Mat. 6, 1971-72 Mgd. 0

MÆNGDELÆRE

Litteratur:

P.R. Halmos: Naive set theory.

A. Abian: The theory of sets and transfinite arithmetic.

J.L. Krivine: Théorie axiomatique des ensembles.

E. Nagel, J. Newman: Gödel's proof.

W. Sierpinski: Hypothèse du continu.

Mængdelære

1. Ordnede mængder.

En relation R i en mængde M er som bekendt en delmængde $R \subseteq M \times M$, og man benytter ofte et relationstegn, f.eks. $\leq$, således at $(a,b) \in R$ skrives $a \leq b$.

Ved en <u>præordensrelation</u> $\leq$ i M forstås en relation med egenskaberne

1) $\forall x \in M \ (x \leq x)$, (<u>refleksivitet</u>),

2) $\forall x,y,z \in M \ ((x \leq y \ \wedge \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z)$, (<u>transitivitet</u>)

og vi siger, at $(M,\leq)$ er en <u>præordnet mængde</u>.

En præordensrelation kaldes en <u>ordensrelation</u> eller en <u>partiel ordning</u>, hvis der yderligere gælder den <u>antisymmetriske lov</u>

3) $\forall x,y \in M \ ((x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \Rightarrow x = y)$,

og vi siger, at $(M,\leq)$ er en <u>ordnet mængde</u>.

I analogi med den ordnede mængde $(\mathbb{R},\leq)$ bruges tegnet $<$ til at betegne den til $\leq$ hørende <u>irrefleksive relation</u>:

$$x < y \iff x \leq y \ \wedge \ x \neq y.$$

Til en præordensrelation $\leq$ i M er associeret en ækvivalensrelation $\sim$ i M defineret ved at

$$x \sim y \iff x \leq y \wedge y \leq x.$$

Herved bliver M inddelt i ækvivalensklasser. Klassen indeholdende $x \in M$ betegnes $\dot{x}$. Der defineres nu en relation i mængden $M/\sim$ af ækvivalensklasser ved fastsættelsen

$$\dot{x} \leq \dot{y} \iff x \leq y,$$

idet man let ser at definitionen er uafhængig af valget af repræsentant i ækvivalensklassen. Det er ligeledes umiddelbart at verificere at der herved defineres en ordensrelation i $M/\sim$, således at en præordensrelation giver anledning til en ordensrelation i mængden af ækvivalensklasser.

Eksempler på ordensrelationer er relationen $\leq$ i $\mathring{R}$ og relationen $\subseteq$ i mængden $\mathring{D}(M)$ af delmængder af en mængde M. Endvidere nævnes "gå op" relationen $|$ i $\mathring{N}$ defineret ved at $a | b$, hvis b er et multiplum af a.

En præordensrelation $\leq$ i M kaldes <u>total</u> og $(M,\leq)$ kaldes en <u>totalt præordnet mængde</u>, hvis der gælder

4) $\forall\, x,y \in M \quad (x \leq y \;\vee\; y \leq x).$

Betingelsen 4) kan udtrykkes ved at sige at to vilkårlige elementer er <u>sammenlignelige</u> ved relationen $\leq$. Undertiden bruges glosen <u>fuldstændigt ordnet</u> i stedet for totalt ordnet.

Af de ovennævnte 3 eksempler er kun den første ordensrelation total.

Vi indfører nu en række vigtige begreber vedrørende en partielt ordnet mængde $(M, \leq)$.

Et element $a \in M$ kaldes det første element i M, såfremt

$$\forall x \in M \quad (a \leq x).$$

Det fremgår af betingelse 3), at der højst findes et element i M, der tilfredsstiller denne betingelse.

Analogt kaldes $a \in M$ det sidste element i M, såfremt

$$\forall x \in M \quad (x \leq a).$$

Vi understreger, at det første og det sidste element per definition er sammenlignelige med alle elementer i M.

Et element $a \in M$ kaldes minimalt i M, hvis

$$\forall x \in M \quad (x \leq a \Rightarrow x = a),$$

og maximalt, såfremt

$$\forall x \in M \quad (a \leq x \Rightarrow a = x).$$

Hvis M har et første element, er det også minimalt, og det er det eneste minimale element i M. Hvis M ikke har noget første element, kan der være forskellige minimale elementer, men to af disse vil ikke være sammenlignelige. Ved totalt ordnede mængder er begreberne første element og minimalt element det samme.

I eksemplet $(\mathring{N}, |)$ er 1 det første element, og der er ingen maximale elementer. I delmængden $(\mathring{N} \setminus \{1\}, |)$ er der derimod intet første element, og de minimale elementer er præcis primtallene.

Er $(M,\leq)$ og $(N,\leq)$ partielt ordnede mængder kaldes en afbildning $f: M \to N$ <u>ordenstro</u>, såfremt

$$\forall\, x,y \in M \quad (x \leq y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y)).$$

Hvis f er bijektiv og såvel f som f^{-1} er ordenstro kaldes f en <u>ordensisomorfi</u>.

Hvis $(M,\leq)$ er totalt ordnet medens $(N,\leq)$ er partielt ordnet og $f: M \to N$ er ordenstro og bijektiv, da er også N totalt ordnet, og f er en ordensisomorfi.

Lad $(M,\leq)$ være en partielt ordnet mængde. For hvert $x \in M$ defineres (venstre) <u>afsnittet bestemt ved $x \in M$</u> som delmængden

$$V_M(x) = \{y \in M \mid y < x\},$$

Afsnittet $V_M(x)$ er eventuelt den tomme mængde og $x \notin V_M(x)$. Hvis $(M,\leq)$ er totalt ordnet gælder åbenbart

$$\forall\, x,y \in M \quad (x \leq y \iff V_M(x) \subseteq V_M(y)),$$

og $x \in M$ er første element i $M \setminus V_M(x)$.

2. Ækvipotens. Kardinaltal.

Vi skal nedenfor definere nogle præordensrelationer i mængden af alle mængder. Det er imidlertid en uheldig sprogbrug at tale om mængden Ω af alle mængder, thi betragtes delmængden

$$S = \{A \in \Omega \mid A \notin A\},$$

altså mængden af mængder A, der ikke er element i sig selv, gælder åbenbart

$$S \in S \iff S \notin S,$$

hvilket er absurdt. Dette er indholdet af Bertrand Russel's paradox (1904), og det gav anledning til megen skepsis overfor mængdelæren i begyndelsen af århundredet. Man undgår paradoxer af ovennævnte type ved at tale om klasser af mængder. Visse klasser af mængder er igen mængder men ikke alle. F.eks. er klassen af delmængder af en given mængde en mængde, men klasserne Ω og S er ikke mængder. Vi vil ikke gøre noget forsøg på at præcisere, hvad der er klasser, og hvad der er mængder. Noget sådant vil kræve en axiomatisk indførelse af mængdelæren.

Vi understreger imidlertid, at der ikke er noget til hinder for at tale om relationer i klasser, så de foregående bemærkninger om relationer kan anvendes på f.eks. klassen af alle mængder.

To mængder kaldes ækvipotente, hvis der findes en bijektiv afbildning af den ene mængde på den anden. Herved defineres en ækvivalensrelation (ækvipotens) i klassen af alle mængder.

Definition: Ved et kardinaltal forstås en ækvivalensklasse af ækvipotente mængder. For en mængde M betegner $\overline{M}$ eller card M den ækvivalensklasse, der indeholder M.

For to mængder M og N betyder $\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}}$ eller card M = card N altså at M og N er ækvipotente.

Hvis en mængde M har n elementer har alle med M ækvipotente mængder også n elementer, og derfor betegner man ofte ækvivalensklassen med n, man skriver altså

$$\text{card } M = n.$$

Også for andre ækvivalensklasser har man indført særlige symboler. Således betegner $\aleph_0$ og $\aleph$ ækvivalensklasserne, der indeholder henholdsvis $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$. (Symbolet $\aleph$ læses alef og er det første bogstav i det hebræiske alfabet).

At der om en mængde M gælder

$$\text{card } M = \aleph_0,$$

betyder at M er ækvipotent med $\mathbb{N}$, og man siger, at M er <u>numerabel</u>.

Mængder M med

$$\text{card } M = \aleph$$

er ækvipotente med $\mathbb{R}$ og siges derfor at have <u>kontinuets mægtighed</u>.

<u>Definition</u>: For to mængder M og N skrives card M $\leq$ card N, såfremt der findes en <u>injektiv</u> afbildning f af M ind i N.

Det er klart at $\leq$ er en præordensrelation i klassen af alle mængder. Den følgende sætning viser, at den til $\leq$ hørende ækvivalensrelation er ækvipotens:

1. Felix Bernstein's ækvivalenssætning (1897).

Hvis der om to mængder M og N gælder card M $\leq$ card N og card N $\leq$ card M, så er M og N ækvipotente.

Bevis: Der findes injektive afbildninger $f: M \to N$ og $g: N \to M$. Vi indfører mængden

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (g \circ f)^n (M \setminus g(N))$$

og afbildningen

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in A, \\ g^{-1}(x) & \text{for } x \in M \setminus A, \end{cases}$$

hvilket har mening da $A \supseteq M \setminus g(N)$. Vi påstår nu, at h er en bijektiv afbildning af M på N.

Injektiviteten kan kun gå galt ved at

$$f(x) = g^{-1}(y) \quad \text{for } x \in A,\ y \in M \setminus A,$$

men dette kræver, at $y = g \circ f(x) \in g \circ f(A) \subseteq A$, og er altså umuligt.

Surjektiviteten følger af at

$$N \setminus f(A) \subseteq g^{-1}(M \setminus A).$$

Denne inklusion ses således:

Hvis $x \notin f(A)$ vil også $g(x) \notin g \circ f(A)$ fordi g er injektiv, men da

$$A = g \circ f(A) \cup (M \setminus g(N)),$$

følger videre at $g(x) \notin A$, altså $x \in g^{-1}(M \setminus A)$. ||

Af ovenstående følger at $\leq$ definerer en ordensrelation i klassen af kardinaltal.

Vi viser dernæst, at der ikke findes noget største kardinaltal.

2. Cantor's sætning.

For en vilkårlig mængde M gælder

$$\operatorname{card} M < \operatorname{card} \mathfrak{P}(M),$$

hvor $\mathfrak{P}(M)$ er mængden af delmængder af M.

Bevis: Der gælder klart $\operatorname{card} M \leq \operatorname{card} \mathfrak{P}(M)$, idet afbildningen der til $x \in M$ knytter delmængden $\{x\}$ af M er injektiv.

Vi antager nu, at der findes en bijektiv afbildning f af M på $\mathfrak{P}(M)$. Vi betragter delmængden

$$A = \{x \in M \mid x \notin f(x)\},$$

og der findes altså et element $a \in M$ så $f(a) = A$. Der gælder da

$$a \in A \iff a \notin f(a) = A,$$

hvilket er en modstrid.

Der må altså gælde card $M <$ card $\mathfrak{P}(M)$. $\|$

Vi vil nu indføre regning med kardinaltal. Hertil betragtes følgende lemma:

Lemma 3. Lad der være givet fire mængder M_i, N_i, $i=1,2$, opfyldende card M_i = card N_i, $i=1,2$. Så er

$$\text{card } M_1 \times M_2 = \text{card } N_1 \times N_2,$$

$$\text{card } M_1^{M_2} = \text{card } N_1^{N_2},$$

og

$$\text{card } M_1 \cup M_2 = \text{card } N_1 \cup N_2,$$

det sidste under forudsætning af at $M_1 \cap M_2 = N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Bevis: Lad φ_i være en bijektiv afbildning af M_i på N_i, $i=1,2$. Så er $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ en bijektiv afbildning af $M_1 \times M_2$ på $N_1 \times N_2$ givet ved

$$\varphi((m_1,m_2)) = (\varphi_1(m_1), \varphi_2(m_2)),$$

og $h \to \varphi_1 \circ h \circ \varphi_2^{-1}$ definerer en bijektiv afbildning af $M_1^{M_2}$ på $N_1^{N_2}$. Endelig definerer

$$\psi(m) = \begin{cases} \varphi_1(m) , & \text{for } m \in M_1 \\ \varphi_2(m) , & \text{for } m \in M_2 \end{cases}$$

en bijektiv afbildning af $M_1 \cup M_2$ på $N_1 \cup N_2$ under forudsætningen $M_1 \cap M_2 = N_1 \cap N_2 = \emptyset$. $\|$

Lemmaet viser, at det har mening at definere produkt, potens og sum af to kardinaltal α og β ved

$$\alpha \cdot \beta = \text{card } A \times B$$

$$\alpha^{\beta} = \text{card } A^B$$

$$\alpha + \beta = \text{card } A \cup B$$

hvor A og B er vilkårlige mængder med card A = α, card B = β, idet man dog forudsætter at $A \cap B = \emptyset$ ved additionen. Vi bemærker, at det altid er muligt at finde disjunkte repræsentanter for to kardinaltal α og β, vi skal blot tage $A \times \{1\}$ og $B \times \{2\}$, hvor A og B er repræsentanter for α og β.

Herved udvides definitionen af sum og produkt af naturlige tal til vilkårlige kardinaltal, og det er klart at de kommutative og associative love vedbliver at gælde. Bemærk også at

$$\underbrace{\alpha + \ldots + \alpha}_{n \text{ addender}} = n \cdot \alpha, \quad \text{og at} \quad \underbrace{\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{n \text{ faktorer}} = \alpha^n$$

Der gælder imidlertid helt specielle regneregler for uendelige kardinaltal (også kaldet transfinite kardinaltal). F.eks. gælder følgende resultat

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0,$$

og det kan naturligvis udvides til et vilkårligt endeligt antal af faktorer og addender.

Det første kommer ud på at f.eks. $\mathbb{N}^2$ er ækvipotent med $\mathbb{N}$, hvilket følger af opstillingen

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

ved hvilken $\mathbb{N}^2$ stilles i rækkefølgen (1,1), (2,1), (1,2), (3,1), (2,2), ...

Det andet resultat følger f.eks. af spaltningen

$$\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Vi skal senere generalisere dette resultat til vilkårlige transfinite kardinaltal, men dette bygger på *udvalgsaxiomet* som igen hænger nøje sammen med *velordnede mængder*.

3. Velordnede mængder.

Lad $(M,\leq)$ være en partielt ordnet mængde.

Definition: Ordensrelationen $\leq$ kaldes en *velordning* og $(M,\leq)$ kaldes en *velordnet mængde*, såfremt enhver ikke tom delmængde af M har et første element.

Den tomme mængde kaldes velordnet.

Ved at betragte delmængder af M bestående af to elementer indses det, at en velordnet mængde er totalt ordnet. Enhver delmængde af en velordnet mængde er velordnet under den nedarvede ordensrelation.

Mængden af naturlige tal $\mathbb{N}$ er velordnet ved den sædvanlige ordning, hvorimod $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ ikke er velordnede ved den sædvanlige ordning. Enhver endelig mængde kan velordnes f.eks. ved at man nummererer elementerne. Det samme gælder om enhver uendelig numerabel mængde, idet den kan afbildes bijektivt på $\mathbb{N}$.

Begrebet velordnet mængde går tilbage til Cantor som også hævdede, at enhver mængde kan velordnes. Det første strenge bevis for dette resultat (velordningssætningen) blev givet af Zermelo i 1904. Hans bevis byggede på følgende axiom som synes indlysende:

Udvalgsaxiomet: Til enhver ikke tom mængde M findes en afbildning

$$u: \mathcal{P}(M)\setminus\{\emptyset\} \to M$$

med egenskaben

$$\forall A \subseteq M, A \neq \emptyset \quad (u(A) \in A).$$

Afbildningen u kaldes en udvalgsfunktion for M, fordi den til enhver ikke tom delmængde $A \subseteq M$ knytter et element i A.

Vi viser senere, at velordningssætningen og udvalgsaxiomet er ensbetydende og fortsætter her studiet af velordnede mængder.

Definition: Ved et afsnit (eller et venstre afsnit) i en velordnet mængde $(M,\leq)$ forstås en delmængde $V \subseteq M$ med egenskaben

$$\forall\, x,y \in M \ ((x \leq y \ \wedge \ y \in V) \Rightarrow x \in V).$$

Af definitionen følger umiddelbart, at en vilkårlig foreningsmængde og en vilkårlig fællesmængde af afsnit igen er et afsnit.

Hele M er et afsnit, og er V et afsnit forskelligt fra M, har $M\setminus V$ et første element x, og vi har da $V_M(x) \subseteq V$. Antager vi at der findes et element $y \in V\setminus V_M(x)$, gælder $y \in V$ og $x \leq y$, men da V er et afsnit må $x \in V$, hvilket er en modstrid.

Et afsnit i en velordnet mængde M er altså enten hele M eller af formen $V_M(x)$ for et $x \in M$.

Lemma 4. Mængden af afsnit i en velordnet mængde $(M,\leq)$ er velordnet ved inklusion.

Bevis: Lad $\mathcal{A}$ være en ikke tom mængde af afsnit i M. Hvis $\mathcal{A}$ har M som eneste element er M første element i $\mathcal{A}$ ved inklusion og ellers kan mængden $\mathcal{A}\setminus\{M\}$ skrives på formen $\{V_M(x) \mid x \in A\}$, hvor A er en ikke tom delmængde af M. Hvis x_o er første element i A er $V_M(x_o)$ første element i $\mathcal{A}$. ||

Af lemmaet følger specielt, at af to afsnit i M er det ene en delmængde af det andet. Det følgende lemma viser endda, at af to afsnit i en velordnet mængde er det ene et afsnit af det andet:

Lemma 5. Lad $(M,\leq)$ være en velordnet mængde, N et afsnit i M og V en delmængde af N.

Da er V et afsnit i N hvis og kun hvis V er et afsnit i M.

Bevis: Det er klart, at hvis V er et afsnit i M så også i N. Hvis omvendt V er et afsnit i N, og der om $x,y \in M$ gælder $x \leq y$ og $y \in V$, så vil $x,y \in N$, da N var et afsnit i M. Heraf følger dernæst at $x \in V$. ||

Den følgende sætning kaldes princippet om transfinit induktion. Den er meget anvendelig, når man skal vise, at en delmængde af en velordnet mængde udgør hele den velordnede mængde.

Sætning 6. Lad $(M,\leq)$ være en velordnet mængde og $A \subseteq M$ en delmængde med egenskaben

$$\forall x \in M \ (V_M(x) \subseteq A \Rightarrow x \in A).$$

Da er $A = M$.

Bevis: I modsat fald har $M \setminus A$ et første element x og det medfører at $V_M(x) \subseteq A$, altså ifølge antagelsen $x \in A$, hvilket strider mod at $x \in M \setminus A$. ||

Hvis vi som velordnet mængde M benytter $(\tilde{N},\leq)$ reduceres princippet om transfinit induktion til det sædvanlige induktionsprincip.

Der findes uendelig mange ordensisomorfier af $(\dot{R},\leq)$ på sig selv, bl.a. alle afbildningerne $f(x) = ax$, $a > 0$. Dette indtræffer ikke ved velordnede mængder.

<u>Sætning 7</u>. <u>Identiteten er den eneste ordensisomorfi af en velordnet mængde</u> $(M,\leq)$ <u>på sig selv</u>.

<u>Bevis</u>: Lad φ: $M \to M$ være en ordensisomorfi. Vi indser at mængden

$$E = \{x \in M \mid x = \varphi(x)\}$$

er hele M ved princippet om transfinit induktion. For $x \in M$ er x første element i $M \setminus V_M(x)$, og så er $\varphi(x)$ første element i $M \setminus \varphi(V_M(x))$. Hvis nu $V_M(x) \subseteq E$ er $\varphi(V_M(x)) = V_M(x)$, men så er både x og $\varphi(x)$ første element i $M \setminus V_M(x)$, altså $x = \varphi(x)$, og derfor er $x \in E$. $\|$

<u>Sætning 8</u>. <u>En velordnet mængde</u> $(M,\leq)$ <u>er ikke ordensisomorf med noget afsnit</u> $V_M(x)$, $x \in M$.

<u>Bevis</u>: Antag at φ: $M \to V_M(x)$ er en ordensisomorfi. Vi benytter transfinit induktion på mængden

$$E = \{y \in M \mid \varphi(y) = y\}.$$

For $y \in M$ er $\varphi(y)$ første element i $\varphi(M \setminus V_M(y))$. Hvis nu $V_M(y) \subseteq E$ er $\varphi(M \setminus V_M(y)) = V_M(x) \setminus V_M(y)$, og da denne mængde indeholder $\varphi(y)$, vil $y \leq \varphi(y) < x$, specielt vil $y \in V_M(x) \setminus V_M(y)$. Også y er første element i $V_M(x)\setminus V_M(y)$, og derfor er $y = \varphi(y)$, altså $y \in E$.

Konklusionen $E = M$ medfører at $x = \varphi(x)$, altså $x \in \varphi(M) = V_M(x)$, hvilket er en modstrid. ||

<u>Sætning 9. Lad $(M,\leq)$ og $(N,\leq)$ være velordnede mængder. Der findes højst en ordensisomorfi af M på et afsnit i N.</u>

<u>Bevis</u>: Lad φ_1 og φ_2 være ordensisomorfier af M på afsnit V_1 og V_2 af N. Som bemærket vil V_1 være et afsnit af V_2 (eller omvendt). Afbildningen $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ er en ordensisomorfi af V_2 på V_1, og ifølge sætning 8 må da $V_1 = V_2$, og så må $\varphi_1 = \varphi_2$ ifølge sætning 7. ||

<u>Sætning 10. Af to velordnede mængder $(M,\leq)$ og $(N,\leq)$ vil den ene være ordensisomorf med et afsnit af den anden.</u>

<u>Bevis</u>: Lad $(V_i)_{i\in I}$ være mængden af afsnit af M for hvilke der eksisterer ordensisomorfier φ_i af V_i på afsnit $\varphi_i(V_i)$ af N. Sådanne eksisterer, f.eks. $\emptyset$. Mængden

$$V = \bigcup_{i\in I} V_i$$

er et afsnit i M, og for $i,j \in I$ gælder

$$(*) \qquad \varphi_i(x) = \varphi_j(x) \quad \text{for alle} \quad x \in V_i \cap V_j.$$

Ifølge lemma 5 er nemlig $V_i \cap V_j$ afsnit i såvel V_i som V_j og dermed er $\varphi_i(V_i \cap V_j)$ og $\varphi_j(V_i \cap V_j)$ afsnit i henholdsvis

$\varphi_i(V_i)$ og $\varphi_j(V_j)$. Af lemma 5 følger da at $\varphi_i(V_i \cap V_j)$ og $\varphi_j(V_i \cap V_j)$ er afsnit i N, og påstanden (*) er altså en konsekvens af sætning 9.

Af (*) følger nu at afbildningen $\varphi\colon V \to N$ er veldefineret ved fastsættelsen

$$\varphi(x) = \varphi_j(x) \quad \text{for } x \in V_j.$$

Det er let at se, at φ er en ordensisomorfi af V på afsnittet $\varphi(V)$ af N.

Hvis V = M er φ en ordensisomorfi af M på et afsnit af N, og hvis $\varphi(V) = N$ er φ^{-1} en ordensisomorfi af N på et afsnit af M.

En af disse muligheder er altid realiseret, thi ellers har $M \setminus V$ et første element ξ og $N \setminus \varphi(V)$ et første element η. Ved fastsættelsen

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{for } x \in V, \\ \eta & \text{for } x = \xi, \end{cases}$$

defineres en ordensisomorfi φ^* af afsnittet $V \cup \{\xi\}$ i M på afsnittet $\varphi(V) \cup \{\eta\}$ af N, men så er $V \cup \{\xi\}$ et af afsnittene V_j, hvilket strider mod definitionen af V. ||

Relationen "ordensisomorf med" definerer en ækvivalensrelation i klassen af alle velordnede mængder. Ved et <u>ordinaltal</u> eller en <u>ordningstype</u> forstås en ækvivalensklasse af ordensisomorfe velordnede mængder. For en velordnet mængde M betegner $\overline{M}$

eller ord(M) den ækvivalensklasse, der indeholder M.

To endelige velordnede mængder er ordensisomorfe, præcis hvis de har samme elementantal, og derfor bruges tallet n ofte som symbol for ækvivalensklassen af velordnede mængder med n elementer. Man bruger desuden ofte græske bogstaver til at betegne ordinaltal.

Ordinaltallet der indeholder den velordnede mængde $\tilde{N}$ betegnes ω. Hvis α er et ordinaltal og $(M,\leq)$ er en velordnet mængde i α, kan vi danne en ny velordnet mængde $(M_1,\leq)$ ved at tilføje et element a til M og udvide ordensrelationen ved at $m < a$ for alle $m \in M$. Ordinaltallet for M_1 skrives $\alpha+1$. Ordinaltallet $(\alpha+1)+1$ skrives $\alpha+2$ o.s.v. Mere almindeligt kan man definere addition og multiplikation af ordinaltal, men dette skal vi ikke gå ind på her.

Vi bemærker, at medens ordensisomorfe velordnede mængder naturligvis er ækvipotente, behøver det omvendte ikke at være tilfældet. For eksempel er to velordnede mængder med ordinaltal ω og $\omega+1$ ækvipotente.

Hvis $(M,\leq)$ og $(N,\leq)$ er to velordnede mængder skrives

$$(M,\leq) \sqsubseteq (N,\leq),$$

hvis $(M,\leq)$ er ordensisomorf med et afsnit i N. Herved defineres en præordensrelation i klassen af velordnede mængder, og af sætning 8 følger at den til relationen $\sqsubseteq$ hørende ækvivalensrelation er ordensisomorfi. Herved defineres en ordensrelation $\leq$ i klassen af ordinaltal, og sætning 10 udsiger, at denne ordensrelation er total. Der gælder endda følgende resultat:

Sætning 11. Klassen af ordinaltal er velordnet ved $\leq$.

Bevis: Lad $(\alpha_i)_{i\in I}$ være en ikke tom klasse af ordinaltal og $(M_i)_{i\in I}$ en klasse af velordnede mængder så $\mathrm{ord}(M_i) = \alpha_i$ for $i \in I$. Vi vælger $i_o \in I$ og betragter

$$J = \{i \in I | M_i \subseteq M_{i_o}\}.$$

For $i \in J$ betegner vi med M_i' det afsnit af M_{i_o}, der er ordensisomorft med M_i. Ifølge lemma 4 findes et mindste afsnit M_{i_1}' blandt $(M_i')_{i\in J}$. Det er nu klart, at α_{i_1} er første element i $(\alpha_i)_{i\in J}$ og dermed i $(\alpha_i)_{i\in I}$ fordi ordningen af ordinaltallene er total. ||

4. Induktivt ordnede mængder, Zorn's lemma.

Det er overordenligt vigtigt i mange grene af matematikken at kunne udtale sig om eksistensen af maximale eller minimale elementer. Det vigtigste resultat i den retning kaldes Zorn's lemma og er fremsat af M. Zorn i 1935, men er kendt af Kuratowski allerede i 1922. Zorn's lemma bygger på følgende begreb:

Definition: En partielt ordnet mængde $(M,\leq)$ kaldes induktivt ordnet, såfremt enhver totalt ordnet delmængde $A \subseteq M$ har en majorant, altså såfremt der findes $x \in M$ med $a \leq x$ for alle $a \in A$.

12. Zorn's lemma. Enhver ikke tom induktivt ordnet mængde $(M,\leq)$ har et maximalt element.

Corollar 13. Lad $(M,\leq)$ være en induktivt ordnet mængde og lad $a \in M$. Der findes et maximalt element $m \in M$ så $a \leq m$.

Bevis: Vi anvender Zorn's lemma på den induktivt ordnede mængde $N = \{x \in M | a \leq x\}$ og bemærker, at et element $y \in N$ er maximalt i N, hvis og kun hvis det er maximalt i M. ||

Hovedsætning 14. Følgende 3 udsagn er ækvivalente:

(1) Velordningssætningen.

