,$$

hvor h_2 er den logaritmiske kerne defineret p. 9: $h_2(x) = \log\frac{1}{\|x\|}$.

<u>Opgaver:</u>

1) <u>$n=1$</u>: $g_s(y) = (4\pi s)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{y^2}{4s})$.

Vis at $\displaystyle\int_0^\infty \left\{\frac{d}{dy} g_s(y)\right\} ds = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{for } y>0 \\ 0 & \text{for } y=0 \\ \frac{1}{2} & \text{for } y<0 \end{cases}$.

Antag at $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ og at $\int f(x)dx = 0$. Vis at der for hvert $x \in \mathbb{R}$ gælder: $\displaystyle\int_0^t P_s f(x)\, ds \to -\frac{1}{2}\int f(x-y)|y|\, dy$ for $t \to \infty$.

<u>Vink:</u> Indfør $g(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ og bemærk at $g \in \mathcal{K} \cap C^1$.

Brug partiel integration og uddrag formlen ovenfor i regningerne.

2) <u>$n=1$</u>. Vis at $\{f \in \mathcal{K} \mid \int f(x)dx = \int x f(x) dx\} \subseteq D_N$.
(Gør det ved at finde $g \in \mathcal{K} \cap C^2$ så $g'' = f$, for givet f i ovenstående mængde).

Af 1) og 2) uddrages resultatet (3), a) i bemærkningen p. 66.

3) <u>$n=2$</u>. $g_s(y) = (4\pi s)^{-1} \exp(-\frac{\|y\|^2}{4s})$, $r = \|y\| \geq 0$.

Sæt $\varphi_s(r) = \frac{d}{dr}\left((4\pi s)^{-1}\exp(-\frac{r^2}{4s})\right)$ og vis $\displaystyle\int_0^\infty \varphi_s(r)\, ds = \begin{cases} 0 & \text{for } r=0 \\ -\frac{1}{2\pi r} & \text{for } r>0 \end{cases}$.

Lad nu $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ så $\int f(x)dx = 0$. Vis at der for hvert $x \in \mathbb{R}^2$ gælder

$$\int_0^t P_s f(x)\, ds \to \frac{1}{2\pi}\int f(x-y) \log\frac{1}{\|y\|}\, dy \quad \text{for } t \to \infty.$$

4) (Forudsætter distributionsteori). <u>$n=2$</u>. Vis ved hjælp af karakteriseringen p. 63 af D_N at

$$\{f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2) \mid \int f(x)dx = 0\} \subseteq D_N.$$

Af 3) og 4) uddrages resultatet (3), b) i bemærkningen p. 66.

§3. Hille - Yosida's sætning.

Den infinitesimale generator for en semigruppe er indført af Einar Hille og Kôsaku Yosida uafhængigt af hinanden omkring 1948. De har samtidig karakteriseret de operatorer A, der kan optræde som infinitesimale generatorer for semigrupper. Der er flere varianter af dette resultat, og vi præsenterer to her.

Lad $(P_t)_{t\geq 0}$ være en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på Banachrummet E. A priori er derfor $E = E_0$. Til semigruppen har vi knyttet den såkaldte <u>resolvent</u> $(V_\lambda)_{\lambda>0}$, en familie af begrænsede operatorer på E med egenskaben (jvfr. 3.12, 3.13):

(1) $\quad V_\lambda - V_\mu = (\mu-\lambda) V_\lambda V_\mu \quad$ for $\mu, \lambda > 0$ (Resolventligningen)

(2) $\quad \|\lambda V_\lambda\| \leq 1 \quad$ for alle $\lambda > 0$.

Operatoren V_λ er givet ved

$$(3) \qquad V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f \, dt \quad , \quad f \in E,$$

og vi ved desuden at V_λ afbilder E bijektivt på $\mathcal{D}_A$ og at

$$V_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$$

Vi vil nu stille os spørgsmålet: Hvis vi har givet en familie af operatorer $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ på E opfyldende (1) og (2), findes der så en stærkt^Y kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$, hvis resolvent er lig den givne familie $(V_\lambda)_{\lambda>0}$, altså så $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ er givet ud fra $(P_t)_{t\geq 0}$ ved (3)?

Inden vi besvarer spørgsmålet (bekræftende under en extra forudsætning), vil vi studere familier af operatorer der opfylder (1) og (2) lidt nærmere.

^{Y} kontinuert

<u>Definitionen:</u> Ved en <u>resolvent</u> forstås en familie $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ af begrænsede operatorer på E opfyldende resolventligningen (1).

Resolventen kaldes en <u>kontraktionsresolvent</u>, hvis $\|\lambda V_\lambda\| \le 1$ for alle $\lambda > 0$, og den kaldes <u>stærkt kontinuert</u>, hvis
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda f = f \quad \text{for alle } f\in E.$$

Af (1) fremgår at $V_\lambda V_\mu = V_\mu V_\lambda$ for en vilkårlig resolvent.
Af (1) fremgår videre at
$$V_\mu^{-1}(0) \subseteq V_\lambda^{-1}(0) \quad \text{for vilkårlige } \mu, \lambda > 0,$$
og skrives (1) på formen
$$V_\mu f = V_\lambda(f - (\mu-\lambda)V_\mu f) \quad , f\in E,$$
ses at
$$V_\mu(E) \subseteq V_\lambda(E) \quad \text{for vilkårlige } \mu,\lambda>0.$$
Alle operatorerne $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ i en resolvent har derfor <u>samme kerne</u> og <u>samme billedrum</u>.

<u>Sætning 3.21. Lad $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ være en resolvent af begrænsede operatorer på Banachrummet E. Så er afbildningen $]0,\infty[\to \mathcal{L}(E)$ givet ved $\lambda \mapsto V_\lambda$ en analytisk afbildning med den lokale potensrækkeudvikling</u>
$$V_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n V_{\lambda_0}^{n+1} (\lambda-\lambda_0)^n \quad , \lambda_0>0 \; , \; |\lambda-\lambda_0| < \frac{1}{\|V_{\lambda_0}\|}.$$

<u>Heraf ses at</u>
$$\frac{d^k V_\lambda}{d\lambda^k} = (-1)^k k!\, V_\lambda^{k+1}.$$

<u>Bevis</u>: Hvis blot en operator V_λ er 0, er de det alle, så i dette tilfælde er påstanden klar. I modsat fald er $\|V_\lambda\| > 0$ for alle $\lambda > 0$.

Ganges resolventligningen $V_{\lambda_0} = V_\lambda - (\lambda_0-\lambda)V_\lambda V_{\lambda_0}$ med $(\lambda_0-\lambda)^n$, og sammensættes med operatoren $V_{\lambda_0}^n$, fås
$$(\lambda_0-\lambda)^n V_{\lambda_0}^{n+1} = (\lambda_0-\lambda)^n V_\lambda V_{\lambda_0}^n - (\lambda_0-\lambda)^{n+1} V_\lambda V_{\lambda_0}^{n+1}.$$

Ved addition fra $n=0$ til $n=N$ opnår man

$$\sum_{n=0}^{N} (\lambda_0-\lambda)^n V_{\lambda_0}^{n+1} = V_\lambda - (\lambda_0-\lambda)^{N+1} V_\lambda V_{\lambda_0}^{N+1}.$$

For $|\lambda-\lambda_0| < \frac{1}{\|V_{\lambda_0}\|}$ gælder $\|(\lambda_0-\lambda)^{N+1} V_\lambda V_{\lambda_0}^{N+1}\| \leq \|V_\lambda\| (|\lambda_0-\lambda| \|V_{\lambda_0}\|)^{N+1} \to 0$

for $N \to \infty$, og dermed fås den ønskede fremstilling. ▯

<u>Lemma 3.22. Lad $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ være en stærkt kontinuert resolvent, og lad $B = V_\lambda(E)$ være det fælles billedrum. Alle operatorerne V_λ afbilder E bijektivt på B, og der findes præcis en operator $A : B \to E$ med egenskaben</u>

$$\lambda I - A = V_\lambda^{-1} \text{ for alle } \lambda > 0.$$

<u>Bevis:</u> Lad f tilhøre den fælles kerne for alle operatorerne V_λ. Da $\lambda V_\lambda f = 0$ for alle $\lambda > 0$, og da $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda f = f$, følger heraf at $f = 0$.

Eksistensen af operatoren A kommer ud på at vise identiteten

$$\lambda f - V_\lambda^{-1} f = \mu f - V_\mu^{-1} f \quad \text{for alle } f \in B,\ \mu, \lambda > 0,$$

eller at billedet ved V_λ er det samme:

$$\lambda V_\lambda f - f = \mu V_\lambda f - V_\lambda V_\mu^{-1} f.$$

Nu kan $f \in B$ skrives $f = V_\mu g$ for passende $g \in E$, så ligningen er ensbetydende med at

$$\lambda V_\lambda V_\mu g - V_\mu g = \mu V_\lambda V_\mu g - V_\lambda g,$$

hvilket følger af resolventligningen.

▯

<u>Lemma 3.23. En kontraktionsresolvent er stærkt kontinuert hvis og kun hvis $B = V_\lambda(E)$ er tæt i E.</u>

<u>Bevis:</u>

Vi indfører underrummet $F = \{f \in E \mid \lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda f = f\}$. Da $\|\lambda V_\lambda\| \leq 1$ for alle $\lambda > 0$, er det let at se at F er afsluttet (jvfr. sætning 3.4). Der gælder $B \subseteq F$, thi $f \in B$ kan skrives $f = V_1 g$, $g \in E$, og ifølge resolventligningen gælder

$$\lambda V_\lambda f = (\lambda-1) V_\lambda f + V_\lambda f = f - V_\lambda g + V_\lambda f \quad , \text{ hvoraf}$$

$$\|\lambda V_\lambda f - f\| = \|V_\lambda(f-g)\| \leq \tfrac{1}{\lambda}\|f-g\|,$$
og så er det klart at $f \in F$.

Da $\lambda V_\lambda f \in B$ for alle $\lambda > 0$ har vi $\overline{B} \overset{?}{=} F$, og den omvendte inklusion er klar. Af formlen $\overline{B} = F$ fremgår påstanden i lemmaet. ▯

<u>Corollar 3.24. Resolventen knyttet til en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe er en stærkt kontinuert kontraktionsresolvent.</u>

<u>Bevis</u>:

Den stærke kontinuitet følger af at $\mathcal{B} = \mathcal{D}_A$, domænet for den infinitesimale generator, og dette er tæt ifølge 3.6 ▯.

<u>Sætning 3.25. Første variant af Hille-Yosida's sætning.</u>
<u>Enhver stærkt kontinuert kontraktionsresolvent $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ er resolvent for præcis en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$. Denne er givet ved</u>

$$P_t f = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t\lambda(\lambda V_\lambda - I)} f \qquad , f \in E.$$

<u>Grænseovergangen gælder ligeligt for t i et begrænset interval.</u>

<u>Bevis</u>: <u>Entydigheden</u>: Lad $(P'_t)_{t\geq 0}$ og $(P''_t)_{t\geq 0}$ være stærkt kontinuerte kontraktionssemigrupper, der begge har $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ som resolvent. Der gælder altså

$$V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P'_t f\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P''_t f\, dt \qquad \text{for } \lambda>0,\ f\in E.$$

For vilkårligt $\varphi \in E'$, $z \in \mathbb{C}$ med $\operatorname{Re} z > 0$ sættes

$$h'_\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \langle P'_t f, \varphi\rangle\, dt \quad , \quad h''_\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \langle P''_t f, \varphi\rangle\, dt .$$

Da er h'_φ og h''_φ holomorfe funktioner i den komplekse halvplan $\operatorname{Re} z > 0$, og vi ved at de stemmer overens på halvlinien $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z = 0$. Fra kompleks funktionsteori ved vi da, at de stemmer overens i hele den åbne halvplan $\operatorname{Re} z > 0$, altså

$$h'_\varphi(\lambda + i\sigma) = h''_\varphi(\lambda+i\sigma) \qquad \text{for } \lambda>0,\ \sigma\in\mathbb{R}.$$

Der gælder specielt
$$h_\varphi'(1+i\sigma) = h_\varphi''(1+i\sigma) \quad \text{for } \sigma \in \mathbb{R}.$$
Funktionerne
$$t \mapsto \begin{cases} e^{-t}\langle P_t' f, \varphi\rangle & \text{for } t \geq 0 \\ 0 & \text{for } t < 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad t \mapsto \begin{cases} e^{-t}\langle P_t'' f, \varphi\rangle & \text{for } t \geq 0 \\ 0 & \text{for } t < 0 \end{cases}$$

har altså samme Fouriertransformerede, og fra Mat. 6 ved vi så, at de er identiske som funktioner i $L^1(\mathbb{R})$. De er altså ens næsten overalt, men da de er kontinuerte på intervallet $]0,\infty[$, kan vi slutte at
$$\langle P_t' f, \varphi\rangle = \langle P_t'' f, \varphi\rangle \quad \text{for } t \in]0,\infty[.$$
Da $\varphi \in E'$ var vilkårlig, kan vi slutte at $P_t' f = P_t'' f$ for $t > 0$, altså $P_t' = P_t''$ for alle $t \geq 0$.

Eksistensen:

Heuristisk betragtning: Antag at $(P_t)_{t\geq 0}$ er en semigruppe med de ønskede egenskaber, og lad A være den infinitesimale generator. Så er $V_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$, og derfor er
$$\lambda V_\lambda - I = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - (\lambda I - A)) = (\lambda I - A)^{-1} A ,$$
og følgelig
$$\lambda(\lambda V_\lambda - I) = (I - \tfrac{1}{\lambda} A)^{-1} A .$$
For $\lambda \to \infty$ vil derfor formelt $\lambda(\lambda V_\lambda - I) \to A$, og da vi forventer at "$P_t = e^{tA}$", er der grund til at forvente at
$$e^{t\lambda(\lambda V_\lambda - I)} \approx P_t \quad \text{når } \lambda \text{ er stor.}$$

Bevis: Ifølge 3.22 findes en operator $A : \mathcal{B} \to E$ så $\lambda I - A = V_\lambda^{-1}$ for alle $\lambda > 0$, hvor $\mathcal{B}$ er det fælles billedrum for alle operatorerne V_λ.

Vi sætter $A_\lambda = \lambda(\lambda V_\lambda - I)$ for $\lambda > 0$ og indfører semigruppen
$$P_t^\lambda = \exp(tA_\lambda) = e^{tA_\lambda} , \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

Det er en normkontinuert kontraktionssemigruppe med infinitesimal generator A_λ.

For at se at $\|P_t^\lambda\| \le 1$, bemærkes at $P_t^\lambda = e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 V_\lambda}$, hvoraf

$$\|P_t^\lambda\| \le e^{-\lambda t} e^{\|t\lambda^2 V_\lambda\|} \le e^{-\lambda t} e^{t\lambda} = 1 .$$

Beviset for eksistensen forløber nu i 6 skridt.

1°. For $f \in B$ vil $\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda f = Af$, og $\|A_\lambda f\| \le \|Af\|$ for alle $\lambda > 0$.

Der gælder nemlig $V_\lambda(\lambda f - Af) = f$, hvoraf $\lambda V_\lambda f - f = V_\lambda Af$, og derfor er

$$A_\lambda f = \lambda V_\lambda (Af) .$$

Vi skal nu blot udnytte at resolventen V_λ er stærkt kontinuert, og at $\|\lambda V_\lambda\| \le 1$.

2°. For $f \in E$ gælder $\|P_t^\lambda f - P_t^\mu f\| \le t\|A_\lambda f - A_\mu f\|$, $\lambda, \mu > 0$.

For vilkårlig to elementer x og y, så $xy = yx$, i en ring med etelement gælder identiteten

$$x^n - y^n = \left(\sum_{k=1}^{n} x^{n-k} y^{k-1}\right)(x-y) .$$

Anvendes denne i operatorringen $\mathcal{L}(E)$ på operatorerne

$$P_{\frac{t}{n}}^\lambda = \exp\left(\tfrac{t}{n}\lambda(\lambda V_\lambda - I)\right) \quad \text{og} \quad P_{\frac{t}{n}}^\mu = \exp\left(\tfrac{t}{n}\mu(\mu V_\mu - I)\right)$$

som kommuterer fordi V_λ og V_μ gør det, så får vi

$$P_t^\lambda - P_t^\mu = \left(\sum_{k=1}^{n} P^\lambda_{\frac{t(n-k)}{n}} P^\mu_{\frac{t(k-1)}{n}}\right)\left(P^\lambda_{\frac{t}{n}} - P^\mu_{\frac{t}{n}}\right).$$

Vi anvender nu denne identitet på $f \in E$ og tager normen på begge sider:

$$\|P_t^\lambda f - P_t^\mu f\| \le \left(\sum_{k=1}^{n} \|P^\lambda_{\frac{t(n-k)}{n}}\| \, \|P^\mu_{\frac{t(k-1)}{n}}\|\right) \|P^\lambda_{\frac{t}{n}} f - P^\mu_{\frac{t}{n}} f\|$$

$$\le n\|P^\lambda_{\frac{t}{n}} f - P^\mu_{\frac{t}{n}} f\| = t\left\| \tfrac{n}{t}(P^\lambda_{\frac{t}{n}} f - f) - \tfrac{n}{t}(P^\mu_{\frac{t}{n}} f - f)\right\|.$$

For fast t vil $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{t}(P^\lambda_{\frac{t}{n}} f - f) = A_\lambda f$. Lader vi derfor $n \to \infty$ i uligheden, opnår vi den ønskede vurdering.

3° Grænseværdien $\lim_{\lambda\to\infty} P_t^\lambda f$ eksisterer for alle $t \geq 0$, $f \in E$.

Lad $F_t = \{f \in E \mid \lim_{\lambda\to\infty} P_t^\lambda f$ eksisterer$\}$. Så er F_t et afsluttet underrum af E, og det er afsluttet, fordi alle operatorerne P_t^λ har norm ≤ 1. (jvfr. sætning 3.4). Da E er et Banachrum, vil $f \in E$ tilhøre F_t hvis og kun hvis

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall \mu, \lambda \geq N : \|P_t^\lambda f - P_t^\mu f\| \leq \varepsilon .$$

Af 1° og 2° fremgår da, at $B \subseteq F_t$, og da B er tæt (3.23), kan vi slutte at $F_t = E$.

Vi sætter nu $P_t f = \lim_{\lambda\to\infty} P_t^\lambda f$ for alle $f \in E$, $t \geq 0$.

4°. $(P_t)_{t\geq 0}$ er en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe, og for alle $f \in E$ vil $P_t^\lambda f \to P_t f$ uniformt for t i et begrænset interval når $\lambda \to \infty$.

Det er klart, at der ved $P_t f = \lim_{\lambda\to\infty} P_t^\lambda f$ defineres en lineær afbildning $P_t : E \to E$, og da

$$\|P_t^\lambda f\| \leq \|f\| \quad , t \geq 0,\ \lambda > 0,$$

kan vi slutte at $\|P_t f\| \leq \|f\|$, altså $P_t \in \mathcal{L}(E)$ og $\|P_t\| \leq 1$.

Familien $(P_t)_{t\geq 0}$ er en semigruppe, thi

$$P_0 f = \lim_{\lambda\to\infty} P_0^\lambda f = f \text{ , og}$$

$$P_{t+s} f = \lim_{\lambda\to\infty} P_{t+s}^\lambda f = \lim_{\lambda\to\infty} P_t^\lambda P_s^\lambda f = P_t P_s f \text{ , det sidste fordi}$$

$$\|P_t^\lambda P_s^\lambda f - P_t P_s f\| \leq \|P_t^\lambda (P_s^\lambda f - P_s f)\| + \|P_t^\lambda (P_s f) - P_t (P_s f)\| .$$

Lad nu $f \in E$, $K > 0$, $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes $g \in B$ så $\|f - g\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$, og ifølge 1° findes λ_0 så

$$\|A_\lambda g - Ag\| \leq \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{for } \lambda \geq \lambda_0 .$$

Ved at lade $\mu \to \infty$ i 2°, fås af 1° at

$$\|P_t^\lambda g - P_t g\| \leq t \|A_\lambda g - Ag\| .$$

For $t \leq K$, $\lambda \geq \lambda_0$ gælder derfor følgende vurdering

$$\|P_t^\lambda f - P_t f\| \leq \|P_t^\lambda f - P_t^\lambda g\| + \|P_t^\lambda g - P_t g\| + \|P_t g - P_t f\| \leq$$

$$2\|f-g\| + t\|A_\lambda g - Ag\| \le 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} + K\cdot\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon,$$

hvilket viser, at $P_t^\lambda f \to P_t f$ uniformt for $t \le K$ når $\lambda \to \infty$. Da funktionerne $t \mapsto P_t^\lambda f$, hvor $\lambda > 0$, $f \in E$, er kontinuerte på $[0,\infty[$, må også grænsefunktionerne $t \mapsto P_t f$, hvor $f \in E$, være kontinuerte på $[0,\infty[$. Altså er semigruppen stærkt kontinuert.