(2) Udvalgsaxiomet.

(3) Zorn's lemma.

Bevis: (1) ⇒ (2). Lad M være en ikke tom mængde. Vi ønsker at vise eksistensen af en udvalgsfunktion for M

$$u: \mathcal{P}(M)\setminus\{\emptyset\} \to M.$$

Det er muligt at udstyre M med en velordning $\leq$, og dermed har enhver ikke tom delmængde $A \subseteq M$ et første element. Betegnes dette $u(A)$, er u en udvalgsfunktion for M.

(2) ⇒ (3). Lad $(M,\leq)$ være en ikke tom induktivt ordnet mængde, og lad u være en udvalgsfunktion for M. For $A \subseteq M$ betegner vi med $H(A)$ mængden af ægte majoranter til A, altså

$$H(A) = \{x \in M | \forall\, y \in A (y < x)\}.$$

En velordnet delmængde $K \subseteq M$ kaldes en kæde, såfremt

$$\forall\, x \in K \left(x = u(H(V_K(x))) \right).$$

Mængden $H(V_K(x))$ er ikke tom, fordi $x \in H(V_K(x))$. Hvis k betegner første element i kæden K gælder $k = u(M)$, således at alle kæder har $u(M)$ som første element. Bemærk at $\{u(M)\}$ er en kæde.

Af to kæder K_1 og K_2 er f.eks. K_1 ordensisomorf med et afsnit af K_2 ifølge sætning 10. Lad φ være den derved entydigt bestemte ordensisomorfi, og lad os betragte mængden

$$E = \{x \in K_1 \mid \varphi(x) = x\}.$$

Vi indser at $E = K_1$ ved transfinit induktion. Hvis $y \in K_1$ og $V_{K_1}(y) \subseteq E$ er $V_{K_1}(y) = \varphi(V_{K_1}(y)) = V_{K_2}(\varphi(y))$, og så giver definitionen af en kæde at

$$\varphi(y) = u\left(H(V_{K_2}(\varphi(y)))\right) = u\left(H(V_{K_1}(y))\right) = y,$$

hvilket viser at $y \in E$. Af to kæder er derfor den ene et afsnit af den anden.

Lad nu $\{K_i \mid i \in I\}$ være mængden af alle kæder i M og sæt

$$K = \bigcup_{i \in I} K_i.$$

Hvis $x \in K_i$, vil vi indse at der gælder

$$(*) \qquad V_K(x) = V_{K_i}(x).$$

Til $z \in V_K(x)$ findes $j \in I$ så $z \in K_j$, og enten er $K_j \subseteq K_i$ og så er klart $z \in V_{K_i}(x)$, eller også er K_i et afsnit af K_j. Da $x \in K_i$ og $z < x$ følger heraf at $z \in K_i$, altså igen $z \in V_{K_i}(x)$, og dermed har vi at $V_K(x) \subseteq V_{K_i}(x)$. Den omvendte inklusion er triviel.

Vi kan nu let se at K er velordnet, thi hvis $A \subseteq K$ er en ikke tom delmængde findes $i \in I$ så $A \cap K_i \neq \emptyset$, og af (*) fremgår, at første element i $A \cap K_i$ også er første element i A.

Egenskaben (*) viser også, at K er en kæde, og dermed er K den mest omfattende af alle kæder. Heraf følger at $H(K) = \emptyset$, thi hvis $H(K) \neq \emptyset$ og hvis $a = u(H(K))$, er $K \cup \{a\}$ en kæde der er effektivt større end K.

Da M er induktivt ordnet har K en majorant a, men a har ingen ægte majoranter da $H(K) = \emptyset$. Dette viser, at a er et maximalt element i M.

(3) $\Rightarrow$ (1). Lad M være en vilkårlig ikke tom mængde, og lad $\mathcal{A}$ være mængden af delmængder $K \subseteq M$ på hvilke der findes en velordning $\leq_K$. Mængden $\mathcal{A}$ er ikke tom, idet den indeholder f.eks. alle endelige delmængder af M.

Vi indfører nu en partiel ordning $\lesssim$ på $\mathcal{A}$, idet vi skriver

$$(K, \leq_K) \lesssim (L, \leq_L)$$

hvis K er et afsnit af L, og hvis ordensrelationen $\leq_K$ er restriktionen til K af ordensrelationen $\leq_L$ på L. Vi overbeviser os nu om, at $\mathcal{A}$ herved er induktivt ordnet. Vi gør det omhyggeligt, da det er et typisk eksempel på anvendelse af Zorn's lemma.

Lad $\{K_i | i \in I\}$ være en totalt ordnet delmængde af $\mathcal{A}$ og lad velordningen på K_i være betegnet $\leq_i$. For at finde en majorant for $\{K_i | i \in I\}$ i $\mathcal{A}$ sættes

$$K = \bigcup_{i \in I} K_i .$$

Til to vilkårlige elementer $x,y \in K$ findes $i,j \in I$ så $x \in K_i$, $y \in K_j$, men forudsætningen om total ordning sikrer at $(K_i, \leq_i) \lesssim (K_j, \leq_j)$ (eller omvendt) og derfor vil $x,y \in K_j$. Ved fastsættelsen

$$x \leq y \iff x \leq_j y$$

defineres en partiel ordning i K, idet $x \leq_j y \iff x \leq_k y$ hvis også $x,y \in K_k$. Relationen $\leq$ er en velordning på K, thi hvis A er en ikke tom delmængde af K findes $i \in I$ så $A \cap K_i \neq \emptyset$, og som under (2) $\Rightarrow$ (3) ses det, at første element i $A \cap K_i$ er første element i A. Dermed er $(K, \leq) \in \mathcal{A}$ og det er let at se, at $(K, \leq)$ er en majorant for $\{K_i | i \in I\}$.

Et maximalt element $(L, \leq_L)$ i $(\mathcal{A}, \lesssim)$ må opfylde $L = M$, thi ellers findes $a \in M \setminus L$, og ved at betragte mængden $L \cup \{a\}$ forsynet med velordningen $x \leq_L y$ for $x,y \in L$, $x < a$ for $x \in L$, når vi til en modstrid med maximaliteten af $(L, \leq_L)$. Der findes altså en velordning af M. $\|$

Vi har hidtil arbejdet med mængder ud fra det intuitive standpunkt, hvorefter en mængde er en velafgrænset samling af elementer. Skal man udtale sig præcist om mængdelæren og udvalgsaxiomets stilling, er det nødvendigt at axiomatisere mængdelæren, nøjagtig som man kan axiomatisere geometrien eller teorien for reelle tal. En sådan axiomatisering af mængdelæren er bl.a. udført af Zermelo og Fraenkel. I 1938 viste Gödel, at hvis Zermelo-Fraenkel's axiomsystem er konsistent (d.v.s. modsigelsesfrit) - men det ved man ikke om det er - så er også Zermelo-Fraenkel's axiomer plus udvalgsaxiomet et konsistent system.

I 1963 har amerikaneren P.J. Cohen vist, at udvalgsaxiomet ikke kan afledes af Zermelo-Fraenkel's axiomer. Hermed indtager udvalgsaxiomet samme stilling i mængdelæren som parallelaxiomet i geometrien.

Udvalgsaxiomet og dermed Zorn's lemma og velordningssætningen accepteres af de fleste matematikere, og en gennemgang af den moderne matematik viser at mange nøgleresultater (f.eks. Tychonoff's sætning og Hahn-Banach's sætning som vi senere skal beskæftige os med) bygger på udvalgsaxiomet. Opgiver man derfor dette axiom, må man opgive væsentlige dele af den moderne matematik eller i det mindste nøjes med mindre generelle resultater.

Der findes dog matematikere der ikke accepterer udvalgsaxiomet og som kun anerkender konstruktive eksistensbeviser, nemlig den intuitionis~~ke~~ tis retning, hvis betydeligste talsmand var hollænderen Brouwer (1881-1966).

Lad os give et eksempel på en bevismetode som intuitionisterne ikke anerkender: Vi ønsker at bevise at uendelig mange naturlige tal har ~~vi~~ en vis egenskab E. Vi gør det indirekte og antager, at der findes et naturligt tal N så ingen tal $n \geq N$ har egenskaben E. Vi viser dernæst, at denne antagelse leder til en modstrid. Hermed har vi bevist, at uendelig mange naturlige tal har egenskaben.

Intuitionisterne vil derimod godtage et bevis som angiver et tal med egenskaben E og en metode til ud fra et tal med egenskaben E at konstruere et større tal med egenskaben E.

5. Anvendelser af Zorn's lemma i teorien for kardinaltal.

Ved hjælp af velordningssætningen er det muligt at vise følgende resultat om kardinaltallene:

Sætning 15. Klassen af kardinaltal er velordnet.

Bevis: Lad $(k_i)_{i\in I}$ være en ikke tom klasse af kardinaltal og lad $(M_i)_{i\in I}$ være en klasse af mængder med card $M_i = k_i$, $i \in I$. På hver af mængderne M_i, $i \in I$, indføres en velordning $\leq_i$, og ifølge sætning 11 findes da $i_o \in I$ så

$$\text{ord } M_{i_o} \leq \text{ord } M_i \quad \text{for alle } i \in I.$$

Så meget desmere gælder da

$$\text{card } M_{i_o} \leq \text{card } M_i \quad \text{for alle } i \in I.$$

||

Ifølge sætning 15 kan vi opstille kardinaltallene i rækkefølge, hvoraf begyndelsen ser således ud:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \ldots$$

idet som tidligere $\aleph_0 = \text{card } \hat{N}$, og derefter er $\aleph_1$ det umiddelbart efterfølgende o.s.v.

Man spørger nu sig selw, hvor man i denne rækkefølge skal placere kardinaltallet $\aleph = \text{card } \hat{R}$. Kontinuumshypotesen, der blev opstillet af Cantor, udsiger at $\aleph = \aleph_1$, eller med andre ord, at enhver delmængde $A \subseteq \hat{R}$ enten er endelig, numerabel eller ækvipotent med $\hat{R}$.

Kontinuumshypotesen er senere kendt som det første af de 23 problemer Hilbert opstillede ved matematikerkongressen i Paris år 1900. En del af problemerne er i dag løst, andre er stadig uløste.

I 1938 viste Gödel at Zermelo-Fraenkel's axiomer sammen med udvalgsaxiomet og kontinuumshypotesen udgør et konsistent system under forudsætning af at Zermelo-Fraenkel's axiomer er konsistente.

Hilberts 1. problem blev løst af P.J. Cohen i 1963, idet han beviste, at kontinuumshypotesen ikke kan udledes af Zermelo-Fraenkel's axiomsystem inklusive udvalgsaxiomet. Der er altså mulighed for at opbygge mængdeteorier med og uden kontinuumshypotesen i analogi med euklidisk og ikke-euklidisk geometri.

Vi viser nu forskellige resultater om regning med kardinaltal.

Sætning 16. Der gælder $n+\alpha=\alpha$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og for alle uendelige kardinaltal α.

Bevis: Lad N og A være disjunkte mængder så N har n elementer og så card A = α. Vi skriver $N = \{a_1,\dots,a_n\}$, og da A er uendelig findes en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af indbyrdes forskellige elementer i A.

Vi definerer nu $f\colon N \cup A \to A$ ved

$$\begin{aligned} f(a_i) &= x_i, && i = 1, \dots, n. \\ f(x_i) &= x_{i+n}, && i = 1,2, \dots \\ f(x) &= x && \text{for } x \in A\setminus\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Da f er injektiv gælder $n+\alpha\leq\alpha$ og dermed det søgte. ||

Sætning 17. Der gælder $\alpha+\alpha=\alpha$ for alle uendelige kardinaltal α.

Bevis: Lad A være en mængde med card A = α. Det er nok at vise, at $A \times \{0,1\}$ er ækvipotent med A.

Lad $\mathcal{F}$ være mængden af par $(X\times\{0,1\}, f)$, hvor X er en delmængde af A og f er en bijektiv afbildning af $X\times\{0,1\}$ på X. Mængden $\mathcal{F}$ er ikke tom, idet numerable delmængder $X \subseteq A$ er ækvipotente med $X\times\{0,1\}$ $(\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0)$. Vi indfører en partiel ordning af $\mathcal{F}$ ved

$$(X\times\{0,1\}, f) \preceq (Y\times\{0,1\}, g)$$

hvis $X \subseteq Y$, og hvis f er g's restriktion til $X\times\{0,1\}$. Det er lige-til at vise, at $(\hat{F}, \preceq)$ er induktivt ordnet, så Zorn's lemma sikrer eksistensen af et maximalt element $(M\times\{0,1\}, h)$ i $\hat{F}$.

Der gælder nu at $A\setminus M$ er endelig. Ellers kunne vi vælge en numerabel delmængde Y af $A\setminus M$ og en bijektion f af $Y\times\{0,1\}$ på Y. Heraf følger at $(M \cup Y)\times\{0,1\}$ er ækvipotent med $M \cup Y$, i strid med maximaliteten af $(M\times\{0,1\}, h)$.

Da $A\setminus M$ er endelig, må M være uendelig og af sætning 16 fås da

$$\operatorname{card} A = \operatorname{card} A\setminus M + \operatorname{card} M = \operatorname{card} M,$$

og altså

$$\operatorname{card}(A\times\{0,1\}) = \operatorname{card}(M\times\{0,1\}) = \operatorname{card} M = \operatorname{card} A. \quad \|$$

<u>Sætning 18. Lad α og β være kardinaltal opfyldende</u> $\alpha \le \beta$, $\aleph_0 \le \beta$. <u>Så er $\alpha+\beta=\beta$</u>.

<u>Bevis</u>: Dette resultat omfatter såvel sætning 16 som 17, men er på den anden side et corollar af sætning 17. Der gælder nemlig $\alpha+\beta \le \beta+\beta = \beta$, og uligheden $\alpha+\beta \ge \beta$ er klar. Påstanden følger nu af at $\le$ er en ordensrelation. $\|$

<u>Sætning 19. Der gælder $\alpha^2 = \alpha$ for ethvert uendeligt kardinaltal α.</u>

<u>Bevis</u>: Lad A være en mængde med $\operatorname{card} A = \alpha$. Vi betragter mængden $\hat{G}$ af par $(X\times X, f)$, hvor $X \subseteq A$, og f er en bijektion af $X\times X$ på X. Der findes sådanne par da $\aleph_0^2 = \aleph_0$. Som partiel ordning

på $\mathfrak{G}$ indføres

$$(X\times X,\ f) \preceq (Y\times Y,\ g)$$

hvis $X \subseteq Y$ og hvis f er lig g's restriktion til $X\times X$. Det ses at Zorn's lemma kan anvendes og lad $(M\times M,\ h)$ være et maximalt element i $\mathfrak{G}$. Mængden M er uendelig.

Lad os antage at $\operatorname{card} M < \operatorname{card} A$.

Da $\operatorname{card} A = \operatorname{card} M + \operatorname{card} A\setminus M = \max(\operatorname{card} M,\ \operatorname{card} A\setminus M)$ ifølge sætning 18, fås $\operatorname{card} A\setminus M = \operatorname{card} A$, og altså gælder $\operatorname{card} M < \operatorname{card} A\setminus M$. Der findes da en delmængde $N \subset A\setminus M$ så $\operatorname{card} M = \operatorname{card} N$.

Af ligningen

$$\operatorname{card} M\times N = \operatorname{card} N\times M = \operatorname{card} N\times N = \operatorname{card} M\times M = \operatorname{card} M$$

og af sætning 17 følger nu at

$$\operatorname{card}(M\cup N) \times (M\cup N) = \operatorname{card} M = \operatorname{card} M\cup N,$$

hvilket er i strid med maximaliteten af $(M\times M,\ h)$.

Der må altså gælde $\operatorname{card} M = \operatorname{card} A$, og derfor har vi

$$\operatorname{card} A\times A = \operatorname{card} M\times M = \operatorname{card} M = \operatorname{card} A. \quad \|$$

6. Anvendelser af Zorn's lemma i vektorrum.

Lad $(E,+,L)$ være et vektorrum over et kommutativt legeme L. Et lineært uafhængigt vektorsystem $(e_i)_{i\in I}$ kaldes som bekendt en basis for E over L, hvis $(e_i)_{i\in I}$ frembringer E, altså hvis ethvert element $x \in E$ er en linearkombination af endelig mange vektorer e_i.

Det er kendt fra Matematik 1, at ethvert endelig dimensionalt vektorrum har en basis. Zorn's lemma tillader nu at generalisere dette resultat:

Sætning 20. Ethvert vektorrum $(E,+,L)$ har en basis.

Bevis: Mængden $\mathcal{U}$ af uafhængige vektorsystemer i E er partielt ordnet ved inklusion. Hvis $(U_k)_{k\in K}$ er en totalt ordnet delmængde af $\mathcal{U}$, er også

$$U = \bigcup_{k\in K} U_k$$

et lineært uafhængigt system, idet endelig mange elementer i U ligger i endelig mange U_k og derfor i det mest omfattende af disse systemer. Zorn's lemma viser nu eksistensen af maximale elementer i den induktivt ordnede mængde $\mathcal{U}$. Et maximalt uafhængigt vektorsystem $V = (e_i)_{i\in I}$ må imidlertid være en basis for E, thi hvis det af V udspændte underrum F er et ægte underrum i E, kan vi vælge $e \in E\setminus F$ og dermed er $V \cup \{e\} \in \mathcal{U}$, i strid med maximaliteten af V. ||

Af Corollar 13 fås at ethvert uafhængigt system i E kan udvides til en basis for E.

Det er kendt fra Matematik 1, at hvis E har en endelig basis på n elementer, vil alle baser have n elementer, og n kaldes dimensionen af E over L.

Vi vil nu indse at to vilkårlige uendelige baser er ækvipotente og dermed har det mening at definere dimensionen af E som

$$\dim E = \text{card } I,$$

hvor $(e_i)_{i\in I}$ er en basis for E.

<u>Sætning 21. To uendelige baser</u> $(e_i)_{i\in I}$ <u>og</u> $(f_j)_{j\in J}$ <u>for et vektorrum E er ækvipotente</u>.

<u>Bevis</u>: Hver vektor e_i kan på entydig måde skrives som

$$e_i = \sum_{j\in A_i} \lambda_j f_j$$

hvor A_i er en endelig delmængde af J og $\lambda_j \in L\setminus\{0\}$. Hvert $j \in J$ ligger i mindst et A_i, $i \in I$, thi fandtes et $j_o \in J$ så

$$j_o \notin \bigcup_{i\in I} A_i,$$

ville $(f_j)_{j\in J\setminus\{j_o\}}$ være en basis for E, hvilket er umuligt. Der gælder altså

$$J = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Lad nu u være en udvalgsfunktion for I,

$$u: \mathfrak{P}(I)\setminus\{\emptyset\} \to I,$$

og lad os for hvert $i \in I$ vælge en injektiv afbildning φ_i af A_i på et afsnit af $\mathbb{N}$. Vi kan da konstruere en injektiv afbildning $\varphi: J \to I \times \mathbb{N}$ ved fastsættelsen

$$\varphi(j) = (i_o, \varphi_{i_o}(j))$$

hvor $i_o = u(\{i \in I \mid j \in A_i\})$.

Heraf fås

$$\operatorname{card} J \leq \operatorname{card} I \times \mathbb{N} \leq \operatorname{card} I \times I = \operatorname{card} I$$

på grund af sætning 19. Af symmetrigrunde gælder også $\operatorname{card} J \geq \operatorname{card} I$, altså $\operatorname{card} I = \operatorname{card} J$. ||

Mængden af reelle tal $\mathbb{R}$ kan opfattes som et vektorrum over de rationale tals legeme $\mathbb{Q}$. Enhver basis i dette vektorrum kaldes en Hamelbasis, og er altså et system af reelle tal $(e_i)_{i \in I}$, og ethvert reelt tal x kan på præcis en måde skrives

$$x = \sum_{i \in I} q_i e_i$$

hvor $q_i \in \mathbb{Q}$ er 0 for alle $i \in I$ på nær endelig mange.

Til hver basisvektor e_i svarer en $\mathbb{Q}$-lineær afbildning $p_i: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ givet ved

$$p_i(x) = q_i$$

altså ved koefficienten til e_i i ovennævnte fremstilling af x. Afbildningerne $p_i: \mathbb{R} \to \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ tilfredsstiller specielt den klassiske funktionalligning

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

og er diskontinuerte, idet billedet af $\dot{R}$ ved en kontinuert reel funktion er et interval.

De kontinuerte løsninger til denne funktionnalligning er som bekendt funktionerne $f(x) = ax$, $a \in \dot{R}$. Ved hjælp af udvalgsaxiomet er det hermed vist, at der findes andre løsninger end disse til funktionnalligningen, men det pointeres, at det er umuligt at angive en explicit formel for sådanne funktioner.

1. Vis, at mængden af alle følger af reelle tal fra intervallet $]0,1[$ er ækvipotent med et interval. Benyt decimalfremstilling og konstruer en afbildning efter skemaet

$$0,a_1a_2a_3\ldots \longleftrightarrow (0,a_1a_3a_5\ldots,\ 0,a_2a_6a_{10}\ldots,\ 0,a_4a_{12}a_{20}\ldots,\ldots).$$

Glem ikke, at visse tal på to måder kan fremstilles som decimalbrøk. Udnyt Bernsteins ækvivalenssætning.

2. Udvid resultatet fra opgave nr. 1 til vilkårlige reelle talfølger.

3. Vis, at mængden af kontinuerte afbildninger f: $[0,1]$ ind i $\mathbb{R}$ er ækvipotent med $[0,1]$. Benyt, at f er helt bestemt ved sin restriktion til $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ og anvend derefter resultatet fra opgave nr. 2.

4. Vis, at mængden af afbildninger f: $[0,1]$ ind i $\mathbb{R}$ har større kardinaltal end $[0,1]$. $A \mapsto 1_A$, $\mathcal{P}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$

5. Vi betragter en vilkårlig afbildning g: $[0,1]$ ind i $\mathbb{R}$. Kan vi da altid konstruere en kontinuert afbildning f: $[0,1]$ ind i $\mathbb{R}$, således at $\forall\, x \in [0,1]\ (f(x) \neq g(x))$? Svaret er benægtende på grund af følgende konstruktion:

Lad $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ være mængden af kontinuerte afbildninger f: $[0,1]$ ind i $\mathbb{R}$. Ifølge opgave nr. 3 eksisterer en bijektiv afbildning φ: $[0,1]$ på $\hat{C}([0,1],\hat{R})$ og for $x \in [0,1]$ er $\varphi(x)$: $[0,1]$ ind i $\hat{R}$ en kontinuert afbildning, som til $y \in [0,1]$ lader svare $\varphi(x)(y) \in \hat{R}$. Det er nu let at vise, at der til afbildningen g: $[0,1]$ ind i $\hat{R}$ defineret ved $g(x) = \varphi(x)(x)$ ikke svarer noget kontinuert f med den ønskede egenskab.

Dette er et andet eksempel på et rent eksistensbevis, der ikke kan udformes til et konstruktivt bevis.

6. Vis, at enhver ordnet mængde kan fremstilles som foreningsmængde af to disjunkte mængder, således at den ene af disse er velordnet, og den anden ikke har et første element.

7. Lad $(A, \preceq)$ være en totalt ordnet mængde. Vis, at afbildningen V_A: $A \rightarrow \hat{D}(A)$ givet ved

$$V_A(x) = \{y \in A | y \prec x\} \qquad (x \in A),$$

er voksende og injektiv, samt at x er det første element af $A \setminus V_A(x)$.

8. Lad A være en velordnet mængde, og lad $x \in A$. Vis, at $V_A(x) \cup \{x\}$ er et venstreafsnit af A.

9. Lad A være en velordnet mængde, og lad B være et venstreafsnit af A.
Vis, at $V_B(y) = V_A(y)$ for ethvert $y \in B$.

10. Lad A og B være (abstrakte) mængder, og lad $f: A \to B$ være surjektiv. Vis, at $\text{card } B \leqq \text{card } A$. (Benyt udvalgsaxiomet).

11. Gør rede for, at mængden $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0^2$ af alle ordnede par (a,b), hvor $a,b \in \mathbb{N}_0$, er velordnet under den lexicografiske ordning, der defineres ved

$$[(a_1,b_1) \prec (a_2,b_2)] \iff$$

$$[a_1 < a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 < b_2)].$$

12. Vis, at enhver mængde kan velordnes så den har et sidste element.

13. Lad $(M,\leq)$ og $(N,\leq)$ være disjunkte velordnede mængder. Vis, at $M \cup N$ er velordnet under relationen

$$x \leq y \iff \begin{cases} x,y \in M : & x \leq y \\ x,y \in N : & x \leq y \\ x \in M, & y \in N, \end{cases}$$

der altså er den oprindelige ordensrelation på M og N og som lader ethvert element i M gå forud for ethvert element i N. Hvis α og β er ordinaltal skal man vise, at det er muligt at vælge disjunkte repræsentanter $(M,\leq) \in \alpha$, $(N,\leq) \in \beta$, og at det er veldefineret at fastsætte summen af $\alpha+\beta$ til

$$\alpha+\beta = \mathrm{ord}(M \cup N).$$

Vis, at additionen af ordinaltal er associativ, men ikke kommutativ.

14. Lad $M \subsetneqq \mathring{N}_0^{\mathring{N}_0}$ være mængden af alle de følger $(a_n)_{n\in\mathring{N}_0}$ på $\mathring{N}_0$ for hvilke $\{n \in \mathring{N}_0 \mid a_n \neq 0\}$ er endelig. For to forskellige elementer $a = (a_n)_{n\in\mathring{N}_0}$ og $b = (b_n)_{n\in\mathring{N}_0}$ af M eksisterer da

$$m = \max \{n \in \mathring{N}_0 \mid a_n \neq b_n\}.$$

Vi skriver $a \preceq b$ hvis enten $a = b$ eller

$$a \neq b \ \wedge \ a_m < b_m.$$

Vis, at den således definerede relation på M er en velordensrelation (den kan kaldes lexicografisk ordning "bagfra").

V

15. (Regning med kardinaltal). Lad $(\alpha_j)_{j\in J}$ være en vilkårlig familie af kardinaltal. For hvert $j \in J$ lad A_j betegne en mængde med card $A_j = \alpha_j$ (en repræsentant for α_j). Gør rede for, at det har mening at definere summen $\Sigma\, \alpha_j$ og produktet $\Pi\, \alpha_j$ af den givne familie (α_j) af kardinaltal ved

$$\sum_{j\in J} \alpha_j = \mathrm{card} \bigcup_{j\in J} A_j,$$

$$\prod_{j\in J} \alpha_j = \mathrm{card} \prod_{j\in J} A_j,$$

idet det i tilfældet $\Sigma\, \alpha_j$ forudsættes, at repræsentanterne A_j er valgt som parvis disjunkte mængder. Vis også, at dette sidste altid er muligt. I tilfælde af en endelig indeksmængde $J = \{1,2,\ldots,n\}$ skrives også

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n ,$$

$$\prod_{j=1}^{n} \alpha_j = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n .$$

I tilfældet $J = \emptyset$ defineres $\sum_{j\in\emptyset} \alpha_j = 0$, $\prod_{j\in\emptyset} \alpha_j = 1$.

√

16. Bevis, at additionen af kardinaltal er kommutativ og associativ, idet der for enhver familie $(\alpha_j)_{j\in J}$ af kardinaltal gælder

$$\sum_{j\in J} \alpha_j = \sum_{j\in J} \alpha_{\pi(j)}$$

for enhver bijektiv afbildning (permutation) $\pi\colon J \to J$, samt

$$\sum_{j\in J} \alpha_j = \sum_{i\in I} \Big(\sum_{j\in J_i} \alpha_j \Big)$$

for enhver inddeling $J = \bigcup_{i\in I} J_i$ i parvis disjunkte delmængder J_i. Bevis endvidere de analoge regler for multiplikation af kardinaltal.