<u>5°. Den infinitesimale generator for $(P_t)_{t\ge 0}$ er operatoren A med domæne $\mathcal{B}$.</u>

Lad os betegne den infinitesimale generator for $(P_t)_{t\ge0}$ med A^* og dens domæne med $\mathcal{D}_{A^*}$.

Da A_λ er den infinitesimale generator for P_t^λ, gælder ifølge 3.8

$$(*) \qquad P_t^\lambda f - f = \int_0^t P_s^\lambda(A_\lambda f)\,ds \qquad \text{for } t\ge 0,\ f\in E.$$

Hvis nu $f\in\mathcal{B}$, vil $P_s^\lambda(A_\lambda f) \to P_s(Af)$, uniformt for $s\in[0,t]$, når $\lambda\to\infty$. Dette følger af 1° og 4° på grund af vurderingen

$$\|P_s^\lambda(A_\lambda f) - P_s(Af)\| \le \|P_s^\lambda(A_\lambda f) - P_s^\lambda(Af)\| + \|P_s^\lambda(Af) - P_s(Af)\| \le$$
$$\|A_\lambda f - Af\| + \|P_s^\lambda(Af) - P_s(Af)\|.$$

Lader vi $\lambda\to\infty$ i $(*)$ og antager at $f\in\mathcal{B}$, får vi følgende grænseformel ud

$$P_t f - f = \int_0^t P_s(Af)\,ds \quad , t\ge 0,\ f\in\mathcal{B}.$$

Heraf ses straks at $f\in\mathcal{D}_{A^*}$ og $A^*f = Af$. Dermed har vi vist at $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{D}_{A^*}$ og at $Ag = A^*g$ for $g\in\mathcal{B}$.

Da $I-A$ afbilder $\mathcal{B}$ bijektivt på E, findes til vilkårligt $g^*\in\mathcal{D}_{A^*}$ præcis et element $g\in\mathcal{B}$ så

$$(I-A^*)g^* = (I-A)g.$$

Ifølge det lige viste er $Ag = A^*g$, altså har vi

$$(I-A^*)(g^*-g) = 0 \quad ,$$

men da $I - A^*$ er injektiv (3.13), må $g = g^*$, og dermed er $\mathcal{D}_{A^*} \subseteq B$.

6°. Resolventen hørende til $(P_t)_{t\geq 0}$ er den givne resolvent V_λ.

Betegner vi med $(W_\lambda)_{\lambda>0}$ resolventen hørende til $(P_t)_{t\geq 0}$, gælder ifølge 3.13 at $W_\lambda = (\lambda I - A^*)^{-1}$. Nu er $A = A^*$ og $V_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ ifølge 3.22. Derfor er $W_\lambda = V_\lambda$ for alle $\lambda > 0$.

Hermed er Hille-Yosida's sætning bevist. $\blacksquare$.

Bemærkning: For en funktion $\varphi : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ kaldes funktionen

$$\psi(\lambda) = \mathcal{L}\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t)\,dt$$

defineret for $\lambda > 0$ (evt. for $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$) den Laplacetransformerede af funktionen φ. Laplacetransformationen $\mathcal{L}$ er ligesom Fouriertransformationen et eksempel på Gelfandtransformationen, og den har derfor en række algebraiske egenskaber. Ligesom Fouriertransformationen er den injektiv. Resolventen af en semigruppe er formelt den Laplacetransformerede af semigruppen $t \mapsto P_t$, og entydighedsdelen af sætning 3.25 beror altså på injektiviteten af Laplacetransformationen. Det angivne bevis fører blot injektivitetsspørgsmålet for Laplacetransformationen tilbage til injektivitetsspørgsmålet for Fouriertransformationen.

Sætning 3.26. Anden variant af Hille-Yosida's sætning.
Lad $A : \mathcal{D}_A \to E$ være en operator med domæne $\mathcal{D}_A \subseteq E$.
En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at A er den infinitesimale generator for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe, er at

1) $\mathcal{D}_A$ er tæt i E,

2) $(\lambda I - A)(\mathcal{D}_A) = E$ for alle $\lambda > 0$,

3) Der gælder $\|(\lambda I-A)f\| \geq \lambda\|f\|$ for alle $\lambda>0$ og alle $f\in D_A$. Semigruppen er entydigt bestemt ved A.

Bevis: Betingelserne er nødvendige ifølge 3.6, 3.12 og 3.13. For at se at betingelserne er tilstrækkelige, bemærkes, at 3) medfører at $\lambda I-A$ er injektiv, og derfor vil $\lambda I - A$ afbilde D_A bijektivt på E. Vi sætter nu $V_\lambda = (\lambda I-A)^{-1}$ for $\lambda>0$ og får en operator i E af norm $\leq \frac{1}{\lambda}$ ifølge 3). At resolventligningen er opfyldt for $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ ses som i corollar 3.13. Da $\overline{D_A} = E$ er $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ en stærkt kontinuert kontraktionsresolvent med fælles billedrum $\mathcal{B} = V_\lambda(E) = D_A$. Af sætning 3.25 fremgår det, at den til $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ associerede semigruppe har (A, D_A) som infinitesimal generator.

Hvis $(P_t')_{t\geq 0}$ og $(P_t'')_{t\geq0}$ er to stærkt kontinuerte kontraktionssemigrupper med A som infinitesimal generator, følger det af 3.13 at de har samme resolvent og så er $P_t' = P_t''$, $t>0$, ifølge entydighedsudsagnet i sætning 3.25.

$\square$.

Opgave. Vi betragter Banachrummet $C_0([0,\infty[)$ af kontinuerte funktioner $[0,\infty[\to \mathbb{C}$ der går mod 0 i ∞. $E = C_0([0,\infty[)$ er udstyret med normen

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x\in[0,\infty[\}.$$

Vi sætter

$$P_t f(x) = f(x+t) \quad \text{for } f\in E,\ t\geq 0,\ x\geq 0.$$

Vis at $(P_t)_{t\geq0}$ er en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe.
Vis at

$$D_A = \{f\in E\cap C^1 \mid f'\in E\}, \quad Af = f' \text{ for } f\in D_A.$$

Vis at

$$D_N = \{f\in E \mid \lim_{t\to\infty}\int_0^t f(s)\,ds \text{ eksisterer}\}$$

og at $$Nf(x) = \lim_{t\to\infty}\int_x^t f(s)\,ds, \quad \text{for } x\geq0,\ f\in D_N.$$

Vi sætter $A_\lambda = \lambda(\lambda V_\lambda - I)$ som i sætning 3.25, og vidste, at der for alle $f \in E$ gælder

$$P_t f = \lim_{\lambda\to\infty} \exp(tA_\lambda) f \qquad \text{uniformt for } t \text{ i et begrænset}$$

interval. Heraf fås

$$f(t) = P_t f(0) = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A_\lambda)^n f(0) \qquad \text{uniformt for } t \text{ i}$$

et begrænset interval. Vis herved Weierstrass' approximationssætning: Enhver kontinuert funktion f på et begrænset interval $[a,b]$ kan approximeres uniformt over $[a,b]$ med polynomier vilkårligt godt.

Overvej at $\mathcal{K}([0,\infty[) \subseteq \mathcal{D}_N$ og at restriktionen af N til $\mathcal{K}$ definerer en kontinuert kerne på $[0,\infty[$. Vis at denne kerne opfylder det fuldstændige maksimumprincip.

2) Lad $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ være en resolvent og lad $p>0$. Vis, at $W_\lambda = V_{\lambda+p}$ igen er en resolvent. Hvis $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ er resolvent for semigruppen $(P_t)_{t\geq 0}$, hvilken semigruppe er $(W_\lambda)_{\lambda>0}$ så resolvent for?

3) Lad $(P_t)_{t\geq 0}$ være en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E med $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ som resolvent. Vis implikationen

$$(*) \qquad \forall f \in E: \lim_{t\to\infty} P_t f = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\lambda\to 0} \lambda V_\lambda f = 0$$

Vis, at der for alle $\lambda > 0$ gælder

$$R(A) = R(I - \lambda V_\lambda)$$

idet $R(B)$ betyder billedrummet $B(\mathcal{D}_B)$ for en operator $(B, \mathcal{D}_B)$.

Vis, at der for alle $\lambda, \mu > 0$, $\lambda \neq \mu$ gælder

$$\mu V_\mu (I - \lambda V_\lambda) = \frac{\mu}{\mu - \lambda}(\mu V_\mu - \lambda V_\lambda)$$

og slut heraf, at

$$\overline{R(A)} = \{ f \in E \mid \lim_{\lambda\to 0} \lambda V_\lambda f = 0 \}.$$

4) Vi betragter Banachrummet $E = \mathbb{C}$ og identificerer $\mathcal{L}(E)$ med $\mathbb{C}$ på naturlig måde. For hvert $a \in \mathbb{C}$ er $P_t = e^{at}$ en (normkontinuert = stærk kontinuert) semigruppe på $\mathbb{C}$. Find de $a \in \mathbb{C}$ for hvilken den er en kontraktionssemigruppe, og find i disse tilfælde de indførte begreber $(A, \mathcal{D}_A)$, $(N, \mathcal{D}_N)$, V_λ. Vis, at man ved at vælge $a \in \mathbb{C}$ passende kan få et eksempel der viser, at implikationen (*) i opg. 3) ikke kan vendes.

5) <u>Om sammenhængen mellem den 0'te resolventoperator og potentialoperatoren N.</u>

Lad $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ være en resolvent af begrænsede operatorer på E. Vi definerer en operator $(V, \mathcal{D}_V)$ kaldet den <u>0'te resolventoperator</u> ved:

$$\mathcal{D}_V = \{f \in E \mid \lim_{\lambda \to 0} V_\lambda f \text{ eksisterer}\}, \quad Vf = \lim_{\lambda \to 0} V_\lambda f \text{ for } f \in \mathcal{D}_V.$$

<u>Vis</u>:

a) $V_\lambda(\mathcal{D}_V) \subseteq \mathcal{D}_V$ og $VV_\lambda f = V_\lambda Vf$, $Vf = V_\lambda f + \lambda VV_\lambda f$ for $f \in \mathcal{D}_V$.

Antag nu, at $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ er resolvent for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ med frembringer $(A, \mathcal{D}_A)$ og potentialoperator $(N, \mathcal{D}_N)$.

<u>Vis videre</u>:

b) $V(\mathcal{D}_V) \subseteq \mathcal{D}_A$ og $A(Vf) = -f$ for $f \in \mathcal{D}_V$. (V injektiv).

c) $\mathcal{D}_N \subseteq \mathcal{D}_V$ og $Nf = Vf$ for $f \in \mathcal{D}_N$.

d) Vis, ved hjælp af opg. 4 at det kan indtræffe at $\mathcal{D}_N \neq \mathcal{D}_V$.

e) Antag nu at

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda V_\lambda f = 0 \text{ for alle } f \in E.$$

(Ifølge opg. 3 er det ensbetydende med at $R(A) = A(\mathcal{D}_A)$ er tæt i E.)
Vis, at

$$A(\mathcal{D}_A) \subseteq \mathcal{D}_V \;, \text{ og at } V(Af) = -f \text{ for } f \in \mathcal{D}_A \;. \text{ (A injektiv).}$$

Af b) og e) følger da at

$$A = -V^{-1}, \; V = -A^{-1}.$$

f) Antag at $\lim_{t \to \infty} P_t f = 0$ for alle $f \in E$. Vis, at

$$\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_V = A(\mathcal{D}_A) \text{ og at } N = V = -A^{-1}.$$

<u>Vink til c).</u> For $f \in \mathcal{D}_N$ sættes $\varphi(s) = \int_0^s P_t f \, dt$. Vis ved partiel integration at

$$V_\lambda f = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \varphi(s) \, ds \,.$$

6) Prøv at udregne resolventen for den Brown'ske semigruppe.

Kapitel 4. Semigrupper og kerner.

§1. Sammenhængen mellem begrænsede operatorer i $C_0(X)$ og kontinuerte kerner.

Vi skal specialisere semigruppeteorien til Banachrummet $E = C_0(X)$ bestående af alle kontinuerte funktioner $f: X \to \mathbb{C}$ der går mod 0 i ∞ på det lokalkompakte rum X. Rummet $C_0(X)$ er udstyret med normen

$$\|f\| = \sup_X |f(x)| .$$

Er $\mu \in \mathcal{M}(X)$ et Radonmål på X indføres normen af μ som tallet $\|\mu\| \leq \infty$ givet ved

$$\|\mu\| = \sup\{|\mu(f)| \mid f \in \mathcal{K}(X), \|f\| \leq 1\} ,$$

og målet μ kaldes begrænset, hvis og kun hvis $\|\mu\| < \infty$. Et Radonmål μ er altså begrænset, præcis når det er en kontinuert linearform på det tætte underrum $\mathcal{K}(X)$ af $C_0(X)$. Heraf ses at det duale rum til $C_0(X)$ er rummet af begrænsede Radonmål på X, betegnet $\mathcal{M}^b(X)$.

En positiv begrænset operator P på $C_0(X)$ definerer ved restriktion til $\mathcal{K}$ en kontinuert kerne N, der går mod 0 i ∞. (At $P \in \mathcal{L}(C_0(X))$ er positiv betyder: "$f \geq 0 \Rightarrow Pf \geq 0$". Heraf ses: "$f \in C_0(X,\mathbb{R}) \Rightarrow Pf \in C_0(X,\mathbb{R})$").

Udvidelsen af N til $\mathcal{I}_+$ stemmer overens med P på $C_0(X)_+$, thi for $f \in C_0(X)_+$ gælder

$$Nf = \sup\{N\varphi \mid \varphi \in \mathcal{K}_+, \varphi \leq f\} = \sup\{P\varphi \mid \varphi \in \mathcal{K}_+, \varphi \leq f\} \leq Pf,$$

og til $\varepsilon > 0$ findes $\varphi \in \mathcal{K}_+$, $\varphi \leq f$ så $\|f-\varphi\| \leq \varepsilon$, og derfor vil

$$0 \leq Pf - N\varphi = Pf - P\varphi \leq \varepsilon \|P\| .$$

Da P er en positiv operator, er det let at overbevise sig om at

$$\|P\| = \sup\{\|P\varphi\| \mid \varphi \in C_0, \|\varphi\| \leq 1\} = \sup\{\|P\varphi\| \mid \varphi \in \mathcal{K}_+, \varphi \leq 1\},$$

og derfor finder man at

$$\|P\| = \sup_{x\in X} N1(x) \quad ,$$

og derfor er N en begrænset kerne.

For den transponerede kerne N^* vil $\mathcal{D}(N^*) \supseteq \mathcal{M}^b(X)$ og $N^* : \mathcal{D}(N^*) \to \mathcal{M}(X)$ er en udvidelse af den sædvanlige transponerede operator (jvfr. p. 46) $P^* \in \mathcal{L}(\mathcal{M}^b(X))$.

Hvis omvendt N er en begrænset kontinuert kerne, der går mod 0 i ∞, gælder

$$\|N\varphi\| \le \sup_{x\in X} N1(x) \quad \text{for alle } \varphi \in \mathcal{K}, \ \|\varphi\| \le 1 .$$

Da $\mathcal{K}$ er tæt i C_0 findes en entydig udvidelse af N til en begrænset operator P i C_0. Denne operator P er positiv og

$$\|P\| = \sup_{x\in X} N1(x) .$$

<u>Der er således en entydig korrespondance mellem positive begrænsede operatorer i $C_0(X)$ og begrænsede kontinuerte kerner der går mod 0 i ∞.</u>

I det følgende skelner vi derfor ikke mellem disse begreber. En positiv begrænset operator $N \in \mathcal{L}(C_0(X))$ er en kontraktion (i.e. $\|N\| \le 1$) hvis og kun hvis N er en sub-Markovkerne.

Vi får brug for følgende "udvidelse" af det fuldstændige maksimumprincip:

<u>Lemma 4.1</u> <u>Lad N være en kontinuert kerne opfyldende det fuldstændige maksimumprincip. Så gælder princippet i den udvidede form</u> :

<u>$\forall f, g \in \mathcal{J}_+, \ \forall a \ge 0 : \ Nf(x) \le Ng(x) + a$ for $x \in \operatorname{supp} f \Rightarrow$</u>

<u>$Nf(x) \le Ng(x) + a$ for alle $x \in X$.</u>

<u>Bevis</u>: (a) Antag at $f \in \mathcal{K}_+$, $g \in \mathcal{J}_+$, $a \ge 0$ og at

$$Nf(x) \le Ng(x) + a \quad \text{for alle } x \in \operatorname{supp} f.$$

Lad $\varepsilon > 0$. Så vil

$$Ng(x) > Nf(x) - a - \varepsilon \quad \text{for alle } x \in \operatorname{supp} f.$$

For hvert $x \in \operatorname{supp}(f)$ findes derfor $\varphi_x \in \mathcal{K}_+$, $\varphi_x \leq g$ så

$$N\varphi_x(x) > Nf(x) - a - \varepsilon ,$$

og denne ulighed gælder i en vis omegn af x. Ved et kompakthedsargument findes $\varphi \in \mathcal{K}_+$, $\varphi \leq g$ så

$$N\varphi(x) > Nf(x) - a - \varepsilon \quad \text{for alle } x \in \operatorname{supp} f.$$

Af det fuldstændige maksimumprincip følger da

$$Nf \leq N\varphi + a + \varepsilon \leq Ng + a + \varepsilon \quad \text{på } X,$$

og da $\varepsilon > 0$ var vilkårlig, fås

$$Nf \leq Ng + a \quad \text{på } X.$$

(b) Antag at $f, g \in \mathcal{J}_+$, $a \geq 0$ og at

$$Nf(x) \leq Ng(x) + a \quad \text{for alle } x \in \operatorname{supp} f.$$

For $\varphi \in \mathcal{K}_+$, $\varphi \leq f$ gælder så

$$N\varphi(x) \leq Ng(x) + a \quad \text{for alle } x \in \operatorname{supp}\varphi \subseteq \operatorname{supp} f.$$

Ifølge det under (a) viste, kan vi heraf slutte at

$$N\varphi \leq Ng + a \quad \text{på } X,$$

og dermed fås let

$$Nf \leq Ng + a. \qquad \square$$

<u>Problem:</u> Formuler og bevis en tilsvarende sætning om dominationsprincippet.

For kerner der går mod 0 i ∞, har man en betydningsfuld ækvivalent formulering:

<u>Lemma 4.2. Lad N være en kontinuert kerne der går mod 0 i ∞. Så er følgende principper ækvivalente:</u>

<u>(a) Det fuldstændige maksimumprincip.</u>

<u>(b) Det svage princip om det positive maksimum:</u>

$$\forall f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{R}) : \sup Nf > 0 \Rightarrow \sup Nf = \sup_{\{f>0\}} Nf$$

<u>Hvis N desuden er begrænset, er (a) og (b) ækvivalente med følgende</u>

<u>stærkere udgave af (b)</u>

(b') $\forall f \in C_0(X,\mathbb{R})$: $\sup Nf > 0 \Rightarrow \sup Nf = \sup_{\{f>0\}} Nf$.

<u>Bevis</u>: For $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{R})$ sættes $f^+ = \max(f,0)$, $f^- = \max(-f,0)$ så $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Da $\overline{\operatorname{supp} f^+ = \{f>0\}}$ er

$$\sup_{\{f>0\}} Nf = \sup_{\operatorname{supp} f^+} Nf \quad ,$$

og derfor kan (b) også udtrykkes, at hvis Nf overhovedet antager strengt positive værdier, så findes $x \in \operatorname{supp} f^+$ så $Nf(x) = \sup Nf$.

<u>(a) ⇒ (b).</u>

For $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{R})$ sættes $a = \sup_{\operatorname{supp} f^+} Nf$, $a^+ = \max(a,0)$.
Så er

$$Nf(x) \le a \le a^+ \quad \text{for alle } x \in \operatorname{supp}(f^+)$$

eller

$$Nf^+(x) \le Nf^-(x) + a^+ \quad \text{for alle } x \in \operatorname{supp} f^+.$$

Ifølge (a) gælder da

$$Nf \le a^+ \quad \text{på } X ,$$

og hvis nu $\sup Nf > 0$, må nødvendigvis $a^+ > 0$, altså $a = a^+ > 0$.
Derfor er

$$a = \sup_{\{f>0\}} Nf \le \sup Nf \le a \quad , \text{ hvilket viser (b).}$$

<u>(b) ⇒ (a)</u> Lad $f, g \in \mathcal{K}_+$, $a \ge 0$, og antag at

$$Nf(x) \le Ng(x) + a \quad \text{for } x \in \operatorname{supp}(f).$$

Hvis $N(f-g) \le 0$, gælder uligheden ovenover klart på hele X, og i modsat fald giver (b):

$$\sup N(f-g) = \sup_{\{f>g\}} N(f-g) \le \sup_{\operatorname{supp} f} N(f-g) \le a \quad ,$$

hvilket viser at $Nf \le Ng + a$ på hele X.

Hvis N desuden er begrænset er N en begrænset operator i $C_0(X)$. Implikationen (a) ⇒ (b') vises nøjagtigt som (a) ⇒ (b), idet vi blot gør brug af udvidelsen af det fuldstændige maksimumprincip 4.1. Den trivielle implikation (b') ⇒ (b) slutter beviskæden. □

§2 Sammenhængen mellem det fuldstændige maksimumprincip og resolventer.

<u>Sætning 4.3. Lad $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ være en kontraktionsresolvent af positive begrænsede operatorer på $C_0(X)$. Så opfylder hver af kernerne V_λ det fuldstændige maksimumprincip.</u>

<u>Bevis:</u> Resolventligningen udsiger
$$V_\lambda = V_{\lambda+\mu} + \mu V_{\lambda+\mu} V_\lambda \qquad \text{for } \lambda, \mu > 0,$$
hvoraf følger at
$$V_\lambda = V_{\lambda+\mu} + \mu V_{\lambda+\mu}\left(V_{\lambda+\mu} + \mu V_{\lambda+\mu} V_\lambda\right) =$$
$$V_{\lambda+\mu} + \mu V_{\lambda+\mu}^2 + \mu^2 V_{\lambda+\mu}^2 V_\lambda .$$

Ved gentagen anvendelse af denne fremgangsmåde fås for alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\mu V_\lambda = \sum_{k=1}^{n} (\mu V_{\lambda+\mu})^k + \mu(\mu V_{\lambda+\mu})^n V_\lambda .$$

Da $\|\mu(\mu V_{\lambda+\mu})^n V_\lambda\| \le \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \to 0$ for $n \to \infty$, fås
$$V_\lambda + \frac{1}{\mu} I = \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty} (\mu V_{\lambda+\mu})^n .$$

Dette viser at $V_\lambda + \frac{1}{\mu} I$ for alle λ, μ er proportional med en elementær kerne, og da $\mu V_{\lambda+\mu}$ er en sub-Markov-kerne, følger af 2.12 at $V_\lambda + \frac{1}{\mu} I$ opfylder det fuldstændige maksimumprincip.

Antag nu at
$$V_\lambda f(x) \le V_\lambda g(x) + a \qquad \text{for } x \in \operatorname{supp}(f),$$
hvor $f, g \in \mathcal{K}_+$, $a \ge 0$. Så gælder
$$(V_\lambda + \tfrac{1}{\mu} I) f(x) \le (V_\lambda + \tfrac{1}{\mu} I) g(x) + a + \frac{\sup f}{\mu} \qquad \text{for } x \in \operatorname{supp}(f),$$

og dermed på hele X. Lader vi $\mu \to \infty$ fås at
$$V_\lambda f(x) \le V_\lambda g(x) + a \qquad \text{for alle } x \in X.$$

$\square$

Vi nævner uden bevis følgende analoge resultat som skyldes Georges Liom : Ann. Inst. Fourier 1966 bd.16,2 p. 406.

Sætning 4.3 (Sekundo). Lad $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ være en resolvent af positive begrænsede operatorer på $C_0(X)$, og antag at V_λ er en strengt positiv kerne for hvert $\lambda>0$. Så opfylder alle kernerne V_λ dominationsprincippet.

Af sætningerne 4.3 kan man udlede resultater om den o'te resolventoperator (V, D_V) (jvf. p. 79). Hvis $\mathcal{K} \subseteq D_V$ vil V's restriktion til $\mathcal{K}$ være en kontinuert kerne der går mod 0 i ∞, og den vil i almindelighed være ubegrænset. Det er naturligt at forvente at V opfylder det samme princip som alle V_λ'erne opfylder.

Sætning 4.4. Lad $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ være en kontraktionsresolvent af positive operatorer på $C_0(X)$, og antag at $\mathcal{K} \subseteq D_V$. Den kontinuerte kerne V givet ved

$$Vf = \lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f \quad , f\in\mathcal{K}$$

opfylder det fuldstændige maksimumprincip.

Bevis: Antag at $Vf(x) \le Vg(x) + a$ for $x\in \operatorname{supp} f$, hvor $f,g\in\mathcal{K}_+$, $a\ge 0$. For hvert $\lambda>0$ gælder da

$$V_\lambda f(x) \le Vf(x) \le V_\lambda(g+\lambda Vg)(x) + a \quad \text{for } x\in\operatorname{supp} f$$

på grund af ligningen $V = V_\lambda + \lambda V_\lambda V$. Ifølge 4.1 og 4.3 fås

$$V_\lambda f \le V_\lambda(g+\lambda Vg) + a = Vg + a \;,$$

og lader vi $\lambda\to 0$ fås det ønskede

$$Vf \le Vg + a \;. \;\blacksquare$$

Vi præsenterer nu en partiel omvending af sætning 4.4. Den skyldes i en svagere udgave den amerikanske matematiker G. A. Hunt. Bevisideen nedenfor med at udnytte det svage princip om det positive maksimum til at vise positiviteten af resolventoperatorerne går tilbage til ham.

Sætning 4.5. (Hunt). Lad V være en kontinuert kerne, som er begrænset, og som går mod 0 i ∞. Hvis V opfylder det fuldstændige maksimumprincip findes en og kun en kontraktionsresolvent $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ af positive begrænsede operatorer på $C_0(X)$ så

$$Vf = \lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f \qquad \text{for alle } f \in \mathcal{K}.$$

Denne resolvent opfylder $\|V_\lambda\| \le \|V\|$, $\lim\limits_{\lambda\to 0} V_\lambda = V$ i $\mathcal{L}(C_0(X))$.

Bevis: Vi opfatter V som en positiv begrænset operator i $C_0(X)$.

Entydighedsudsagnet: Lad $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ være en resolvent med de ønskede egenskaber. Der gælder da

$$Vf = V_\lambda f + \lambda V_\lambda V f \qquad \text{for } \lambda > 0,\ f \in \mathcal{K},$$

og da de optrædende operatorer er begrænsede, gælder denne ligning endda for alle $f \in C_0(X)$, fordi $\mathcal{K}$ er tæt i C_0.

Hvis $V=0$ følger heraf $V_\lambda = 0$ for alle $\lambda > 0$.

Hvis $V \neq 0$ er $I + \lambda V$ invertibel for $0 < \lambda < \frac{1}{\|V\|}$, og derfor må der gælde

$$V_\lambda = V(I+\lambda V)^{-1} \qquad \text{for } 0 < \lambda < \frac{1}{\|V\|} \tag{4.1}$$

Den analytiske funktion $\lambda \mapsto V_\lambda$ (3.21) er altså entydigt fastlagt på det åbne interval $]0, \frac{1}{\|V\|}[$, og dermed er den entydigt bestemt.

Eksistensudsagnet: Hvis $V=0$ sættes $V_\lambda = 0$ for alle $\lambda>0$. Hvis $V \neq 0$ defineres V_λ ved (4.1) i intervallet $]0, \frac{1}{\|V\|}[$, og vi ser at der for $0 < \lambda < \frac{1}{\|V\|}$ gælder

$$V = V_\lambda + \lambda V_\lambda V \quad , \quad V V_\lambda = V_\lambda V \tag{4.2}$$

Lad nu k_0 være supremum af de tal $k>0$ for hvilke der findes en familie $(V_\lambda)_{\lambda\in]0,k[}$ af begrænsede operatorer på $C_0(X)$ opfyldende (4.2) for alle $\lambda\in]0,k[$. Vi ved at $k_0 \geq \frac{1}{\|V\|}$.

Vi vil nu uddrage en række konsekvenser af formel (4.2) og ende med at vise at $k_0=\infty$.

(a) For $\lambda,\mu\in]0,k_0[$ gælder resolventligningen: $V_\lambda - V_\mu = (\mu-\lambda)V_\mu V_\lambda$.

Af (4.2) følger nemlig

$$V_\mu = (I-\mu V_\mu)V \quad , \quad V_\lambda = V(I-\lambda V_\lambda) \quad , \text{ hvoraf}$$

$$V_\mu(I-\lambda V_\lambda) = [(I-\mu V_\mu)V](I-\lambda V_\lambda) = (I-\mu V_\mu)V_\lambda \quad , \text{ eller}$$

$$V_\lambda - V_\mu = (\mu-\lambda)V_\mu V_\lambda .$$

(b) For $\lambda\in]0,k_0[$ er V_λ en reel operator, i.e. $f\in C_0(X,\mathbb{R}) \Rightarrow V_\lambda f\in C_0(X,\mathbb{R})$.

For $f\in C_0(X,\mathbb{R})$ skrives

$$V_\lambda f = f_1 + i f_2 \quad \text{hvor } f_1,f_2\in C_0(X,\mathbb{R}).$$

Af (4.2) følger at

$$Vf = f_1 + i f_2 + \lambda V f_1 + i\lambda V f_2 ,$$

og da V er en reel operator må

$$f_2 + \lambda V f_2 = 0 \quad , \text{ hvoraf}$$

$$V f_2 = V_\lambda (I+\lambda V) f_2 = 0 \quad , \text{ og derfor må } f_2 = 0 .$$

(c) For $\lambda\in]0,k_0[$ er V_λ positiv, i.e. $f\in C_0(X)_+ \Rightarrow V_\lambda f\in C_0(X)_+$.

For $f\in C_0(X)_+$ skrives $V_\lambda f = h^+ - h^-$ med

$$h^+ = \max(V_\lambda f, 0) \quad , \quad h^- = \max(-V_\lambda f, 0) \quad \in C_0(X)_+ .$$

Af (4.2) følger nu

$$Vf = h^+ - h^- + \lambda V h^+ - \lambda V h^- \geq \lambda V h^+ - \lambda V h^- - h^- .$$

For $x\in \operatorname{supp} h^+$ er $h^-(x)=0$, og derfor gælder

$$V h^+(x) \leq V(\tfrac{1}{\lambda} f + h^-)(x) \quad \text{for } x\in\operatorname{supp} h^+ .$$

Ifølge udvidelsen af det fuldstændige maksimumprincip 4.1 gælder denne ulighed overalt, altså

$$Vf \geq \lambda V(h^+ - h^-) = \lambda V V_\lambda f$$

hvoraf

$$V_\lambda f = Vf - \lambda V V_\lambda f \geq 0 .$$

Heraf fås videre at $V_\lambda f \leq Vf$, og derfor vil $\|V_\lambda\| \leq \|V\|$.

(d) For $\lambda \in]0, k_0[$ er $\|\lambda V_\lambda\| \leq 1$.

Lad $f \in C_0(X)_+$, $f \leq 1$. Det er tilstrækkeligt at vise at $a = \sup V_\lambda f \leq \frac{1}{\lambda}$. Hvis $a = 0$ er dette klart. Hvis $a > 0$ findes ifølge 4.2 et $x_0 \in X$ så

$$a = \sup V_\lambda f = V_\lambda f(x_0) \quad \text{og så} \quad f(x_0) \geq \lambda V_\lambda f(x_0)$$

fordi

$$V_\lambda f = V(f - \lambda V_\lambda f) .$$

Dermed er $\lambda a \leq f(x_0) \leq 1$.

(e) $k_0 = \infty$.

Hvis vi nemlig antager at $k_0 < \infty$ når vi til en modstrid således: Vi vælger $\lambda \in]k_0 - \frac{1}{\|V\|}, k_0[$. For $0 < \varepsilon < \frac{1}{\|V\|}$ gælder

$$\|\varepsilon V_\lambda\| \leq \varepsilon \|V\| < 1 ,$$

og dermed er operatoren

$$V_{\lambda+\varepsilon} := V_\lambda (I + \varepsilon V_\lambda)^{-1}$$

veldefineret.

Vi vil nu vise at $V_{\lambda+\varepsilon}$ tilfredsstiller ligning (4.2) for $0 < \varepsilon < \frac{1}{\|V\|}$, og dermed har vi modstrid med definitionen af k_0.

Der gælder klart $V V_{\lambda+\varepsilon} = V_{\lambda+\varepsilon} V$ fordi $V V_\lambda = V_\lambda V$, og af definitionen på $V_{\lambda+\varepsilon}$ følger resolventligningen:

$$V_\lambda - V_{\lambda+\varepsilon} = \varepsilon V_\lambda V_{\lambda+\varepsilon} = \varepsilon V_{\lambda+\varepsilon} V_\lambda \tag{4.3}$$

Sammensættes dette med λV og udnyttes ligning (4.2) fås

$$\lambda V (V_\lambda - V_{\lambda+\varepsilon}) = \varepsilon \lambda V V_\lambda V_{\lambda+\varepsilon} = \varepsilon (V - V_\lambda) V_{\lambda+\varepsilon} ,$$

hvoraf

$$\lambda V V_\lambda + \varepsilon V_\lambda V_{\lambda+\varepsilon} = (\lambda+\varepsilon) V V_{\lambda+\varepsilon} .$$

Vi udnytter nu igen (4.2) og (4.3) og finder

$$(\lambda+\varepsilon) V V_{\lambda+\varepsilon} = (V - V_\lambda) + (V_\lambda - V_{\lambda+\varepsilon}) = V - V_{\lambda+\varepsilon} ,$$

hvilket er (4.2) for operatoren $V_{\lambda+\varepsilon}$.

Vi har nu fundet en kontraktionsresolvent $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ af positive begrænsede operatorer på C_0 opfyldende

$$V = V_\lambda + \lambda V_\lambda V \quad , \quad \|V_\lambda\| \leq \|V\| \quad , \quad \lambda > 0 .$$

Heraf fås

$$\| V - V_\lambda \| \leq \lambda \|V\|^2 ,$$

så der gælder $\lim_{\lambda \to 0} V_\lambda = V$ i $\mathcal{L}(C_0(X))$, specielt $\lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f = Vf$ for alle $f \in C_0(X)$.

$\|$

<u>Bemærkning</u>: En fuldstændig omvending af sætning 4.4 ville være følgende "sætning":

<u>Lad V være en kontinuert kerne der går mod 0 i ∞. Hvis V opfylder det fuldstændige maksimumprincip, findes en og kun en kontraktionsresolvent $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ af positive begrænsede operatorer på $C_0(X)$ så</u>

$$\underline{Vf = \lim_{\lambda \to 0} V_\lambda f \qquad \text{for alle } f \in \mathcal{K} .}$$

<u>Det vides ikke</u> om dette er rigtigt i denne generelle formulering. Hvis V er begrænset er dette resultat rigtigt som vi lige har vist. Ved en approximationsprocedure kan man udstrække resultatet til ubegrænset V, men dette kræver til gengæld at <u>rummet X er σ-kompakt.</u> Det sidstnævnte resultat skyldes Hunt, men et simplere bevis er givet af Lion i Ann. Inst. Fourier 1966 bd 16, 2 p. 403. Vi henviser den interesserede til at læse beviset i denne artikel og opfordrer iøvrigt til at bevise eller modbevise ovenstående påstand i fuld generalitet.

Ovenstående sætning er rigtig, se appendix. Et andet bevis er givet af Francis Hirsch: Opérateurs codissipatifs, C.R.A.S. Paris, t. 270, 1970, Sér. A, p. 1487-1490.

§3. Feller-semigrupper og Hunt's sætning.

Definition: Ved en Feller-semigruppe forstås en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ af positive operatorer på Banachrummet $C_0(X)$.

Den til en Feller-semigruppe hørende resolvent består af positive operatorer. Hvis omvendt $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ er en stærkt kontinuert kontraktionsresolvent af positive operatorer på $C_0(X)$, så er den tilhørende semigruppe en Feller-semigruppe, thi af formlen

$$P_t f = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 V_\lambda} f$$

følger at $P_t f \geq 0$ når $f \geq 0$.

Den Brown'ske semigruppe er en Feller-semigruppe.

Vi vil nu karakterisere de infinitesimale frembringere for Feller-semigrupper.

Sætning 4.6. Lad $A : \mathcal{D}_A \to C_0(X)$ være en operator defineret på et underrum $\mathcal{D}_A$ af $C_0(X)$. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at $(A, \mathcal{D}_A)$ er den infinitesimale frembringer for en Feller-semigruppe er at følgende betingelser er opfyldt:

(1) Underrummet $\mathcal{D}_A$ er invariant under kompleks konjugering i.e. $f\in\mathcal{D}_A \Rightarrow \bar f \in \mathcal{D}_A$ og $A\bar f = \overline{Af}$ for alle $f\in\mathcal{D}_A$.

(2) $\mathcal{D}_A$ er tæt i $C_0(X)$

(3) For enhver reel funktion $f\in\mathcal{D}_A$ og for hvert $x\in X$ gælder implikationen: $f(x) = \sup f \geq 0 \Rightarrow Af(x) \leq 0$

(4) For hvert $\lambda > 0$ er $(\lambda I - A)\mathcal{D}_A = C_0(X)$.

Bevis: Betingelserne er nødvendige: Lad $(P_t)_{t\geq 0}$ være en Feller-semigruppe med frembringer $(A, \mathcal{D}_A)$. Da $P_t\bar f = \overline{P_t f}$ for $f\in C_0(X)$ er (1) klar. Betingelserne (2) og (4) er opfyldt ifølge sætning 3.26. Hvis $f\in\mathcal{D}_A$ er reel og hvis $\sup f\geq 0$ vil $P_t f \leq \sup f$. Hvis desuden $f(x) = \sup f$ må $\frac{1}{t}(P_t f(x) - f(x)) \leq 0$ for alle $t>0$, hvoraf ses at $Af(x)\leq 0$.

Betingelserne er tilstrækkelige:

Det viser sig praktisk at svække betingelsen (3):

(3') For enhver reel funktion $f \in \mathcal{D}_A$ for hvilken $\sup f > 0$ findes et punkt $x \in X$ med egenskaben
$$f(x) = \sup f \quad , \; Af(x) \leq 0 .$$

Vi viser først et lemma

Lemma 4.7. Lad $(A, \mathcal{D}_A)$ være en operator i $C_0(X)$ opfyldende (1) og (3'). Så gælder
$$\|(\lambda I - A)f\| \geq \lambda \|f\| \qquad \text{for alle } f \in \mathcal{D}_A \, , \; \lambda > 0$$
og $(\lambda I - A)^{-1}$ er en reel, positiv og kontinuert operator for alle $\lambda > 0$.

Bevis: Antag at $f \in \mathcal{D}_A$ er reel. Så er også $g = (\lambda I - A)f$ reel ($\lambda > 0$). Vi vil nu vise uligheden
$$-\frac{1}{\lambda}\|g\| \leq \inf f \leq \sup f \leq \frac{1}{\lambda}\|g\| \qquad (*) .$$

Det er tilstrækkeligt at vise at $\sup f \leq \frac{1}{\lambda}\|g\|$, og denne ulighed er klar hvis $\sup f \leq 0$. Hvis derimod $\sup f > 0$ kan vi ifølge (3') finde $x \in X$ så $f(x) = \sup f$ og så $Af(x) \leq 0$. Heraf fås det ønskede:
$$\sup f \leq \frac{1}{\lambda}(\lambda f(x) - Af(x)) = \frac{1}{\lambda} g(x) \leq \frac{1}{\lambda}\|g\| .$$

Af uligheden (*) fremgår at $\|(\lambda I - A)f\| \geq \lambda\|f\|$ når $f \in \mathcal{D}_A$ er reel. Hvis $f \in \mathcal{D}_A$ er en kompleks funktion, går vi frem efter de klassiske metoder:

Der findes $x \in X$, $\theta \in \mathbb{R}$ så $\|f\| = |f(x)| = e^{i\theta} f(x) = Re(e^{i\theta} f)(x)$.
Da $Re(e^{i\theta} f) \in \mathcal{D}_A$ fås
$$\lambda\|f\| = \lambda \, Re(e^{i\theta} f)(x) \leq \lambda \, \| Re(e^{i\theta} f)\| \leq \|(\lambda I - A)[Re(e^{i\theta} f)]\| \leq$$
$$\|(\lambda I - A)[e^{i\theta} f]\| = \|(\lambda I - A)f\| .$$

Vi kan nu slutte at $\lambda I - A$ er injektiv for $\lambda > 0$. Den inverse operator $(\lambda I - A)^{-1}$ afbilder $(\lambda I - A)\mathcal{D}_A$ på $\mathcal{D}_A$, og den er kontinuet af norm $\leq \frac{1}{\lambda}$. Da $\lambda I - A$ er en reel operator er $(\lambda I - A)D_A$ invariant under kompleks konjugering og $(\lambda I - A)^{-1}$ er ligeledes reel. Antag nu at $g \in (\lambda I - A)D_A$ er ≤ 0. Så må også

$$f = (\lambda I - A)^{-1} g \leq 0,$$

thi ellers er $\sup f > 0$ og dermed findes $x \in X$ så $f(x) = \sup f$, $Af(x) \leq 0$, hvilket fører til en modstrid:

$$g(x) = \lambda f(x) - Af(x) > 0 . \quad \mathbb{I}.$$

Det næste lemma viser, at vi kan erstatte betingelsen (3) i sætning 4.6 med "det svagere" (3') ~~fra~~ og alligevel bevare en tilstrækkelig betingelse for at (A, D_A) er frembringer for en Feller-semigruppe.