17. Lad α og β være to kardinaltal og lad A og B være repræsen-

tanter for disse: card A = α, card B = β. Gør rede for, at det har mening at definere potensen

$$\alpha^{\beta} = \text{card } (A^{B}) ,$$

hvor A^B betegner mængden af alle afbildninger af B ind i A. Vis endvidere, at

$$\alpha^{\beta} = \prod_{j\in B} \alpha_j, \quad \beta\alpha = \sum_{j\in B} \alpha_j ,$$

når vi sætter $\alpha_j = \alpha$ for alle $j \in B$.

✓

18. Bevis potensreglerne

$$\prod_{j\in J} (\alpha^{\beta_j}) = \alpha^{\Sigma\beta_j} ,$$

$$\prod_{j\in J} (\alpha_j^{\beta}) = (\prod_{j\in J} \alpha_j)^{\beta},$$

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma} .$$

19. Lad $(\alpha_j)_{j\in J}$ og $(\beta_j)_{j\in J}$ være to familier af kardinaltal over samme indeksmængde J. Vis, at hvis der for ethvert $j\in J$ gælder $\alpha_j \leqq \beta_j$, så er

$$\sum_{j\in J} \alpha_j \leqq \sum_{j\in J} \beta_j, \quad \prod_{j\in J} \alpha_j \leqq \prod_{j\in J} \beta_j .$$

20. Lad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ være fire kardinaltal. Vis, at hvis $\alpha \leq \beta$ og $\gamma \leq \delta$, så er også

$$\alpha^{\gamma} \leq \beta^{\delta} .$$

21. Lad α og β være kardinaltal opfyldende $1 < \alpha \leq 2^{\beta}$, $\aleph_0 \leq \beta$. Vis, at

$$\alpha^{\beta} = 2^{\beta} .$$

22. Lad M være en uendelig mængde, $\mathcal{D}_e(M)$ mængden af endelige delmængder af M. Vis, at

$$\text{card } M = \text{card } \mathcal{D}_e(M).$$

23. Idet $\aleph = \text{card } \mathbb{R}$ skal man vise, at

$$\aleph = 2^{\aleph_0} .$$

Af opgave 21 følger da at

$$\aleph = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0} .$$

24. Vis, at card $A = \aleph$ for enhver ikke tom åben delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

25. Vis, at ethvert ægte ideal i en ring med etelement er indeholdt i et maximalt ideal.

26. Vis, at alle Hamelbaser er ækvipotente med $\mathring{R}$, altså at

$$\dim(\mathring{R},+,\mathring{Q}) = \aleph .$$

27. Gør rede for, at der for enhver mængde M gælder

$$\operatorname{card} \mathring{D}(M) = 2^{\operatorname{card} M}$$

Vis derved, at der for ethvert kardinaltal α gælder

$$\alpha < 2^{\alpha} .$$

Den generaliserede kontinuumshypotese udsiger, at for ethvert uendeligt kardinaltal α er 2^{α} det umiddelbart efterfølgende, altså det mindste kardinaltal $> \alpha$. Sierpinski har vist at den generaliserede kontinuumshypotese medfører udvalgsaxiomet.

28. Lad $(E,+,L)$ være et vektorrum og lad E^* være mængden af linearformer på E. Mængden E^* er på naturlig måde organiseret som et vektorrum over L og kaldes det algebraisk duale rum til E. Vis at $\dim E \leq \dim E^*$ og at der gælder lighedstegn hvis $\dim E < \aleph_0$. Angiv et eksempel der viser, at der kan gælde $\dim E < \dim E^*$.

29. Vis at to vektorrum over samme legeme er isomorfe hvis og kun hvis de har samme dimension

Mat. 6, 1971-72. Rettelser til Mgd.

p. 5,	linie 5:	"absurdt" skal være absurd.
	linie 5:	"Russel" skal være Russell.
p. 22,	linie 9_n:	"delmængden" skal være delmængder.
p. 23,	linie 2 og 4:	Indføj $\mathcal{A}$ mellem "af - og" og "i - sættes".
p. 24,	linie 3_n:	Der skal stå den intuitionistiske retning.
p. 25,	linie 2:	Ordet "vi" fjernes.
p. 31,	linie 9:	Efter summationstegnet skal stå $\lambda_j f_j$.

GRUNDTRÆK AF DEN GENERELLE TOPOLOGI

Indholdsoversigt:

1. Om tomme indeksmængder. Vi finder det bekvemt senere hen at arbejde med foreningsmængder og fællesmængder over tomme indeksmængder, og skynder os at indføre disse rent mængdeteoretiske begreber: Arbejder vi inden for en grundmængde M, da defineres foreningsmængden og fællesmængden over en tom indeksmængde af delmængder til M ved

$$\bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset, \quad \bigcap_{i\in\emptyset} A_i = M.$$

Disse definitioner er umiddelbart rimelige, idet en foreningsmængde af færre og færre mængder bliver mindre og mindre, mens en fællesmængde af færre og færre mængder bliver større og større. Man indser da også let, at de sædvanlige regneregler fra mængdelæren bevarer deres gyldighed, selv når vi tillader tomme indeksmængder.

Overalt i det følgende, hvor det er af særlig betydning, at vi tillader tomme indeksmængder, vil vi gøre opmærksom derpå.

2. Net og filtre på abstrakte mængder. Elementære topologiske begreber kan studeres ved hjælp af følger. Følger slår imidlertid ikke til ved visse undersøgelser. De opståede problemer kan klares på mange måder, hvoraf to er særlig vigtige. For det første kan man give en temmelig direkte generalisation af følgebegrebet; dette leder til begrebet net (eller generaliseret følge). En anden mulighed er at betragte systemet af mængder med den egenskab, at en given følges elementer tilhører mængden fra et vist trin at regne og så opstille passende aksiomer for sådanne mængdesystemer; dette fører til begrebet filter.

Også denne mulighed må siges at være ret nærliggende - i det mindste når man først har fået ideen! - thi de topologiske vigtige begreber for følger såsom fortætningspunkt og grænsepunkt er jo begreber, der kun vedrører følgens elementer for store indices.

De to nye begreber, net og filtre, kan studeres uafhængigt af tilstedeværelsen af topologisk struktur. Dette vil vi gøre i denne og i næste §; senere skal vi se på begrebernes betydning i et topologisk rum.

Det følger af ovenstående bemærkninger, at teorien for net og teorien for filtre i alt væsentligt er samme teori, hvor tingene blot siges på forskellig måde. Derfor har vi i disse noter besluttet kun at udvikle den ene teori i detaljer, nemlig den for filtre, og nøjes med at give de grundlæggende definitioner for den anden; desuden vil vi omtale sammenhængen mellem de to teorier. Væsentlige resultater formuleret ved hjælp af net er henvist til opgaverne.

<u>Definition.</u> Lad M være en mængde. Et filter på M er et system $\mathfrak{F}$ af delmængder af M ($\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(M)$) som opfylder følgende fire aksiomer:

(i) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,

(ii) $M \in \mathfrak{F}$,

(iii) $A \in \mathfrak{F} \wedge B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{F}$,

(iv) $A \in \mathfrak{F} \wedge B \supseteq A \Rightarrow B \in \mathfrak{F}$.

Bemærk, at såfremt $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, er (ii) en følge af (iv).

<u>Eksempler.</u> 1) Filtret bestående af den ene mængde M.

2) Er $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en følge i M, så er

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq M \mid x_n \in A \text{ fra et vist trin at regne}\}$$

et filter på M.

3) Er M en uendelig mængde, da er

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq M \mid \complement A \text{ er endelig}\}$$

et filter på M. Er M = $\mathbb{N}$, kaldes dette filter <u>Fréchet filtret.</u>

4) Lad M være planen $\mathbb{R}^2$; da er systemet af mængder der hver for sig indeholder en eller anden cirkelskive med centrum i (o,o) et filter på $\mathbb{R}^2$ (med betegnelser, vi senere skal indføre bliver dette filter omegnsfiltret for (o,o)).

Begrebet "net" kan vi nå frem til ved følgende to definitioner:

<u>Definition.</u> D siges at være en <u>opad filtrerende mængde,</u> hvis D er en mængde forsynet med en præordensrelation $\leq$, der opfylder betingelsen

$$\alpha \in D \wedge \beta \in D \Rightarrow \exists \gamma \in D: \quad \alpha \leq \gamma \wedge \beta \leq \gamma.$$

Vi minder om at en præordensrelation er en refleksiv og transitiv relation.

Definitionen kan udtrykkes ved, at enhver delmængde af D bestående af to elementer har en majorant; så har også enhver endelig delmængde en majorant. En <u>nedad filtrerende</u> mængde defineres ved i stedet at kræve, at enhver endelig delmængde har en minorant.

<u>Definition.</u> Et net på mængden M er en afbildning af en opad filtrende mængde ind i M.

Vi vil benytte betegnelsen $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ for et net, og kalde den opad filtrerende mængde D for nettets indexmængde.

Eksempler på opad filtrerende mængder. 1) $\mathbb{N}$ med den sædvanlige ordning; et net $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ med $\mathbb{N}$ som indexmængde kaldes som sædvanlig en følge.

2) $\mathbb{R}$ med den sædvanlige ordning. Overhovedet er enhver fuldstændigt ordnet mængde filtrerende.

3) Mængden af delmængder af en given mængde, ordnet ved $\subseteq$, altså $A\leq B \Leftrightarrow A\subseteq B$, eller mængden af endelige delmængder i samme ordning.

4) Mængden af klasseinddelinger af en given mængde i endelig mange klasser, ordnet ved videredeling.

5) Mængden af kontinuerte funktioner $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som er domineret af en given (ikke nødvendigvis kontinuert) funktion med den sædvanlige punktvise ordning.

Definition. Lad $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ være et net på M og A en delmængde af M. Nettet $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ siges at være ofte i A, hvis $\forall\alpha\in D\ \exists\beta\geq\alpha$: $x_\beta\in A$, og nettet siges at være i A fra et vist trin at regne, hvis $\exists\alpha\in D\ \forall\beta\geq\alpha$: $x_\beta\in A$.

At $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ er i A fra et vist trin at regne skriver vi kort: $x_\alpha\in A$ f.v.t.

Vi skal nu omtale sammenhængen mellem net og filtre. Lad $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ være et net på M. Vi betragter systemet

$$\mathfrak{F} = \{A\subseteq M \mid x_\alpha\in A \text{ f.v.t.}\}.$$

Det er let at se at $\mathfrak{F}$ er et filter; læg iøvrigt mærke til, at den filtrerende egenskab ved D's ordning kun spiller en rolle for aksiomet (iii)'s gyldighed. Vi vil kalde $\mathfrak{F}$ for <u>afsnitsfiltret</u> hørende til $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ (betegnelsen skyldes, at afsnittene $\{x_\beta \mid \beta\geq\alpha\};\alpha\in D$ danner, hvad vi med en definition fra næste § vil kalde en basis for $\mathfrak{F}$).

Hvis vi omvendt går ud fra et filter $\mathfrak{F}$ på M, kan vi knytte et net dertil. Som D bruger vi mængden af par (x,F), hvor $x\in F$ og $F\in\mathfrak{F}$; D er da opad filtrerende under ordningen

$$(x_1, F_1) \leq (x_2,F_2) \Leftrightarrow F_1 \supseteq F_2.$$

Nettet hørende til $\mathfrak{F}$ defineres nu ved afbildningen

$$(x,F) \to x$$

af D ind i M. Man indser, at afsnitsfiltret hørende til dette net er $\mathfrak{F}$ selv.

Før vi forlader nettene må vi indføre endnu et vigtigt begreb.

<u>Definition.</u> Et net $(y_\beta)_{\beta\in E}$ er et <u>delnet</u> af nettet $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ såfremt der findes en afbildning $\varphi:E \to D$ således, at følgende to betingelser er opfyldte:

(i) $$y_\beta = x_{\varphi(\beta)} \quad \forall\beta\in E,$$

(ii) $$\forall\alpha_0\in D\ \exists\beta_0\in E\ \forall\beta\geq\beta_0:\ \ \varphi(\beta)\geq \alpha_0.$$

Et delnet af $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ vil vi ofte skrive $(x_{\alpha'_\beta})_{\beta\in E}$ eller $(x_{\alpha(\beta)})_{\beta\in E}$. Bemærk, at et delnet af en følge ikke behøver at være en følge (og hvis det er en følge behøver ikke være, hvad vi normalt forstår ved en delfølge idet afbildningen φ ikke behøver at være voksende).

3. Filtre på abstrakte mængder.

Definition. Idet vi betragter filtre på samme mængde, siges filtret $\grave{F}_1$ at være *finere* end filtret $\grave{F}_2$ såfremt $\grave{F}_1 \supseteq \grave{F}_2$. I så fald siger vi også at $\grave{F}_2$ er *grovere* end $\grave{F}_1$. Et maksimalt filter kaldes et *ultrafilter*; $\grave{U}$ er altså et ultrafilter, hvis $\grave{U}$ er et filter således, at intet filter forskelligt fra $\grave{U}$ er finere end $\grave{U}$.

Vi stiller nu følgende spørgsmål: Givet et system $\grave{A}$ af delmængder af M ($\grave{A} \subseteq \grave{D}(M)$), under hvilke omstændigheder findes et filter $\grave{F}$ indeholdende $\grave{A}$ ($\grave{F} \supseteq \grave{A}$)? Såfremt der findes et sådant filter, findes der da et groveste? Det sidste spørgsmål kan vi klart svare ja til, idet man let beviser følgende

Lemma 3.1. Er I en ikke-tom indexmængde og $\grave{F}_i$ et filter på M for hvert $i \in I$, da er $\bigcap_{i \in I} \grave{F}_i$ et filter på M.

Det første spørgsmål er heller ikke vanskeligt at besvare:

Sætning 3.2. Lad $\grave{A} \subseteq \grave{D}(M)$. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at der findes et filter indeholdende $\grave{A}$ er, at ingen fællesmængde af endelig mange mængder fra $\grave{A}$ er tom.

Er betingelsen opfyldt kan det groveste filter indeholdende $\grave{A}$ beskrives eksplicit: Betegn med $\grave{A}^*$ systemet af alle endelige fællesmængder af mængder i $\grave{A}$. Det groveste filter indeholdende $\grave{A}$, også kaldet filtret *frembragt* af $\grave{A}$, er da filtret

$$\grave{F} = \{F \subseteq M \mid \exists A \in \grave{A}^* : \ F \supseteq A\}.$$

Sidste del af sætningen er ikke sand med mindre vi tillader at regne en tom fællesmængde af mængder fra $\mathring{A}$ med til $\mathring{A}^*$.

<u>Bevis.</u> $\emptyset \notin \mathring{A}^*$ er klart en nødvendig betingelse. Sætningen er fuldstændig bevist, hvis vi kan vise at $\hat{F} = \{F \mid \exists A \in \mathring{A}^*: F \supseteq A\}$ virkelig <u>er</u> et filter. Dette er let. At f. eks. betingelsen $M \in \hat{F}$ er opfyldt, skyldes at $\mathring{A}^*$ ikke er tom (M er med i $\mathring{A}^*$). []

<u>Definition.</u> Lad $\hat{F}$ være et filter på M og $\mathring{A}$ en delmængde af $\hat{F}$. $\mathring{A}$ siges da at være en <u>filtersubbasis</u> for $\hat{F}$ såfremt $\hat{F}$ netop er filtret frembragt af $\mathring{A}$; og $\mathring{A}$ siges at være en <u>filterbasis</u> for $\hat{F}$ såfremt

$$\hat{F} = \{F \subseteq M \mid \exists A \in \mathring{A}: \; F \supseteq A\}.$$

Vi har set at den nødvendige og tilstrækkelige betingelse for at $\mathring{A} \subseteq \mathring{D}(M)$ er en filtersubbasis for et eller andet filter er, at $\emptyset \notin \mathring{A}^*$. Det tilsvarende resultat for filterbaser lyder:

<u>Sætning 3.3.</u> En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for <u>at</u> $\mathring{A} \subseteq \mathring{D}(M)$ er en filterbasis for et eller andet filter (og da nødvendigvis for filtret frembragt af $\mathring{A}$) er, at følgende tre betingelser, også kaldet <u>aksiomerne for filterbaser,</u> er opfyldte:

(i) $\emptyset \notin \mathring{A}$

(ii) $\mathring{A} \neq \emptyset$

(iii) $A_1 \in \mathring{A} \wedge A_2 \in \mathring{A} \Rightarrow \exists A \in \mathring{A}: \; A \subseteq A_1 \cap A_2$.

Beviset overlades til læseren.

Vi skal nu udlede to vigtige resultater om ultrafiltre; det første giver en karakterisation af de filtre, der er ultrafiltre, og det andet viser, at der findes mange ultrafiltre.

Sætning 3.4. Lad $\mathfrak{F}$ være et filter på M. Da er $\mathfrak{F}$ et ultrafilter, hvis og kun hvis der om enhver delmængde A af M gælder $A \in \mathfrak{F} \vee CA \in \mathfrak{F}$.

Bevis. Antag først at $\mathfrak{F}$ er et ultrafilter. Lad A være en delmængde af M så at $A \notin \mathfrak{F}$. Vi ønsker at vise, at $CA \in \mathfrak{F}$. Sæt $\mathfrak{F}^* = \{B \subseteq M \mid A \cup B \in \mathfrak{F}\}$. Man indser, at $\mathfrak{F}^*$ er et filter ($\emptyset \notin \mathfrak{F}^*$ fordi $A \notin \mathfrak{F}$) og at $\mathfrak{F}^*$ er finere end $\mathfrak{F}$. Så må $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$ og heraf følger $CA \in \mathfrak{F}$.

Antag dernæst at betingelsen $\forall A \subseteq M$: $A \in \mathfrak{F} \vee CA \in \mathfrak{F}$ er opfyldt. Lad $\mathfrak{F}^*$ være et filter finere end $\mathfrak{F}$. Vi skal vise at $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$. Lad $A \in \mathfrak{F}^*$. Så vil $CA \notin \mathfrak{F}^*$ da $\mathfrak{F}^*$ er et filter. Da $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$ må $CA \notin \mathfrak{F}$. Af det givne ses så at $A \in \mathfrak{F}$. []

Eksempel. Er $x \in M$ så er $\mathfrak{U} = \{A \subseteq M \mid x \in A\}$ et ultrafilter i M.

Ovennævnte eksempel et det eneste eksempel, man kender på et ultrafilter, der kan beskrives eksplicit. Alligevel har vi følgende resultat:

Sætning 3.5. Ethvert filter kan forfines til et ultrafilter.

Bevis. Lad $\mathfrak{F}$ være et filter i M og betragt mængden af filtre finere end $\mathfrak{F}$, ordnet ved relationen "finere" ($\mathfrak{F}_1 \geq \mathfrak{F}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{F}_1 \supseteq \mathfrak{F}_2$). Eftervis at vi har med en induktivt ordnet mængde at gøre, og anvend Zorn's lemma. []

At der findes ultrafiltre, der ikke er af den i eksemplet ovenfor nævnte type, ses let. Vi kan f.eks. tage et ultrafilter finere end Fréchet filtret på $\mathbb{N}$. Til slut i denne § vil vi undersøge, hvad der sker med filtre ved afbildninger.

Sætning 3.6.(Filtre og afbildninger). Enhver afbildning vil afbilde et filter eller en filterbasis på en filterbasis og et ultrafilter eller en ultrafilterbasis på en ultrafilterbasis. Er afbildningen surjektiv, afbildes filter på filter og ultrafilter på ultrafilter.

Ved en ultrafilterbasis forstås selvfølgelig en filterbasis, der er filterbasis for et ultrafilter.

Bevis. $\varphi: M_1 \to M_2$ betegner en afbildning og $\hat{F}_1$ en filterbasis på M_1. Betragt $\hat{F}_2 = \varphi(\hat{F}_1) = \{\varphi(A_1) | A_1 \in \hat{F}_1\}$. At $\hat{F}_2$ opfylder aksiomerne (i) og (ii) for filterbaser er klart. At også (iii) er opfyldt skyldes inklusionen

$$\varphi(A_1 \cap B_1) \subseteq \varphi(A_1) \cap \varphi(B_1).$$

Antag nu at $\hat{F}_1$ er en ultrafilterbasis. Lad A_2 være en vilkårlig delmængde af M_2. Enten findes en mængde A_1 i $\hat{F}_1$ således, at $\varphi^{-1}(A_2) \supseteq A_1$ eller også findes en mængde A_1' i $\hat{F}_1$ således, at $C\varphi^{-1}(A_2) \supseteq A_1'$. I det første tilfælde vil $A_2 \supseteq \varphi(A_1) \in \hat{F}_2$ og i det andet tilfælde vil $CA_2 \supseteq \varphi(A_1') \in \hat{F}_2$. Vi har set, at $\hat{F}_2$ er en ultrafilterbasis.

Beviset for sidste del af sætningen vedrørende surjektive afbildninger overlades til læseren. []

4. Topologisk rum. Subbaser og baser for en topologi.

Definition. Et topologisk rum er et par $T = (M, \hat{O})$, hvor M er en mængde og $\hat{O} \subseteq \hat{D}(M)$ et system af delmængder af M som opfylder følgende to aksiomer:

(i) Enhver foreningsmængde af mængder fra $\mathcal{O}$ tilhører $\mathcal{O}$, altså

$$O_i \in \mathcal{O} \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O},$$

(ii) Enhver endelig fællesmængde af mængder fra $\mathcal{O}$ tilhører $\mathcal{O}$, altså

$$O_i \in \mathcal{O} \ \forall i \in I,\ I \text{ endelig} \Rightarrow \bigcap_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

Mængderne i $\mathcal{O}$ kaldes de <u>åbne</u> mængder.

Det er vigtigt, at vi tillader tomme indexmængder i denne definition. Derfor er såvel $\emptyset$ som M åbne mængder i et topologisk rum $T = (M,\mathcal{O})$. Aksiomet (ii) er ækvivalent med kravene $M \in \mathcal{O}$ og $O_1 \in \mathcal{O} \wedge O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

Ønsker vi at fremhæve mængden M taler vi om "det topologiske rum M", vil vi derimod fremhæve $\mathcal{O}$, taler vi om "topologien $\mathcal{O}$ på M". Normalt vil vi bruge bogstavet T til at betegne et topologisk rum. T står da for parret $(M,\mathcal{O})$; alligevel vil vi ofte skrive $x \in T$ og $A \subseteq T$, hvor vi egentlig mener $x \in M$ og $A \subseteq M$. De foretrukne bogstaver til betegnelse af åbne mængder er O (eng."open") og G (ty."Gebiet").

Lad M være forsynet med to topologier $\mathcal{O}_1$ og $\mathcal{O}_2$. $\mathcal{O}_1$ siges at være <u>stærkere</u> eller <u>finere</u> end $\mathcal{O}_2$ såfremt $\mathcal{O}_1 \supseteq \mathcal{O}_2$; i så fald siges $\mathcal{O}_2$ at være <u>svagere</u> eller <u>grovere</u> end $\mathcal{O}_1$.

<u>Eksempler.</u> 1) $\mathcal{O} = \{\emptyset, M\}$. Dette er den svageste blandt samtlige topologier på M; den er så svag, at ethvert net i M konvergerer mod ethvert punkt i M (se § 7 for begrebet "konvergent net").

Denne topologi kaldes den <u>diffuse</u> topologi.

2) $\mathcal{O} = \mathcal{P}(M)$. Dette er den stærkeste topologi på M; den er så stærk at den kun tillader et net $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ at konvergere mod x så-

fremt $x_\alpha = x$ f.v.t. Denne topologi kaldes den <u>diskrete</u> topologi.

Vi skal nu se på følgende problem: Givet et system $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}(M)$ af delmængder af M, hvornår findes en svageste topologi indeholdende $\mathcal{B}$? Det er nemt at se, at en sådan topologi altid findes, idet man let indser

<u>Lemma 4.1</u>. Er $\mathcal{O}_i$ topologier på M for alle $i \in I$, da er $\bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ også en topologi på M.

Vi kan derfor definere <u>topologien frembragt af</u> $\mathcal{B}$ ved

$$\mathcal{O}(\mathcal{B}) = \bigcap \{\mathcal{O} \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{O} \wedge \mathcal{O} \text{ en topologi i } M\}.$$

Det er bemærkelsesværdigt, at topologien $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ kan beskrives eksplicit.

<u>Sætning 4.2</u>. Topologien $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ frembragt af $\mathcal{B}$ består af samtlige mængder, der er en foreningsmængde af mængder, der hver for sig, er endelige fællesmængder af mængder fra $\mathcal{B}$.

Det er af betydning, at vi tillader tomme indexmængder i denne sætning. Betragter vi mængdesystemet

$$\mathcal{B}^* = \{\bigcap_{i \in I} B_i \mid I \text{ er endelig, } B_i \in \mathcal{B}\ \forall i \in I\},$$

da er sætningens udsagn, at

$$\mathcal{O}(\mathcal{B}) = \{\bigcup_{i \in I} B_i^* \mid I \text{ er en vilkårlig mængde, } B_i^* \in \mathcal{B}^*\ \forall i \in I\}.$$

Beviset er elementært og overlades til læseren.

En passant nævner vi, at det "duale" problem, hvor vi søger en fineste topologi indeholdt i $\mathcal{B}$ kun har en løsning såfremt $\mathcal{B}$ selv er en topologi.*)

Definition. Lad $\mathcal{O}$ være en topologi. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ kaldes en subbasis for $\mathcal{O}$ hvis $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{B})$; og $\mathcal{B}$ kaldes en basis for $\mathcal{O}$, hvis

$$\mathcal{O} = \{ \bigcup_{i\in I} B_i \mid I \text{ er en mængde}, B_i \in \mathcal{B} \ \forall i \in I\}.$$

To subbaser (baser) kaldes ækvivalente såfremt de er subbaser (baser) for samme topologi.

En topologi har normalt mange baser - heri ligger netop det nyttige i begrebet.

Sætning 4.3. Lad $\mathcal{B}$ være en vilkårlig delmængde af $\mathcal{P}(M)$. Da er $\mathcal{B}$ en basis for en eller anden topologi (og da nødvendigvis for topologien frembragt af $\mathcal{B}$), hvis og kun hvis følgende to krav, kaldet aksiomerne for en basis, er opfyldte:

(i) $B_1 \in \mathcal{B} \wedge B_2 \in \mathcal{B} \wedge x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ så at $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$,

(ii) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = M$.

Bevis. $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathcal{O}(\mathcal{B})$, hvis og kun hvis enhver endelig fællesmængde af mængder fra $\mathcal{B}$ er en foreningsmængde af mængder fra $\mathcal{B}$, og dette sker, hvis og kun hvis dels M er en foreningsmængde af mængder fra $\mathcal{B}$, dels enhver fællesmængde af to mængder fra $\mathcal{B}$ er en foreningsmængde af mængder fra $\mathcal{B}$, men så er vi netop nået fram til betingelserne (ii) og (i). ▯

5. Lokal struktur af et topologisk rum.

Definition. Ved en omegn af et punkt x i et topologisk rum T forstås en delmængde U af T for hvilken der findes en åben mængde O med $x \in O \subseteq U$. Ved omegnsfiltret eller omegnssystemet for x forstås mængden

$$\mathcal{U}(x) = \{U \subseteq T \mid U \text{ er en omegn af } x\}.$$

Omegnsfiltret $\mathcal{U}(x)$ <u>er</u> et filter. En filterbasis $\mathcal{B}(x)$ for $\mathcal{U}(x)$ kaldes en <u>omegnsbasis</u> for x. $\mathcal{B}(x)$ er således en omegnsbasis for x, hvis og kun hvis

$$\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$$

og

$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists B \in \mathcal{B}(x):\quad B \subseteq U.$$

Af og til kan det være bekvemt at tale om en omegn af en vilkårlig delmængde A af T; herved forstås en mængde $U \subseteq T$ for hvilken der findes $O \in \mathcal{O}$ med $A \subseteq O \subseteq U$.