<u>Lemma 4.8 Lad (A, D_A) være en operator i $C_0(X)$ opfyldende betingelserne (1), (2), (3') og (4). Så er (A, D_A) frembringer for en Feller-semigruppe.</u>

<u>Bevis</u>: Lemma 4.7 og betingelserne (2) og (4) sikrer at sætning 3.26 kan anvendes, og at resolventen $V_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda > 0$, er en positiv operator. Heraf følger, at den til (A, D_A) knyttede semigruppe er en Feller-semigruppe. $\mathbb{I}$.

<u>Bemærkninger</u>: 1) Hvis X er lokalkompakt uden at være kompakt vil $\sup f \geq 0$ for enhver funktion $f \in C_0(X, \mathbb{R})$. Derfor kan implikationen i (3) erstattes med følgende:

$$\text{"} f(x) = \sup f \Rightarrow Af(x) \leq 0 \text{"}.$$

Hvis X derimod er kompakt vil f.eks. $-1 \in C_0(X)$ og så må forudsætningen $f(x) = \sup f \geq 0$ opretholdes.

(2) Det havde måske været naturligere at formulere disse sætninger i det reelle Banachrum $C_0(X, \mathbb{R})$ hvorved (1) kan udelades. Når vi har fastholdt det komplekse skyldes det hensynet til helheden.

(3) I forbindelse med egenskab (3) bør man tænke på maksi-

men for differentiable funktioner: Hvis x er et maksimumpunkt for f er $f''(x) \leq 0$.

(4). Af 4.6 og 4.8 følger at (3) og (3') er ækvivalente under forudsætning af (1), (2) og (4). Et nøjagtigere udsagn findes i opgave 1 p.104.

Vi minder nu at en operator (A, D_A) i et Banachrum E kaldes <u>præafsluttet</u>, hvis afslutningen af operatorens graf igen er en graf. Den ved denne graf bestemte operator kaldes <u>afslutningen af A</u> og betegnes $(\tilde{A}, D_{\tilde{A}})$. Den er den mindste afsluttede fortsættelse af (A, D_A). Der gælder som bekendt, at A er præafsluttet, hvis og kun hvis følgende implikation er opfyldt:

$$\forall f_n \in D_A,\ \forall g \in E:\ \text{"} f_n \to 0,\ Af_n \to g \Rightarrow g = 0 \text{"}.$$

Definitionsmådet for $\tilde{A}$ er

$$D_{\tilde{A}} = \{f \in E \,/\, \exists f_n \in D_A : f_n \to f,\ \lim_{n\to\infty} Af_n \text{ eksisterer}\},$$

og for $f \in D_{\tilde{A}}$ sættes

$$\tilde{A}f = \lim_{n\to\infty} Af_n$$

for en sådan følge f_n. (Jvfr. Mat. 6, Oper. p.19 og opgave 11).

<u>Sætning 4.9. Lad (A, D_A) være en operator i $C_0(X)$ opfyldende (1), (2) og (3').</u>

<u>Så er (A, D_A) præafsluttet og afslutningen $(\tilde{A}, D_{\tilde{A}})$ opfylder også (1), (2) og (3').</u>

<u>Bevis:</u> a) (A, D_A) er præafsluttet.

Antag at $f_n \in D_A$, $f_n \to 0$, $Af_n \to g$. Vi skal vise at $g = 0$. Vi kan uden indskrænkning antage at f_n er reel, og dermed er g reel. Antag nu at $g \neq 0$. Vi kan da uden indskrænkning antage at <u>$\sup g = 1$</u>.

Da D_A er tæt i $C_0(X)$ findes en reel funktion $h \in D_A$ så

$$\sup h = 1, \quad \|g - h\| \leq \tfrac{1}{2}.$$

Lad nu $c > 0$ være et vilkårligt positivt tal. Ideen i beviset er nu at $h + cf_n$, der er nær ved h når n er stor, må antage sit supremum nær ved hvor h er lig med 1, og dermed $g \geq \frac{1}{2}$. I visse sådanne punkter må $Ah + cAf_n$ være ≤ 0. På den anden side er $Ah + cAf_n$ nær ved $Ah + cg$ som er $\geq \inf Ah + \frac{c}{2}$ i sådanne punkter. For c tilstrækkelig stor vil vi opnå modstrid.

Dette udføres således:

Da $h + cf_n \to h$ for $n \to \infty$ vil $\sup(h + cf_n) \to \sup h = 1$. Vi kan derfor uden indskrænkning tænke os at $\sup(h + cf_n) > 0$ for alle n, og dermed findes punkter $x_n \in X$ opfyldende

$$\sup(h + cf_n) = (h + cf_n)(x_n) \quad , \quad A(h + cf_n)(x_n) \leq 0 .$$

Da $cf_n(x_n) \to 0$ følger at $h(x_n) \to 1$, og af vurderingen

$$g(x_n) = h(x_n) + (g - h)(x_n) \geq h(x_n) - \tfrac{1}{2}$$

kan vi derfor slutte at

$$\liminf g(x_n) \geq \frac{1}{2} .$$

Af de velkendte uligheder mellem liminf og limsup for reelle følger kan vi slutte:

$$0 \geq \limsup A(h + cf_n)(x_n) = \limsup (Ah + cg)(x_n) + \lim c(Af_n - g)(x_n)$$
$$= \limsup (Ah + cg)(x_n) \geq \limsup Ah(x_n) + c \liminf g(x_n) \geq$$
$$\inf Ah + \frac{c}{2}$$

eller $\quad c \leq -2 \inf Ah .$

Herved er vi nået til en modstrid, idet vi kan vælge $c > -2 \inf Ah$. (Da $\sup h = 1$ er $\inf Ah \leq 0$).

(6) Afslutningen $(\tilde{A}, D_{\tilde{A}})$ opfylder klart (1) og (2). Lad nu f være en reel funktion i $D_{\tilde{A}}$ så $\sup f > 0$. Vi skal finde $x \in X$ med egenskaben

$$f(x) = \sup f \quad , \quad \tilde{A}f(x) \leq 0 .$$

Vi kan uden indskrænkning antage at $\sup f = 1$.

Vi kan finde en følge af reelle funktioner $f_n \in D_A$

så $f_n \to f$, $Af_n \to \tilde{A}f$. Da $\sup f_n \to \sup f = 1$ kan vi (ved at erstatte f_n med $(\sup f_n)^{-1} f_n$) antage at $\sup f_n = \sup f = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Desuden kan vi antage at $\|f - f_n\| \le \frac{1}{2}$ for alle n.

Ifølge forudsætningerne findes $x_n \in X$ så

$$f_n(x_n) = \sup f_n = 1 \quad , \quad Af_n(x_n) \le 0 .$$

Heraf fås

$$|f(x_n) - 1| = |f(x_n) - f_n(x_n)| \le \|f - f_n\| \le \frac{1}{2} ,$$

og så ligger alle x_n i den kompakte mængde $\{f \ge \frac{1}{2}\}$. Lad x være et fortætningspunkt for følgen x_n, (i.e. et punkt x, så vi til enhver omegn U af x og ethvert $N \in \mathbb{N}$ kan finde $n \ge N$ så $x_n \in U$).

Da $f_n \to f$ og da $f_n(x_n) = 1$, er det let at se at $f(x) = 1$, og da $Af_n \to \tilde{A}f$, $Af_n(x_n) \le 0$, er det let at se at $\tilde{A}f(x) \le 0$, så punktet x har de ønskede egenskaber. $\square$.

<u>Bemærkning:</u> Sætning 4.9 er så vidt vides ny i denne generelle formulering. Hvis X er et kompakt metrisk rum, findes sætningen bevist i Sato og Ueno: Multidimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ. t. 4, 1965 p. 533–537. Deres bevis kan ikke generaliseres. Nærværende bevis er inspireret af Lumer og Phillips: Dissipative operators in Banach space. Pac. J. Math. 11, 1961 p. 679–698.

Lad nu $(P_t)_{t \ge 0}$ være en Feller-semigruppe på $C_0(X)$ og lad $(N, \mathcal{D}_N)$ være potentialoperatoren, $(V, \mathcal{D}_V)$ den o'te resolventoperator. Ifølge opgave 5 p. 79 vil V være en udvidelse af N. Ved Feller-semigrupper gælder en partiel omvending:

<u>$f \in \mathcal{D}_V$, $f \ge 0 \Rightarrow f \in \mathcal{D}_N$ (og $Nf = Vf$)</u>

Vi ved nemlig at $V_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x)\,dt$ konvergerer mod $Vf(x)$ når $\lambda \to 0$. Hvis $\lambda \downarrow 0$ monotont, vil $e^{-\lambda t} P_t f(x) \uparrow P_t f(x)$ og ifølge sætningen om monoton grænseovergang ved integraler fås derfor

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\,dt \qquad \text{for alle } x \in X. \tag{4.4}$$

Desuden vil

$$\int_0^s P_t f(x)\,dt \;\uparrow\; \int_0^\infty P_t f(x)\,dt \qquad \text{for } s \uparrow \infty,\ x \in X,$$

så derfor vil $\int_0^s P_t f\,dt$ konvergere punktvis voksende mod $Vf \in C_0(X)$. Ifølge Dini's sætning er konvergensen ligelig, hvilket betyder at $f \in D_N$, og at $Nf = Vf$.

Af dette resultat følger at

"$\mathcal{K} \subseteq D_N \iff \mathcal{K} \subseteq D_V$"

og hvis disse inklusioner er opfyldt vil $Nf = Vf$ for alle $f \in \mathcal{K}$.

Definition: En Feller-semigruppe kaldes integrabel hvis $\mathcal{K} \subseteq D_N$ ($\Leftrightarrow \mathcal{K} \subseteq D_V$) og kernen $f \mapsto Nf = Vf$, $f \in \mathcal{K}$ kaldes potentialkernen for semigruppen. Den er restriktionen til $\mathcal{K}$ af såvel potentialoperatoren som den 0'te resolvent.

Den Brown'ske semigruppe er integrabel præcis for $n \geq 3$.

Sætning 4.10. Om en integrabel Fellersemigruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ gælder

a) Billedrummet $N(\mathcal{K})$ er tæt i $C_0(X)$.

b) $\lim_{t \to \infty} P_t f = 0$ for alle $f \in C_0(X)$

c) $D_N = D_V = A(D_A)$, $N = V = -A^{-1}$.

Bevis: For at vise a) er det nok at vise:

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall f \in \mathcal{K}_+\ \exists g \in \mathcal{K} : \|f - Ng\| \leq \varepsilon.$$

Af sætning 3.10 b) følger, at

$$\frac{1}{t}\int_0^t P_s f\,ds = \frac{1}{t}(Nf - NP_t f) \qquad \text{for alle } f \in \mathcal{K}_+,\ t > 0.$$

Til $\varepsilon > 0$ findes $t_0 > 0$ så $\|f - \frac{1}{t}\int_0^t P_s f\,ds\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ for $t \leq t_0$.

Da $NP_{t_0}f \in C_0(X)_+$, kan vi ifølge Dini's sætning 2.2 finde $\varphi \in \mathcal{K}_+$, $\varphi \leq P_{t_0}f$, så

$$\|NP_{t_0}f - N\varphi\| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon t_0 .$$

Heraf fås

$$\|f - \tfrac{1}{t_0}Nf + \tfrac{1}{t_0}N\varphi\| \leq \|f - \tfrac{1}{t_0}(Nf - NP_{t_0}f)\| + \|\tfrac{1}{t_0}(N\varphi - NP_{t_0}f)\| \leq \varepsilon,$$

og dermed opfylder $g = \frac{1}{t_0}(f-\varphi) \in \mathcal{K}$ uligheden

$$\|f - Ng\| \leq \varepsilon .$$

b) Af a) følger at billedrummet $N(D_N)$ er tæt i $C_0(X)$ og ifølge sætning 3.10 c) er underrummet

$$\{f \in C_0(X) \mid \lim_{t\to\infty} P_t f = 0\}$$

derfor tæt i $C_0(X)$, men man ser let, at det også er afsluttet, og dermed er påstand b) vist.

c) følger af sætning 3.11 og opgave 5 p. 79.

$\square$

Definition: Ved en Hunt-kerne V forstås en kontinuert kerne der går mod 0 i ∞ og som har egenskaberne
(a) $V(\mathcal{K})$ er tæt i $C_0(X)$.
(b) V opfylder det fuldstændige maksimumprincip.

Den amerikanske matematiker G.A. Hunt har givet en fundamental karakterisering af sådanne kerner i 1957 i forbindelse med nogle banebrydende arbejder om stokastiske processer og potentialteori:

Sætning 4.11 (Hunt). Lad V være en kontinuert kerne. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at V er en Hunt-kerne er, at V er potentialkerne for en integrabel Fellersemigruppe, altså at der findes en integrabel Fellersemigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ på $C_0(X)$ så

$$Vf = \lim_{s\to\infty}\int_0^s P_t f\,dt = \lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f \quad \text{for alle } f\in\mathcal{K}.$$

En sådan semigruppe er entydigt bestemt ved V.

Hunt beviste sætningen under forudsætning af at X er σ-kompakt ved hjælpemidler fra teorien for stokastiske processer. Senere har Lion og Yosida givet beviser, der udelukkende bygger på funktionalanalysen og under forudsætning af at X er σ-kompakt. Vi skal her præsentere et nyt bevis, der dels er simplere, dels fungerer for et vilkårligt lokalkompakt rum.

Sætningens betydning ligger i, at den etablerer en forbindelse mellem det fuldstændige maksimumprincip og Fellersemigrupperne, som igen er i nøje forbindelse med stokastiske processer, idet man til hver Fellersemigruppe kan konstruere en "pæn" stokastisk proces.

Bevis for sætning 4.11:

Betingelserne er tilstrækkelige: Hvis V er potentialkerne for en integrabel Fellersemigruppe, følger det umiddelbart af sætningerne 4.4 og 4.10, at V er en Hunt-kerne. Et andet bevis for at V opfylder det fuldstændige maksimumprincip findes i opgave 6 p. 105.

Inden vi viser at betingelserne er nødvendige, begynder vi med at drage nogle konsekvenser af definitionen på en Huntkerne. Det afgørende skridt i beviset er lemma 4.13.

Lemma 4.12. Lad V være en Hunt-kerne. Så opfylder V princippet om det positive maksimum:

For alle $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{R})$ og for alle $x \in X$ gælder implikationen

$$\text{"}\sup Vf = Vf(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0\text{"}.$$

Bevis: Lad $x \in X$ opfylde $Vf(x) = \sup Vf \geq 0$. Vi vil vise at $f(x) \geq 0$. Lad K være en vilkårlig kompakt mængde af x og vælg dernæst $g \in \mathcal{K}$ så

$$Vg(x) \geq 1 \quad , \quad Vg(y) \leq \tfrac{1}{2} \quad \text{for } y \notin K.$$

Dette er muligt fordi $V(\mathcal{K})$ er tæt i $C_0(X)$.

For vilkårligt $\varepsilon > 0$ vil

$$\sup V(f+\varepsilon g) \geq Vf(x) + \varepsilon Vg(x) \geq \sup Vf + \varepsilon > 0 \; ,$$

så ifølge lemma 4.2 findes et punkt $x_\varepsilon \in X$ (det afhænger af ε) med egenskaberne

$$\sup V(f+\varepsilon g) = V(f+\varepsilon g)(x) \quad , \quad (f+\varepsilon g)(x_\varepsilon) \geq 0 .$$

For $y \notin K$ gælder imidlertid

$$V(f+\varepsilon g)(y) \leq \sup Vf + \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad ,$$

så derfor må $x_\varepsilon \in K$, og følgelig har vi

$$\sup_K (f+\varepsilon g) \geq 0 .$$

Da $\varepsilon > 0$ var vilkårlig, kan vi slutte at $\sup_K f \geq 0$, og da K var en vilkårlig mængde af x, må $f(x) \geq 0$. $\square$.

<u>Lemma 4.13. Lad V være en Hunt-kerne. Så er $(I+\lambda V)(\mathcal{K})$ tæt i $C_0(X)$ for alle $\lambda > 0$.</u> [Se proposition 3 i appendix].

<u>Bevis:</u> Da $V(\mathcal{K})$ er tæt i $C_0(X)$ er det nok at vise:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall g \in \mathcal{K}_+ \ \exists \varphi \in \mathcal{K}_+ \text{ så } \| Vg - (\lambda I + V)\varphi \| \leq \varepsilon .$$

Lad nu $\varepsilon > 0$ og $g \in \mathcal{K}_+$ være givet.

Da $Vg \in C_0(X)_+$ findes en kompakt mængde K så $Vg \leq \varepsilon$ udenfor K. Vi vælger nu $a \in \mathcal{K}_+$ opfyldende

$$0 \leq a \leq 1 \quad , \quad a(x) = 1 \text{ for alle } x \in K \cup \operatorname{supp}(g),$$

og indfører en ny kontinuert kerne på X:

$$Nf = V(af) \quad , f \in \mathcal{K} .$$

Kernen N går mod 0 i ∞; den er begrænset, idet

$$\|Nf\| \leq \|f\| \, \|Va\| \, ,$$

og det er simpelt at gå efter, at N opfylder det fuldstændige maksimumprincip.

Ifølge sætning 4.5 findes en kontraktionsresolvent $(N_\lambda)_{\lambda > 0}$ af positive begrænsede operatorer på $C_0(X)$ så

$$N = N_\lambda + \lambda N_\lambda N \quad , \quad N N_\lambda = N_\lambda N \quad , \quad \lambda > 0 .$$

Vi sætter nu

$$h = N_\lambda g = Ng - \lambda N_\lambda N g \leq Ng \quad , \text{ så } h \in C_0(X)_+ .$$

Der gælder

$$Ng = N_\lambda g + \lambda N N_\lambda g = \lambda N h + h = \lambda N h + a h + (1-a) h ,$$

hvoraf $\qquad 0 \le Ng - (\lambda Nh + ah) = (1-a)h$,
eller
$$0 \le V(ag) - (I+\lambda V)(ah) = (1-a)N_\lambda g \le (1-a)Ng = (1-a)V(ag).$$
Da $ag = g$ fås
$$0 \le Vg - (I+\lambda V)(ah) \le (1-a)Vg \le \varepsilon ,$$
eller
$$\| Vg - (I+\lambda V)(ah) \| \le \varepsilon ,$$
hvilket var det ønskede med $\varphi = ah \in \mathcal{K}_+$. $\quad \|$

Bevis for at en Hunt-kerne V er potentialkerne for en integrabel Feller-semigruppe.

Lad V være en Hunt-kerne. Af lemma 4.12 følger at V er injektiv, thi hvis $Vf = 0$ for reelt $f \in \mathcal{K}$, må $f \ge 0$, og ved at erstatte f med $-f$ fås analogt $f \le 0$, altså $f = 0$. Hvis $Vf = 0$ for kompleks $f \in \mathcal{K}$, kan vi slutte at
$$V(\mathrm{Re} f) = V(\mathrm{Im} f) = 0 ,$$
og deraf ses at $f = 0$.

Vi indfører nu operatoren $(A, \mathcal{D}_A)$ ved
$$\mathcal{D}_A = V(\mathcal{K}) \; , \quad A = -V^{-1} ,$$
og den opfylder klart betingelserne (1) og (2) i lemma 4.8. Betingelsen (3') følger umiddelbart af lemma 4.12, og af 4.13 følger at
$$(\lambda I - A)\mathcal{D}_A = (\lambda I + V^{-1}) V(\mathcal{K}) = (I+\lambda V)(\mathcal{K}) \quad \text{er tæt i } C_0(X).$$
Af lemma 4.9 kan vi slutte at $(A, \mathcal{D}_A)$ er præafsluttet, og at afslutningen $(\tilde{A}, \mathcal{D}_{\tilde{A}})$ opfylder betingelserne (1), (2) og (3'). Af lemma 4.7 følger at $(\lambda I - \tilde{A})^{-1}$ er kontinuert. Den er desuden afsluttet da $\tilde{A}$ er det, og da
$$(\lambda I - \tilde{A})\mathcal{D}_{\tilde{A}} \supseteq (I+\lambda V)(\mathcal{K}) \quad \text{er tæt} ,$$
er $(\lambda I - \tilde{A})^{-1}$ tæt defineret, afsluttet og kontinuert, men så er den overalt defineret (Mat. 6, Oper. 22), altså
$$(\lambda I - \tilde{A})\mathcal{D}_{\tilde{A}} = C_0(X) .$$
Af lemma 4.8 følger nu, at der findes en Feller-

semigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ på $C_0(X)$ med $(\tilde{A}, \mathcal{D}_{\tilde{A}})$ som infinitesimal frembringer. Vi betegner resolventen med $(V_\lambda)_{\lambda>0}$. Der gælder da

$$V_\lambda(\lambda I - \tilde{A})g = g \qquad \text{for alle } g \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$$

eller

$$(I - \lambda V_\lambda)g = -V_\lambda \tilde{A} g \qquad \text{for alle } g \in \mathcal{D}_{\tilde{A}},$$

specielt

$$(I - \lambda V_\lambda)Vf = V_\lambda f \qquad \text{for alle } f \in \mathcal{K} \qquad (4.5).$$

Heraf ses at $Vf \geq V_\lambda f$ for alle $f \in \mathcal{K}_+$, altså

$$0 \leq \lambda V_\lambda f \leq \lambda Vf \quad , \ f \in \mathcal{K}_+ ,$$

men så er det klart, at $\lambda V_\lambda f \to 0$ for $\lambda \to 0$ for alle $f \in \mathcal{K}_+$. Dermed vil det afsluttede underrum $\{g \in C_0(X) \mid \lim_{\mu \to 0} \mu V_\mu g = 0\}$ (jvf. p. 78) indeholde det tætte underrum $\mathcal{K}(X) = \operatorname{span} \mathcal{K}_+$, men så gælder

$$\lim_{\mu \to 0} \mu V_\mu g = 0 \qquad \text{for alle } g \in C_0(X).$$

Af (4.5) følger nu at

$$\lim_{\lambda \to 0} V_\lambda f = Vf \qquad \text{for alle } f \in \mathcal{K}.$$

Dette viser at $(P_t)_{t\geq 0}$ er en integrabel Fellersemigruppe, og at V er potentialkerne for den.

<u>Bevis for at Fellersemigruppen er entydigt bestemt ved ved V:</u>

Lad $(P_t')_{t\geq 0}$ og $(P_t'')_{t\geq 0}$ være to integrable Fellersemigrupper med resolventer $(V_\lambda')_{\lambda>0}$ og $(V_\lambda'')_{\lambda>0}$ og antag at de begge har V til potentialkerne. Der gælder da

$$Vf = V_\lambda' f + \lambda V_\lambda' Vf = V_\lambda'' f + \lambda V_\lambda'' Vf \qquad \text{for } f \in \mathcal{K}, \lambda > 0$$

hvoraf ses at V_λ' og V_λ'' stemmer overens på det tætte underrum $(I + \lambda V)(\mathcal{K})$. Heraf følger at $V_\lambda' = V_\lambda''$ for alle $\lambda > 0$, og dette medfører at $P_t' = P_t''$ for $t \geq 0$, jvf. sætning 3.25

II

Opgaver:

1) Lad $(A, \mathcal{D}_A)$ være en operator i $C_0(X)$ opfyldende (1) og (2)
Vis at $(3') \Leftrightarrow (3)$ (Tallene henviser til sætning 4.6).
Vink: Kig på lemma 4.12

2) (Watanabe: J. Math. Soc. Japan vol. 20 april 1968 p. 420)
Lad $V : \mathcal{K} \to C_0$ være en kontinuert kerne der går mod 0 i ∞ og som opfylder det fuldstændige maksimumprincip.
Vis at V er en præafsluttet operator i C_0.

3) Lad $\mathcal{D}$ være et underrum i $C_0(X)$, invariant under kompleks konjugering og lad $A : \mathcal{D} \to C_0(X)$ være en lineær afbildning. Vis at følgende to udsagn er ensbetydende:
(a) Der gælder $A\bar{f} = \overline{Af}$ for $f \in \mathcal{D}$, og for enhver reel funktion $f \in \mathcal{D}$ og for hvert $x \in X$ gælder implikationen

$$\sup f = f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Af(x) \leq 0$$

(b) For ethvert $f \in \mathcal{D}$ og for ethvert $x \in X$ gælder implikationen

$$\sup(\operatorname{Re} f) = \operatorname{Re} f(x) \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re} Af(x) \leq 0.$$

4) Lad $(A, \mathcal{D}_A)$ være en operator i $C_0(X)$ hvis domæne er invariant under kompleks konjugering.
Vis at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at $(A, \mathcal{D}_A)$ er præafsluttet og at afslutningen $(\tilde{A}, \mathcal{D}_{\tilde{A}})$ er den infinitesimale frembringer for en Feller semigruppe er, at følgende betingelser er opfyldt:
(a) $A\bar{f} = \overline{Af}$ for $f \in \mathcal{D}_A$
(b) $\mathcal{D}_A$ er tæt i $C_0(X)$.
(c) For enhver reel funktion $f \in \mathcal{D}_A$ og for ethvert $x \in X$ gælder implikationen

$$f(x) = \sup f \geq 0 \Rightarrow Af(x) \leq 0$$

(d) For alle $\lambda > 0$ er $(\lambda I - A)\mathcal{D}_A$ tæt i $C_0(X)$.

5) Vis at en Hunt-kerne er strengt positiv.

6) Lad V være potentialkerne for en integrabel Fellersemigruppe. Vis at

$$(I+\lambda V)f = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda V_\lambda)^n f \qquad \text{for } f \in \mathcal{K}\,, \; \lambda > 0 .$$

Heraf ses at $I+\lambda V$ er en elementær kerne for alle $\lambda > 0$. Uddrag heraf at såvel $I+\lambda V$ som V opfylder det fuldstændige maksimumprincip.

<u>Vink</u>: Af 3.21 følger at

$$V_\lambda^{\,n} f = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} V_\lambda f = \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} P_t f \, dt$$

for alle $f \in C_0(X)$.

Kapitel 5 Energi

§1. Semigrupper af operatorer på Hilbertrum.

I det følgende betegner H et komplekst Hilbertrum, og vi skal specialisere semigruppeteorien hertil.

Lad $(B, \mathcal{D}_B)$ være en operator i H. Vi minder om at den adjungerede operator $(B^*, \mathcal{D}_{B^*})$ kan defineres præcis hvis $\mathcal{D}_B$ er tæt i H, og at den er givet ved

$$\mathcal{D}_{B^*} = \{ h \in H \mid \exists g \in H : (Bf, h) = (f, g) \text{ for alle } f \in \mathcal{D}_B \}.$$

For $h \in \mathcal{D}_{B^*}$ er $g \in H$ entydigt fastlagt ved denne egenskab, fordi $\mathcal{D}_B$ er tæt, og vi sætter

$$B^* h = g .$$

<u>Lemma 5.1 Lad $(B, \mathcal{D}_B)$ være en tæt defineret operator i H med adjungeret operator $(B^*, \mathcal{D}_{B^*})$. Så gælder</u>

$$\underline{\ker B^* = B(\mathcal{D}_B)^\perp} .$$

<u>Bevis</u>: For $h \in \ker B^*$ gælder $B^* h = 0$, altså

$$(Bf, h) = (f, B^* h) = 0 \quad \text{for alle } f \in \mathcal{D}_B ,$$

og dette viser at $h \in B(\mathcal{D}_B)^\perp$.

Hvis omvendt $h \in B(\mathcal{D}_B)^\perp$ gælder

$$(Bf, h) = 0 = (f, 0) \quad \text{for alle } f \in \mathcal{D}_B .$$

Dette viser at $h \in \mathcal{D}_{B^*}$ og at $B^* h = 0$. $\quad$ II

Semigrupper af <u>hermite'ske</u> operatorer $(P_t)_{t \geq 0}$ på H har automatisk den egenskab at <u>operatorerne</u> P_t <u>er positive</u>, thi for $f \in H$ gælder

$$(P_t f, f) = (P_{\frac{t}{2}} P_{\frac{t}{2}} f, f) = (P_{\frac{t}{2}} f, P_{\frac{t}{2}}^* f) = (P_{\frac{t}{2}} f, P_{\frac{t}{2}} f) = \| P_{\frac{t}{2}} f \|^2 \geq 0 .$$

Hvis $(P_t)_{t\geq 0}$ er en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe af hermite'ske operatorer på H, er det let at se at resolventoperatorerne V_λ, $\lambda>0$ er hermite'ske. Hvis omvendt $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ er en stærkt kontinuert kontraktionsresolvent af hermite'ske operatorer, er det også let at vise, at den tilhørende semigruppe består af hermite'ske operatorer.

De infinitesimale frembringere for sådanne semigrupper kan karakteriseres simpelt og elegant:

<u>Sætning 5.2.</u> <u>En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at en operator $(A, \mathcal{D}_A)$ i H er den infinitesimale frembringer for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe af hermite'ske operatorer $(P_t)_{t\geq 0}$ er at</u>

(1) $(A, \mathcal{D}_A) = (A^*, \mathcal{D}_{A^*})$ <u>(A er selvadjungeret).</u>

(2) $(Af, f) \leq 0$ for alle $f \in \mathcal{D}_A$ <u>(A er negativ).</u>

(En operator opfyldende (2) kaldes ofte dissipativ).

<u>Bevis</u>: <u>Betingelserne er nødvendige</u>:

Lad $(A, \mathcal{D}_A)$ være den inf. frembringer for semigruppen $(P_t)_{t\geq 0}$ med de angivne egenskaber.

For $f, h \in \mathcal{D}_A$ gælder

$$(Af, h) = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(P_t f - f, h) = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(f, P_t h - h) = (f, Ah).$$

Dette viser at $h \in \mathcal{D}_{A^*}$ og at $A^* h = Ah$, altså

$$(A, \mathcal{D}_A) \subseteq (A^*, \mathcal{D}_{A^*}).$$

For at se at der gælder lighedstegn, udnyttes at resolventoperatoren V_λ afbilder H bijektivt på $\mathcal{D}_A$ og at $V_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$. For vilkårligt $h \in \mathcal{D}_{A^*}$, $f \in H$ fås da

$$(f, h) = ((\lambda I - A) V_\lambda f, h) = (V_\lambda f, (\lambda I - A^*) h) = (f, V_\lambda(\lambda I - A^*) h),$$

altså $h = V_\lambda(\lambda I - A^*) h$, og dermed er $h \in \mathcal{D}_A$.

For at se at $(Af,f) \le 0$ for $f \in \mathcal{D}_A$, bemærkes at

$$\frac{1}{t}(P_t f - f, f) = \frac{1}{t}\left((P_t f, f) - \|f\|^2\right) \le \frac{1}{t}\left(\|P_t\|\|f\|^2 - \|f\|^2\right) \le 0 \quad , \; t > 0.$$

<u>Betingelserne er tilstrækkelige:</u>

Vi vil eftervise betingelserne i sætning 3.26.

I forudsætning (1) ligger at $(A^*, \mathcal{D}_{A^*})$ kan defineres, og derfor må $\mathcal{D}_A$ være tæt i H.

For $f \in \mathcal{D}_A$, $\lambda > 0$ følger af (2) at

$$\lambda \|f\|^2 \le \left((\lambda I - A)f, f\right) \le \|(\lambda I - A)f\| \, \|f\|$$

altså
$$\|(\lambda I - A)f\| \ge \lambda \|f\| .$$

Heraf følger at $(\lambda I - A)$ er injektiv, og at $V_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ er en kontinuert operator af norm $\le \frac{1}{\lambda}$. Definitionsområdet for V_λ er $(\lambda I - A)\mathcal{D}_A$, og vi skal indse at det er hele H. Da en selvadjungeret operator er afsluttet (Mat. 6), er $(\lambda I - A)$ og dermed også V_λ en afsluttet operator. Kontinuiteten af V_λ sikrer nu at $(\lambda I - A)\mathcal{D}_A$ er afsluttet. Af lemma 5.1 følger på den anden side at $(\lambda I - A)\mathcal{D}_A$ er tæt. $\|$

<u>Bemærkning.</u> Man kan mere generelt vise følgende: Hvis $(P_t)_{t \ge 0}$ er en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på H med frembringer $(A, \mathcal{D}_A)$, vil operatorerne $(P_t^*)_{t \ge 0}$ igen udgøre en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe, og dens frembringer er $(A^*, \mathcal{D}_{A^*})$. Se f.eks. Yosida's bog om funktionalanalyse.

<u>§2. Kvadratiske former og energi.</u>

Lad V være et komplekst vektorrum.

Ved en <u>sesquilinear form</u> (eller blot en <u>form</u>) Q

på V forstås en afbildning
$$Q : V \times V \to \mathbb{C}$$
som er lineær i første variabel og konjugeret lineær i anden variabel.

Vi siger at formen er <u>hermite'sk</u> hvis
$$Q(f,g) = \overline{Q(g,f)} \qquad \text{for alle } f,g \in V.$$
I dette tilfælde er $Q(f) := Q(f,f)$ reel, så det har mening at kalde en sådan form <u>positiv</u> hvis
$$Q(f) \geq 0 \qquad \text{for alle } f \in V.$$

For en positiv hermite'sk form Q gælder Cauchy-Schwarz' ulighed
$$|Q(f,g)|^2 \leq Q(f)\,Q(g)$$
og $Q^{1/2}$ er en seminorm på V.

En positiv hermite'sk form Q på V kaldes <u>positiv definit</u> hvis $\quad Q(f) = 0 \iff f = 0$.

Sådanne former er også kendt under navnet <u>indre produkter</u>.

Lad nu V være et <u>tæt</u> underrum af H og lad Q være en positiv hermite'sk form (en p.h.f.) på V. Vi skriver den under et (Q,V). Vi udstyrer nu V med det indre produkt
$$((f,g)) = (f,g) + Q(f,g) \tag{5.1}$$
og den tilhørende norm $|||f|||^2 = ((f,f))$ opfylder altså
$$|||f|||^2 = \|f\|^2 + Q(f) \tag{5.2}$$
Formen (Q,V) kaldes <u>afsluttet</u> (Q er en a.p.h.f.) hvis V forsynet med dette indre produkt er fuldstændigt, altså hvis $(V, ((\,,\,)))$ er et Hilbertrum. (Det er desuden krævet at V er tæt i H).

(At (Q,V) er afsluttet ses let at være ensbetydende med implikationen
$$\left.\begin{array}{l} f_n \in V,\ f_n \to f \text{ i } H \\ Q(f_n - f_m) \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f \in V,\ Q(f - f_n) \to 0$$

hvilket noir analogien med begrebet afsluttet operator).

I tilfælde af en a.p.h.f. (Q, V) er V's topologi finere end delrumstopologien af H på V:

$$\|f\| \leq |||f||| \quad \text{for alle } f \in V .$$

<u>Definition</u>: Lad (Q, V) være en a.p.h.f. defineret på et tæt underrum V af H. Ved <u>Q's frembringer</u> forstås operatoren $(A, \mathcal{D}_A)$ i H defineret ved

$$\mathcal{D}_A = \{ f \in V \mid \exists f^* \in H \text{ så } Q(f,g) = -(f^*, g) \text{ for alle } g \in V \}$$

$$Af = f^*$$

For $f \in \mathcal{D}_A$ er f^* entydigt bestemt, fordi V er tæt i H. Sagt på anden måde vil $f \in V$ tilhøre $\mathcal{D}_A$ præcis hvis den konjugeret lineære afbildning $g \mapsto Q(f,g)$ er kontinuert, når V udstyres med H's topologi. (Dette bygger på <u>Riesz' sætning</u>, at de kontinuerte linearformer på et Hilbertrum alle er givet ved $f \mapsto (f,g)$ for $g \in H$).

Der gælder

$$Q(f,g) = -(Af, g) \quad \text{for } f \in \mathcal{D}_A, \ g \in V .$$

<u>Sætning 5.3.</u> Lad <u>(Q, V) være en a.p.h.f. på et tæt underrum V af H. Så er Q's frembringer $(A, \mathcal{D}_A)$ en selvadjungeret negativ operator hvis definitionsområde $\mathcal{D}_A$ er tæt i Hilbertrummet $(V, ((\cdot,\cdot)))$.</u>

<u>Omvendt findes der til enhver selvadjungeret og negativ operator $(A, \mathcal{D}_A)$ præcis en a.p.h.f. (Q, V) på et tæt underrum V af H, der har $(A, \mathcal{D}_A)$ som frembringer.</u>

<u>Bevis.</u> 1) Underrummet V er et Hilbertrum med det indre produkt

(5.1). For $h \in H$, $v \in V$ gælder
$$|(v,h)| \leq \|v\| \, \|h\| \leq |||v||| \, \|h\| ,$$
hvilket viser at $v \mapsto (v,h)$ er en kontinuert linearform på Hilbertrummet $(V, ((\,,)))$. Ifølge den lige nævnte Riesz' sætning findes en vektor $Bh \in V$ så
$$(v,h) = ((v, Bh)) \qquad \text{for alle } v \in V ,$$
og der gælder $|||Bh||| \leq \|h\|$.

Der defineres hermed en kontinuert lineær afbildning $B : H \to V$ fra Hilbertrummet H til Hilbertrummet V.

Billedrummet $B(H)$ er tæt i V, og dermed i H, thi hvis $v \in V$, og hvis
$$((v, Bh)) = (v,h) = 0 \qquad \text{for alle } h \in H ,$$
kan vi slutte at $v = 0$.

Operatoren B er injektiv, thi hvis $Bh = 0$ må
$$((v, Bh)) = (v,h) = 0 \qquad \text{for alle } v \in V ,$$
og heraf sluttes at $h = 0$, fordi V er tæt i H.

Vi påstår nu at frembringeren for (Q, V) er
$$(A, \mathcal{D}_A) = (I - B^{-1}, B(H)) .$$

For det første er $B(H) \subseteq \mathcal{D}_A$, thi for $h \in H$, $v \in V$ gælder
$$(v,h) = ((v, Bh)) = (v, Bh) + Q(v, Bh)$$
altså
$$Q(Bh, v) = (h - Bh, v)$$
og dette viser at $Bh \in \mathcal{D}_A$ og at $A(Bh) = Bh - h$

På den anden side gælder $\mathcal{D}_A \subseteq B(H)$, thi for $f \in \mathcal{D}_A$ sætter vi $h = f - Af$ og får derved for $v \in V$
$$Q(f,v) = -(Af, v) = (h,v) - (f,v)$$
eller
$$(v,h) = ((v,f)) \qquad \text{for alle } v \in V ,$$
hvilket viser at $f = Bh$.

Af denne fremstilling følger, at A er tæt defineret, og dermed er $(A^*, \mathcal{D}_{A^*})$ veldefineret. For $f, g \in \mathcal{D}_A$ gælder klart

$$(Af, g) = -Q(f,g) = -\overline{Q(g,f)} = \overline{(Ag, f)} = (f, Ag),$$

altså $(A, \mathcal{D}_A) \subseteq (A^*, \mathcal{D}_{A^*})$.

Vi skal nu blot indse at $\mathcal{D}_{A^*} \subseteq \mathcal{D}_A$. For $g \in \mathcal{D}_{A^*}$, $f \in \mathcal{D}_A$ gælder

$$(f - Af, g) = (f, g - A^*g) = ((f, B(g - A^*g)))$$
$$= (f, B(g - A^*g)) - (Af, B(g - A^*g)),$$

og da $(I - A)\mathcal{D}_A = H$ fås heraf at

$$g = B(g - A^*g)$$

altså $g \in \mathcal{D}_A$. Endelig er $-(Af, f) = Q(f) \geq 0$ for $f \in \mathcal{D}_A$.