Ofte vil man fastlægge en topologi ved opgivelse af omegnsfiltrene eller ved opgivelse af et system af omegnsbaser. Først bemærkes, at omegnsfiltrene $\mathcal{U}(x)$; $x \in T$ i et topologisk rum T tilfredsstiller betingelserne

(i) $U_i \in \mathcal{U}(x)\ \forall i \in I \wedge I$ endelig $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}(x)$,

(ii) $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in U$,

(iii) $U \in \mathcal{U}(x) \wedge V \supseteq U \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$,

(iv) $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists V \in \mathcal{U}(x)\ \forall y \in V\colon U \in \mathcal{U}(y)$.

Som V i (iv) kan man bruge en åben mængde indeholdende x og indeholdt i U.

(i), (ii) og (iii) er egenskaber, der kun vedrører et enkelt punkt i T, mens (iv) siger noget om hvordan $\mathcal{U}(x)$ ændrer sig fra punkt til punkt. (i) er ækvivalent med $T \in \mathcal{U}(x)$ og $U \in \mathcal{U}(x) \wedge V \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U \wedge V \in \mathcal{U}(x)$. På grund af (iii) kan man iøvrigt erstatte betingelsen $T \in \mathcal{U}(x)$ med $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$. Vi kan genfinde de åbne mængder ud fra omegnsfiltrene, idet der om en delmængde A af M gælder

$$A \in \mathcal{O} \Leftrightarrow A \in \mathcal{U}(x)\ \forall x \in A.$$

Implikationen $\Rightarrow$ er simpel at eftervise; den anden implikation bevises således: hvis $A \in \mathcal{U}(x)\ \forall x \in A$, findes for hvert punkt $x \in A$ en åben mængde O_x således, at $x \in O_x \subseteq A$. Så er $A = \cup\{O_x | x \in A\}$ som er en åben mængde.

Vi skal nu se, hvad der sker, hvis vi går den "omvendte" vej:

<u>Sætning 5.1.</u> (<u>Topologi fastlagt ved omegnsfiltre</u>). Givet er en mængde M og et system $\{\mathcal{U}(x)\}_{x\in M}$ af delmængder af $\mathcal{P}(M)$ som opfylder (i)-(iv) ovenfor. Der findes da netop een topologi på M således, at $\{\mathcal{U}(x)\}_{x\in M}$ bliver systemet af omegnsfiltre. I denne topologi er $O \subseteq M$ åben hvis og kun hvis $O \in \mathcal{U}(x)\ \forall x \in O$.

<u>Bevis</u>. Sæt $\mathcal{O} = \{O \subseteq M | \forall x \in O: O \in \mathcal{U}(x)\}$. Ifølge de forudgående bemærkninger er $\mathcal{O}$ den eneste mulighed for en topologi med den ønskede egenskab. Man ser let, at $\mathcal{O}$ <u>er</u> en topologi; hertil benyttes aksiomerne (i) og (iii). Vi mangler nu at vise, at $\mathcal{U}(x)$ er omegnsfiltret for x. Anvendes (iii) ses, at enhver omegn for x tilhører $\mathcal{U}(x)$. Antag nu at $U \in \mathcal{U}(x)$; vi ønsker at bevise at U er en omegn for x; hertil betragter vi mængden $G = \{y | U \in \mathcal{U}(y)\}$. Vi ser at $x \in G$ og, p.gr.af (ii), at $G \subseteq U$. Vi vil fuldføre beviset ved at vise $G \in \mathcal{O}$. Lad $y \in G$ d.v.s. $U \in \mathcal{U}(y)$; ifølge (iv) findes da $V \in \mathcal{U}(y)$ således, at $U \in \mathcal{U}(z)$ for alle $z \in V$. Heraf ses, at $V \subseteq G$. Da $V \in \mathcal{U}(y)$ ses af (iii) at $G \in \mathcal{U}(y)$. $\square$

Betingelserne (i)-(iv) kaldes for <u>omegnsaksiomerne</u>. På tilsvarende vis kan man opstille aksiomer for et system af omegnsbaser. Man finder uden vanskelighed følgende resultat:

Sætning 5.2. (Topologi fastlagt ved omegnsbaser). Givet en mængde M og et system $\{\dot{B}(x)\}_{x \in M}$ af delmængder af $\dot{D}(M)$ som for ethvert $x \in M$ opfylder betingelserne

(i) $\dot{B}(x) \neq \emptyset$,

(ii) $B_1 \in \dot{B}(x) \wedge B_2 \in \dot{B}(x) \Rightarrow \exists B \in \dot{B}(x): \quad B_1 \cap B_2 \supseteq B$,

(iii) $x \in B \; \forall B \in \dot{B}(x)$,

(iv) $\forall B \in \dot{B}(x) \; \exists E \in \dot{B}(x) \; \forall y \in E \; \exists W \in \dot{B}(y): \quad W \subseteq B$.

Der findes da netop een topologi på M således, at $\dot{B}(x)$ bliver en omegnsbasis for x for alle $x \in M$.

For at bevise dette behøver man blot betragte $\dot{U}(x)$ defineret ved $\dot{U}(x) = \{U \subseteq M \mid \exists B \in \dot{B}(x): \quad U \supseteq B\}$.

At (i)-(iv) i sætning 5.2 er opfyldte, hvis man går ud fra et topologisk rum, og for hvert punkt vælger en omegnsbasis, ses også let.

Eksempel (Metrisk rum). Lad (M,d) være et metrisk rum; d er altså en afbildning $d: M \times M \to [o,\infty[$ som opfylder $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,y) = o \Rightarrow x=y$ samt $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$. Betragter vi for ethvert $x \in M$ systemet $\dot{B}(x)$ af kugler med centrum i x, da ser vi, at (i)-(iv) fra sætning 5.2 er opfyldte. M er således på naturlig vis blevet forsynet med en topologi, den metriske topologi. Betingelsen $d(x,y) = o \Rightarrow x=y$ spiller iøvrigt ingen rolle for disse overvejelser; forlanges den ikke opfyldt, får vi i stedet et pseudo-metrisk rum.

Et topologisk rum $T = (M,\dot{O})$ kaldes metriserbart, såfremt der findes en metrik d på M således, at den metriske topologi er identisk med den oprindelige; d siges i så fald at metrisere T.

Er T metriserbart, vil der normalt findes mange metrikker der metriserer T.

6. <u>Afsluttet mængde, indre, afslutning, rand, tæt mængde.</u>

<u>Definition.</u> En delmængde F af et topologisk rum T kaldes <u>afsluttet,</u> hvis CF er åben. For en vilkårlig delmængde A af T defineres $\mathring{A}$, det <u>indre</u> af A, og $\bar{A}$, <u>afslutningen</u> af A, ved

$$\mathring{A} = \bigcup\{G \mid G \subseteq A \wedge G \text{ åben}\},$$

$$\bar{A} = \bigcap\{F \mid A \subseteq F \wedge F \text{ afsluttet}\}.$$

Et punkt i $\mathring{A}$ kaldes et <u>indre punkt</u> for A; et punkt i $\bar{A}$ kaldes et <u>kontaktpunkt</u> for A; et punkt der er kontaktpunkt både for A og for CA kaldes et <u>randpunkt</u> for A. Mængden af A's randpunkter kaldes A's <u>rand</u> og betegnes ∂A, altså $\partial A = \bar{A} \cap \overline{CA}$.

Er A og B to delmængder af T, siges A at være <u>tæt i</u> B, hvis $B \subseteq \bar{A}$; en delmængde der er tæt i T kaldes blot en <u>tæt</u> delmængde.

En fællesmængde af afsluttede mængder er afsluttet; en endelig foreningsmængde af afsluttede mængder er afsluttet. Ofte betegnes afsluttede mængder med bogstavet F (fr. "fermé").

$\mathring{A}$ er den største åbne mængde indeholdt i A, og $\bar{A}$ er den mindste afsluttede mængde indeholdende A; $\mathring{A}$ og $\bar{A}$ kan også karakteriseres på anden vis:

$$\mathring{A} = \{x \mid A \in \mathfrak{U}(x)\},$$

$$\bar{A} = \{x \mid U \cap A \neq \emptyset \ \forall U \in \mathfrak{U}(x)\}.$$

Beviserne for dette såvel som for nedenstående regneregler overlades til læseren.

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B} \wedge \bar{A} \subseteq \bar{B},$$

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B},$$

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \subseteq \mathring{A} \cup \bar{B},$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

$$\bar{A} \cap \mathring{B} \subseteq \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B},$$

$$\overline{CA} = C(\mathring{A}).$$

Lad os her minde om betydningen af begrebet tæt delmængde. Ønsker vi at bevise at alle elementer i M har en vis egenskab, vil det ofte vise sig bekvemt at gennemføre beviset herfor ved først at vise egenskaben for en passende valgt tæt delmængde og dernæst vise, at mængden af de elementer, der har egenskaben er afsluttet.

7. *Konvergens, kontaktpunkter.* Fra Mat. 1 ved vi, at topologiske egenskaber for metriserbare rum kan studeres ved brug af konvergente følger. Som nævnt slår følger ikke til i det generelle tilfælde ; man kan så klare sig med begrebet "konvergent net" eller "konvergent filter".

Definition. Lad T være et topologisk rum og x et punkt i T. Et net $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ på T siges at have x som *grænsepunkt* eller at *konvergere mod* x såfremt det for enhver omegn U af x gælder, at $x_\alpha \in U$ f.v.t.; i så fald skriver vi $x_\alpha \to x$.

Et filter $\mathfrak{F}$ på T siges at have x som *grænsepunkt* eller at *konvergere mod* x såfremt $\mathfrak{F}$ er finere end omegnsfiltret $\mathfrak{U}(x)$; i så fald skriver vi $\mathfrak{F} \to x$. En filterbasis $\mathfrak{F}$ i T siges at have x som *grænsepunkt* eller at *konvergere mod* x såfremt det af $\mathfrak{F}$ frembragte filter konvergerer mod x; i så fald skriver vi $\mathfrak{F} \to x$.

Er $\mathfrak{F}$ et filter eller en filterbasis i T da kaldes x et kon-

<u>taktpunkt</u> for $\mathcal{F}$ såfremt x er kontaktpunkt for enhver mængde i $\mathcal{F}$.

Bemærk, at et net, et filter eller en filterbasis kan have flere grænsepunkter; dette kan man udelukke ved at indføre et passende adskillelsesaksiom (se § 11).

Hvis $\mathcal{B}$ er en filterbasis for $\mathcal{F}$ da har $\mathcal{B}$ og $\mathcal{F}$ de samme kontaktpunkter.

Hvis $\mathcal{F}$ konvergerer mod x, da er x et kontaktpunkt for $\mathcal{F}$. Ved forfining kan kontaktpunkter forsvinde, men aldrig opstå: $\mathcal{F}_2 \supseteq \mathcal{F}_1 \Rightarrow$ ethvert kontaktpunkt for $\mathcal{F}_2$ er et kontaktpunkt for $\mathcal{F}_1$. Man indser, at x er et kontaktpunkt for $\mathcal{F}$, hvis og kun hvis $\mathcal{B} = \{F \cap U \mid F \in \mathcal{F} \wedge U \in \mathcal{U}(x)\}$ er en filterbasis; heraf udledes, at x er et kontaktpunkt for $\mathcal{F}$ hvis og kun hvis $\mathcal{F}$ kan forfines til et filter der konvergerer mod x. Som et korollar hertil har vi

<u>Sætning</u> 7.1. Hvis et ultrafilter har et kontaktpunkt, er det konvergent med kontaktpunktet som grænsepunkt.

8. <u>Kontinuitet.</u> Lad $S = (M_1, \mathcal{O}_1)$ og $T = (M_2, \mathcal{O}_2)$ være topologiske rum.

<u>Definition.</u> En afbildning $f: S \to T$ kaldes <u>kontinuert</u> <u>i</u> $x \in S$, hvis

$$f^{-1}(U_2) \in \mathcal{U}_1(x) \quad \forall U_2 \in \mathcal{U}_2(fx).$$

f kaldes <u>kontinuert,</u> hvis f er kontinuert i ethvert punkt af S.

<u>Sætning</u> 8.1. Følgende udsagn om en afbildning $f: S \to T$ er alle ækvivalente:

(i) f er kontinuert,

(ii) $f^{-1}(G)$ er åben i S $\forall G$ åbne i T,

(iii) $f^{-1}(G)$ er åben i S $\forall G$ tilhørende en subbasis for $\mathcal{O}_2$,

(iv) $f^{-1}(F)$ er afsluttet i S $\forall F$ afsluttede i T,

(v) $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ $\forall A \subseteq S$,

(vi) $\overline{f^{-1}}(B) \subseteq f^{-1}(\bar{B})$ $\forall B \subseteq T$,

(vii) $\mathcal{F}$ filter på S $\wedge$ $\mathcal{F} \to x \Rightarrow f(\mathcal{F}) \to f(x)$,

(viii) $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ net på S $\wedge$ $x_\alpha \to x \Rightarrow f(x_\alpha) \to f(x)$.

<u>Bevis</u>. Ækvivalensen af (i)-(vi) er velkendt fra Mat. 1, og i øvrigt let at etablere.

(i) $\Rightarrow$ (vii): Lad $\mathcal{F}$ være et konvergent filter på S: $\mathcal{F} \to x$. Vi skal vise at filterbasen $f(\mathcal{F})$ konvergerer mod $f(x)$. For enhver omegn $U_2 \in \mathcal{U}_2(fx)$ gælder

$$f^{-1}(U_2) \in \mathcal{U}_1(x) \text{ og } f(f^{-1}(U_2)) \subseteq U_2.$$

Dette viser, at $f(f^{-1}(U_2)) \in f(\mathcal{U}_1(x))$ som er indeholdt i $f(\mathcal{F})$ og at U_2 tilhører det af filterbasen $f(\mathcal{F})$ frembragte filter; hermed har vi set, at $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.

(vii) $\Rightarrow$ (i): Dette bevises ved at udnytte konvergensen af $f(\mathcal{U}_1(x))$ mod $f(x)$. Heraf følger nemlig, at enhver omegn $U_2 \in \mathcal{U}_2(fx)$ tilhører det af filterbasen $f(\mathcal{U}_1(x))$ frembragte filter, d.v.s. der findes $U_1 \in \mathcal{U}_1(x)$ så at $U_2 \supseteq f(U_1)$; så vil $f^{-1}(U_2) \supseteq U_1$, hvoraf $f^{-1}(U_2) \in \mathcal{U}_1(x)$ følger. Vi har set at f er kontinuert i ethvert punkt af S.

Udsagnet vedrørende (viii) overlades til læseren. $\square$

Af velkendte egenskaber ved kontinuerte afbildninger skal vi her nøjes med at minde om transitiviteten: Er $f: S \to T$ og $g: T \to U$ begge kontinuerte da er også $g \circ f: S \to U$ kontinuert.

Det relevante isomorfibegreb for topologiske rum udtrykkes bekvemt ved kontinuitet (jvf.(ii) ovenfor):

<u>Definition.</u> To topologiske rum S og T kaldes <u>homeomorfe</u>, hvis der findes en bijektion f: S→T således, at såvel f som f^{-1} er kontinuerte. En sådan afbildning kaldes en <u>homeomorfi</u> af S på T.

.9. <u>Nye topologiske rum ud fra gamle.</u> Er T = (M, $\dot{O}$) et topologisk rum og A en (ikke-tom) delmængde af M, da inducerer T på naturlig måde en topologi på A. Som åbne mængder i A tager vi blot alle mængder af formen $A \cap O$, hvor $O \in \dot{O}$. Den herved definerede topologi i A kaldes den <u>relative</u> topologi, <u>delrumstopologien</u> eller den af T <u>inducerede</u> topologi på A. De afsluttede mængder i A er mængderne af formen $A \cap F$, hvor F er afsluttet i T. Er $B \subseteq A$, da er afslutningen af B i den relative topologi mængden $A \cap \bar{B}$. Vi kan også karakterisere den relative topologi på A som den svageste topologi, der gør indlejringen i: A→T kontinuert. Denne karakterisation giver anledning til en uhyre nyttig generel metode til at definere nye topologier på:

<u>Definition.</u> Lad M være en mængde og lad, for hvert indeks i fra indeksmængden I, f_i: $M \to T_i$ være en afbildning af M ind i et topologisk rum $T_i = (M_i, \dot{O}_i)$. Ved <u>initialtopologien</u> eller den <u>svage topologi</u> på M bestemt ved $(f_i)_{i \in I}$ forstås den svageste topologi på M (jvf.Lemma 4.1), der gør alle afbildningerne f_i; $i \in I$ kontinuerte.

Undertiden kan det være bekvemt med en kort betegnelse som

$\mathfrak{O}((f_i)_{i\in I})$ for initialtopologien.

Er $\mathfrak{O}$ en topologi på M, da vil afbildningerne f_i; $i\in I$ være kontinuerte hvis og kun hvis $\mathfrak{O}$ indeholder enhver mængde af formen $f_i^{-1}(O_i)$, hvor $i\in I$ og $O_i \in \mathfrak{O}_i$. Initialtopologien på M er således identisk med topologien frembragt af $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathfrak{O}_i)$.

Det måske vigtigste eksempel på en initialtopologi er produkttopologien.

__Definition.__ Lad $T_i = (M_i, \mathfrak{O}_i)$; $i\in I$ være topologiske rum og M produktmængden $M = \prod_{i\in I} M_i$. Ved __produkttopologien__ på M forstås initialtopologien på M bestemt ved familien af projektionsafbildninger $\pi_i: M\to M_i$; $i\in I$. M med produkttopologien kaldes også produktrummet af T_i; $i\in I$ og betegnes kort $\prod_{i\in I} T_i$.

Produktrummet $T = \prod_{i\in I} T_i$ har den vigtige specielle egenskab, at alle afbildningerne $\pi_i: T\to T_i$; $i\in I$ bliver __åbne__ afbildninger (d.v.s. at åben mængde afbildes i åben mængde).

Produkttopologien er den groveste topologi på $M = \prod M_i$, man normalt vil arbejde med. Ved specielle undersøgelser vil man ofte inddrage finere topologier på M (eller delmængder af M).

__Sætning 9.1. (Konvergens i initialtopologi).__ Vi betragter ét topologisk rum T, hvor topologien er initialtopologien bestemt ved afbildningerne $f_i: T\to T_i$; $i\in I$. Lad $\mathfrak{F}$ være et filter (eller en filterbasis) på T og x et punkt i T. Da vil $\mathfrak{F}\to x$, hvis og kun hvis $f_i(\mathfrak{F}) \to f_i(x)$ $\forall i \in I$.

<u>Bevis.</u> Vi sætter $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{O}_i)$. Da er $\mathcal{O}$ topologien frembragt af $\mathcal{B}$. Hvis $\mathcal{F} \to x$ vil $f_i(\mathcal{F}) \to f_i(x)$ $\forall i \in I$ da alle f_i'erne er kontinuerte. Lad os dernæst bevise den vigtigste del af sætningen. Vi antager nu at $f_i(\mathcal{F}) \to x_i$ $\forall i \in I$, hvor vi har sat $x_i = f_i(x)$. For at vise $\mathcal{F} \to x$, betragter vi en omegn $U \in \mathcal{U}(x)$ i T. Vi kan finde $O \in \mathcal{O}$ så at $x \in O \subseteq U$. O er en foreningsmængde af endelige fællesmængder fra $\mathcal{B}$. Da $x \in O$, kan vi finde mængder $f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}), \ldots, f_{i_n}^{-1}(O_{i_n})$ fra $\mathcal{B}$ således, at $x \in f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \ldots \cap f_{i_n}^{-1}(O_{i_n}) \subseteq O$. Vi ser, at $O_{i_1} \in \mathcal{U}_{i_1}(x_{i_1}), \ldots, O_{i_n} \in \mathcal{U}_{i_n}(x_{i_n})$ og slutter, at der findes mængder $F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}$ fra $\mathcal{F}$ så at $f_{i_1}(F_{i_1}) \subseteq O_{i_1}, \ldots, f_{i_n}(F_{i_n}) \subseteq O_{i_n}$. Vi har nu

$$U \supseteq O \supseteq f_{i_1}^{-1}(O_{i_1})\cap\ldots\cap f_{i_n}^{-1}(O_{i_n}) \supseteq f_{i_1}^{-1}(f_{i_1}(F_{i_1}))\cap\ldots\cap f_{i_n}^{-1}(f_{i_n}(F_{i_n}))$$

$$\supseteq F_{i_1} \cap\ldots\cap F_{i_n},$$

hvoraf vi ser, at U tilhører filtret frembragt af $\mathcal{F}$. $\square$

<u>Korollar 0.2.</u> <u>(Initialtopologi og kontinuitet).</u> Lad igen $T = (M,\mathcal{O})$, hvor $\mathcal{O} = \mathcal{O}((f_i)_{i\in I})$. En afbildning $f\colon S\to T$, hvor S er et topologisk rum, er kontinuert, hvis og kun hvis $f_i \circ f$ er kontinuert $\forall i \in I$.

Det overlades til læseren at formulere de vigtige resultater, vi får frem ved at specialisere de lige beviste resultater til produktrum.

Vi skal nu kort omtale en anden generel metode at definere topologier på; i en vis forstand er denne metode "dual" til den allerede nævnte. Givet er en mængde M samt afbildninger $f_i: T_i \to M$; $i \in I$ af topologiske rum ind i M. Hvis vi definerer $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(M)$ ved

$$O \in \mathcal{O} \Leftrightarrow f_i^{-1}O \in \mathcal{O}_i \ \forall i \in I,$$

ser vi, at $\mathcal{O}$ tilfredsstiller aksiomerne for en topologi. Denne topologi på M kaldes *finaltopologien* bestemt ved afbildningerne f_i; $i \in I$. Det er den fineste topologi på M der gør alle afbildningerne f_i; $i \in I$ kontinuerte.

Eksempel (*Kvotienttopologi*). Er T et topologisk rum forsynet med en ækvivalensrelation R, da kan vi i kvotientmængden (Klassemængden) T/R betragte finaltopologien bestemt ved den kanoniske afbildning $T \to T/R$; denne topologi kaldes *kvotienttopologien* på T/R og T/R forsynet med kvotienttopologien kaldes kort kvotientrummet.

Det er ikke helt sjældent, man møder finaltopologier i en situation, hvor en mængde M er foreningsmængde af delmængder M_i; $i \in I$, der hver for sig har en "naturlig" topologi; man kan da tit med fordel betragte finaltopologien i M bestemt ved indlejringerne $M_i \to M$; $i \in I$. En sådan topologi kaldes en *induktiv limes topologi.*

Vi nævner uden bevis det til korollar 2.9.2. analoge resultat for finaltopologier:

Sætning .9.3. (*Finaltopologi og kontinuitet*). Lad T være et topologisk rum, hvor topologien er finaltopologien bestemt ved afbildningerne f_i; $i \in I$. En afbildning $f: T \to S$, hvor S er et topologisk rum, er kontinuert, hvis og kun hvis $f \circ f_i$ er kontinuert $\forall i \in I$.

10. <u>Numerabilitetsaksiomer.</u>

<u>Definition.</u> Et topologisk rum T opfylder <u>første numerabilitetsaksiom</u>, hvis omegnsfiltret $\dot{U}(x)$ har en numerabel basis $\dot{B}(x)$ for ethvert $x \in T$. T opfylder <u>andet numerabilitetsaksiom</u>, hvis der findes en numerabel basis for topologien. T er et <u>separabelt</u> rum, hvis der findes en overalt tæt numerabel delmængde af T.

Det er ikke svært at se, at et rum, der opfylder andet numerabilitetsaksiom, er separabelt og opfylder første numerabilitetsaksiom. Ethvert euklidisk rum opfylder andet numerabilitetsaksiom. En delmængde af et rum, der opfylder første (andet) numerabilitetsaksiom vil selv opfylde første (andet) numerabilitetsaksiom. Et metriserbart rum opfylder første numerabilitetsaksiom; og det er separabelt, hvis og kun hvis det opfylder andet numerabilitetsaksiom. En delmængde af et separabelt metriserbart rum er separabelt.

Arbejder vi i et rum der opfylder første tællelighedsaksiom, da kan alle topologiske egenskaber behandles ved hjælp af konvergente følger; mere nøjagtigt mener vi hermed, at kendes for et sådant rum $T = (M,\dot{O})$ den underliggende mængde M og kendes tillige de konvergente følger (og disses grænsepunkter), så kan vi rekonstruere topologien, d.v.s. vi kan afgøre, hvilke mængder der er åbne. Af nedenstående resultat følger nemlig at vi for en vilkårlig delmængde $A \subseteq M$ kan finde afslutningen $\bar{A}$ og så kan vi let karakterisere de afsluttede, og dermed også de åbne, delmængder af M.

Sætning 10.1. Lad A være en delmængde af et topologisk rum, der opfylder første numerabilitetsaksiom. Da består $\bar{A}$ af de punkter x for hvilke der findes en følge $\{x_n\}$ som konvergerer mod x og hvor $x_n \in A$ for n=1, 2, ...

Bevis. Hvis $x_n \in A$; n=1, 2, ... og hvis $x_n \to x$, så vil $x \in \bar{A}$. Hvis $x \in \bar{A}$, betragter vi en numerabel omegnsbasis $\{B_1, B_2, \ldots\}$ for x som opfylder betingelserne $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ og vælger for hvert $n \in \mathring{N}$ et $x_n \in B_n \cap A$. Det er klart, at $x_n \to x$. ▯

11. Adskillelsesaksiomer. Vi har tidligere bemærket, at et konvergent filter kan have flere grænsepunkter. Det vigtige Hausdorff-adskillelsesaksiom har til formål at udelukke dette. Det problem, der ellers er mest i tankerne når talen er om adskillelsesaksiomer, er spørgsmålet om eksistens af "tilpas mange" kontinuerte reelle funktioner. Det kan vises, at der findes topologiske rum (endog regulære rum) for hvilke enhver kontinuert reel funktion er konstant (og som består af mere end èt punkt). Noget sådant er man normalt interesseret i at udelukke.

Definitioner. Lad T være et topologisk rum.

T kaldes et T1-rum, eller siges at opfylde adskillelsesaksiomet T1, hvis

$$x \in T \wedge y \in T \wedge x \neq y \Rightarrow \exists U \in \mathring{U}(x) : y \notin U.$$

T er et T2-rum, eller et Hausdorff-rum eller et separeret rum, hvis de åbne mængder skiller punkter d.v.s. hvis

$$x \in T \wedge y \in T \wedge x \neq y \Rightarrow \exists U \in \mathring{U}(x) \wedge \exists V \in \mathring{U}(y) : U \cap V = \emptyset.$$

T er et T3-rum (eller et quasi-regulært rum), hvis de åbne mængder skiller punkter og afsluttede mængder d.v.s. hvis

$x \in T \wedge F$ afsluttet $\wedge\ x \notin F \Rightarrow \exists U \in \mathring{U}(x) \wedge \exists V$ omegn af F: $U \cap V = \emptyset$.

T er et T4-rum (eller et quasi-normalt rum), hvis de åbne mængder skiller afsluttede mængder d.v.s. hvis

F_1 og F_2 afsluttede disjunkte $\Rightarrow$ F_1 og F_2 har disjunkte omegne.

Er T både et T2 og et T3-rum kaldes T regulært.

Er T både et T2 og et T4-rum kaldes T normalt.

T er et fuldstændig regulært rum, hvis T er et Hausdorff-rum og hvis de kontinuerte funktioner skiller punkter og afsluttede mængder, d.v.s. hvis

$x \in T \wedge F$ afsluttet $\wedge\ x \notin F \Rightarrow$ der findes en kontinuert funktion $f\colon T \to [0,1]$ således, at $f(x) = 0$ og $f(F) \subseteq \{1\}$.

I disse definitioner har vi benyttet den benævnelses-politik at tilkendegive med "quasi" at Hausdorff-aksiomet ikke forudsættes opfyldt, mens et manglende "quasi" antyder at Hausdorff-aksiomet er opfyldt.

De vigtigste af de omtalte typer af topologiske rum er nok Hausdorff-rum, fuldstændig regulære rum og normale rum. Et normalt rum er fuldstændig regulært (se sætning 11.3), et fuldstændig regulært rum er regulært og et regulært rum opfylder Hausdorff-aksiomet. I langt de fleste undersøgelser vil man ikke have noget mod at forudsætte T2; alligevel skal vi kun gøre det, hvor det er påkrævet.

Sætning 11.1. (i) T er et T1-rum, hvis og kun hvis enhver èt-punkts mængde er afsluttet.

(ii) T er et T2-rum, hvis og kun hvis ethvert filter (net) på T højst har èt grænsepunkt.

(iii) T er et T3-rum, hvis og kun hvis ethvert punkt har en omegnsbasis bestående af afsluttede mængder.

<u>Bevis.</u> (i) overlades til læseren.

(ii): Antag T2 er opfyldt. Hvis $\dot{F} \to x$ og $\dot{F} \to y$ vil $\dot{U}(x) \subseteq \dot{F}$ og $\dot{U}(y) \subseteq \dot{F}$; enhver mængde $U \cap V$, hvor $U \in \dot{U}(x)$ og $V \in \dot{U}(y)$, vil da også tilhøre filtret $\dot{F}$. Da $\emptyset \notin \dot{F}$ må $x=y$.

Antag dernæst at T2 ikke er opfyldt. Da findes $x \neq y$ så at $U \cap V \neq \emptyset$ for alle $U \in \dot{U}(x)$ og $V \in \dot{U}(y)$. Mængderne $U \cap V$; $U \in \dot{U}(x)$, $V \in \dot{U}(y)$ danner så et filter der konvergerer mod x såvel som mod y.

(iii): Ved at udtrykke den afsluttede mængde F med sin åbne komplementærmængde O ses, at T3 er opfyldt hvis og kun hvis det om ethvert par x, O, hvor O er en åben omegn af x, gælder at der findes åbne mængder O_1 og O_2 med $x \in O_1$, $CO \subseteq O_2$ og $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, altså $x \in O_1 \subseteq CO_2 \subseteq O$; nu er eksistensen af sådanne åbne mængder ensbetydende med eksistensen af en mængde A så at $x \in \mathring{A} \subseteq \bar{A} \subseteq O$. Heraf følger (iii). ▯

Af (i) ses, at vi i stedet for at have defineret et regulært rum ved "T2 $\wedge$ T3" lige så godt kunne have benyttet definitionen "T1 $\wedge$ T3". En tilsvarende bemærkning gælder normale rum.

Vi ønsker nu at udlede et vigtigt resultat, der viser at aksiomet T4 tillader os at konstruere et væld af kontinuerte funktioner; specielt skal vi se, at ethvert normalt rum er fuldstændig regulært. Som en væsentlig forberedelse beviser vi følgende.

Lemma 11.2. Lad F være en afsluttet og G en åben delmængde af et T4-rum T således, at $F \subseteq G$. Der findes da en familie $\{A_r\}_{r\in\Lambda}$ af delmængder af T, hvor Λ er en tæt delmængde af det åbne enhedsinterval $]0,1[$ og hvor endvidere følgende to betingelser er opfyldte:

(i) $F \subseteq \mathring{A}_r \subseteq \bar{A}_r \subseteq G \ \forall r \in \Lambda$,

(ii) $\bar{A}_r \subseteq \mathring{A}_s \ \forall r < s$.

Bevis. Ifølge T4-aksiomet anvendt på de afsluttede mængder F og CG findes en mængde $A_{\frac{1}{2}}$ således, at $F \subseteq \mathring{A}_{\frac{1}{2}} \subseteq \bar{A}_{\frac{1}{2}} \subseteq G$. (Jvf. beviset for (iii) i sætning 11.1). Anvendes samme ræsonnement dels på F og $\mathring{A}_{\frac{1}{2}}$, dels på $\bar{A}_{\frac{1}{2}}$ og G indses, at der findes mængder $A_{1/4}$ og $A_{3/4}$ således, at $F \subseteq \mathring{A}_{1/4} \subseteq \bar{A}_{1/4} \subseteq \mathring{A}_{\frac{1}{2}}$ og $\bar{A}_{\frac{1}{2}} \subseteq \mathring{A}_{3/4} \subseteq \bar{A}_{3/4} \subseteq G$. I næste trin af vort ræsonnement får vi defineret mængder $A_{1/8}$, $A_{3/8}$, $A_{5/8}$ og $A_{7/8}$ som harmonerer med kravene (i) og (ii). Det er ikke svært at se, at vi ved induktion opnår det ønskede; mængden Λ bliver mængden af dyadisk rationale tal i $]0,1[$. $\square$

Sætning 11.3.(Urysohns lemma). Er T_4- aksiomet opfyldt for T, da vil de kontinuerte funktioner skille afsluttede mængder, d.v.s. til ethvert par F_1, F_2 af afsluttede disjunkte mængder findes en kontinuert funktion $f: T \to [0,1]$ med $f(F_1) \subseteq \{0\}$ og $f(F_2) \subseteq \{1\}$.

Bevis. Vi anvender lemmaet på den afsluttede mængde F_1 og den åbne mængde CF_2. Svarende til den familie $\{A_r\}_{r\in\Lambda}$, lemmaet giver os i hænde, definerer vi en funktion $f: T \to [0,1]$ ved

$$f(x) = \inf\{r \in \Lambda | x \in A_r\};\ x \in T.$$

Dette skal forstås således, at hvis der intet $r \in \Lambda$ findes med $x \in A_r$, så sættes $f(x) = 1$. Det er klart, at $f(F_1) \subseteq \{o\}$ og at $f(F_2) \subseteq \{1\}$. Vi mangler blot at vise at f er kontinuert; hertil vil vi anvende (iii), sætning 8.1, idet vi som subbasis i [o1,] benytter de mængder der enten er af formen $[o,\alpha[$ for et $\alpha \in]o,1[$ eller er af formen $]\beta,1]$ for et $\beta \in]o,1[$. Lad $\alpha \in]o,1[$; vi har da p.gr. af familien $\{A_r\}$'s specielle egenskaber

$$f^{-1}([o,\alpha[) = \bigcup_{r<\alpha} A_r = \bigcup_{r<\alpha} \mathring{A}_r$$

og denne mængde er jo åben. Betragt dernæst et $\beta \in]o,1[$; vi finder

$$f^{-1}([o,\beta]) = \bigcap_{r>\beta} A_r = \bigcap_{r>\beta} \bar{A}_r;$$

da denne mængde er afsluttet, bliver komplementærmængden $f^{-1}(]\beta,1])$ åben.. $\square$

Vi vil nu undersøge om en funktion defineret på en delmængde A af et topologisk rum T kan udvides til en <u>kontinuert</u> funktion defineret på hele T. Da restriktionen af en kontinuert funktion til et delrum er kontinuert i delrumstopologien, må vi forudsætte at den givne funktion er kontinuert i delrumstopologien. Den topologiske natur af delmængden A spiller også en rolle, som det ses ved at betragte eksemplet $\sin(1/x)$ defineret på $\mathring{R}\setminus\{o\}$; det er naturligt at forudsætte A afsluttet. I et normalt rum behøver vi ikke flere forudsætninger (Sætning 11.5 og opgave). Det er bekvemt at begynde med et lemma.

Lemma 11.4. Lad T være et T4-rum og $f: F \to [-1,1]$ en kontinuert funktion defineret på en afsluttet delmængde F af T. Da findes en kontinuert funktion $g: T \to [-1/3, 1/3]$ således, at $|f(x)-g(x)| \leq 2/3$ for alle $x \in F$.

Bevis. Mængderne $F_1 = \{x | f(x) \leq -1/3\}$ og $F_2 = \{x | f(x) \geq 1/3\}$ er disjunkte og afsluttede. I henhold til Urysohns lemma findes en kontinuert funktion $g: T \to [-1/3, 1/3]$ således, at $g(F_1) \subseteq \{-1/3\}$ og $g(F_2) \subseteq \{1/3\}$. $\square$

Sætning 11.5. (Tietzes udvidelsessætning). Lad T være et T4-rum og $f: F \to \mathring{R}$ en begrænset kontinuert funktion defineret på en afsluttet delmængde F af T. Da findes en begrænset kontinuert udvidelse $\tilde{f}: T \to \mathring{R}$ af f således, at $\sup_{x\in T}|\tilde{f}(x)| = \sup_{x\in F}|f(x)|$.

Bevis. Vi kan antage, at $f: F \to [-1,1]$ og at $\sup_{x\in F}|f(x)| = 1$.

Vi anvender lemmaet og finder g_1 kontinuert: $T \to [-1/3, 1/3]$ således, at funktionen $h_1 = f-g_1|F$, hvor $g_1|F$ betegner g_1's restriktion til F, opfylder

$$h_1: F \to [-2/3, 2/3].$$

Dernæst anvender vi lemmaet på funktionen h_1 og finder g_2 kontinuert: $T \to [-2/3^2, 2/3^2]$ således, at funktionen $h_2 = h_1-g_2|F$ opfylder

$$h_2: F \to [-(2/3)^2, (2/3)^2].$$

Processen fortsættes og vi får defineret en følge $(g_n)_{n\geq 1}$ af kontinuerte funktioner således, at

$$g_n: T \to [-2^{n-1}/3^n, \ 2^{n-1}/3^n]; \ n \geq 1$$

og således, at funktionerne $(h_n)_{n\geq 1}$ definerede ved $h_n = h_{n-1} - g_n|F$ opfylder

$$h_n: F \to [-2^n/3^n, \ 2^n/3^n]; \ n \geq 1.$$

Vi betragter funktionerne $(f_n)_{n\geq 1}$ definerede ved $f_n = g_1 + \dots + g_n$. Vi vil vise at følgen (f_n) konvergerer ligeligt på T. For $n > m$ og $x \in T$ har vi

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sum_{\nu=m+1}^{n} |g_\nu(x)| \leq \sum_{\nu=m+1}^{n} 2^{\nu-1}/3^\nu < 2^m/3^m;$$

Summen (= den uendelige [illegible])

derfor vil $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergere ligeligt på T. Grænsefunktionen benævnes $\tilde{f}$. Da alle f_n'erne er kontinuerte er $\tilde{f}$ kontinuert. Af vurderingen ovenfor følger, at $|f_n(x) - f_1(x)| = |f_n(x) - g_1(x)| \leq 2/3$ for alle $n \geq 1$ og $x \in T$; heraf ses at, $|\tilde{f}(x)| \leq 1 \ \forall x \in T$. Det eneste vi herefter mangler at vise er, at $\tilde{f}$er en udvidelse af f. Dette følger imidlertid af at $f_n|F - f = \div h_n$ i forbindelse med vurderingen $|h_n(x)| \leq 2^n/3^n \ \forall x \in F$. $\square$

En topologisk egenskab β kaldes <u>arvelig</u>, hvis β bevares ved delrumsdannelse altså hvis: T har $\beta \wedge A \subseteq T \Rightarrow A$ har β i den inducerede topologi. Vi er interesserede i at vide, hvilke af adskillesaksiomerne der er arvelige. Vi er også intersserede i at vide, hvilke af adskillesaksiomerne, der bevares ved dannelse af produktrum. Da såvel delrum som produktrum er eksempler på initialrum, vil vi undersøge det mere generelle spørgsmål om hvilke adskillesaksiomer der bevares ved dannelse af initialrum.

Sætning 116. Adskillelsesaksiomer og dannelse af initialrum). Lad T være et topologisk rum, hvor topologien er initialtopologien bestemt ved afbildningerne $f_i: T \to T_i$; $i \in I$.

Hvis ethvert af rummene T_i; $i \in I$ er T1-rum og hvis afbildningerne f_i; $i \in I$ skiller punkter (d.v.s. hvis $\forall x \neq y \; \exists i \in I$: $f_i x \neq f_i y$) da er også T et T1-rum. Egenskaberne T2 og "fuldstændig regularitet" bevares også ved dannelse af initialrum forudsat at afbildningerne f_i; $i \in I$ skiller punkter.

Egenskaben T3 bevares altid ved dannelse af initialrum.

Bevis. Vi beviser først udsagnet vedrørende T1. Hvis $x \neq y$ $(x \in T \wedge y \in T)$ findes $i \in I$, så at $f_i x \neq f_i y$. Da T_i er et T1-rum findes $U \in \mathcal{U}_i(f_i x)$ så at $f_i y \notin U$. Vi har $f_i^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$ og $y \notin f_i^{-1}(U)$. Udsagnet vedrørende T2 bevises på samme vis.

Lad os nu se på T3. Vi betragter et $x \in T$ og et $U \in \mathcal{U}(x)$. På grund af topologiens definition findes endelig mange indices $i_1, .., i_n$ fra I og endelig mange mængder $G_1, .., G_n$ hvor $G_1 \in \mathcal{O}_{i_1}, .., G_n \in \mathcal{O}_{i_n}$ således, at

$$x \in f_{i_1}^{-1}(G_1) \cap \dots \cap f_{i_n}^{-1}(G_n) \subseteq U.$$

Da $T_{i_1}, .., T_{i_n}$ alle er T3-rum findes mængder $A_1, .., A_n$, hvor $A_1 \subseteq T_{i_1}, .., A_n \subseteq T_{i_n}$ således, at

$$f_{i_\nu}(x) \in \mathring{A}_\nu \subseteq \bar{A}_\nu \subseteq G_\nu; \; \nu=1, .., n.$$

Mængden $G = f_{i_1}^{-1}(\mathring{A}_1) \cap \dots \cap f_{i_n}^{-1}(\mathring{A}_n)$ er åbenbart en omegn af x. Da

$$G \subseteq f_{i_1}^{-1}(\bar{A}_1)\cap\ldots\cap f_{i_n}^{-1}(\bar{A}_n) \subseteq U$$

ses det nu at $\bar{G}$ er en afsluttet omegn af x indeholdt i U. Sætning 11.1. sikrer os, at T er et T3-rum.

Til slut beviser vi udsagnet vedrørende fuldstændig regularitet. Lad $x \in G \in \mathcal{O}$ og bestem indices og mængder på samme måde som før således, at

$$x \in f_{i_1}^{-1}(G_1)\cap\ldots\cap f_{i_n}^{-1}(G_n) \subseteq G.$$

Bestem nu kontinuerte funktioner φ_ν: $T_{i_\nu} \to [o,1]$; $\nu=1,\ldots, n$ således, at $\varphi_\nu(f_{i_\nu}x) \subseteq \{0\}$ og $\varphi_\nu(CG_\nu) \subseteq \{1\}$; $\nu=1, \ldots, n$. Afbildningen h: $T \to [o,1]$ defineret ved $h = \max\{\varphi_\nu \circ f_{i_\nu} | \nu=1, \ldots, n\}$ er kontinuert og opfylder betingelserne $h(x) \subseteq \{0\}$ og $h(CG) \subseteq \{1\}$. Dermed har vi eftervist at T er "quasi-fuldstændig regulær". Da afbildningerne f_i; $i \in I$ er forudsat at skille punkter er T - ligesom rummene T_i - et Hausdorff rum. $\square$

I sætningen har vi intet nævnt om T4-aksiomet; grunden er den, at T4 ikke bevares ved dannelse af initialtopologi, end ikke ved dannelse af delrumstopologi eller produkttopologi.

Ingen af de betragtede adskillesaksiomer bevares ved dannelse af kvotienttopologi - og derfor endnu mindre ved dannelse af finaltopologi.

Til slut nævner vi en vigtig klasse af normale rum.

<u>Sætning</u> 11.7. Ethvert metriserbart topologisk rum er normalt.

Bevis. Lad $T = (M,d)$ være et metrisk rum. Er F_1 og F_2 to afsluttede disjunkte ikke tomme mængder, da er funktionen φ: $T \to [0,1]$ defineret ved

$$\varphi(x) = \frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$$

en kontinuert funktion med $\varphi(F_1) = 0$ og $\varphi(F_2) = 1$. []

12. Kompakte og lokal kompakte rum. Kompakthed er et centralt topologisk begreb. En af de vigtigste egenskaber for kompakte metriske rum var at enhver følge kan udtyndes til en konvergent delfølge. Noget tilsvarende gælder i det generelle tilfælde ((vii) sætning 12.1. og opgave); derfor kan vi især forvente at støde på kompakthedsræsonnementer ved beviser for eksistenssætninger.

Definitioner. Et topologisk rum T kaldes quasi-kompakt, hvis enhver overdækning af T med åbne mængder indeholder en endelig overdækning. Et kompakt rum er et quasi-kompakt Hausdorff rum. T kaldes lokal kompakt, hvis T er et Hausdorff rum og hvis ethvert punkt har en omegnsbasis bestående af kompakte mængder. En delmængde A af T kaldes quasi-kompakt (kompakt), hvis A er quasi-kompakt (kompakt) i delrumstopologien.

Bemærk, at en delmængde A af T er quasi-kompakt, hvis og kun hvis enhver overdækning af A med åbne mængder (NB åbne i T) indeholder en endelig overdækning.

Sætning 12.1. Følgende betingelser er ækvivalente for et topologisk rum T:

(i) T er quasi-kompakt,

(ii) F_i afsluttet $\forall i \in I$, $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset \Rightarrow \exists I^*$ endelig delmængde af I så at $\bigcap_{i \in I^*} F_i = \emptyset$,

(iii) F_i afsluttet $\forall i \in I$, $\bigcap_{i \in I^*} F_i \neq \emptyset$ $\forall$ endelige delmængder I^* af $I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$,

(iv) Er $\mathfrak{F}$ en filtersubbasis bestående af afsluttede mængder, da er $\bigcap_{A \in \mathfrak{F}} A \neq \emptyset$,

(v) Enhver filterbasis bestående af afsluttede mængder har et kontaktpunkt,

(vi) Ethvert filter har et kontaktpunkt,

(vii) Ethvert filter kan forfines til et konvergent filter,

(viii) Ethvert ultrafilter er konvergent.

Måske er det kun kriterierne (iii), (vii) og (viii), der fortjener at stå i sætningen; på den anden side opnår vi ved at medtage alle betingelserne, at beviset bliver så simpelt, at vi roligt kan overlade det til læseren. Bemærk, at vi har brug for udvalgsaksiomet (i form af sætning 3.5.) til at vise (viii) $\Rightarrow$ (vii).

<u>Sætning 12.2.</u>

(i) En afsluttet delmængde af et quasi-kompakt (respektivt kompakt) rum er quasi-kompakt (respektivt kompakt).

(ii) En kompakt delmængde af et Hausdorff rum er afsluttet.

(iii) Et kontinuert billede af et quasi-kompakt rum er quasi-kompakt.

<u>Bevis.</u> (i): Lad $F \subseteq T$ være afsluttet og $F \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ en åben overdækning af F; da vil de åbne mængder G_i, $i \in I$ sammen med den åbne mængde CF overdække T. Udnyttes nu at T er kompakt ser

vi, at $(G_i)_{i\in I}$ indeholder en endelig overdækning af F.

(ii): Lad $K \subseteq T$ være kompakt og T Hausdorff. Hold $x \notin K$ fast. Til hvert $y \in K$ findes disjunkte omegne $U_y \in \mathring{U}(y)$ og $V_y \in \mathring{U}(x)$. Da $K \subseteq \bigcup_{y\in K} U_y$ og da K er kompakt findes en endelig delmængde K^* af K således, at $K \subseteq \bigcup_{y\in K^*} U_y$. Vi ser nu at $\bigcap_{y\in K^*} V_y$ er en omegn af x som er disjunkt med K. Derfor vil $x \notin \bar{K}$. Da x var et vilkårligt punkt i CK har vi hermed set at $CK \subseteq C\bar{K}$ eller $\bar{K} \subseteq K$ eller at K er afsluttet.

(iii): Lad $f: S \to T$ være kontinuert og S quasi-kompakt. Vi skal vise at f(S) er quasi-kompakt og betragter hertil en åben overdækning $(G_i)_{i\in I}$ af f(S). $(f^{-1}G_i)_{i\in I}$ er en åben overdækning af S og indeholder derfor en endelig overdækning $(f^{-1}G_i)_{i\in I^*}$. Så er $(G_i)_{i\in I^*}$ en overdækning af f(S). ▯

Man ser også, at et kontinuert billede af et kompakt rum ind i et T2-rum er kompakt.

Ræsonnementet givet i beviset for (ii) er et typisk kompakthedsræsonnement; som vi nu skal se, kan man ved at arbejde lidt videre på beviset for (ii) bevise en anden vigtig sætning, nemlig

<u>Sætning</u> 12.3. Et kompakt rum er normalt.

<u>Bevis.</u> Lad F_1 og F_2 være to disjunkte og afsluttede delmængder af det kompakte rumT. Da er F_1 kompakt og af beviset for (ii) sætning 12.2. givet ovenfor ses, at til ethvert $x \in F_2$ findes disjunkte mængder U_x og V_x, hvor U_x er en omegn af F_1 og V_x en

omegn af x. Da F_2 også er kompakt sluttes heraf, at der findes endelig mange punkter $x_1, \ldots, x_n$ i F_2 således, at $F_2 \subseteq V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n}$. Så er $U_{x_1} \cap \ldots \cap U_{x_n}$ og $V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n}$ disjunkte omegne af F_1 og F_2. $\square$

Vi skal nu bevise den måske vigtigste sætning i dette kapitel.

Sætning 12.4. (Tychonoff's sætning). Et produktrum $T = \prod_{i \in I} T_i$ er quasi-kompakt, hvis alle rummene T_i; $i \in I$ er quasi-kompakte.

Tychonoff beviste denne sætning i 1930; resultatet vakte berettiget opsigt. Det bevis, vi skal give nedenfor, er meget kort og elegant; metoden skyldes H. Cartan. Bemærk, at beviset anvender udvalgsaksiomet - iøvrigt kan det vises, at Tychonoff's sætning er ækvivalent med udvalgsaksiomet.

Bevis. Lad $\mathfrak{F}$ være et ultrafilter i T. For hvert $i \in I$ er $\pi_i(\mathfrak{F})$ et ultrafilter i T_i da projektionsafbildningen $\pi_i : T \to T_i$ er surjektiv. Da T_i er quasi-kompakt for hvert $i \in I$ sluttes, at der for hvert $i \in I$ findes et punkt $x_i \in T_i$ således, at $\pi_i(\mathfrak{F}) \to x_i$. Af sætning 9.1. følger det nu, at $\mathfrak{F} \to (x_i)_{i \in I}$. Ethvert ultrafilter i T er således konvergent. $\square$

Den "omvendte" til Tychonoff's sætning: "Hvis T er quasi-kompakt da er T_i quasi-kompakt $\forall i \in I$" følger af (ii), sætning 12.2. forudsat $T_i \neq \emptyset \forall i \in I$. Har vi Hausdorffaksiomet med i billedet, får vi følgende variant af Tychonoff's sætning: T er kompakt hvis og kun hvis T_i er kompakt $\forall i \in I$.

Vi skal nu omtale nogle egenskaber ved lokal-kompakte rum. Som eksempler kan nævnes at ethvert kompakt rum og ethvert euklidisk rum er lokal kompakt. Af opgave 34 fremgår det, at hvis ethvert punkt i et Hausdorff rum vides at have blot een kompakt omegn så er rummet lokal kompakt.

En kompaktificering af et topologisk rum T er et par $(\hat{T}, \varphi)$, hvor $\hat{T}$ er et kompakt rum og φ en homeomorfi af T på en tæt delmængde af $\hat{T}$. Har T en kompaktificering, så er T fuldstændig regulært (anvend sætningerne 12.3. og 11.6.). Man kan vise at ethvert fuldstændig regulært rum har en kompaktificering. Her nøjes vi med at bevise:

<u>Sætning</u> 12.5. Ethvert lokal kompakt rum har en kompaktificering.

<u>Bevis.</u> Til det lokal kompakte, ikke-kompakte rum T tilføjes et enkelt punkt ∞ (som ikke ligger i T). Det således fremkomne rum $T_\infty = T \cup \{\infty\}$ topologiserer vi, idet vi fastsætter, at $G \subseteq T_\infty$ er åben hvis enten

$$\infty \notin G \wedge G \text{ er åben i } T$$

eller

$$\infty \in G \wedge \exists K \text{ kompakt delmængde af } T \text{ så at}$$

$$T_\infty \setminus K \subseteq G .$$

Den topologi T_∞ inducerer i T falder sammen med den givne topologi. T_∞ bliver et Hausdorff rum, thi T er et Hausdorff rum og ethvert par (x,∞), hvor $x \neq \infty$, kan vi skille med disjunkte omegne da T er lokal kompakt. Det er ikke svært at se, at T_∞ er kompakt. Da T ikke er kompakt er T tæt i T_∞. $\square$

T_∞ kaldes ét-punkts kompaktificeringen eller Aleksandroff kompaktificeringen af T. Man ser let, at $\mathring{R}_\infty$ er homeomorf med en cirkel, og at $\mathring{C}_\infty$ er homeomorf med en kugle (Riemann kuglen). Vi nævner at også den hyperbolske plan og den projektive plan kan betragtes som kompaktificeringer af $\mathring{C}$.

Med sætning 12.5. har vi set at et lokal kompakt rum er fuldstændig regulært. Derimod behøver et lokal kompakt rum ikke være normalt. Der gælder dog følgende:

Sætning 12.6. Lad T være et lokal kompakt rum, K en kompakt delmængde og F en afsluttet delmængde disjunkt med K. Der findes da en kontinuert funktion $f: T \to [0,1]$ med $f(K) \subseteq \{1\}$, $f(F) \subseteq \{0\}$ og således, at støtten $st(f) = \overline{\{x \in T \mid fx \neq 0\}}$ er kompakt.

Bevis. K og $F \cup \{\infty\}$ er disjunkte og afsluttede delmængder af T_∞. Da T_∞ er kompakt og dermed normalt, kan vi vælge en åben mængde U, for hvilken $F \cup \{\infty\} \subseteq U$ og $\bar{U} \cap K = \emptyset$. Vi anvender nu Urysohns lemma og finder en kontinuert funktion $f: T_\infty \to [0,1]$ med $f(\bar{U}) \subseteq \{0\}$ og $f(K) \subseteq \{1\}$. Da U er en åben omegn af ∞, er $T_\infty \setminus U$ en kompakt delmængde af T. Restriktionen af f til T opfylder de stillede betingelser. $\square$

13. Litteratur. Af lærebøger henviser vi til Aleksandroff og Hopf, Kelley samt til Bourbaki (Topologie générale, ch.I, II, IX og X). For historiske kommentarer henviser vi til afsnittene "Note historique" hos Bourbaki samt indledningen til Nachbin "Topology and order".

1. Om et filter $\hat{F}$ på en uendelig mængde M gælder, at fællesmængden for mængderne i $\hat{F}$ er tom. Vis, at $\hat{F}$ er finere end det filter, der består af alle mængder med endelig komplementærmængde.

2. Er $(\hat{F}_i)_{i \in I}$ en ikke-tom familie af filtre på mængden M, da er $\hat{F} = \bigcap \{\hat{F}_i \mid i \in I\}$ det fineste filter på M grovere end alle $\hat{F}_i$'erne. Endvidere er

$$\hat{F} = \{\bigcup_{i \in I} F_i \mid F_i \in \hat{F}_i \ \forall i \in I\}.$$

3. Lad $\hat{F}_1$ og $\hat{F}_2$ være filtre på mængden M så at

$$F_1 \in \hat{F}_1 \wedge F_2 \in \hat{F}_2 \Rightarrow F_1 \cap F_2 \neq \emptyset.$$

Vis, at det groveste blandt alle filtre på M finere end både $\hat{F}_1$ og $\hat{F}_2$, består af mængderne $F_1 \cap F_2$, hvor F_1 gennemløber $\hat{F}_1$ og F_2 gennemløber $\hat{F}_2$.