2) Lad (Q_i, V_i), $i = 1,2$ være to a.p.h.f. med $(A, \mathcal{D}_A)$ som fælles frembringer. Så vil

$$Q_1(f,g) = Q_2(f,g) \qquad \text{for } f, g \in \mathcal{D}_A,$$

og derfor stemmer de indre produkter

$$((f,g))_i = (f,g) + Q_i(f,g)$$

i de to Hilbertrum $(V_i, ((\,,\,))_i)$ overens på det tætte underrum $\mathcal{D}_A$. (Vi har vist under 1) at $\mathcal{D}_A$ er tæt i $(V, ((\,,\,)))$). Heraf følger at $V_1 = V_2$ og at $((f,g))_1 = ((f,g))_2$, specielt $Q_1(f,g) = Q_2(f,g)$ for alle $f, g \in V_1 = V_2$.

3) Lad nu $(A, \mathcal{D}_A)$ være en selvadjungeret negativ operator på H. For at indse at $(A, \mathcal{D}_A)$ er frembringer for en a.p.h.f. udstyres $\mathcal{D}_A$ med det indre produkt

$$((f,g)) = -(Af, g) + (f, g)$$

og den tilhørende norm

$$|||f|||^2 = ((f,f)) = -(Af, f) + \|f\|^2 .$$

Lad $(\hat{\mathcal{D}}_A, ((\,,\,)))$ være en abstrakt fuldstændiggørelse af præhilbertrummet $(\hat{\mathcal{D}}_A, ((\,,\,)))$.

Til $\xi \in \hat{\mathcal{D}}_A$ findes en følge $f_n \in \mathcal{D}_A$ så $\lim f_n = \xi$ i $\hat{\mathcal{D}}_A$. En sådan følge er en Cauchy-følge i $(\hat{\mathcal{D}}_A, ((\,,\,)))$ og derfor også en Cauchy-følge i H. Dermed findes $f \in H$ så

$$\lim f_n = f \quad \text{i } H.$$

En anden følge $g_n \in \mathcal{D}_A$ så $\lim g_n = \xi$ i $\hat{\mathcal{D}}_A$ er på samme måde konvergent i H med en grænseværdi g. Da $f_n - g_n \to 0$ i $\hat{\mathcal{D}}_A$, og derfor også i H, følger at $f = g$.

Hermed defineres en afbildning

$$\Theta : \hat{\mathcal{D}}_A \to H$$

givet ved

$$\Theta(\xi) = \lim f_n \ (\text{i } H), \quad \text{hvor } f_n \in \mathcal{D}_A \text{ så } \lim f_n = \xi \text{ i } \hat{\mathcal{D}}_A.$$

Der gælder klart

$$\|\Theta(\xi)\| = \lim \|f_n\| \le \lim |||f_n||| = |||\xi||| \tag{5.3}$$

Det er desuden klart at $\Theta(f) = f$ for alle $f \in \mathcal{D}_A$.

Det er nu afgørende at Θ er <u>injektiv</u>:

Hvis nemlig $\Theta(\xi) = 0$, og hvis $f_n \in \mathcal{D}_A$ er sådan at $\lim f_n = \xi$ i $\hat{\mathcal{D}}_A$, så vil $\lim f_n = 0$ i H. Derfor gælder dels

$$((f_n, f_m)) \to ((f_n, \xi)) \quad \text{for } m \to \infty,\ n \text{ fast},$$

dels

$$((f_n, f_m)) = (f_n - Af_n, f_m) \to 0 \quad \text{for } m \to \infty,\ n \text{ fast},$$

og heraf sluttes at $((f_n, \xi)) = 0$ for alle n. Dermed er $|||\xi|||^2 = \lim ((f_n, \xi)) = 0$, altså $\xi = 0$.

Vi indfører nu $V = \Theta(\hat{\mathcal{D}}_A)$ og transporterer Hilbertrumsstrukturen fra $\hat{\mathcal{D}}_A$ over på V. For $f, g \in V$ er det indre produkt altså

$$(f, g)_V := ((\xi, \eta)) \qquad \text{idet } f = \Theta(\xi),\ g = \Theta(\eta),$$

og $$Q(f,g) = (f,g)_V - (f,g) \qquad f,g \in V$$
er en a. p. h. f. på V. (Q er positiv iflg. (5.3); V er tæt i H fordi $D_A \subseteq V$).

Vi betegner frembringeren for (Q,V) med $(A', D_{A'})$ og bemærker straks at
$$(A, D_A) \subseteq (A', D_{A'}),$$
thi for $f, g \in D_A$ gælder
$$Q(f,g) = -(Af, g),$$
og dette udvides ved kontinuitet til at gælde for $f \in D_A$, $g \in V$.

Hvis omvendt $f \in D_{A'}$, $g \in D_A$ gælder
$$Q(f,g) = -(A'f, g),$$
men ifølge det lige viste er
$$Q(g,f) = -(Ag, f)$$
altså er
$$(Ag, f) = (g, A'f)$$
og dette viser at $f \in D_{A^*}$, $A^*f = A'f$. Da (A, D_A) er selvadjungeret følger at $D_{A'} \subseteq D_A$.

Hermed er det vist at (Q,V) har (A, D_A) til frembringer.

$\mathbb{I}$

<u>Bemærkning:</u> Hvis (A, D_A) er en selvadjungeret negativ operator er $-A$ en positiv selvadjungeret operator. En sådan har en kvadratrod $\sqrt{-A}$, som igen er en positiv selvadjungeret operator, og man kan vise at definitionsområdet $D_{\sqrt{-A}}$ for $\sqrt{-A}$ er lig V og at
$$Q(f) = \|\sqrt{-A}\, f\|^2 \qquad \text{for } f \in V.$$
Dette kræver kendskab til spektralteori for ubegrænsede selvadjungerede operatorer.

<u>Scholium:</u> <u>Der er entydige korrespondancer mellem følgende begreber defineret i relation til Hilbertrummet H:</u>

1) Selvadjungerede negative operatorer (A, D_A)

2) Stærkt kontinuerte kontraktionssemigrupper af hermite'ske operatorer $(P_t)_{t\geq 0}$.

3) Afsluttede positive hermite'ske former (Q, V) defineret på et tæt underrum V af H.

Vi ~~tillader~~ os derfor at tale om f.eks. resolventen hørende til en a.p.h.f. og mener naturligvis resolventen for den semigruppe, hvis frembringer er frembringer for den givne form.

Lad der være givet en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ af hermite'ske operatorer og lad $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ betegne resolventen.

Af formlen

$$(V_\lambda f, f) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(P_t f, f)\,dt \quad , \quad f \in H ,$$

følger at funktionen $\lambda \mapsto (V_\lambda f, f)$ er aftagende, og at

$$\lim_{\lambda\to 0}(V_\lambda f, f) = \sup_{\lambda>0}(V_\lambda f, f) = \int_0^\infty (P_t f, f)\,dt .$$

Den fælles værdi betegnes $E(f)$ og kaldes energien af f.
Der gælder $0 \leq E(f) \leq \infty$.

Vi indfører nu elementerne af endelig energi

$$W = \{ f \in H \mid E(f) < \infty \}.$$

For $f, g \in W$ gælder

$$\int_0^\infty |(P_t f, g)|\,dt \leq \int_0^\infty (P_t f, f)^{1/2}(P_t g, g)^{1/2}\,dt \leq \left(\int_0^\infty (P_t f, f)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty (P_t g, g)\,dt\right)^{1/2}$$

$$= \{E(f)\,E(g)\}^{\frac{1}{2}} < \infty ,$$

idet vi har brugt Cauchy–Schwarz' ulighed først for den p.h.

form $(P_t f, g)$, dernæst for integraler.

Heraf ses at den <u>blandede energi</u>

$$E(f,g) = \int_0^\infty (P_t f, g)\,dt = \lim_{\lambda \to 0} (V_\lambda f, g)$$

er veldefineret for $f, g \in W$, og der gælder uligheden

$$|E(f,g)|^2 \leq E(f)\,E(g) .$$

Heraf følger at W er et underrum af H, og det er klart, at E er en positiv hermite'sk form på W, <u>energiformen</u> hørende til semigruppen $(P_t)_{t \geq 0}$, eller om man vil, hørende til den afsluttede p. h. form (Q, V).

E er <u>positiv definit</u>:

Hvis $E(f) = 0$ er $(P_t f, f) = 0$ for alle $t > 0$, og dermed er $\|f\|^2 = \lim_{t \to 0} (P_t f, f) = 0$.

<u>Lemma 5.4. Lad $(N, \mathcal{D}_N)$ være potentialoperatoren hørende til semigruppen $(P_t)_{t \geq 0}$. Så vil $\mathcal{D}_N \subseteq W$ og der gælder</u>

$$E(f,g) = (Nf, g) \quad \text{for alle } f \in \mathcal{D}_N,\ g \in W.$$

<u>Der gælder specielt</u>

$$\underline{E(f) = (Nf, f) = Q(Nf) \quad \text{for alle } f \in \mathcal{D}_N.}$$

<u>Desuden er $A(\mathcal{D}_A) \subseteq W$ og der gælder</u>

$$\underline{E(Af, Ag) = Q(f,g) \quad \text{for alle } f, g \in \mathcal{D}_A.}$$

<u>Bevis:</u> For $f \in \mathcal{D}_N$ er $\lim_{t \to \infty} \int_0^t P_s f\,ds = Nf$, så derfor gælder specielt

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t (P_s f, f)\,ds = (Nf, f) .$$

Ifølge sætningen om monoton konvergens af integraler er derfor

$$E(f) = \int_0^\infty (P_s f, f)\,ds = (Nf, f) ,$$

og da $(Nf, f) < \infty$ må $f \in W$. For $g \in W$ gælder

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t (P_s f, g)\,ds = (Nf, g) ,$$

og ifølge sætningen om majoriseret konvergens af integraler følger heraf at

$$E(f,g) = (Nf, g) .$$

Af 3.10 fås videre

$$Q(Nf) = -(ANf, Nf) = -(Nf, ANf) = (Nf, f) .$$

For $f, g \in \mathcal{D}_A$ har man

$$(V_\lambda Af, Ag) = (\lambda V_\lambda f - f, Ag) = (\lambda f, V_\lambda Ag) - (Af, g) =$$

$$(\lambda f, \lambda V_\lambda g - g) - (Af, g) = \lambda(\lambda V_\lambda f, g) - \lambda(f,g) - (Af, g) ,$$

hvilket konvergerer mod $Q(f,g) = -(Af, g)$ for $\lambda \to 0$, fordi $|(\lambda V_\lambda f, g)| \le \|f\|\|g\|$.

For $f = g$ ses heraf dels at $Af \in W$ og dels at

$$E(Af, Ag) = \lim_{\lambda\to 0}(V_\lambda Af, Ag) = Q(f,g) . \qquad \|$$

<u>Lemma 5.5.</u> <u>Lad (Q, V) være en a.p.h.f. Så gælder uligheden</u>

$$|(f,g)|^2 \le (Q(f) + \lambda\|f\|^2)(V_\lambda g, g) \quad , \lambda > 0, f \in V, g \in H$$

<u>idet $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ er den tilhørende resolvent.</u>

<u>Hvis Q ikke er identisk 0, er energien af et element $g \in H$ givet ved</u>

$$E(g) = \sup_{\substack{f\in V\\ Q(f)\neq 0}} \frac{|(f,g)|^2}{Q(f)}$$

<u>Bemærkning:</u> Hvis Q er nulformen, er $P_t = I$ for alle $t \ge 0$, og derfor er $W = \{0\}$.

<u>Bevis:</u> Lad $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ være resolventen hørende til (Q, V). For vilkårligt $g \in H$ vil $V_\lambda g \in \mathcal{D}_A \subseteq V$, så derfor gælder for $f \in V$:

$$Q(V_\lambda g, f) = -(AV_\lambda g, f) = (g, f) - \lambda(V_\lambda g, f)$$

altså

$$(f,g) = Q(f, V_\lambda g) + \lambda(f, V_\lambda g) \qquad , f \in V, g \in H .$$

Udstyres V med det indre produkt

$$Q_\lambda(f,g) = Q(f,g) + \lambda(f,g) \qquad , \lambda > 0,$$

er V et Hilbertrum, og der gælder altså

$$(f,g) = Q_\lambda(f, V_\lambda g) \qquad , f \in V, g \in H, \qquad (5.4)$$

hvilket viser at linearformen $f \mapsto (f,g)$ på Hilbertrummet (V, Q_λ) er indre produkt med den faste vektor $V_\lambda g$. Derfor er

$$Q_\lambda(V_\lambda g) = (V_\lambda g, g) = \sup\left\{ \frac{|(f,g)|^2}{Q_\lambda(f)} \,\middle|\, f \in V, f \neq 0 \right\}. \qquad (5.5)$$

Dette viser uligheden i lemmaet.

Antag nu at $Q \not\equiv 0$. Vi vil vise, at der så gælder

$$\sup_{\substack{f \in V \\ f \neq 0}} \frac{|(f,g)|^2}{Q_\lambda(f)} = \sup_{\substack{f \in V \\ Q(f) \neq 0}} \frac{|(f,g)|^2}{Q_\lambda(f)} .$$

Der gælder klart „$\geq$". På den anden side hvis $Q(f) = 0$, $Q(f_0) \neq 0$ er

$$Q(f + \varepsilon f_0) = \varepsilon^2 Q(f_0) + 2\varepsilon \operatorname{Re} Q(f, f_0) \neq 0$$

for alle ε i et interval af formen $]0, \alpha[$, $\alpha > 0$, og da

$$\frac{|(f+\varepsilon f_0, g)|^2}{Q_\lambda(f+\varepsilon f_0)} \to \frac{|(f,g)|^2}{Q_\lambda(f)} \quad \text{for } \varepsilon \to 0 \quad (\lambda \text{ fast}),$$

ser man, at også ulighedstegnet $\leq$ må gælde.

Heraf fås

$$E(g) = \sup_{\lambda>0} (V_\lambda g, g) = \sup_{\lambda > 0} \sup_{\substack{f \in V \\ Q(f) \neq 0}} \frac{|(f,g)|^2}{Q_\lambda(f)} = \sup_{\substack{f \in V \\ Q(f) \neq 0}} \sup_{\lambda > 0} \frac{|(f,g)|^2}{Q_\lambda(f)} =$$

$$\sup_{\substack{f \in V \\ Q(f) \neq 0}} \frac{|(f,g)|^2}{Q(f)} . \qquad \blacksquare$$

Corollar 5.6. Lad (Q, V) være en a.p.h.f. Så gælder uligheden

$$|(f,g)|^2 \leq Q(f)\, E(g) \quad \text{for alle } f \in V,\ g \in H$$

(hvis vi vedtager at $0 \cdot \infty = \infty$). Rummet W af elementer af endelig energi er ortogonalt på Q's nulrum $\{f \in V \mid Q(f) = 0\}$.

Bevis: Ifølge konventionen $0 \cdot \infty = \infty$ er uligheden klar, når blot $E(g) = \infty$. Hvis $E(g) < \infty$ følger uligheden af uligheden i lemma 5.5, når vi lader $\lambda \to 0$. Hvis $E(g) < \infty$ og hvis $Q(f) = 0$ fås heraf at $(f,g) = 0$. ∎

Sætning 5.7 Lad (Q, V) være en a.p.h.f. Følgende betingelser er da ensbetydende:

(1) $\lim_{t \to \infty} P_t f = 0$ (i H) for alle $f \in H$.

(2) Q er positiv definit.

(3) $(A, \mathcal{D}_A)$ er injektiv.

(4) $A(\mathcal{D}_A)$ er tæt i H.

(5) W er tæt i H.

Bevis: (1) $\Rightarrow$ (3): følger af sætning 3.11.

(3) $\Rightarrow$ (2): Antag at $Q(f) = 0$. Af Cauchy-Schwarz' ulighed for Q ses at $Q(f,g) = 0$ for alle $g \in V$, men dette viser at $f \in \mathcal{D}_A$ og at $Af = 0$, altså $f = 0$ ifølge forudsætningen (3).

(2) $\Rightarrow$ (3): Antag at $f \in \mathcal{D}_A$, $Af = 0$. Så er $Q(f) = -(Af, f) = 0$, og ifølge (2) må så $f = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4): følger af lemma 5.1 fordi $(A, \mathcal{D}_A)$ er selvadjungeret.

(4) $\Rightarrow$ (5): følger af inklusionen $A(\mathcal{D}_A) \subseteq W$ fra lemma 5.4.

(5) $\Rightarrow$ (1): For $f \in H$ er $s \mapsto \|P_s f\|$ en aftagende funktion, thi $\|P_{s+t} f\| = \|P_s(P_t f)\| \leq \|P_t f\|$.

For $f \in W$ er

$$E(f) = \int_0^\infty (P_s f, f)\, ds = 2 \int_0^\infty \|P_t f\|^2 dt < \infty ,$$

Af disse to bemærkninger følger at

$$\lim_{t \to \infty} \|P_t f\|^2 = 0$$

og dermed

$$\lim_{t \to \infty} P_t f = 0 \qquad \text{for alle } f \in W .$$

Da W er tæt i H, gælder dette for alle $f \in H$. $\blacksquare$

Antag nu at (Q, V) er en positiv definit a.p.h.f. på et tæt underrum V af H. Dermed er betingelse (1) i sætning 5.7 opfyldt, og vi ved da fra sætning 3.11, at potentialoperatoren $(N, \mathcal{D}_N)$ for den tilhørende semigruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ er lig $(-A^{-1}, A(\mathcal{D}_A))$. Heraf følger <u>at $(N, \mathcal{D}_N)$ er en selvadjungeret og positiv operator.</u>*)

Vi viser nedenfor at energiformen (E, W) er en afsluttet positiv hermite'sk form defineret på det tætte underrum W af H, og at $(-N, \mathcal{D}_N) = (A^{-1}, A(\mathcal{D}_A))$ er frembringer for formen.

Hermed er grundlagt en <u>dualitetsteori</u>: Til den givne a.p.h.f. (Q, V), der desuden forudsættes positiv definit, har vi konstrueret en form – energiformen (E, W) – med nøjagtig de samme egenskaber.

Går vi nu videre og definerer det duale objekt til (E, W), altså energiformen for (E, W), ved vi, at denne duale form som frembringer har $((-N)^{-1}, N(\mathcal{D}_N)) = (A, \mathcal{D}_A)$, og heraf ses at den oprindelige form (Q, V) er den duale form til (E, W).

*) Ifølge 5.2 er $(-N, \mathcal{D}_N)$ frembringer for en stærkt kontinuert semigruppe af hermite'ske kontraktioner. Den har formen $P_t f = T_t * f$, hvor $T_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, når $(N, \mathcal{D}_N)$ er Newtonpotentialet.

<u>Lemma 5.8. Lad (Q,V) være en positiv definit a.p.h.f. Så er energiformen (E,W) en form af samme slags. Frembringeren er $(-N, \mathcal{D}_N) = (A^{-1}, A(\mathcal{D}_A))$.</u>

<u>Bevis:</u> Vi skal indse at formen (E,W) er afsluttet. Lad os derfor betragte en følge $f_n \in W$, som er en Cauchy-følge ved det indre produkt $E(f,g) + (f,g)$. Heraf følger dels at f_n er en Cauchy-følge i H og derfor konvergent med en grænseværdi $f \in H$, dels at f_n er en Cauchy-følge ved det indre produkt E.

Til $\varepsilon > 0$ findes derfor $N \in \mathbb{N}$ så

$$(V_\lambda(f_n - f_m), f_n - f_m) \le E(f_n - f_m) \le \varepsilon$$

for alle $n, m \ge N$, $\lambda > 0$.

Lader vi $n \to \infty$ fås af denne ulighed at

$$(V_\lambda(f - f_m), f - f_m) \le \varepsilon \qquad \text{for alle } m \ge N,\ \lambda > 0,$$

hvilket viser at $f - f_m \in W$ for $m \ge N$ og derfor er $f \in W$, og at

$$E(f - f_m) \le \varepsilon \qquad \text{for } m \ge N.$$

Det er nu klart at $\lim f_n = f$ ved det indre produkt $E(f,g) + (f,g)$, som derfor gør W til et Hilbertrum.