4. Vis, at fællesmængden for alle mængder i et ultrafilter højst indeholder 1 punkt, og at filtret i så fald består af alle mængder, som indeholder dette punkt.

5. En mængde A hører ikke til ultrefiltret $\hat{F}$. Vis, at

$$\{A \cap F \mid F \in \hat{F}\} = \hat{D}(A).$$

6. Bevis, at ethvert filter $\hat{F}$ på en mængde M er fællesmængden for alle ultrafiltre på M, som er finere end $\hat{F}$.

7. Et net $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ på mængden M kaldes et <u>universalnet</u>, dersom det om enhver delmængde A af M gælder, at

$$(x_\alpha \in A \text{ f.v.t.}) \vee (x_\alpha \in CA \text{ f.v.t.}).$$

(a). Ethvert delnet af et universal-net er et universalnet.

(b). Enhver afbildning afbilder universal-net i universal-net.

(c). Ethvert net $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ på mængden M har et delnet, der er universalt. (Vejledning: Bestem et filter $\mathfrak{F}$ der er maksimalt med den egenskab at x_α er ofte i enhver af mængderne i filtret. Bevis, ved en indirekte slutning, at $\mathfrak{F}$ er et ultrafilter. Sæt $E = \{(\alpha,F) | \alpha\in D \wedge F\in\mathfrak{F} \wedge x_\alpha \in F\}$ og betragt nettet bestemt ved afbildningen $(\alpha,F) \to x_\alpha$ af E ind i M).

8. Idet $\mathfrak{F}$ betegner et filter på en mængde M og A er en delmængde af M, sættes

$$\mathfrak{F}_A = \{A \cap F | F \in \mathfrak{F}\}.$$

Vis, at $\mathfrak{F}_A$ er et filter på A hvis (og kun hvis) $A\cap F \neq \emptyset$ for ethvert $F \in \mathfrak{F}$. I bekræftende fald siges $\mathfrak{F}_A$ at være induceret af $\mathfrak{F}$ på A.

Lad dernæst M være et topologisk rum og x et punkt i M. Vis, at omegnsfiltret $\mathfrak{U}(x)$ inducerer et filter på A, hvis og kun hvis x er et kontaktpunkt for A.

9. Er $(\mathfrak{O}_i)_{i\in I}$ en familie af topologier på mængden M, så findes der både en fineste topologi grovere end alle $\mathfrak{O}_i$'erne og en groveste topologi finere end alle $\mathfrak{O}_i$'erne.

10. Lad $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ være et net på det topologiske rum T. Et punkt $x \in T$ kaldes et <u>kontaktpunkt</u> (eller <u>fortætningspunkt</u>) for nettet såfremt x_α er ofte i enhver omegn af x.

(a). x er et kontaktpunkt for (x_α), hvis og kun hvis der findes et delnet til (x_α) der konvergerer mod x.

(b). For enhver delmængde $A \subseteq T$ består $\bar{A}$ af de punkter x for hvilke der findes et net på A som konvergerer mod x.

(c). $A \subseteq T$ er afsluttet, hvis og kun hvis intet net på A konvergerer mod et punkt der ikke er i A.

11. Lad $\hat{F}$ være en filterbasis på den udvidede reelle akse $\hat{R} \cup \{\pm\infty\}$. Vi definerer da <u>limes inferior af filterbasen</u> $\hat{F}$, i notation lim inf $\hat{F}$, som det mindste kontaktpunkt for $\hat{F}$. Analogt defineres lim sup $\hat{F}$, som det største kontaktpunkt for $\hat{F}$.

Med disse begreber kan man regne "som man er vant til". Vis f.eks., at

$$\liminf \hat{F} = \sup_{F\in\hat{F}} \inf_{t\in F} t; \quad \limsup \hat{F} = \inf_{F\in\hat{F}} \sup_{t\in F} t$$

og endvidere, at $\hat{F}$ er konvergent på $\hat{R} \cup \{\pm\infty\}$, hvis og kun hvis lim inf $\hat{F}$ = lim sup $\hat{F}$.

12. Lad f være en afbildning af et topologisk rum T ind i $\hat{R} \cup \{\pm\infty\}$. Lad x_o være et punkt i T og A en delmængde af T således, at x_o er et kontaktpunkt for A. Betegn med $\hat{U}_A(x_o)$ det af omegnsfiltret inducerede filter på A (jvf.opg.8).

Ved <u>limes inferior af $f(x)$ for x konvergerende mod x_o gennem A</u>, i notation

$$\liminf_{x\to x_o,\, x\in A} f(x),$$

forstås limes inferior af filterbasen $f(\hat{U}_A(x_o))$.

Er $A = T$ skrives $\liminf\limits_{x \to x_o} f(x)$. Er $A = C(\{x_o\})$, i hvilket tilfælde vi forlanger at x_o ikke er et isoleret punkt (d.v.s. $\{x_o\}$ er ikke åben), skrives $\liminf\limits_{x \to x_o, x \neq x_o} f(x)$. Analoge definitioner gør sig gældende vedrørende $\limsup\limits_{x \to x_o x \in A} f(x)$.

Vis, at $\liminf\limits_{x \to x_o} f(x) = t_o$, hvis og kun hvis det om enhver filterbasis $\mathcal{F}$ med $\mathcal{F} \to x_o$ gælder, at $\lim\inf f(\mathcal{F}) \geq t_o$ og der findes en filterbasis $\mathcal{F}$ med $\mathcal{F} \to x_o$ så at $f(\mathcal{F}) \to t_o$.

Formuler ovenstående definitioner og resultater ved anvendelse af net.

13. En funktion $f: T \to \mathring{R} \cup \{\pm \infty\}$ fra et topologisk rum T ind i den udvidede reelle akse kaldes <u>nedad halv-kontinuert i punktet</u> x, hvor $x \in T$, såfremt

$$\forall a < f(x) \ \exists U \in \mathcal{U}(x) \ \forall y \in U : f(y) > a.$$

(Bemærk, at betingelsen er tom, hvis $f(x) = -\infty$). f kaldes <u>nedad halv-kontinuert</u> (forkortes n.h.k.), hvis f er nedad halv-kontinuert i ethvert punkt. f kaldes <u>opad halv-kontinuert</u> (forkortes o.h.k.), hvis $-f$ er n.h.k.

(a). Følgende udsagn er ækvivalente:

(i) f er n.h.k.,

(ii) $\{x \in T \mid f(x) > a\}$ er åben $\forall a \in \mathring{R}$,

(iii) $f(x_o) = \liminf\limits_{x \to x_o} f(x) \ \forall x_o \in T$,

(iv) $f(x_o) \leq \liminf\limits_{x \to x_o, x \neq x_o} f(x) \ \forall x_o \in T$, x_o ikke isoleret punkt.

(b). $f: T \to \mathring{R} \cup \{\pm \infty\}$ er kontinuert, hvis og kun hvis f er både n.h.k. og o.h.k.

(c). Givet $A \subseteq T$; da er indikatorfunktionen 1_A n.h.k., hvis og kun hvis A er åben.

(d). Er alle funktionerne $f_i: T \to \mathring{R} \cup \{\pm \infty\}$ n.h.k.; $i \in I$, da er $\sup\{f_i | i \in I\}$ også n.h.k.

14. En afbildning $f: S \to T$, hvor S og T er topologiske rum kaldes <u>åben</u>, hvis det for enhver åben mængde $O \subseteq S$ gælder, at $f(O)$ er åben. Vis, at der eksisterer en åben afbildning $f: \mathring{R} \to \mathring{R}$ som ikke er kontinuert. (Benyt f.eks. en basis for de reelle tal som vektorrum over de rationale tal).

15. Vis, at $\mathring{R}^2$ og $\mathring{R}$ ikke er homeomorfe.

16. Lad $(T_i)_{i\in I}$ være en familie af topologiske rum, og lad for hvert $i \in I$ A_i være en delmængde af T_i. Bevis, at $\Pi \bar{A}_i$ er afslutningen af ΠA_i inden for ΠT_i. Find specielt betingelsen for at ΠA_i er afsluttet.

17. Et topologisk rum kaldes et <u>Lindelöf-rum</u>, hvis det om enhver familie af åbne mængder gælder, at familien har en numerabel delfamilie med samme foreningsmængde, som den givne familie. Vis, at et rum som opfylder 2'det numerabilitetsaksiom er et Lindelöf-rum.

18. Ved en terning vil vi her forstå et produktrum af formen $T = \prod_{i \in I} T_i$, hvor hver af faktorerne T_i er et eksemplar af enhedsintervallet $[o,1]$. Bevis, at ethvert fuldstændig regulært topologisk rum S er homeomorft med et delrum af en terning, og slut

heraf at ethvert fuldstændig regulært rum har en kompaktificering. (Vejledning: Identificer $x \in S$ med familien $(f(x))$, hvor f gennemløber alle kontinuerte funktioner af S ind i $[o,1]$).

19. Formuler og bevis en omvendt sætning til Urysohns lemma (Sætning 11.3).

20. Bevis Tietzes udvidelsessætning (Sætning 11.5) for en funktion f der ikke behøver være begrænset.

21. Lad T være et Hausdorff rum og f,g kontinuerte afbildninger af det topologiske rum S ind i T. Hvis f og g stemmer overens på en tæt delmængde af S, da er f og g identiske.

22. Et topologisk rum S består af intervallet $[o,1]$ samt et element 1^*. For punkterne på $[o,1]$ benyttes den sædvanlige omegnsbasis, medens $\grave{B}(1^*)$ består af alle mængder $\{1^*\} \cup [h,1[$ med $h \in [o,1[$. Vis, at S tilfredsstiller aksiomet T1, men ikke T2.

23. Konstruer et topologisk rum, således at T3 og T4, men ikke T1 er opfyldt. diffust rum.

24. Giv et eksempel på to topologiske rum S og T samt en kontinuert afbildning $f: S \to T$, således, at S opfylder T2, hvorimod T end ikke opfylder T1.

Giv dernæst et eksempel, hvor T opfylder T2, men S ikke opfylder T1.

25. Er T fuldstændig regulært og $f: T \to \grave{R} \cup \{\pm \infty\}$ n.h.k. da er f supremum af de kontinuerte funktioner $\varphi: T \to \grave{R} \cup \{\pm \infty\}$ der ligger under f.

26. Lad K være en delmængde af det topologiske T. Følgende udsagn er ækvivalente:

(i) K er quasi-kompakt,

(ii) Ethvert net på K har et kontaktpunkt i K,

(iii) Ethvert net på K kan udtyndes til et delnet, der konvergerer mod et punkt i K,

(iv) Ethvert universalnet på K konvergerer mod et punkt i K.

27. Lad $T = (M,\mathcal{O})$ være et kompakt rum og A_1 og A_2 to tætte disjunkte delmængder med $A_1 \cup A_2 = M$. (F.eks. kan $T = [0,1]$, A_1 = mængden af rationale tal i T og $A_2 = T \setminus A_1$). Definer en ny topologi $\mathcal{O}^*$ på M ved som subbasis for $\mathcal{O}^*$ at tage $\mathcal{O} \cup \{A_1\}$.
Sæt $T^* = (M,\mathcal{O}^*)$. Bevis følgende:

(i) T^* er et Hausdorff rum, som ikke er regulært,

(ii) A_1 er tæt i T^*,

(iii) Ethvert ultrafilter (eller universalnet) på A_1 konvergerer mod et punkt i T^*,

(iv) $T^* = \ddot{A}_1$ er ikke kompakt.

28. Lad $\mathcal{F}$ være et filter på et quasi-kompakt rum T, og lad K betegne mængden af kontaktpunkter for $\mathcal{F}$. Bevis, at enhver omegn af K tilhører $\mathcal{F}$. (Vejledning: Dersom en omegn V af K ikke tilhørte $\mathcal{F}$, ville $\{A \cap CV \mid A \in \mathcal{F}\}$ ifølge opgave 8 være et filter på CV, der opfattet som filterbasis på T ville have et kontaktpunkt).

29. Lad T være quasi-kompakt og $f\colon T \to \mathring{R}$ m.h.k. Vis, at der findes et $x_0 \in T$ så at $f(x_0) = \inf\{f(x) \mid x \in T\}$.

30. Lad $f\colon S \to T$ være en kontinuert og bijektiv afbildning af et

kompakt rum S på et Hausdorff rum T. Bevis, at f er en homeomorfi.

31. Bevis, at enhver kompakt topologi på en mængde M er minimal i mængden af alle Hausdorff topologier på M, ordnet ved inklusion.

32. Lad M betegne mængden $M = \mathring{N} \cup \{\infty\}$. På M indfører vi en topologi $\mathring{O}$ ved som åbne mængder O dels at tage de delmængder af M med $\infty \notin O$, dels at tage de delmængder med $\infty \in O$ og "tæthed" 1, d.v.s.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \{\text{antal } \nu \text{ så at } 1 \leq \nu \leq n \text{ og } \nu \in O\} = 1.$$

Bevis, at $T = (M, \mathring{O})$ er et topologisk rum. Vis endvidere følgende:

(i) T er normal,

(ii) Kun de endelige delmængder af T er kompakte,

(iii) $\infty \in \bar{\mathring{N}}$, men ingen følge på $\mathring{N}$ konvergerer mod ∞.

33. Hvilke diskrete rum er a) kompakte, b) lokalkompakte og c) metriserbare?

34. Hvis ethvert punkt i et Hausdorff rum har en kompakt omegn, så er rummet lokalkompakt.

35. Et lokalkompakt rum T kaldes <u>numerabelt i det uendelige</u>, hvis T kan overdækkes med en følge af kompakte delmængder af T. Bevis, at dette er ensbetydende med enhver af følgende betingelser:

(i) I étpunktskompaktificeringen $T_\infty = T \cup \{\infty\}$ har ∞ en numerabel omegnsbasis,

(ii) Der findes en følge af kompakte delmængder K_n af T således, at $\bigcup\{K_n \mid n \in \mathring{N}\} = T$ og $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$ $\forall n \in \mathring{N}$.

(iii) Der eksisterer en kontinuert funktion $f\colon T \to \mathring{R}$ således, at $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ i T, d.v.s.

$$\forall t \in \hat{R} : f^{-1}(]-\infty,t]) \text{ er kompakt.}$$

(iv) Der eksisterer en følge $(\varphi_n)_{n\in\hat{N}}$ af kontinuerte funktioner $\varphi_n: T \to [0,1]$ med kompakt støtte K_n (K_n = afslutningen af $\{x \mid \varphi_n(x) \neq 0\}$) således, at enhver kompakt delmængde K af T kun møder K_n for endeligt mange n, og således at

$$\sum_{n\in\hat{N}} \varphi_n(x) = 1 \quad \forall x \in T.$$

(Vejledning: Benyt at T er fuldstændig regulær). Egenskaben i (iv) udtrykker, at T har en "deling af enheden".

i mål notere

36. Lad f være en ikke-negativ n.h.k. funktion defineret på et lokalkompakt rum. Da er f supremum af de ikke-negative kontinuerte funktioner med kompakt støtte, der ligger under f.

37. Lad $(f_\alpha)_{\alpha\in D}$ være et monotont aftagende net af o.h.k. funktioner $f_\alpha: T \to \hat{R}$ således, at funktionen $f = \inf_{\alpha\in D} f_\alpha$ er kontinuert. Bevis, at for enhver quasi-kompakt delmængde K af T vil $f_\alpha(x) \to f(x)$ når α gennemløber D, ligeligt i x for $x \in K$. Dette resultat kaldes Dini's lemma.

38. Et endeligt produkt af lokalkompakte rum er lokalkompakt.

39. Lad T være et Hausdorff rum og $A \subseteq T$ en tæt delmængde der er lokalkompakt i den inducerede topologi. Vis, at A er åben.

Topologiske vektorrum

Indholdsoversigt: side

(fortsættes)

Topologiske vektorrum.

1. Om visse delmængder af et vektorrum. Lad E betegne et vektorrum (i algebraisk betydning) med koefficientlegeme K, hvor $K = \mathbb{R}$ eller $K = \mathbb{C}$. Lad $A \subseteq E$. Vi kalder

A symmetrisk, hvis $\lambda A \subseteq A$ for alle $\lambda \in K$ med $|\lambda| = 1$,

A stjerneformet, hvis $\lambda A \subseteq A$ for alle $\lambda \in [0,1]$,

A stjerneformet symmetrisk, hvis $\lambda A \subseteq A$ for alle $\lambda \in K$ med $|\lambda| \leqq 1$,

A konveks, hvis $\lambda A + (1 - \lambda)A \subseteq A$ for alle $\lambda \in [0,1]$.

Da gælder:

a) A symmetrisk $\Rightarrow$ $\lambda A = A$ for alle $\lambda \in K$ med $|\lambda| = 1$.
A konveks $\Rightarrow$ $\lambda A + (1 - \lambda)A = A$ for alle $\lambda \in [0,1]$.

b) $A \neq \emptyset \wedge$ A stjerneformet $\Rightarrow$ $\underline{0} \in A$.

c) A konveks $\wedge$ $\underline{0} \in A$ $\Rightarrow$ A stjerneformet.

d) A konveks $\wedge$ A symmetrisk $\Rightarrow$ A stjerneformet.

e) A stjerneformet $\wedge$ A symmetrisk $\Longleftrightarrow$ A stjerneformet symmetrisk.

f) Billedet af en konveks (henh. symmetrisk eller stjerneformet) mængde ved en lineær afbildning er konvekst (henh. symmetrisk eller stjerneformet).

g) Enhver endelig linearkombination $\Sigma \lambda_j A_j$, enhver fællesmængde $\bigcap A_j$ og ethvert produkt ΠA_j af konvekse (henh. symmetriske eller stjerneformede) mængder A_j er konvekst (henh. symmetrisk eller stjerneformet).

Bevis.

Ad a) Lad A symmetrisk, $x \in A$ og $|\lambda| = 1$. Da er $|\lambda^{-1}| = 1$, og $x = \lambda(\lambda^{-1}x) \in \lambda A$. For vilkårligt $A \subseteq E$, $\lambda \in [0,1]$ og $x \in A$ gælder $x = \lambda x + (1 - \lambda)x \in \lambda A + (1 - \lambda)A$.

Ad b) $x \in A \Rightarrow 0x = \underline{0} \in A$.

Ad c) $x \in A \wedge \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x = \lambda x + (1 - \lambda)\underline{0} \in A$.

Ad d) Vi kan antage $A \neq \emptyset$. Lad $x \in A$. Da vil $-x = (-1)x \in A$ på grund af symmetrien, og $\underline{0} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in A$ på grund af konveksiteten. Herefter benyttes c).

Ad e) $\Leftarrow$ klart. For at vise $\Rightarrow$ betragtes $x \in A$, $\lambda \in K$, $|\lambda| \leqq 1$. Da $\lambda = |\lambda| \operatorname{sgn} \lambda = \lambda_1\lambda_2$, hvor $\lambda_1 \in [0,1]$ og $|\lambda_2| = 1$, fås $\lambda x = \lambda_1(\lambda_2 x) \in A$.

Ad f) Lad $f: E \to F$ være lineær, $A \subseteq E$, A for eksempel konveks, $\lambda \in [0,1]$. Da gælder

$$\lambda f(A) + (1-\lambda)f(A) = f(\lambda A) + f((1-\lambda)A) = f(\lambda A + (1-\lambda)A) = f(A).$$

Ad g) En linearkombination $\Sigma \lambda_j A_j$ af konvekse delmængder A_j af E er konveks; thi for $\lambda \in [0,1]$ gælder

$$\lambda \Sigma \lambda_j A_j + (1-\lambda) \Sigma \lambda_j A_j = \Sigma \lambda_j(\lambda A_j + (1-\lambda)A_j) = \Sigma \lambda_j A_j.$$

Udsagnet om fællesmængde er klart. Lad dernæst $(E_j)_{j\in J}$ være en familie af vektorrum (over samme legeme K), og lad for hvert $j \in J$ A_j være en konveks delmængde af E_j. Da bliver ΠA_j en konveks delmængde af vektorrummet ΠE_j over K (i hvilket regneoperationerne defineres koordinatvis). Thi for $x, y \in \Pi A_j$ og $\lambda \in [0,1]$ gælder $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Pi A_j$, fordi der for hvert $j \in J$ gælder $x_j, y_j \in A_j$, og derfor

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)_j = \lambda x_j + (1-\lambda)y_j \in A_j.$$

Det fremgår af g), at der for enhver delmængde A af et vektorrum E eksisterer en mindste konveks mængde omfattende A, det såkaldte <u>konvekse hylster</u>, conv A, for A. Det er nemlig fællesmængden for alle konvekse delmængder af E som omfatter A. Analogt indføres det symmetriske, det stjerneformede og det <u>symmetrisk-stjerneformede hylster</u> for A. Dette sidste er

$$\bigcup_{|\lambda| \leqq 1} \lambda A = \{\lambda x \mid \lambda \in K \wedge |\lambda| \leqq 1 \wedge x \in A\}.$$

Det konvekse hylster for A består af alle (endelige) "konvekse kombinationer" $\Sigma\, \lambda_j x_j$ af vektorer $x_j \in A$, altså alle linearkombinationer $\Sigma\, \lambda_j x_j$ med $\lambda_j \in [0,1]$ og $\Sigma\, \lambda_j = 1$. (Jvf. T3, opg. 5.)

En mængde $A \subseteqq E$ kaldes <u>absorberende</u>, hvis

$$\forall x \in E \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall \lambda \in K: \quad |\lambda| \leqq \alpha \Rightarrow \lambda x \in A,$$

altså hvis der (for ethvert $x \in E$) gælder $\lambda x \in A$ for alle λ i en tilstrækkelig lille omegn af 0 i K. (Denne omegn kan afhænge af x.)

Mængden af alle absorberende delmængder af et vektorrum E er åbenbart et filter på E. Det kan bemærkes, at dersom A betegner en stjerneformet symmetrisk mængde, da er A absorberende hvis (og kun hvis) der til ethvert $x \in E$ findes $\lambda \in \mathring{R}_+$ så at $\lambda x \in A$. Det er endda nok at betragte λ af formen $\lambda = 1/n$, $n \in \mathring{N}$, hvorfor betingelsen kan omskrives til

$$\bigcup_{n \in \mathring{N}} n A = E.$$

2. <u>Topologisk vektorrum</u>. Ved et <u>topologisk vektorrum</u> (t.v.r.) forstås et vektorrum E, som tillige er et topologisk rum, og hvori de to algebraiske operationer er kontinuerte.

Vi skal kun betragte t.v.r. med koefficientlegemet $K = \mathring{R}$ eller $\mathring{C}$. Det forudsættes altså, at afbildningerne $(x,y) \to x + y$ og $(\lambda,x) \to \lambda x$ af henholdsvis $E \times E$ og $K \times E$ ind i E er kontinuerte.

For ethvert $a \in E$ er specielt <u>parallelforskydningen</u> $x \to a + x$ af E på E kontinuert. Da den også er bijektiv, og da dens omvendte afbildning er af samme art, nemlig $x \to -a + x$, og derfor kontinuert, bliver enhver parallelforskydning en homeomorfi af E på sig selv. Heraf følger:

$$\forall a \in E: \quad \mathfrak{U}(a) = \{a + U \mid U \in \mathfrak{U}(\underline{0})\}.$$

I topologisk henseende indtager $\underline{0}$ derfor ingen særstilling sammenlignet med andre punkter af E.

For ethvert $\lambda \in K$ er afbildningen $x \to \lambda x$ af E ind i E kontinuert. For $\lambda \neq 0$ kaldes afbildningen en <u>homoteti</u>. Da en sådan er bijektiv, og da den omvendte afbildning $x \to \lambda^{-1}x$ ligeledes er en homoteti og dermed kontinuert, bliver enhver homoteti en homeomorfi af E på sig selv. Heraf følger:

$$\forall \lambda \in K\setminus\{0\} \; \forall U \in \mathfrak{U}(\underline{0}) \quad : \quad \lambda U \in \mathfrak{U}(\underline{0}).$$

Da additionen specielt er kontinuert i $(\underline{0},\underline{0})$, findes der til enhver omegn $U \in \mathfrak{U}(\underline{0})$ en omegn $V \in \mathfrak{U}(\underline{0})$ så at $(x,y) \in V \times V \Rightarrow x + y \in U$, altså så at

$$V + V \subseteq U.$$

Tilsvarende gælder åbenbart, dersom $\mathfrak{U}(\underline{0})$ erstattes med en vilkårlig basis $\mathfrak{B}(\underline{0})$ for $\mathfrak{U}(\underline{0})$.

For ethvert $x \in E$ er afbildningen $\lambda \to \lambda x$ af K ind i E specielt kontinuert i 0. Dette er åbenbart ensbetydende med at sige, at enhver omegn $U \in \mathfrak{U}(\underline{0})$ er <u>absorberende</u>.

Afbildningen $(\lambda,x) \to \lambda x$ af $K \times E$ ind i E er specielt kontinuert i $(0,\underline{0})$. Til ethvert $U \in \mathfrak{U}(\underline{0})$ findes derfor $\alpha > 0$ og $V \in \mathfrak{U}(\underline{0})$ så at $|\lambda| \leq \alpha \;\wedge\; x \in V \;\Rightarrow\; \lambda x \in U$, altså så at $|\lambda| \leq \alpha \;\Rightarrow\; \lambda V \subseteq U$. Som ovenfor nævnt, er $\alpha V \in \mathfrak{U}(\underline{0})$, og det stjerneformet - symmetriske hylster W af αV er derfor ligeledes en omegn af $\underline{0}$.

Ifølge stk. 1 gælder nu

$$W = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda \alpha V = \bigcup_{|\lambda| \leq \alpha} \lambda V \subseteq U.$$

Hermed er vist, at enhver omegn af $\underline{0}$ omfatter en stjerneformet symmetrisk omegn af $\underline{0}$.

Sætning: I ethvert topologisk vektor rum E over K(= $\hat{R}$ eller $\hat{C}$) eksisterer der en basis $\hat{B}(\underline{0})$ for filtret $\hat{U}(\underline{0})$ af omegne af $\underline{0}$ i E med følgende egenskaber:

i) Enhver mængde $U \in \hat{B}(\underline{0})$ er stjerneformet symmetrisk og absorberende.

ii) $\forall\, U \in \hat{B}(\underline{0}) \quad \forall\, \lambda \in K \setminus \{0\} : \lambda U \in \hat{B}(\underline{0})$.

iii) $\forall\, U \in \hat{B}(\underline{0}) \quad \exists\, V \in \hat{B}(\underline{0}) : V + V \subseteq U$.

Betegner omvendt E et vilkårligt vektorrum over K, og $\hat{B}(\underline{0})$ en filterbasis på E med egenskaberne i, ii, iii, da frembringer $\hat{B}(\underline{0})$ omegnsfiltret af $\underline{0}$ i netop én topologi på E, ved hvilken E bliver et topologisk vektorrum. Herved danner $\{x + U \mid U \in \hat{B}(\underline{0})\}$ en basis for filtret af omegne af $x \in E$.

Bevis. Lad først E være et t.v.r.. Idet vi for $\hat{B}(\underline{0})$ tager mængden af alle stjerneformet symmetriske omegne af $\underline{0}$, har vi ovenfor bevist, at $\hat{B}(\underline{0})$ er en basis for filtret $\hat{U}(\underline{0})$ af omegne af $\underline{0}$ i E. Egenskaberne i, ii, iii følger herefter af de ovenfor udledte konsekvenser af kravet om regneoperationernes kontinuitet.

Lad dernæst E betegne et vektorrum (uden topologi), og lad $\hat{B}(\underline{0})$ være en filterbasis på E med de anførte egenskaber i, ii, iii. Med $\hat{U}(\underline{0})$ betegnes det af $\hat{B}(\underline{0})$ frembragte filter på E.

Ifølge det foregående er

$$\mathfrak{U}(x) = \{x + U \mid U \in \mathfrak{U}(\underline{0})\}$$

den eneste mulighed for filtret af omegne af $x \in E$, når der skal være tale om et t.v.r.. Vi definerer derfor $\mathfrak{U}(x)$ som anført for ethvert $x \in E$. Det er klart at $\mathfrak{U}(x)$ er et filter, og at

$$\mathfrak{B}(x) = \{x + U \mid U \in \mathfrak{B}(\underline{0})\}$$

er en basis for $\mathfrak{U}(x)$. Da mængderne i $\mathfrak{B}(\underline{0})$ er ikke-tomme og tillige er stjerneformede, må de alle indeholde $\underline{0}$ (se b, stk. 1), og mængderne i $\mathfrak{B}(x)$ indeholder derfor x. For at indse, at E er et topologisk rum, mangler vi derfor blot at eftervise betingelsen b 4 (eller o5). Til $x \in E$ og $x + U \in \mathfrak{B}(x)$ (altså $U \in \mathfrak{B}(\underline{0})$) svarer ifølge iii $V \in \mathfrak{B}(\underline{0})$ med $V + V \subseteq U$. Da gælder $x + V \in \mathfrak{B}(x)$; og for ethvert $y \in x + V$ er $y + V \in \mathfrak{B}(y)$. og

$$y + V \subseteq x + V + V \subseteq x + U.$$

Tilbage står at eftervise kontinuiteten af de algebraiske operationer. At additionen er kontinuert i $(x_0, y_0) \in E \times E$ fremgår af, at hvis $x \in x_0 + V$ og $y \in y_0 + V$, så gælder

$$x + y \in (x_0 + V) + (y_0 + V) = (x_0 + y_0) + (V + V) \subseteq x_0 + y_0 + U,$$

såfremt $V \in \mathfrak{B}(\underline{0})$ er bestemt ud fra opgivet $U \in \mathfrak{B}(\underline{0})$ i henhold til iii, altså så at $V + V \subseteq U$. Lad os dernæst betragte multiplikationen med skalarer. Lad $(\lambda_0, x_0) \in K \times E$, og lad atter $U \in \mathfrak{B}(\underline{0})$ være givet. Vi søger et tal $\delta > 0$ og en omegn $W \in \mathfrak{B}(\underline{0})$ så at

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \delta \wedge x - x_0 \in W \Rightarrow \lambda x - \lambda_0 x_0 \in U.$$

Nu viser omskrivningen

$$\lambda x - \lambda_o x_o = (\lambda - \lambda_o)(x - x_o) + \lambda_o(x - x_o) + (\lambda - \lambda_o)x_o,$$

at det er tilstrækkeligt at opnå (for de omtalte λ, x) at

$$(\lambda - \lambda_o)(x - x_o) \in V \wedge \lambda_o(x - x_o) \in V \wedge (\lambda - \lambda_o)x_o \in V,$$

såfremt blot $V \in \mathring{B}(\underset{\sim}{0})$ er bestemt så at $V + V + V \subseteqq U$. Ved gentagen anvendelse af iii ses at der til ethvert $U \in \mathring{B}(\underset{\sim}{0})$ eksisterer et $V \in \mathring{B}(\underset{\sim}{0})$ så at $V + V + V + V \subseteqq U$, og da $\underset{\sim}{0} \in V$ gælder tillige $V + V + V \subseteqq U$. Da V er stjerneformet symmetrisk, haves

$$|\lambda - \lambda_o| \leqq 1 \wedge x - x_o \in V \Rightarrow (\lambda - \lambda_o)(x - x_o) \in V.$$

Udsagnet $\lambda_o(x-x_o) \in V$ er altid sandt, hvis $\lambda_o = 0$. Er $\lambda_o \neq 0$, er det opfyldt for $x - x_o \in \lambda_o^{-1} V$. Udsagnet $(\lambda - \lambda_o)x_o \in V$ er sandt for alle $\lambda - \lambda_o$ i en tilstrækkelig lille omegn $|\lambda - \lambda_o| \leqq \alpha$ af 0 i K, fordi V er absorberende. Herefter behøver vi blot at sætte $\delta = \min(\alpha, 1)$, og $W = V$ såfremt $|\lambda_o| \leqq 1$, $W = \lambda_o^{-1} V$ såfremt $|\lambda_o| > 1$.

3. Sætning. Ethvert topologisk vektorrum E opfylder adskillelseaxiomet (T 3). Mængden af stjerneformet symmetriske, afsluttede omegne af $\underset{\sim}{0}$ udgør en basis for $\mathring{U}(\underset{\sim}{0})$. Endvidere er E et Hausdorffrum (og dermed regulært), hvis og kun hvis $\bigcap_{U \in \mathring{U}(\underset{\sim}{0})} U = \{\underset{\sim}{0}\}$.

Bevis. Til given omegn $x + U$ af $x \in E$ (hvorved $U \in \mathring{U}(\underset{\sim}{0})$) findes som vist en omegn $V \in \mathring{U}(\underset{\sim}{0})$ så at $V + V \subseteqq U$. Afslutningen af $x + V$ er da en afsluttet omegn af x, som vi nu viser er en delmængde af $x + U$. For ethvert kontaktpunkt y for $x + V$ findes $z \in (x + V) \cap (y - V)$, fordi $-V \in \mathring{U}(\underset{\sim}{0})$, $y - V \in \mathring{U}(y)$. Da således $y - z \in V$, gælder

$$y = z + (y - z) \in x + V + V \subseteq x + U.$$

Hermed er bevist, at E opfylder (T3). Derfor bliver E regulært (specielt Hausdorff) hvis og kun hvis E opfylder (T1), altså hvis der for $x \neq y$ findes en omegn $x + U$ af x, som ikke indeholder y. Det er åbenbart nok at forlange dette for $x = \underline{0}$, og vi kommer herved til betingelsen $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}(\underline{0})} U = \{\underline{0}\}$.

Der gælder nu alment for en delmængde A af et t.v.r. E:

$$A \text{ konveks} \Rightarrow \bar{A} \text{ konveks},$$

og tilsvarende med symmetriske eller stjerneformet i stedet for konveks. Dette fremgår let af, at

$$\lambda \bar{A} \subseteq \overline{\lambda A}, \qquad \bar{A} + \bar{B} \subseteq \overline{A+B}$$

for vilkårlige delmængder $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ og for $\lambda \in K$. Og disse relationer følger af, at afbildningerne $x \to \lambda x$ af E ind i E og $(x,y) \to x + y$ af $E \times E$ ind i E er kontinuerte (samt at $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$, når $E \times E$ udstyres med produkttopologien, jvf. T2, opg. 32).

Enhver omegn $U \in \mathfrak{U}(\underline{0})$ omfatter som vist en afsluttet omegn $V \in \mathfrak{U}(\underline{0})$. Denne omfatter igen en stjerneformet symmetrisk omegn $W \in \mathfrak{U}(\underline{0})$. Men så er i henhold til ovenstående $\bar{W}$ en stjerneformet symmetrisk omegn af $\underline{0}$, og $\bar{W} \subseteq \bar{V} = V \subseteq U$.

4. <u>Definition</u>. Et t.v.r. E kaldes <u>lokalkonvekst</u>, dersom de konvekse omegne af $\underline{0}$ danner en basis for $\mathfrak{U}(\underline{0})$.

På samme måde som i beviset for sætning 3 indses, at de <u>konvekse</u>, symmetriske, afsluttede omegne af $\underline{0}$ i et lokalkonvekst rum danner en basis for $\mathfrak{U}(\underline{0})$. Og i sætning 2 behøver man blot at lade begrebet "konveks symmetrisk" træde i stedet for det svagere begreb "stjerneformet symmetrisk" (jvf. d, stk. 1) for at nå, til et tilsvarende resultat for lokalkonvekse rum.

Herved kan man for øvrigt se bort fra egenskaben iii, da den følger af de øvrige egenskaber ved $\mathring{B}(\underline{0})$, når mængderne heri er konvekse. For V kan man nemlig da tage $\frac{1}{2}$ U, idet $\frac{1}{2} U + \frac{1}{2} U = U$, når U er konveks.

Det vil i det følgende altid blive fremhævet, dersom et t.v.r. skal forudsættes lokalkonvekst eller Hausdorff.

Som et elementært eksempel på et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. over K ($=\mathring{R}$ eller $\mathring{C}$) kan nævnes vektorrummet K^m ($m \in \mathring{N}$) udstyret med den sædvanlige produkttopologi. (Jvf. sætning 9 nedenfor.)

5. Ved en <u>isomorfi</u> af et t.v.r. E_1 på et t.v.r. E_2 (begge over samme legeme K) forstås en isomorfi i algebraisk betydning (altså en bijektiv, lineær afbildning), som tillige er en homeomorfi. Som sædvanlig kaldes to rum isomorfe, dersom der eksisterer en isomorfi af det ene på det andet. Der er her åbenbart tale om en ækvivalensrelation i "klassen" af alle t.v.r. over K.

<u>Sætning. Ethvert 1-dimensionalt Hausdorff t.v.r. E over K ($=\mathring{R}$ eller $\mathring{C}$) er isomorft med K.</u>

<u>Bevis</u>. Lad $e \in E \setminus \{\underline{0}\}$. Da er $E = Ke = \{\lambda e \mid \lambda \in K\}$. Ved $\lambda \to \lambda e$ defineres en bijektiv, lineær og kontinuert afbildning af K på E. For at vise, at denne afbildning er en isomorfi, mangler vi at godtgøre, at den omvendte afbildning er kontinuert i ethvert punkt $\lambda_o e \in E$, altså at der for ethvert $\alpha > 0$ findes en omegn $\lambda_o e + U$ af $\lambda_o e$ i E således at

$$\lambda e \in \lambda_o e + U \quad \Rightarrow \quad |\lambda - \lambda_o| < \alpha .$$

Hertil vælger vi blot U som en stjerneformet symmetrisk omegn af $\underline{0}$ i E for hvilken $\alpha e \notin U$, hvilket er muligt, fordi E opfylder T 1. Lad nu $\lambda e \in \lambda_0 e + U$. Var $|\lambda - \lambda_0| \geq \alpha$, blev $|\alpha(\lambda - \lambda_0)^{-1}| \leq 1$, og derfor var

$$\alpha e = \alpha(\lambda - \lambda_0)^{-1} \cdot (\lambda - \lambda_0)e \in U$$

i modstrid med betydningen af U.

Det tilføjes, at forudsætningen om, at E er Hausdorff, ikke kan undværes, idet den diffuse topologi på E = K (med K og $\emptyset$ som eneste åbne mængder) gør K til et lokalkonvekst t.v.r., som ikke er Hausdorff og derfor ikke kan være isomorft med K udstyret med den sædvanlige topologi (altså med det K, der er tænkt på i sætningen).

6. Lad E_1 være et t.v.r. over K, E_2 et vektorrum over K, og $f: E_1 \to E_2$ en lineær, surjektiv afbildning. Det verificeres umiddelbart, at der defineres en topologi på E_2 ud fra den givne topologi på E_1, når man som åbne delmængder af E_2 tager de mængder $B \subseteq E_2$, for hvilke $f^{-1}(B)$ er åben i E_1. Det er klart, at herved bliver f kontinuert, og den omtalte topologi på E_2 er den fineste med denne egenskab.

Vi viser nu, at f desuden bliver en åben afbildning (d.v.s. overfører åben delmængde af E_1 i åben delmængde af E_2), og at E_2 bliver et topologisk vektorrum. Endvidere bliver E_2 lokalkonvekst, dersom E_1 er det. Og E_2 bliver et Hausdorff-rum, hvis og kun hvis $f^{-1}(\underline{0})$ er afsluttet i E_1.

Kernen $N = f^{-1}(\underline{0})$ er jo et underrum af E_1 og kaldes også nulrummet for f. Åbenbart gælder $f^{-1}(f(x)) = x + N$ for ethvert $x \in E_1$. For en delmængde $A \subseteq E_1$ er derfor

$$f^{-1}(f(A)) = \bigcup_{x \in A} (x+N) = N + A = \bigcup_{y \in N} (y+A).$$

Specielt er $f(A)$ åben, såfremt A er åben. Lad os dernæst vise, at additionen er kontinuert i et vilkårligt punktpar $(x_2, y_2) \in E_2 \times E_2$. Da f er surjektiv, findes $(x_1, y_1) \in E_1 \times E_1$ med $f(x_1) = x_2$, $f(y_1) = y_2$, og derfor $f(x_1 + y_1) = f(x_1) + f(y_1) = x_2 + y_2$. For enhver omegn U af $x_2 + y_2$ i E_2 er $f^{-1}(U)$ en omegn af $x_1 + y_1$ i E_1, fordi f er kontinuert. Da nu additionen i E_1 er kontinuert, findes omegne V af x_1 og W af y_1 så at $V + W \subseteq f^{-1}(U)$. Men da f er åben, bliver $f(V)$ en omegn af $f(x_1) = x_2$ og $f(W)$ en omegn af y_2. Da f er lineær, gælder for disse omegne

$$f(V) + f(W) = f(V + W) \subseteq f(f^{-1}(U)) = U,$$

hvilket netop viser, at additionen er kontinuert. Beviset er analogt for den anden regneoperation.

Da f er lineær og åben, afbildes enhver konveks omegn V af $\underline{0}$ i E_1 på en konveks omegn $f(V)$ af $\underline{0}$ i E_2 (stk. 1, f). Hvis nu E_1 er lokalkonvekst, danner disse omegne $f(V)$ en basis for filtret af omegne af $\underline{0}$ i E_2. Thi for enhver omegn U af $\underline{0}$ i E_2 er $f^{-1}(U)$ en omegn af $\underline{0}$ i E_1. Der findes derfor (stk. 4) en konveks omegn V af $\underline{0}$ i E_1 så at $V \subseteq f^{-1}(U)$ og derfor $f(V) \subseteq f(f^{-1}(U)) = U$. Hermed er vist, at E_2 bliver lokalkonvekst, dersom E_1 er det.

Ved overgang til komplementærmængder antager definitionen på topologien i E_2 formen: B ($\subseteq E_2$) afsluttet i $E_2 \iff f^{-1}(B)$ afsluttet i E_1. Anvendt på $B = \{\underline{0}\}$ fås derfor:

$$\begin{aligned} E_2 \text{ Hausdorff} &\iff \{\underline{0}\} \text{ afsluttet i } E_2 \\ &\iff f^{-1}(\{\underline{0}\}) = N \text{ afsluttet i } E_1. \end{aligned}$$

7. Bemærk det specielle tilfælde af det i stk. 6 fundne resultat, hvor den lineære afbildning $f : E_1 \to E_2$ er bijektiv. Ved den fundne topologi på E_2 (der i dette tilfælde kaldes billedet af topologien på E_1 ved afbildningen f) bliver f således en isomorfi af E_1 på E_2. De åbne delmængder af E_2 er her simpelthen billederne ved f af de åbne delmængder af E_1, og tilsvarende for afsluttede mængder.

8. Kvotient af topologiske vektorrum. En mere typisk anvendelse af resultatet i stk. 6 er følgende:

Sætning. Lad E være et t.v.r. og $F \subseteq E$ et underrum af E. Med k betegnes den kanoniske afbildning af E på kvotientrummet E/F givet ved $k(x) = x + F$ for $x \in E$. Når E/F udstyres med den fineste topologi for hvilken k er kontinuert, bliver k en åben afbildning og E/F et t.v.r. Dersom E er lokalkonvekst, bliver E/F det også. Endelig er E/F Hausdorff, hvis og kun hvis F er afsluttet i E.

Bevis. Da $k : E \to E/F$ er lineær og surjektiv, fremgår sætningen umiddelbart af det i stk. 6 fundne resultat anvendt på $E_1 = E$, $E_2 = E/F$ og $f = k$, idet det bemærkes, at $k^{-1}(\underline{0}) = F$.

9. Produkt af topologiske vektorrum. Lad $(E_j)_{j \in J}$ være en familie af topologiske vektorrum over samme legeme K. Da er produktrummet $E = \prod_{j \in J} E_j$ dels et vektorrum over K (ved koordinatvis definition af regneoperationerne), dels et topologisk rum (ved produkttopologien).

Sætning. Ethvert produkt $\prod E_j$ af topologiske vektorrum er et t.v.r. Dette er lokalkonvekst, resp. Hausdorff, hvis og kun hvis hvert af rummene E_j er det.

Bevis. For at vise, at f.eks. additionen i $E = \Pi E_j$ er kontinuert, betragtes to punkter $x, y \in E$ og en omegn U af $x + y$ i E. Vi kan gerne antage, at $U = \prod_{j \in J} U_j$, hvor U_j er en omegn af $(x + y)_j = x_j + y_j$ i E_j, og hvor $J_U = \{j \in J \mid U_j \neq E_j\}$ er endelig. Da additionen i E_j er kontinuert, findes omegne V_j af x_j og W_j af y_j med $V_j + W_j \subseteq U_j$. For $j \in J \setminus J_U$ benytter vi $V_j = W_j = E_j$ $(=U_j)$. Da bliver $V = \prod_{j \in J} V_j$ og $W = \prod_{j \in J} W_j$ omegne af henholdsvis x og y med $V + W \subseteq U$.

Hvis de givne rum E_j, $j \in J$, alle er lokalkonvekse, bliver produktrummet E det også. Som basis for filtret af omegne af $\underline{0}$ i E haves jo mængderne $\prod_{j \in J} U_j$, hvor U_j er en konveks omegn af $\underline{0}$ i E_j, og hvor $J_U = \{j \in J \mid U_j \neq E_j\}$ er endelig. Resultatet fremgår da af, at ethvert produkt af konvekse mængder er konvekst (stk. 1, g). At omvendt lokalkonveksiteten af E medfører lokalkonveksiteten af hvert E_j kan f.eks. vises analogt med den tilsvarende slutning i stk. 6. - Endelig gælder alment, at et produkt af (ikke tomme) topologiske rum er Hausdorff, hvis og kun hvis de enkelte rum er det (T2, opg. 22).

10. <u>Den ligelige struktur på et topologisk vektorrum</u>. Begreber som fundamentalfilter, fundamentalfølge, fuldstændighed, ligelig kontinuitet og flere andre kan behandles naturligt i alle sådanne rum, som er udstyret med en såkaldt ligelig (=uniform) struktur, hvilket løst sagt betyder, at man kan tale om, at to variable punkter ligger tæt ved hinanden (af en vis "orden"). Vi skal ikke her komme ind på teorien for ligelige rum i almindelighed (herom henvises til Bourbaki, Topologie générale, ch.2), men i stedet behandle spørgsmål om ligelighed i tilknytning til en af hovedtyperne af sådanne rum, nemlig de topologiske vektorrum. I et sådant ligger to punkter tæt ved hinanden, dersom deres differens tilhører en "lille" omegn af $\underline{0}$. (En anden hovedtype af ligelige rum er de metriske rum, hvor jo afstanden mellem to punkter giver et naturligt mål for, hvor tæt de to punkter ligger ved hinanden).

<u>Definition</u>. Et filter (eller en filterbasis) Φ på et t.v.r. E kaldes <u>fundamentalt</u>, dersom det indeholder vilkårligt små mængder, d.v.s.

$$\forall U \in \mathring{U}(\underline{0}) \quad \exists A \in \Phi \ : \quad A - A \subseteq U.$$

Et filter Φ på E er fundamentalt, hvis og kun hvis

$$\forall U \in \mathring{U}(\underline{0}) \quad \exists x \in E \ : \quad x + U \in \Phi.$$

(Ad "hvis": Til givet $U \in \mathring{U}(\underline{0})$ findes $V \in \mathring{U}(\underline{0})$ med $V - V \subseteq U$. Af $A = x + V \in \Phi$ følger da $A - A = V - V \subseteq U$. Ad "kun hvis": Lad $x \in A$; da er $A - x \subseteq A - A \subseteq U$ og derfor $A \subseteq x + U$. Af $A \in \Phi$ følger således $x + U \in \Phi$.)

Et konvergent filter (eller filterbasis) er fundamentalt, som man umiddelbart ser af den sidste form af definitionen.

Ethvert filter, som er finere end et fundamentalfilter, er selv et fundamentalfilter. (Klart.)

Et filter (eller en filterbasis) Φ på en delmængde M af et t.v.r. E kaldes fundamentalt, dersom Φ, opfattet som filterbasis på E, er fundamental. Betingelsen herfor er åbenbart igen, at

$$\forall U \in \mathfrak{U}(\underline{0}) \quad \exists A \in \Phi : \quad A - A \subseteq U.$$

Lemma. Dersom et fundamentalfilter Φ på E inducerer et filter

$$\Phi_M = \{ A \cap M \mid A \in \Phi \}$$

på en delmængde $M \subseteq E$ (altså hvis $A \cap M \neq \emptyset$ for alle $A \in \Phi$), da er Φ_M et fundamentalfilter på M.

Thi opfattet som filterbasis på E bestemmer Φ_M et filter, som er finere end Φ som følge af inklusionen $A \supseteq A \cap M$.

Specielt kan nævnes, at filtret $\mathfrak{U}(x)$ af omegne af et punkt $x \in E$ inducerer et fundamentalfilter på enhver delmængde $M \subseteq E$ for hvilken $x \in \overline{M}$. Opfattet som filterbasis på E konvergerer det mod x, men ikke som filter på M, med mindre $x \in M$.

Sætning. Ethvert kontaktpunkt for et fundamentalfilter er et grænsepunkt for dette.

Bevis. Lad x være et kontaktpunkt for et fundamentalfilter Φ på et t.v.r. E.

For enhver omegn $U \in \mathfrak{U}(\underline{0})$ findes $V \in \mathfrak{U}(\underline{0})$ med $V + V \subseteq U$. Lad $A \in \Phi$, $A - A \subseteq V$, og lad $y \in (x + V) \cap A$. Da er $A - y \subseteq A - A \subseteq V$, og derfor

$$A \subseteq y + V \subseteq x + V + V \subseteq x + U.$$

Korollar. Hvis et fundamentalfilter på en mængde M kan udvides til en filter på M, som har et grænsepunkt $x \in M$, da konvergerer også Φ mod x.

Thi x er et kontaktpunkt for Φ.

En punktfølge $(x_n)_{n \in \mathring{N}}$ på E bestemmer filterbasen $\{\{x_m \mid m > n\}\ n \in \mathring{N}\}$, nemlig billedet af elementarfiltret på $\mathring{N}$ ved afbildningen $n \to x_n$ af $\mathring{N}$ ind i E. Denne filterbasis på E er åbenbart fundamental hvis og kun hvis følgen $(x_n)_{n \in \mathring{N}}$ er en fundamentalfølge i den forstand, at

$$\forall V \in \mathring{U}(\underline{0})\ \exists N \in \mathring{N}\ \forall m,n \in \mathring{N}:\ m,n > N \Rightarrow x_m - x_n \in V.$$

11. Fuldstændighed. En delmængde M af et t.v.r. E kaldes fuldstændig, dersom ethvert fundamentalfilter på M er konvergent i M. Vi kalder M følgefuldstændig, dersom enhver fundamentalfølge på M er konvergent i M. Hvis M er fuldstændig, da også følgefuldstændig. Det omvendte gælder ikke i almindelighed; men vi har dog flg. resultat:

Sætning. Hvis der findes en numerabel basis for filtret af omegne af $\underline{0}$ i E, er enhver følgefuldstændig delmængde af E fuldstændig.

Bevis. Lad $\{U_n\}_{n \in \mathring{N}}$ være en numerabel basis for $\mathring{U}(\underline{0})$. Ifølge sætning 3 omfatter U_n en afsluttet omegn V_n, og $\{V_n\}_{n \in \mathring{N}}$ er da ligeledes en basis for $\mathring{U}(\underline{0})$. Lad nu $M \subseteq E$ være følgefuldstændig, og lad Φ være et fundamentalfilter på M. Til $n \in \mathring{N}$ findes $A_n \in \Phi$ med $A_n - A_n \subseteq V_n$. Mængderne $B_n = A_1 \cap \dots \cap A_n$ danner en aftagende følge af mængder fra Φ. Vælges $x_n \in B_n$, gælder for $m,n \geq N$, at $x_m, x_n \in B_N$ og derfor

$$x_m - x_n \in B_N - B_N \subseteq A_N - A_N \subseteq V_N.$$

Da enhver omegn af $\underline{0}$ i E omfatter et V_N, er hermed vist, at følgen $(x_n)_{n\in\hat{N}}$ på M er fundamental. Ifølge forudsætning har denne følge derfor et grænsepunkt $x \in M$. Af $x_m - x_N \in V_N$ for $m \geq N$ følger for $m \to \infty$, at $x - x_N \in \overline{V}_N = V_N$. Af $A_N - A_N \subseteq V_N$ og $x_N \in A_N$ følger $A_N - x_N \subseteq V_N$ og

$$A_N \subseteq x_N + V_N = x - (x - x_N) + V_N \subseteq x - V_N + V_N.$$

Dette viser, at $\Phi \to x$ i M, fordi der til enhver omegn $x + U$ af x findes $V_N \in \mathring{U}(\underline{0})$ med $V_N - V_N \subseteq U$ og derfor $x + U \supseteq A_N \in \Phi$.

12. Sætning. En fuldstændig delmængde af et Hausdorff t.v.r. E er afsluttet.

Bevis. Lad x være et kontaktpunkt for en fuldstændig delmængde M af E. Da inducerer $\mathring{U}(x)$ et fundamentalfilter Φ på M, og dette vil, opfattet som filterbasis på E, konvergere mod x. Da M er fuldstændigt, har Φ et grænsepunkt $y \in M$. Da E er Hausdorff, er $x = y$.

13. Sætning. En afsluttet delmængde af et fuldstændigt t.v.r. E er fuldstændig.

Bevis. Lad Φ være et fundamentalfilter på en afsluttet delmængde M af E. Da er Φ en fundamentalfilterbasis på E og derfor konvergent i E. Et grænsepunkt x for Φ er også kontaktpunkt for Φ, altså for enhver mængde fra Φ, specielt for M, hvorfor $x \in \overline{M} = M$.

Man bemærker, at sætn. 12 og 13 er analoge med kompakthedsteoriens sætninger 23.1 og 23.2 i T2. Iøvrigt gælder der den sætning, at enhver (quasi) kompakt delmængde M af et t.v.r. E er fuldstændig. Thi ethvert filter Φ på M kan udvides til et i M konvergent filter på M. Anvendes dette på et fundamentalfilter Φ fremgår resultatet af sætning 10.

14. Sætning. For ethvert $m \in \hat{N}$ er talrummet K^m et fuldstændigt

Hausdorff t.v.r. over $K(=\mathring{R}$ eller $\mathring{C})$.

Bevis. Enhver fundamentalfølge $(x_n)_{n\in\mathring{N}}$ på K^m er begrænset, lad os sige $|x_n| \leqq a$ for alle $n \in \mathring{N}$. Nu er kuglen $\{x \in K^m \mid |x| \leqq a\}$ kompakt, derfor fuldstændig, hvorfor $\lim_{n\to\infty} x_n$ eksisterer (og tilhører denne kugle). Da K^m har en numerabel basis for omegnene af $\underline{0}$ (f.eks. de nævnte kugler, nu med $a=1/n, n \in \mathring{N}$) er hermed vist, at K^m er fuldstændigt. (I øvrigt kunne beviset også føres med filtre, idet ethvert fundamentalfilter på K^m indeholder en begrænset mængde A og derfor inducerer et fundamentalfilter på denne, derfor også på $\bar{A}$, som er kompakt.)

15. Ligelig kontinuitet. En afbildning $f:M \to F$ af en delmængde M af et t.v.r. E ind i et t.v.r. F kaldes ligelig kontinuert, dersom der til enhver omegn V af $\underline{0}$ i F findes en omegn U af $\underline{0}$ i E, således at der for $x,y \in M$ gælder

$$x - y \in U \Rightarrow f(x) - f(y) \in V ,$$

altså $x \in y + U \Rightarrow f(x) \in f(y) + V$. For fastholdt y viser dette at f er kontinuert i y. En ligelig kontinuert afbildning er således kontinuert.