Lad os betegne frembringeren for (E,W) med $(S, \mathcal{D}_S)$. Af lemma 5.4 fremgår at $(-N, \mathcal{D}_N) \subseteq (S, \mathcal{D}_S)$. For $g \in \mathcal{D}_S$, $f \in \mathcal{D}_N$ gælder altså

$$E(f,g) = (Nf, g) = -(f, Sg),$$

hvilket viser at $g \in \mathcal{D}_{N^*}$ og at $N^* g = -Sg$. Da $(N, \mathcal{D}_N)$ er selvadjungeret, følger at $\mathcal{D}_S \subseteq \mathcal{D}_N$ og at $S = -N$. ∎

Hvis (Q,V) er en positiv definit a.p.h.f. med energiform (E,W), er V et præhilbertrum med Q som indre produkt, og W er et præhilbertrum med E som indre produkt. Det er da naturligt at fuldstændiggøre disse præhilbertrum. Fuldstændiggørelsen af V betegnes $\hat{V}$ og det indre produkt skrives $(\ ,\ )_Q$, og det er fortsættelsen af Q fra V til $\hat{V}$. Analogt skrives $\hat{W}$, $(\ ,\ )_E$ for fuldstændiggørelsen af W og det indre produkt der fortsætter E.

Sætning 5.9. Lad (Q, V) være en positiv definit a.p.h.f.. Potentialoperatoren $(N, \mathcal{D}_N)$ kan på en og kun en måde udvides til en isometri $\hat{N}$ af Hilbertrummet $(\hat{W}, (\ ,\ )_E)$ på Hilbertrummet $(\hat{V}, (\ ,\ )_Q)$.

Den infinitesimale frembringer $(A, \mathcal{D}_A)$ kan på præcis en måde udvides til en isometri $\hat{A}$ af Hilbertrummet $(\hat{V}, (\ ,\ )_Q)$ på Hilbertrummet $(\hat{W}, (\ ,\ )_E)$.

Der gælder $\hat{A} = -\hat{N}^{-1}$, $\hat{N} = -\hat{A}^{-1}$.

Bevis: Af sætning 5.3 fremgår at $\mathcal{D}_N$ er tæt i $\hat{W}$ og analogt at $\mathcal{D}_A$ er tæt i $\hat{V}$. Dette viser entydigheden af afbildningerne $\hat{N}$ og $\hat{A}$.

Af lemma 5.4 følger at $N : \mathcal{D}_N \to \hat{V}$, og at $A : \mathcal{D}_A \to \hat{W}$ er isometrier. De kan udvides ved kontinuitet til isometrier $\hat{N} : \hat{W} \to \hat{V}$ og $\hat{A} : \hat{V} \to \hat{W}$. Den angivne sammenhæng mellem $\hat{A}$ og $\hat{N}$ følger af den tilsvarende sammenhæng mellem A og N. ∎

Bemærkning: Motiveret af klassisk potentialteori vil vi kalde $\hat{W}$ rummet af distributioner af endelig energi, og $\hat{V}$ rummet af potentialer af endelig energi.

§3. Anvendelse på klassisk potentialteori.

Vi skal nu forklare, hvordan det foregående tager sig ud i tilfældet af den Brown'ske semigruppe.

En nøjagtig gennemgang kræver kendskab til distributionsteori eller i det mindste til differentiation i svag forstand. Vi må derfor i vid udstrækning afstå fra at bevise resultaterne.

Det grundlæggende Hilbertrum H er rummet $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$, bestående af de kvadratisk integrable funktioner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Det indre produkt og den tilhørende norm er

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad , \quad \|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,dx \ .$$

Tæthederne g_t for normalfordelingerne (jvfr. p. 56) definerer en semigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ på $L^2(\mathbb{R}^n)$ ved foldning:

$$P_t f = g_t * f \ .$$

Det er rutine at se efter at $(P_t)_{t\geq 0}$ er en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe af hermite'ske operatorer på $L^2(\mathbb{R}^n)$ som opfylder

$$\lim_{t\to\infty} P_t f = 0 \qquad \text{for alle } f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Som tidligere er frembringeren for semigruppen lig Laplaceoperatoren Δ, og mere præcist gælder

$$\mathcal{D}_A = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \Delta f \in L^2(\mathbb{R}^n) \} \quad , \quad A = \Delta \quad ,$$

idet Δf er defineret i distributionsforstand.

Potentialoperatoren $(N, \mathcal{D}_N)$ er givet ved Newtonkernen som i sætning 3.20

$$Nf = \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} N_n * f \quad , \quad f \in \mathcal{D}_N \ ,$$

men vi skal afstå fra at bestemme $\mathcal{D}_N$.

Den tilhørende positivt definite a.p.h. form (Q, V) er den såkaldte Dirichletform

$$Q(f,g) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \overline{\frac{\partial g}{\partial x_i}} \Big) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)\, dx$$

som f.eks. er veldefineret på $C^1 \cap \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Definitionsområdet V for Q er det såkaldte Soboleff-rum $H^1(\mathbb{R}^n)$

$$V = H^1(\mathbb{R}^n) = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \,\Big|\, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^n),\ i=1,\dots,n \Big\},$$

idet $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ er defineret i distributionsforstand.

For $f \in \mathcal{D}_N$ er energien $E(f)$ givet ved (lemma 5.4)

$$E(f) = \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} \int_{\mathbb{R}^n} N_n * f(x)\, \overline{f(x)}\, dx = \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} f(x)\, \overline{f(y)}\, dx\,dy$$

$$= \frac{1}{[(n-2)\|\omega_n\|]^2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \Big| \frac{\partial}{\partial x_i} (N_n * f) \Big|^2 dx ,$$

hvoraf ses at

$$\int_{\mathbb{R}^n} N_n * f(x)\, \overline{f(x)}\, dx = \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \Big| \frac{\partial}{\partial x_i} (N_n * f) \Big|^2 dx .$$

Denne formel ses sædvanligvis ved Greens formel under passende regularitetsforudsætninger på f. På nær en positiv faktor er energien her lig energien, som den blev defineret p. 8.

Hilbertrummene $\hat{V}$ og $\hat{W}$ kan udtrykkes som rum af tempererede distributioner, og dette er først gjort af Deny i 1950. Man bliver imidlertid nødt til at inddrage Fouriertransformationen af distributioner for at kunne formulere disse resultater. For en tempereret distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ betegnes den Fouriertransformerede distribution med $\hat{T}$, som igen tilhører $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Der gælder da

$\hat{W} = \{ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \hat{T} \in L^2(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{r^2}) \}$ og normen i $\hat{W}$ er

$$\|T\|_E^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{T}|^2}{r^2} dx .$$

Dette Hilbertrum kaldes <u>rummet af distributioner af endelig energi.</u>

$\hat{V} = \{ P \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \hat{P} \in L^2(\mathbb{R}^n, r^2 dx) \}$ og normen i $\hat{V}$ er

$$\|P\|_Q^2 = 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{P}|^2 r^2 dx .$$

Dette Hilbertrum kaldes <u>rummet af potentialer af endelig energi.</u>

Hilbertrummene $\hat{W}$ og $\hat{V}$ er altså isomorfe ved Fouriertransformation med Hilbertrummene $L^2(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{r^2})$ og $L^2(\mathbb{R}^n, r^2 dx)$ af funktioner, der er kvadratisk integrable med hensyn til målene $\frac{1}{r^2} dx$, $r^2 dx$.

Den isometriske udvidelse $\hat{N}$ af potentialoperatoren kan vises stadig at være foldning med Newtonkernen

$$\hat{N} T = \frac{1}{(n-2)\|\omega_n\|} N_n * T$$

hvor $T \in \hat{W}$ er en distribution af endelig energi, og $\hat{N} T$ er et potential af endelig energi, potentialet frembragt af T.

Den isometriske udvidelse $\hat{A}$ af A er Laplaceoperatoren Δ,

$$\hat{A} P = \Delta P$$

hvor P er et potential af endelig energi.

Det kan vises, at rummet $\hat{V}$ af potentialer af endelig energi, som a priori er et rum af tempererede distributioner, faktisk består af lokalt integrable funktioner på $\mathbb{R}^n$, altså $$\hat{V} \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Dette Hilbertrum $\hat{V}$ har den betydelige egenskab, at hvis f er en lokalt integrabel funktion i $\hat{V}$, og hvis $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er en <u>normal kontraktion af den komplekse plan</u>, d.v.s.

$$|\Phi(x)| \leq |x| \quad , \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq |x-y| ,$$

så vil også funktionen $\Phi \circ f$ tilhøre $\hat{V}$, og der gælder

$$\|\Phi \circ f\|_Q \leq \|f\|_Q .$$

Dette at <u>"de normale kontraktioner opererer i $\hat{V}$"</u> er opdaget af den svenske matematiker Arne Beurling, og han har samtidig påpeget, at mange af den klassiske potentialteoris sætning er en simpel følge af denne egenskab.

Beurling og Deny har med dette som udgangspunkt studeret Hilbertrum af lokalt integrable funktioner, hvor de normale kontraktioner opererer. Sådanne Hilbertrum kaldes <u>Dirichletrum</u>.

Det viser sig, at man kan udvikle en hel del af den klassiske potentialteori i Dirichletrum, og at en vigtig del af teorien hænger nøje sammen med harmonisk analyse.

Appendix.

SEMI-GROUPES DE FELLER ET LE THÉORÈME DE HUNT

par Christian Berg

0. Introduction.

Dans l'énoncé de l'important théorème de Hunt et de la généralisation de Lion, on suppose toujours que l'espace localement compact X de base est dénombrable à l'infini. Cette hypothèse sur X est nécessaire pour le procédé d'approximation que l'on utilise pour se ramener à des noyaux bornés, voir [3], [4], [7].

Nous allons donner une nouvelle démonstration des théorèmes de Hunt et Lion, qui n'exige aucune hypothèse supplémentaire sur l'espace localement compact X. La démonstration repose essentiellement sur un lemme de densité (proposition 3), qui dit que l'image de $\mathcal{K}(X)$ par $I+\lambda V$ est partout dense dans $C_0(X)$ si $\lambda > 0$, et si V est un noyau continu tendant vers 0 à l'infini et vérifiant le principe complet du maximum.

Nous signalons que le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ qui intervient dans le théorème de Hunt vérifie la condition $\lim_{t\to\infty} P_t f = 0$ pour toute $f \in C_0(X)$. D'autre part, l'opposé de l'inverse du générateur infinitésimal est le plus petit prolongement fermé du noyau continu.

Cette liaison étroite entre le noyau continu et le générateur infinitésimal le fait naturel de chercher une caractérisation des générateurs infinitésimaux des semi-groupes de Feller. Nous en donnons une qui est basée sur un principe du maximum, d'ailleurs utilisé autrefois mais dans un cadre plus restreint, voir [6,p.533-37]. Comme application de cette caractérisation on trouve encore une démonstration du théorème de Hunt.

1. Caractérisation des noyaux continus vérifiant le principe complet du maximum.

On se donne une fois pour toutes un espace localement compact X et on désigne par $C_0(X)$ l'espace des fonctions continues réelles sur X et tendant vers 0 à l'infini muni de la norme $\|f\| = \sup|f|$. Le sous-espace dense de $C_0(X)$ formé des fonctions à support compact est noté $\mathcal{K}(X)$.

Dans la suite nous allons utiliser la terminologie de Lion [4]. Toute application linéaire et positive $V : \mathcal{K}(X) \to C_0(X)$ est appelée noyau continu. (Il serait plus correct de l'appeler noyau continu tendant vers 0 à l'infini).

Pour des tels noyaux on étudie des différents principes verifiés en théorie du potentiel classique. Voici une équivalence classique et utile entre des principes fondamentaux:

PROPOSITION 1. (Hunt-Lion). Soit V un noyau continu. Alors les deux principes suivants sont équivalents:

(i) Le principe complet du maximum:

Pour toutes $f,g \in \mathcal{K}(X)_+$ et pour tout nombre réel $a \geq 0$ l'inégalité $Vf(x) \leq Vg(x) + a$ a lieu partout, si elle a lieu en tout point x du support de f.

(ii) Le principe du maximum positif faible:

Pour toute $f \in \mathcal{K}(X)$ telle que $\sup Vf > 0$ il existe un point $x \in X$ tel que

$$Vf(x) = \sup Vf \quad , \quad f(x) \geq 0 .$$

Si de plus $V(\mathcal{K}(X))$ est dense dans $C_0(X)$, les principes (i) et (ii) équivalent à

(iii) Le principe du maximum positif:
Pour toute $f \in \mathcal{K}(X)$ et pour tout point $x \in X$ on a l'implication

$$Vf(x) = \sup Vf \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq 0 .$$

L'équivalence entre (i) et (ii) se trouve dans [4]. L'implication (i) entraîne (iii) est montrée dans [1].

Le probleme important de caractériser tous les noyaux continus vérifiant le principe complet du maximum est résolu par le théorème suivant:

THÉORÈME 2. Soit V un noyau continu. Si V satisfait au principe complet du maximum, il existe une résolvente positive et sous-markovienne $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ et une seule sur $C_0(X)$ telle que

$$Vf = \lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{K}(X). \tag{1}$$

Remarques: (a) Le théorème est démontré par Lion [4] dans le cas d'un noyau borné V et puis par une méthode d'approximation dans le cas d'un noyau non borné, mais alors sous l'hypothèse que l'espace X est dénombrable à l'infini.

(b) L'énoncé inverse est vrai aussi, voir [4] et la proposition 5 ci-dessous.

Notre démonstration du théorème 2 utilise la conclusion du théorème dans le cas d'un noyau borné. Puis on utilise la proposition suivante:

PROPOSITION 3. Soit V un noyau continu vérifiant le principe complet du maximum. Alors $(I+\lambda V)(\mathcal{K}(X))$ est dense dans $C_0(X)$ pour tout $\lambda > 0$.

<u>Démonstration</u>: Soient $g \in \mathcal{K}(X)_+$, $\varepsilon > 0$. Nous allons trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ telle que

$$0 \leq (I+\lambda V)\varphi - g \leq \varepsilon .$$

Enfin, il existe un compact $K \subset X$ tel que $Vg(x) \leq \varepsilon/\lambda$ pour tout $x \notin K$. Choisissons une fonction $a \in \mathcal{K}(X)_+$ telle que

$$0 \leq a \leq 1 \quad , \quad a(x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in K \cup \mathrm{supp}(g),$$

et définissons l'opérateur borné N dans $C_0(X)$ par

$$Nf = V(af) .$$

Alors N est un noyau continu borné qui vérifie le principe complet du maximum.

D'après le théorème 2 utilisé pour le noyau borné N, il existe une résolvente positive et sous-markovienne $(N_\lambda)_{\lambda > 0}$ telle que $N = N_\lambda + \lambda N_\lambda N$, $N_\lambda N = N N_\lambda$, $\lambda > 0$.

Si l'on pose $f = g - \lambda N_\lambda g$, on trouve $Nf = N_\lambda g$, et donc $(I + \lambda N) f = g$. Ceci entraîne

$$(I+\lambda V)(af) - g = -(1-a)f = -(1-a)g + \lambda(1-a)N_\lambda g .$$

On a cependant que $(1-a)g = 0$, et il en résulte

$$0 \leq (I+\lambda V)(af) - g = \lambda(1-a)N_\lambda g \leq \lambda(1-a)Ng = \lambda(1-a)Vg \leq \varepsilon .$$

L'inégalité cherchée est donc montrée avec $\varphi = af$.

PROPOSITION 4. (Watanabe [8]) <u>Soit V un noyau continu satisfaisant au principe du maximum positif faible. Alors</u> $(V, \mathcal{K}(X))$ <u>est un opérateur préfermé dans</u> $C_0(X)$.

<u>Démonstration</u>: Soit $f_n \in \mathcal{K}(X)$ une suite et soit $g \in C_0(X)$ telles que $\lim f_n = 0$, $\lim Vf_n = g$. Il faut démontrer que $g = 0$. Supposons au contraire $g \neq 0$. On se ramène à supposer $\sup g = 1$.

Il existe un ensemble compact $K \subset X$ tel que $|g(x)| \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \notin K$. Choisissons $h \in \mathcal{K}(X)_+$ telle que $h(x) = 1$ pour tout $x \in K$, et puis $\alpha > 0$ tel que $\alpha \|Vh\| \leq \frac{1}{8}$. Finalement posons $\varphi_n = (1-h) f_n - \alpha h$.

On a alors

$$\varphi_n(x) = -\alpha < 0 \qquad \text{pour tout } x \in K,$$

et
$$\lim V\varphi_n = -\alpha Vh + g,$$

parce que $\| V(hf_n)\| \leq \|f_n\| \|Vh\|$.

Par conséquent pour n suffisamment grand on a

$$V\varphi_n(x) \leq \frac{1}{2} \qquad \text{pour tout } x \notin K,$$

et
$$\sup V\varphi_n \geq \frac{3}{4}.$$

D'après le principe du maximum positif faible, il existe un point $x \in X$ tel que

$$V\varphi_n(x) = \sup V\varphi_n \quad , \quad \varphi_n(x) \geq 0,$$

ce qui est impossible.

<u>Démonstration du théorème 2:</u> Soit V un noyau continu vérifiant le principe complet du maximum. D'après les propositions 1 et 4 l'opérateur $(V, \mathcal{K}(X))$ est pré-fermé. Son plus petit prolongement fermé est noté $(\tilde{V}, D_{\tilde{V}})$. Nous démontrons d'abord qu'il vérifie encore le principe du maximum positif faible:

1) <u>Pour toute</u> $f \in D_{\tilde{V}}$ <u>telle que</u> $\sup \tilde{V}f > 0$ <u>il existe un point</u> $x \in X$ <u>tel que</u> $\tilde{V}f(x) = \sup \tilde{V}f$, $f(x) \geq 0$.

On se ramène à supposer $\sup \tilde{V}f = 1$. D'après la définition de l'opérateur $(\tilde{V}, D_{\tilde{V}})$ il existe une suite $f_n \in \mathcal{K}(X)$ telle que

$$\lim f_n = f \quad , \quad \lim Vf_n = \tilde{V}f.$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer

$\sup Vf_n = 1$, $\| Vf_n - \tilde{V}f \| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il existe une suite de points $x_n \in X$ telle que

$$Vf_n(x_n) = \sup Vf_n = 1 \quad , \quad f_n(x_n) \geq 0 .$$

On a donc

$$|\tilde{V}f(x_n) - 1| = |\tilde{V}f(x_n) - Vf_n(x_n)| \leq \| \tilde{V}f - Vf_n \| \leq \frac{1}{2} ,$$

ce qui montre que la suite x_n est contenue dans l'ensemble compact $\{ \tilde{V}f \geq \frac{1}{2} \}$.

Tout point d'accumulation x de la suite x_n a évidemment les propriétés cherchées

$$\tilde{V}f(x) = \sup \tilde{V}f = 1 \quad , \quad f(x) \geq 0 .$$

Du principe 1) on déduit l'inégalité suivante :

2) $\| (I + \lambda \tilde{V}) f \| \geq \lambda \| \tilde{V}f \|$ <u>où</u> $f \in \mathcal{D}_{\tilde{V}}$, $\lambda > 0$.

En effet, on a les inégalités suivantes

$$-\frac{1}{\lambda} \| (I + \lambda \tilde{V}) f \| \leq \inf \tilde{V}f \leq \sup \tilde{V}f \leq \frac{1}{\lambda} \| (I + \lambda \tilde{V}) f \| ,$$

car si $\sup \tilde{V}f > 0$ il existe un point $x \in X$ tel que

$$\tilde{V}f(x) = \sup \tilde{V}f \quad , \quad f(x) \geq 0 ,$$

donc

$$\sup \tilde{V}f \leq \frac{1}{\lambda} \left((I + \lambda \tilde{V}) f(x) \right) \leq \frac{1}{\lambda} \| (I + \lambda \tilde{V}) f \| .$$

De 2) on voit que $I + \lambda \tilde{V}$ est injectif et que l'opérateur $V_\lambda = \tilde{V} (I + \lambda \tilde{V})^{-1}$ est continu de norme $\leq \frac{1}{\lambda}$. Son domaine est le sous-espace $\mathcal{D}_{V_\lambda} = (I + \lambda \tilde{V}) \mathcal{D}_{\tilde{V}}$, qui est dense dans $C_0(X)$ d'après la proposition 3. Nous allons démontrer que V_λ est un opérateur fermé, et il en découle que $\mathcal{D}_{V_\lambda} = C_0(X)$.

3) <u>L'opérateur</u> $(V_\lambda , \mathcal{D}_{V_\lambda})$ <u>est fermé.</u>

En effet, soit $f_n \in D_{V_\lambda}$ une suite telle que

$$\lim f_n = f \quad , \quad \lim V_\lambda f_n = h$$

pour des fonctions $f, h \in C_o(X)$.

Les fonctions f_n s'écrivent $f_n = (I+\lambda\tilde{V})g_n$ où $g_n \in D_{\tilde{V}}$, et on a donc $V_\lambda f_n = \tilde{V} g_n$ d'où

$$g = \lim g_n = f - \lambda h .$$

L'opérateur $(\tilde{V}, D_{\tilde{V}})$ étant fermé, on trouve

$$g = f - \lambda h \in D_{\tilde{V}} \quad , \quad \tilde{V} g = h .$$

Par conséquent on a

$$f = (I+\lambda\tilde{V})g \in D_{V_\lambda} \qquad \text{et} \qquad V_\lambda f = \tilde{V} g = h .$$

4) <u>L'opérateur V_λ est positif.</u>

En effet, soit $f \in C_o(X)$, $f \leq 0$ et posons $f = (I+\lambda\tilde{V})g$ avec $g \in D_{\tilde{V}}$. Alors on a

$$V_\lambda f = \tilde{V} g \leq 0 ,$$

car sinon il existe un point $x \in X$ tel que

$$\tilde{V} g(x) = \sup \tilde{V} g > 0 \quad , \quad g(x) \geq 0 ,$$

et par conséquent on a

$$f(x) = g(x) + \lambda \tilde{V} g(x) > 0 ,$$

ce qui est impossible.

5) <u>Les opérateurs V_λ , $\lambda > 0$ vérifient l'équation résolvente.</u>

Quels que soient $\lambda, \mu > 0$ on a

$$V_\lambda - V_\mu = \tilde{V}\left\{(I+\lambda\tilde{V})^{-1}\left((I+\mu\tilde{V}) - (I+\lambda\tilde{V})\right)(I+\mu\tilde{V})^{-1}\right\} =$$

$$(\mu-\lambda)\,\tilde{V}(I+\lambda\tilde{V})^{-1}\tilde{V}(I+\mu\tilde{V})^{-1} = (\mu-\lambda) V_\lambda V_\mu .$$

De la formule $V_\lambda = \tilde{V}(I+\lambda\tilde{V})^{-1}$ on trouve

$$\tilde{V} f = V_\lambda f + \lambda V_\lambda \tilde{V} f \qquad \text{pour toute } f \in D_{\tilde{V}} , \tag{2}$$

et par conséquent on a

$$V_\lambda f \leq Vf \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{K}(X)_+$$

donc

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda V_\lambda f = 0 \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{K}(X)_+ . \qquad (3)$$

Puisque $\|\lambda V_\lambda\| \leq 1$ pour tout $\lambda > 0$, (3) est même valable pour toute fonction $f \in C_0(X)$. De (2) on voit donc

$$\lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f = \tilde{V} f \qquad \text{pour toute } f \in D_{\tilde{V}} ,$$

et en particulier on a

$$\lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f = Vf \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{K}(X).$$

6) L'unicité de la résolvente.

Toute résolvente $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ qui vérifie (1) vérifie aussi

$$Vf = V_\lambda (I + \lambda V) f \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{K}(X),$$

car il suffit de faire tendre μ vers 0 dans l'équation résolvente

$$V_\mu f = V_\lambda f + (\lambda - \mu) V_\lambda V_\mu f .$$

Il en résulte que V_λ est déterminé sur le sous-espace dense $(I + \lambda V)(\mathcal{K}(X))$.

Le théorème 2 est complètement démontré.

2. Tout noyau continu vérifiant le principe complet du maximum est limite simple de noyaux élémentaires.

Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{K}(X), C_0(X))$ l'espace vectoriel des applications linéaires $V : \mathcal{K}(X) \to C_0(X)$ muni de la topologie de la convergence simple: Des $V_j \in \mathcal{L}$ tendent vers $V \in \mathcal{L}$ si $\lim V_j f = Vf$ dans $C_0(X)$ pour toute $f \in \mathcal{K}(X)$.

Il est facile de voir que l'ensemble $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}$

des noyaux continus, qui vérifient le principe complet du maximum, est fermé pour cette topologie.

Si N est un opérateur positif et borné dans $C_0(X)$ et si $\|N\| < 1$, alors l'opérateur

$$V = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} N^k \quad , \quad \lambda > 0 \tag{4}$$

définit un noyau continu borné, qui est dans $\mathcal{N}$ parce que V est un noyau élémentaire au sens de Deny (cf. [5]).

L'ensemble des noyaux bornés (4) est noté $\mathcal{N}_e$.

PROPOSITION 5. <u>Le sous-ensemble $\mathcal{N}_e$ est partout dense dans $\mathcal{N}$.</u>

<u>Démonstration:</u> Soit $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une résolvente positive et sous-markovienne sur $C_0(X)$. D'après le théorème 2 il suffit de démontrer que tout V_λ est limite de noyaux de $\mathcal{N}_e$.

En effet, d'après l'équation résolvente on a

$$V_\lambda = V_{\lambda+\mu} + \mu V_{\lambda+\mu} V_\lambda \quad , \quad \lambda, \mu > 0 ,$$

donc

$$V_\lambda = V_{\lambda+\mu} + \mu V_{\lambda+\mu}^2 + \mu^2 V_{\lambda+\mu}^2 V_\lambda ,$$

et si l'on continue de cette manière, on trouve

$$\mu V_\lambda = \sum_{k=1}^{n} (\mu V_{\lambda+\mu})^k + \mu^{n+1} V_{\lambda+\mu}^n V_\lambda \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque l'on a $\quad \|\mu^{n+1} V_{\lambda+\mu}^n V_\lambda\| \leq \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^n ,$

on trouve

$$V_\lambda + \frac{1}{\mu} I = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu V_{\lambda+\mu})^k ,$$

donc $V_\lambda + \frac{1}{\mu} I \in \mathcal{N}_e$ pour tout couple $\lambda, \mu > 0$.

3. Semi-groupes de Feller intégrables et le théorème de Hunt.

Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Feller sur $C_0(X)$, c'est-à-dire un semi-groupe fortement continu de contractions positives sur $C_0(X)$.

Son générateur infinitésimal est noté (A,D_A).

On définit l'opérateur potentiel (N,D_N) du semi-groupe par

$$D_N = \{ f \in C_0(X) \mid \lim_{t\to\infty} \int_0^t P_s f\, ds \text{ existe} \} ,$$

$$Nf = \lim_{t\to\infty} \int_0^t P_s f\, ds \quad , \quad f \in D_N .$$

De la formule

$$Nf - P_t Nf = \int_0^t P_s f\, ds \quad , \quad f \in D_N , \quad t \geq 0 ,$$

on déduit

$$N(D_N) \subset D_A \ , \quad ANf = -f \quad \text{pour toute} \quad f \in D_N \tag{5}$$

$$\lim_{t\to\infty} P_t(Nf) = 0 \quad \text{pour toute} \quad f \in D_N \tag{6}$$

La résolvente $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ associée au semi-groupe est définie par la formule

$$V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f\, dt ,$$

et on définit l'opérateur (V_0, D_{V_0}) par

$$D_{V_0} = \{ f \in C_0(X) \mid \lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f \text{ existe} \} ,$$

$$V_0 f = \lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f \quad , \quad f \in D_{V_0} .$$

On a

$$V_0 f = V_\lambda f + \lambda V_\lambda V_0 f \quad , \quad V_\lambda V_0 f = V_0 V_\lambda f ,$$

pour toute $f \in D_{V_0}$.

L'opérateur (V_0, D_{V_0}) est une extension de l'opérateur potentiel (N, D_N), car si l'on pose

$$\varphi(t) = \int_0^t P_s f \, ds \qquad , \quad f \in D_N \quad ,$$

il en résulte par l'intégration partielle

$$V_\lambda f = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \varphi(t) \, dt \quad ,$$

et par conséquent on a

$$V_0 f = \lim_{\lambda \to 0} V_\lambda f = \lim_{t \to \infty} \varphi(t) = Nf \ .$$

Les deux opérateurs sont cependant égaux sur les fonctions positives:

<u>Pour toute fonction positive</u> $f \in D_{V_0}$ <u>on a</u> $f \in D_N$

<u>et</u> $$Nf = V_0 f = \int_0^\infty P_s f \, ds \ .$$

En effet, d'après le théorème de la convergence monotone on obtient

$$< V_0 f, \mu > = \int_0^\infty < P_s f, \mu > ds$$

pour toute mesure de Radon positive et bornée μ sur X. Par conséquent on a

$$V_0 f = \int_0^\infty P_s f \, ds \quad ,$$

et encore par convergence monotone on trouve

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t P_s f(x) \, ds = V_0 f(x) \qquad \text{pour tout } x \in X.$$

Le lemme de Dini entraîne alors

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t P_s f \, ds = V_0 f \quad ,$$

d'où le résultat.

PROPOSITION 6. Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Feller qui vérifie $\lim_{t\to\infty} P_t f = 0$ pour toute $f \in C_0(X)$.

Alors le générateur infinitésimal (A, D_A) est injectif, et on a

$$(N, D_N) = (V_0, D_{V_0}) = (-A^{-1}, A(D_A)). \tag{7}$$

Démonstration: Pour toute $f \in D_A$ on a

$$\int_0^t P_s(Af)\,ds = P_t f - f .$$

On en voit que $Af \in D_N$ et que $N(Af) = -f$. Ceci combiné avec (5) démontre que $A(D_A) = D_N$ et que $N = -A^{-1}$.

Il nous reste à montrer que $D_{V_0} \subset A(D_A)$.

Pour $f \in D_{V_0}$ on a $\lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f = V_0 f$ et $\lim_{\lambda\to 0} \lambda V_\lambda f = 0$ donc

$$\lim_{\lambda\to 0} A V_\lambda f = \lim_{\lambda\to 0} (\lambda V_\lambda f - f) = -f .$$

L'opérateur (A, D_A) étant fermé, on en déduit que $V_0 f \in D_A$ et que $A(V_0 f) = -f$, ce qui montre que $D_{V_0} \subset A(D_A)$.

Nous allons attirer l'attention sur une classe importante de semi-groupes de Feller vérifiant la condition de la proposition 6, soit les semi-groupes intégrables.

DÉFINITION: Un semi-groupe de Feller $(P_t)_{t\geq 0}$ est appelé intégrable, si $\mathcal{K}(X) \subset D_{V_0}$.

D'après ce qui précède, il est équivalent de supposer que $\mathcal{K}(X) \subset D_N$. Pour un tel semi-groupe la restriction de V_0 à $\mathcal{K}(X)$ définit un noyau continu V que l'on appelle le noyau potentiel du semi-groupe.

THÉORÈME 7. Soit $(P_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de Feller intégrable. Alors on a

(i) $V(\mathcal{K}(X))$ est dense dans $C_0(X)$.

(ii) $\lim_{t \to \infty} P_t f = 0$ pour toute $f \in C_0(X)$.

(iii) Le noyau potentiel V satisfait au principe complet du maximum.

THÉORÈME 8. Soit V un noyau continu vérifiant le principe complet du maximum. Si de plus $V(\mathcal{K}(X))$ est dense dans $C_0(X)$, il existe un semi-groupe de Feller intégrable $(P_t)_{t \geq 0}$ sur $C_0(X)$ dont le noyau potentiel est V.

Un tel semi-groupe est unique et l'opérateur $(N, D_N) = (V_0, D_{V_0}) = (-A^{-1}, A(D_A))$ est le plus petit prolongement fermé du noyau continu $(V, \mathcal{K}(X))$.

Les théorèmes 7 et 8 constituent le théorème fondamental de Hunt.

Les propriétés (i) et (iii) du théorème 7 sont bien connues, voir p. ex. [2]. La densité de $V(\mathcal{K}(X))$ entraîne que $N(D_N)$ est dense dans $C_0(X)$, et d'après (6) il en résulte que $\lim_{t \to \infty} P_t f = 0$ pour toute f dans un sous-espace dense de $C_0(X)$, donc pour toute $f \in C_0(X)$.

La démonstration du théorème 8 résulte du théorème 2. En effet, il existe une résolvente positive et sous-markovienne $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ tel que $\lim_{\lambda \to 0} V_\lambda f = Vf$ pour toute $f \in \mathcal{K}(X)$. Par conséquent on a

$$Vf = V_\lambda (f + \lambda V f) \qquad , f \in \mathcal{K}(X),$$

et on a donc

$$V(\mathcal{K}(X)) \subset V_\lambda (C_0(X)) ,$$

ce qui montre la densité de l'image commun des opérateurs résolventes. D'après une forme utile du théorème de Hille-Yosida (cf. [5]), il existe un semi-groupe de Feller $(P_t)_{t\geq 0}$ admettant $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ comme résolvente.

Le semi-groupe est intégrable parce que $\mathcal{K}(X) \subset D_{V_0}$. D'après la proposition 6 on a l'identité (7), et l'opérateur commun est fermé parce que (A, D_A) est fermé. D'autre part pour $f \in D_{V_0}$ d'après la proposition 3 il existe une suite $f_n \in \mathcal{K}(X)$ telle que $\lim (I+V)f_n = (I+V_0)f$. On a donc

$$\lim Vf_n = \lim V_1(I+V)f_n = V_1(I+V_0)f = V_0 f ,$$

et par conséquent on a $\lim f_n = f$.

Il en résulte que (V_0, D_{V_0}) est le plus petit prolongement fermé du noyau $(V, \mathcal{K}(X))$.

L'unicité du semi-groupe résulte de l'unicité énoncé dans le théorème 2.

4. Caractérisation des générateurs infinitésimaux des semi-groupes de Feller.

Le théorème de Hunt montre la relation étroite qui subsiste entre le noyau continu et le générateur infinitésimal du semi-groupe associé.

Il est donc intéressant également du point de vue probabiliste de donner directement une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller. Il existe des théorèmes de ce type, voir p. ex. [6], mais d'après la connaissance de l'auteur on impose toujours des conditions de séparabilité sur l'espace de base X.

Voici un théorème général:

THÉORÈME 9. Soit $A : D_A \to C_o(X)$ un opérateur défini sur un sous-espace D_A de $C_o(X)$.

Alors (A,D_A) est préfermé et le plus petit prolongement fermé de (A,D_A) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller, si et seulement si les contions suivantes sont vérifiés:

(1) Le domaine D_A est dense dans $C_o(X)$.

(2) Pour toute $f \in D_A$ et pour tout $x \in X$ on a l'implication: $f(x) = \sup f \geq 0 \Rightarrow Af(x) \leq 0$.

(3) Pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda I - A) D_A$ est dense dans $C_o(X)$.

Il est facile de voir que les conditions sont nécessaires.

Pour voir qu'elles sont suffisantes, il est pratique d'affaiblir la condition (2):

(2') Pour toute $f \in D_A$ telle que $\sup f > 0$, il existe un point $x \in X$ tel que $f(x) = \sup f$, $Af(x) \leq 0$.

Les deux lemmes suivants vont conduire à une démonstration de la suffisance.

LEMME 10. Soit (A,D_A) un opérateur dans $C_o(X)$ vérifiant la condition (2').

Alors on a

$$\|(\lambda I - A) f\| \geq \lambda \|f\| \qquad \text{pour toute } f \in D_A, \lambda > 0,$$

et l'opérateur $(\lambda I - A)^{-1}$ est positif, continu et de norme $\leq \frac{1}{\lambda}$.

La démonstration est analogue à celle des parties 2) et 4) de la démonstration du théorème 2.

LEMME 11. <u>Soit</u> (A,D_A) <u>un opérateur dans</u> $C_o(X)$ <u>vérifiant les conditions</u> (1) <u>et</u> (2').

<u>Alors</u> (A,D_A) <u>est préfermé, et le plus petit prolongement fermé</u> $(\tilde{A},D_{\tilde{A}})$ <u>de</u> (A,D_A) <u>satisfait encore à</u> (1) <u>et</u> (2').

<u>Démonstration:</u> Soit $f_n \in D_A$ une suite et soit $g \in C_o(X)$ telle que $\lim f_n = 0$, $\lim Af_n = g$.

Il faut démontrer que $g = 0$. Supposons au contraire $g \neq 0$. On se ramène à supposer $\sup g = 1$. Il existe $h \in D_A$ telle que

$$\sup h = 1 \quad , \quad \|g - h\| \leq \frac{1}{2} .$$

Pour un nombre $c > 0$ quelconque on a $\lim (h + cf_n) = h$. En particulier on a que $\sup(h + cf_n)$ tend vers $\sup h = 1$, ce qui permet de supposer $\sup(h + cf_n) > 0$ pour tout n. Par l'hypothèse il existe une suite x_n de points de X telle que

$$(h + cf_n)(x_n) = \sup(h + cf_n) \quad , \quad (Ah + cAf_n)(x_n) \leq 0 .$$

Comme on a $\lim cf_n(x_n) = 0$, on trouve $\lim h(x_n) = 1$, et il en découle

$$\liminf g(x_n) \geq \frac{1}{2} .$$

D'après des inégalités élémentaires pour des suites on a

$$0 \geq \limsup (Ah + cAf_n)(x_n) = \limsup (Ah + cg)(x_n)$$
$$+ \lim c(Af_n - g)(x_n) = \limsup (Ah + cg)(x_n) \geq \limsup Ah(x_n)$$
$$+ c \liminf g(x_n) \geq \inf Ah + \frac{c}{2} ,$$

d'où $c \leq -2 \inf Ah$, ce qui est absurde.

Pour voir que $(\tilde{A},D_{\tilde{A}})$ vérifie la condition (2') on procède comme dans la partie 1) de la démonstration du théorème 2.

Finissons la démonstration du théorème 9.

Si (A,D_A) vérifie les conditions (1),(2) et (3), (A,D_A) est préfermé, et $(\tilde{A},D_{\tilde{A}})$ vérifie (1),(2') et (3). L'opérateur $(\lambda I - \tilde{A})^{-1}$ est donc fermé et continu, et son domaine est dense. Il en résulte que $V_\lambda = (\lambda I - \tilde{A})^{-1}$ est partout défini quel que soit $\lambda > 0$. Puisque l'opérateur V_λ est positif et de norme $\leq \frac{1}{\lambda}$, la famille $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ est une résolvente positive et sous-markovienne dont l'image est partout dense. Le théorème de Hille-Yosida (cf. [5]) entraîne aussitôt que $(\tilde{A},D_{\tilde{A}})$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller.

Remarques: (a) On démontre facilement l'équivalence entre (2) et (2') sous l'hypothèse (1).
(b) Il résulte du théorème 9 que (A,D_A) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller, si et seulement si les conditions (1) et (2) sont vérifiées et si de plus $(\lambda I - A)D_A = C_0(X)$ quel que soit $\lambda > 0$.

Comme application du théorème 9 on retrouve le théorème de Hunt. En effet, si V est un noyau continu vérifiant le principe complet du maximum, et si $V(\mathcal{K}(X))$ est dense dans $C_0(X)$, il résulte de la proposition 1 que V satisfait au principe du maximum positif. Par conséquent V est injectif, et il est facile de voir que l'opérateur $(-V^{-1}, V(\mathcal{K}(X)))$ satisfait aux conditions du théorème 9. Le théorème de Hunt s'en déduit aisément.

D'ailleurs, si V est le noyau potentiel d'un semi-groupe de Feller intégrable, il résulte aussitôt du théorème 9 que V satisfait au principe du maximum positif, donc en particulier au principe complet du maximum.

Bibliographie

[1] Deny, J. Les principes fondamentaux de la théorie du potentiel. Sém. Brelot-Choquet-Deny 5^e année 1960/61 n^o 6.

[2] Deny, J. Éléments de théorie du potentiel par rapport à un noyau de Hunt. Sém. Brelot- Choquet-Deny 5^e année 1960/61 n^o 8.

[3] Hunt, G.A. Markoff processes and Potentials, Illinois J.Math. t.1, 1957, p.316-369.

[4] Lion, G. Familles d'opérateurs et frontière en théorie du potentiel. Ann.Inst.Fourier, Grenoble, 16,2, 1966 p.389-453.

[5] Meyer, P.A. Probabilités et potentiel. Hermann, Paris 1966.

[6] Sato, K., Ueno, T. Multidimensional diffusion and the Markov process on the boundary. J.Math.Kyoto Univ. t.4, 1965, p.529-605.

[7] Yosida, K. Positive resolvents and potentials. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 8, 1967, p. 210-218.

[8] Yosida, K., Watanabe, T., Tanaka, H. On the pre-closedness of the potential operator. J.Math.Soc.Jap. 20,1-2, 1968 p.419-21.

Christian Berg
Matematisk Institut
Universitetsparken 5
2100 Copenhague Ø
Danemark