En kontinuert afbildning af en given kompakt mængde M ind i F er ligelig kontinuert, som man let ser ved at benytte den velkendte overdækningsegenskab for M (Borel - Lebesgue's overdækningssætning).

En kontinuert, lineær afbildning $f: E \to F$ er ligelig kontinuert, fordi $f(x) - f(y) = f(x - y)$. (Det er således nok at forudsætte kontinuitet i $\underline{0}$).

Svarende til sætningen om, at en konvergent filterbasis ved en kontinuert afbildning overføres i en konvergent filterbasis, haves følgende jævnfør sætningens analoge for metr. rum.

Sætning. Lad $f: M \to F$ være en ligelig kontinuert afbildning af en delmængde M af et t.v.r. E ind i et t.v.r. F. For enhver fundamentalfilterbasis Φ på M er $f(\Phi)$ en fundamentalfilterbasis på F.

Bevis. Til enhver omegn V af $\underline{0}$ i F findes en omegn U af $\underline{0}$ i E som anført i definitionen på ligelig kontinuitet. Til U findes $A \in \Phi$ med $A - A \subseteq U$, hvoraf $f(A) \in f(\Phi)$ og $f(A) - f(A) \subseteq V$.

Lemma. Lad $E = \prod_{i \in I} E_i$ være et produkt af t.v.r. E_i, og lad p_i betegne den kanoniske projektion af E på E_i $(i \in I)$. En filterbasis Φ på E er fundamental, hvis og kun hvis enhver af filterbaserne $p_i(\Phi)$ er fundamental.

Bevis. "Kun hvis" følger af den foregående sætning, idet p_i er kontinuert og lineær, derfor ligelig kontinuert. Enhver omegn af $\underline{0}$ i E omfatter en basisomegn af formen $V = \prod_{i \in I} V_i$, hvor V_i er en omegn af $\underline{0}$ i E_i, og således, at $J = \{i \in I \mid V_i \neq E_i\}$ er endelig. For hvert $i \in J$ vælges $A_i \in \Phi$ således at $p_i(A_i) - p_i(A_i) \subseteq V_i$. Da findes $A \in \Phi$ med $A \subseteq \bigcap_{i \in J} A_i$, og vi slutter, at $A - A \subseteq V$, fordi $p_i(A) \subseteq p_i(A_i)$, og derfor $p_i(A) - p_i(A) \subseteq V_i$ (også for $i \in I \setminus J$).

Det analoge resultat om konvergente filtre er: En filterbasis Φ på et produkt $E = \prod_{i \in I} E_i$ af topologiske rum E_i konvergerer mod $x \in E$, hvis og kun hvis $p_i(\Phi) \to p_i(x)$ for ethvert $i \in I$ (T2, Lemma 16.2).

Ved kombination af disse to lemmaer fås den vigtigere halvdel af

16. Sætning. Et produkt $E = \prod_{i \in I} E_i$ af topologiske vektorrum E_i er fuldstændigt, hvis og kun hvis hvert E_i er fuldstændigt.

Beviset for "kun hvis" overlades til læseren:

17. Sætning. (Udvidelse ved kontinuitet.) Lad $f: M \to F$ være

en <u>ligelig kontinuert</u> afbildning af en delmængde M af et t.v.r. E ind i et <u>fuldstændigt</u> <u>Hausdorff</u> t.v.r. F. Da kan f på netop én måde udvides til en kontinuert afbildning $\bar{f}$ af afslutningen $\bar{M}$ ind i F; og $\bar{f}$ bliver ligelig kontinuert.

Hvis specielt M er et underrum af E, og f: $M \to F$ er kontinuert og <u>lineær</u>, da bliver $\bar{f}$: $\bar{M} \to F$ kontinuert og lineær.

<u>Bevis</u>. Lad først $M \subseteq E$ og f: $M \to F$ ligelig kontinuert. Ifølge lemma 10 inducerer filtret $\mathring{U}_E(x)$ af omegne af et punkt $x \in \bar{M}$ et fundamentalfilter

$$\Phi(x) = \{M \cap (x + U) \mid U \in \mathring{U}_E(0)\}$$

på M. Opfattet som filterbasis på E eller på $\bar{M}$ konvergerer $\Phi(x)$ mod x, stadig ifølge lemma 10. En eventuel kontinuert udvidelse $\bar{f}$ af f til $\bar{M}$ overfører derfor $\Phi(x)$ i en filterbasis $\bar{f}(\Phi(x)) = f(\Phi(x))$ på F, som konvergerer mod $\bar{f}(x)$. Da F er Hausdorff, har vi hermed vist, at $\bar{f}(x)$ er entydigt bestemt for ethvert $x \in \bar{M}$ som lim $f(\Phi(x))$, og dermed at en kontinuert udvidelse af f til $\bar{M}$ højst kan ske på én måde.

For dernæst at vise, at der eksisterer en ligelig kontinuert udvidelse $\bar{f}$: $\bar{M} \to F$ af f til $\bar{M}$ bemærker vi, at med ovenstående betegnelser er $f(\Phi(x))$ en fundamentalfilterbasis på F ifølge sætn. 15. Da F er forudsat fuldstændigt og Hausdorff, har $f(\Phi(x))$ netop ét grænsepunkt, som vi vil betegne med $\bar{f}(x)$, altså

$$\bar{f}(x) = \lim f(\Phi(x)), \qquad x \in \bar{M}.$$

Den således definerede afbildning $\bar{f}$: $\bar{M} \to F$ er en udvidelse af den givne afbildning f: $M \to F$, fordi $\Phi(x)$ i tilfældet $x \in M$ jo netop er omegnsfiltret for x i delrumstopologien på M, hvorfor $f(\Phi(x))$ konvergerer mod $f(x)$, da f er kontinuert.

Ved beviset for, at $\bar{f}$ er ligelig kontinuert benyttes, at ethvert t.v.r. opfylder adskillelsesaksiom T3 (sætn. 3). Da således enhver omegn af $\underline{0}$ i F omfatter en <u>afsluttet</u> omegn af $\underline{0}$, er det tilstrækkeligt at vise, at der for enhver afsluttet omegn V af $\underline{0}$ i F findes en omegn $U \in \mathring{U}_E(\underline{0})$ så at

$$x, y \in \bar{M} \ \wedge \ x-y \in U \ \Rightarrow \ \bar{f}(x) - \bar{f}(y) \in V.$$

Da $f: M \to F$ er ligelig kontinuert, findes til V en omegn $U_1 \in \mathring{U}_E(\underline{0})$ så at

$$x_1, y_1 \in M \ \wedge \ x_1 - y_1 \in U_1 \ \Rightarrow \ f(x_1) - f(y_1) \in V.$$

Til U_1 findes en symmetrisk omegn $U \in \mathring{U}_E(\underline{0})$ med $U + U + U \subseteq U_1$. Lad nu $x, y \in \bar{M}$ og $x-y \in U$. Da er $A = M \cap (x + U) \in \Phi(x)$, $B = M \cap (y + U) \in \Phi(y)$. Som grænsepunkt for filterbasen $f(\Phi(x))$ er $\bar{f}(x)$ et kontaktpunkt for denne, altså for enhver af dens mængder, specielt for $f(A)$. Tilsvarende er $\bar{f}(y)$ kontaktpunkt for $f(B)$, og $\bar{f}(x) - \bar{f}(y)$ derfor for $f(A) - f(B)$ ifølge subtraktionens kontinuitet i F. Nu gælder $f(A) - f(B) \subseteq V$, og derfor $\bar{f}(x) - \bar{f}(y) \in \bar{V} = V$; thi for vilkårligt $x_1 \in A$, $y_1 \in B$ er

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &\in (x + U) - (y + U) = (x - y) + U - U \\ &\subseteq U + U + U \subseteq U_1 , \end{aligned}$$

og derfor $f(x_1) - f(y_1) \in V$.

Tilbage står at vise, at $\bar{f}$ bliver lineær, dersom M er et underrum af E og $f: M \to F$ er lineær. I ethvert t.v.r. er afslutningen $\bar{M}$ af et underrum M igen et underrum. Dette vises på samme måde som det analoge resultat om konvekse mængder anført efter beviset for sætn. 3. Ved om fornødent at erstatte E med $\bar{M}$ kan vi ved beviset for lineariteten af $\bar{f}$ gerne antage, at $\bar{M} = E$, altså at underrummet M er overalt tæt i E. Beviset føres da ved hjælp af princippet om udvidelse af identiteter ved kontinuitet (T2, stk. 24). For ethvert $\lambda \in K$ stemmer de kontinuerte afbildninger $x \to \bar{f}(\lambda x)$ og $x \to \lambda\bar{f}(x)$ overens for $x \in M$, fordi restriktionen f af $\bar{f}$ til M jo er forudsat lineær. Ifølge det nævnte princip stemmer de derfor også overens på hele $\bar{M} = E$. På tilsvarende måde vises additiviteten af $\bar{f}$, idet de to afbildninger $(x,y) \to \bar{f}(x+y)$ og $(x,y) \to \bar{f}(x) + \bar{f}(y)$ af $E \times E$ ind i F er kontinuerte og stemmer overens på underrummet $M \times M$, som åbenbart er tæt i $E \times E$.

Vi forlader hermed studiet af den ligelige struktur på et t.v.r. og går over til at behandle nogle begreber vedrørende underrum af et sådant rum. Som forberedelse undersøger vi først nogle rent algebraiske begreber i tilknytning til et vilkårligt vektorrum.

18. Direkte sum. Komplementært underrum. Projektion. Lad S og T være underrum af et vektorrum E. Restriktionen f af additionen i E til $S \times T$ afbilder $S \times T$ lineært på underrummet $S + T$ af E:

$$f: S \times T \to S + T \qquad \text{(lineær, surjektiv)},$$

idet altså $f(s,t) = s + t$ for $s \in S$, $t \in T$. Vi kalder summen $S + T$ direkte, dersom f er injektiv (og dermed ialt en isomorfi af $S \times T$ på $S + T$), altså dersom enhver vektor $x \in E$ højst har én fremstilling af formen $x = s + t$ med $s \in S$, $t \in T$. Da f er lineær, bliver betingelsen for direkte sum, at kernen $f^{-1}(\underline{0})$ for f er nulelementet i $S \times T$, altså at $s + t = \underline{0} \Rightarrow s = t = \underline{0}$ (for $s \in S$, $t \in T$). Heraf følger, at summen $S + T$ er direkte, hvis og kun hvis $S \cap (-T) = \{\underline{0}\}$, altså $S \cap T = \{\underline{0}\}$.

Vi skal nu særlig betragte det tilfælde, hvor hele rummet E er fremstillet som direkte sum $E = S + T$ af to underrum S og T.

I så fald siges T at være et komplementært underrum, eller blot et komplement, til S, og S siges at være et komplement til T. Ethvert underrum S af et vektorrum E har et komplementært underrum T (ja uendelig mange sådanne, hvis $S \subset E$). For at indse dette behøver vi blot at vælge en basis for S og supplere disse lineært uafhængige vektorer i E med vektorer $t_j \in E$, $j \in J$, således at $\{s_i\}_{i\in I} \cup \{t_j\}_{j\in J}$ bliver en basis for E. (At dette er muligt, vises ved hjælp af Zorns lemma på samme måde som eksistensen af en basis for E, jvf. T1, specielt opg. 5.) Det af vektorerne t_j, $j \in J$, udspændte underrum T af E (d.v.s. det mindste underrum af E, som omfatter $\{t_j\}_{j\in J}$) er da åbenbart et komplement til S.

19. Projektions-afbildninger. Når E er fremstillet som direkte sum af to underrum S og T, defineres to afbildninger p og q af E ind i E, idet vi for ethvert $x \in E = S + T$ betragter den entydigt bestemte fremstilling $x = s + t$ med $s\in S$, $t\in T$ og sætter

$$p(x) = s \;, \quad q(x) = t \quad (\text{for } x = s + t).$$

Vi kalder p og q projektionsafbildningerne, eller kort projektionerne, af E på henholdsvis S og T (langs henholdsvis T og S). Åbenbart er

$$S = p(E) = q^{-1}(\underset{\sim}{O}), \quad T = q(E) = p^{-1}(\underset{\sim}{O}).$$

Endvidere er p og q lineære afbildninger, og desuden idempotente, d.v.s. $(p^2=)p\circ p = p$, $(q^2=)q\circ q = q$. Idet vi med i og o betegner henholdsvis den identiske afbildning af E på E og den konstante afbildning af E på $\underset{\sim}{O}$, gælder endvidere

$$p + q = i \;, \quad p \circ q = q \circ p = o \;,$$

forstået således, at $p(x) + q(x) = x$, og $p(q(x)) = q(p(x)) = \underline{0}$ for ethvert $x \in E$. Omvendt gælder følgende

<u>Lemma</u>. Lad $p: E \to E$ være en lineær, idempotent afbildning af et vektorrum E i sig selv. Da er den ved $p + q = i$ bestemte afbildning $q = i - p$ ligeledes lineær og idempotent. Endvidere er E direkte sum af underrummene $S = p(E) = q^{-1}(\underline{0})$ og $T = q(E) = p^{-1}(\underline{0})$; og p og q er netop projektionerne af E på S og T (langs henholdsvis T og S).

<u>Bevis</u>. For ethvert $x \in E$ er

$$q(p(x)) = p(x) - p(p(x)) = \underline{0} \; ;$$
$$p(q(x)) = p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = \underline{0}.$$

Dette viser, at $q \circ p = p \circ q = o$. Endvidere bliver q idempotent, fordi

$$q(q(x)) = q(x - p(x)) = q(x) - q(p(x)) = q(x).$$

Af $p \circ q = o$ følger videre, at $q(E) \subseteq p^{-1}(\underline{0})$. Den modsatte inklusion fremgår af, at $p(x) = \underline{0} \Rightarrow x = q(x) \in q(E)$. Tilsvarende vises, at $p(E) = q^{-1}(\underline{0})$. Det er herefter klart, at

$$S + T = p(E) + q(E) = E \; ; \qquad S \cap T = q^{-1}(\underline{0}) \cap p^{-1}(\underline{0}) = \underline{0}$$

idet $p(x) = q(x) = \underline{0} \Rightarrow x = p(x) + q(x) = \underline{0}$.
For ethvert $x \in E$ er $x = p(x) + q(x)$ en fremstilling af formen $x = s + t$, $s \in S$, $t \in T$. Da summen $E = S + T$ er direkte, er hermed vist, at p og q netop er de omtalte projektionsoperatorer, og lemmaet er bevist.

20. <u>Relation til Kvotientrummet</u>. Lad atter S betegne et vilkårligt underrum af et vektorrum E. Vi betragter den kanomiske afbildning $k: E \to E/S$. Billedet $k(x)$ af $x \in E$ er det sideunder-

rum $x + S$ til S, som indeholder x. Der gælder nu

Lemma. Et underrum $T \subseteq E$ er et komplement til et underrum $S \subseteq E$, hvis og kun hvis restriktionen af den kanoniske afbildning $k: E \to E/S$ til T er en bijektiv afbildning (og dermed en isomorfi) af T på E/S.

Bevis. At $\varphi = k|T$ skal være bijektiv, betyder åbenbart, at der for ethvert $x \in E$ skal findes netop ét $t \in T$ så at $\varphi(t) = k(x)$, d.v.s. så at $k(t) = k(x)$, altså $k(x - t) = 0$, eller med andre ord $x - t \in S$. Men dette er ensbetydende med, at ethvert $x \in E$ skal have netop én fremstilling af formen $x = s + t$ med $s \in T$, hvilket jo er definitionen på, at $S + T = E$ og at denne sum er direkte. Og det betyder jo definitionsmæssigt, at T er et komplement til S.

Ved co-dimensionen af et underrum S af et vektorrum E forstås dimensionen af kvotientrummet E/S. (Dimensionen af et vektorrum defineres som det største kardinaltal for nogen lineært uafhængig delmængde af rummet. Det kan vises, at alle baser for et vektorrum er parvis ækvipotente, hvorfor rummets dimension også kan karakteriseres som det fælles kordinaltal for alle baser.) a

For ethvert komplement T til et underrum S af E gælder således ifølge det foregående

$$\text{co-dim } S = \dim E/S = \dim T.$$

21. Topologisk direkte sum. Topologisk komplement. De rent algebraiske betragtninger i stk. 18 og 19 skal nu suppleres med topologiske betragtninger i det tilfælde, hvor E betegner et topologisk vektorrum. Lad S og T betegne to underrum af E. Udstyret med delrumstopologien fra E bliver S, T og $S + T$ åbenbart topologiske vektorrum, og produktet $S \times T$ bliver derefter et

t.v.r. med produktrumstopologien; denne ses let at være identisk med delrumstopologien fra $E \times E$.

<u>Definition</u>. <u>En sum $S + T$ af to underrum S, T af et t.v.r. E kaldes</u> <u>topologisk direkte</u>, <u>dersom restriktionen f af additionen i E fra $E \times E$ til $S \times T$ er en isomorfi af det topologiske vektorrum $S \times T$ på det topologiske vektorrum $S + T$.</u>

Da additionen i E er kontinuert, bliver $f\colon S \times T \to S + T$, defineret ved $f(s,t) = s + t$, ligeledes kontinuert. Derfor bliver summen $S + T$ topologisk direkte, hvis og kun hvis den for det første er (algebraisk) direkte (altså $S \cap T = \{\underline{0}\}$) og hvis tillige f^{-1} er kontinuert.

Lad os nu antage, at $E = S + T$, og at denne sum er algebraisk direkte. Vi betragter projektionerne p og q af E på S og T givet ved

$$p(x) = s,\ q(x) = t \quad \text{for } x = s + t,\ s \in S,\ t \in T.$$

Da bliver åbenbart

$$f^{-1}(x) = (p(x), q(x)) \quad \text{for } x \in S + T = E.$$

Heraf fremgår, at betingelsen for, at den algebraisk direkte sum $E = S + T$ også bliver topologisk direkte, er at p og q er kontinuerte. Naturligvis er det nok at forlange at f.eks. p er kontinuert, idet $q = i - p$ da ligeledes bliver kontinuert, eftersom såvel i som subtraktionen er kontinuert. Vi kan hermed supplere Lemma 19 således.

<u>Sætning</u>. Lad $p\colon E \to E$ være en lineær, idempotent, kontinuert afbildning af et t.v.r. E i sig selv. Da er E topologisk direkte sum af underrummene $p(E)$ og $p^{-1}(\underline{0})$.

Bemærk også, at hvis $E = S + T$ er topologisk direkte, og hvis E er et Hausdorff t.v.r., da er S og T nødvendigvis afsluttede. Thi med de tidligere betegnelser er $S = q^{-1}(0)$, hvor p og q er kontinuerte, og $\{0\}$ er afsluttet.

Lad atter S være et underrum af et t.v.r. E. Ved et topologisk komplementært underrum (eller kort: et topologisk komplement) til S forstås et algebraisk komplement T til S, for hvilket summen $E = S + T$ er topologisk direkte.

Man har eksempler på Hausdorff t.v.r. (endda Banach-rum), hvori ikke ethvert afsluttet underrum besidder et topologisk komplementært underrum. Vi viser nedenfor, at ethvert underrum af endelig co-dimension i et t.v.r. har et topologisk komplement. Det samme kan for øvrigt vises (ved hjælp af Hahn-Banach's sætning) om ethvert underrum af endelig dimension.

Lemma. Et underrum S af et t.v.r. E har et topologisk komplement, hvis og kun hvis den identiske afbildning $i: S \to S$ kan udvides til en kontinuert lineær afbildning $p: E \to S$.

Bevis. Som afbildning af E ind i E er en sådan udvidelse p ligeledes kontinuert og lineær. Den er desuden idempotent, idet $p(p(x)) = i(p(x)) = p(x)$, fordi $p(x) \in S$. Heraf følger "hvis"-delen under henvisning til ovenstående sætning, idet $p(E) = S$. Den anden del af lemmaet er klar, idet man for p tager projektionsafbildningen af E på S langs et topologisk komplement T til S.

22. Hyperplan og linearform. Lad E være et vektorrum over K. Ved en hyperplan i E forstås et maximalt ægte sideunderrum i E, altså et sideunderrum $H \subset E$ som ikke er ægte delmængde af noget andet sideunderrum af E bortset fra E selv. En hyperplan gennem 0 er således et maximalt ægte underrum af E.

Lemma. Et underrum H af et vektorrum E over K er en hyperplan, hvis og kun hvis co-dim $H = 1$. I så fald gælder for ethvert $e \in E \setminus H$, at Ke er et komplementært underrum til H.

<u>Bevis</u>. Lad k betegne den kanoniske afbildning af E på E/H, og antag først at co-dim $H = 1$, altså dim $E/H = 1$. For enhver vektor $e \in E \setminus H$ udgør vektoren $k(e) = e + H$ en basis for E/H. For enhver vektor $x \in E$ findes derfor $\lambda \in K$ så at $x + H = \lambda(e + H) = \lambda e + H$, altså $x \in \lambda e + H$. Dette viser, at $E = Ke + H$, og tillige, at H er en hyperplan, idet ethvert underrum S med $S \supset H$ indeholder en vektor $e \notin H$, hvorfor $S \supseteq Ke + H = E$. Antages det omvendt, at H er en hyperplan, og vælges atter $e \in E \setminus H$, da er underrummet $Ke + H$ en ægte udvidelse af H, hvorfor $Ke + H = E$. Da denne sum er direkte; bliver co-dim $H = 1$.

Vi vil nu nærmere studere opspaltningen $E = Ke + H$ af vektorrummet E som direkte sum af et 1-dimensionalt underrum Ke og en hyperplan H, hvorved $e \notin H$. Projektionen p på Ke langs H er lineær. Billedet $p(x)$ af en vektor $x \in E$ har formen $p(x) = \lambda e$, hvor $\lambda \in K$, og hvor λ afhænger af x, lad os sige $\lambda = \varphi(x)$. Da afbildningen $\lambda e \to \lambda$ af Ke på K er lineær, bliver den sammensatte afbildning $x \to p(x)(=\lambda e) \to \lambda(=\varphi(x))$ ligeledes lineær.

<u>Definition</u>. Ved en <u>linearform</u>, eller en <u>lineær funktional</u>, på et vektorrum E over K forstås en lineær afbildning af E ind i K.

Vi har ovenfor gjort rede for, at der til enhver hyperplan H i E og enhver vektor $e \in E \setminus H$ svarer en linearform φ på E således at der for ethvert $x \in E$ gælder

$$p(x) = \varphi(x)e \ , \qquad x \in \varphi(x)e + H \ ,$$

hvor p er projektionen af E på Ke langs H. Åbenbart er $H = p^{-1}(\underline{0}) = \varphi^{-1}(0)$ samt $\varphi(e) = 1$, og derfor φ ikke identisk 0.

Lad nu omvendt φ: E $\to$ K være en vilkårligt opgivet linearform på E, som ikke er identisk 0. Da er $H = \varphi^{-1}(0)$ et ægte underrum af E. Vi viser, at H er en hyperplan, og at φ er bestemt på den ovenfor angivne måde ud fra H ved passende valg af $e \notin H$. Lad nemlig $e_1 \notin H$, altså $\varphi(e_1) \neq 0$. Sættes $e = \varphi(e_1)^{-1}e_1$, bliver $\varphi(e) = 1$. Den ved $p(x) = \varphi(x)e$ $(x \in E)$ definerede afbildning p af E ind i E er åbenbart lineær og har billedmængden Ke, hvorfor p også bliver idempotent:

$$p(p(x)) = p(\varphi(x)e) = \varphi(x)p(e) = \varphi(x)\varphi(e)e = \varphi(x)e = p(x).$$

Ifølge lemma 19 har vi derfor den direkte sum

$$E = p(E) + p^{-1}(\underline{0}) = Ke + H,$$

idet $p^{-1}(\underline{0}) = \varphi^{-1}(0) = H$. Dette viser, at co-dim $H = 1$, altså at H er en hyperplan.

Det bemærkes, at for en given hyperplan H i E findes der uendelig mange linearformer $\varphi \neq 0$ på E med $\varphi^{-1}(0) = H$; men to af disse, φ og φ_1, er altid proportionale. Thi vælges $e \in E\setminus H$, og sættes $\alpha = \varphi_1(e) / \varphi(e)$, da defineres ved $x \to \varphi_1(x) - \alpha\,\varphi(x)$ en linearform $\varphi_1 - \alpha\,\varphi$ på E, som er $= 0$ overalt på H og desuden for $x = e$ og derfor også på $H + Ke = E$. Specielt er φ <u>entydigt bestemt</u> ud fra H, når værdien $\varphi(e)$ i et forelagt punkt $e \notin H$ er opgivet.

Lad os nu betragte en hyperplan H, som <u>ikke</u> går gennem $\underline{0}$. Den med H parallelle hyperplan H_0 gennem $\underline{0}$ har en ligning $\varphi(x) = 0$, altså $H_0 = \varphi^{-1}(0)$ med φ som ovenfor. Da $H = e + H_0$ for $e \in H$ (ogdermed $e \notin H_0$), bliver φ konstant lig med $\varphi(e)$ på H, altså $H = \varphi^{-1}(\alpha)$ med $\alpha = \varphi(e) \neq 0$. Normeres φ så at $\varphi(e) = 1$, bliver således $H = \varphi^{-1}(1)$ og φ entydigt bestemt. Omvendt er det klart, at for enhver linearform $\varphi \not\equiv 0$ på E og for ethvert $\alpha \in K \setminus \{0\}$ er $\varphi^{-1}(\alpha)$ en hyperplan i E, som ikke går gennem $\underline{0}$.

23. Afsluttet hyperplan og kontinuert linearform. Lad nu E være et topologisk vektorrum over K. Da gælder:

Lemma. Enhver hyperplan H i et t.v.r. E er enten overalt tæt eller afsluttet i E.

Bevis. Vi kan gerne antage, at H går gennem $\underline{0}$, fordi enhver parallelforskydning er en homeomorfi. Afslutningen $\bar{A}$ af et underrum A af E er igen et underrum (jvf. det tilsvarende om konvekse mængder sidst i stk. 3.) Da således $\bar{H}$ er et underrum, og H et maximalt ægte underrum, må der gælde lighedstegn netop ét af stederne i inklusionerne $H \subseteq \bar{H} \subseteq E$.

Sætning. Lad H være en hyperplan i et t.v.r. E og $\varphi \not\equiv 0$ en linearform på E, som er konstant på H. Da er H afsluttet, hvis og kun hvis φ er kontinuert. I bekræftende fald er summen $E = Ke + H$ topologisk direkte for ethvert $e \in E \setminus H$, og afbildningen φ er åben.

Bevis. Vi kan atter antage, at H går gennem $\underline{0}$, altså $H = \varphi^{-1}(0)$ Da K er et Hausdorffrum, bliver $\varphi^{-1}(0)$ afsluttet, såfremt φ er kontinuert. Lad nu omvendt H være afsluttet. Vi vælger $e \in E$ med $\varphi(e) = 1$. Da udgør $e + H = \varphi^{-1}(1)$ en basis for det 1-dimensionale kvotientrum E/H. Da H er afsluttet, er ifølge sætning 8 E/H et Hausdorffrum, og ifølge sætning 5 er dette (topologisk) isomorft med K. Nærmere gælder ifølge beviset for sætning 5, at den ved $\lambda \to \lambda(e + H) = \lambda e + H$ bestemte algebraiske isomorfi ψ af K på E/H også er en topologisk isomorfi (altså tillige en homeomorfi). Vi har nu skemaet

$$E \xrightarrow{k} E/H \xrightarrow{\psi^{-1}} K ,$$

hvor k betegner den kanoniske afbildning af E på E/H. For ethvert $x \in E$ haves ifølge stk. 22 $x \in \varphi(x)e + H$. Derfor er $k(x) = \varphi(x)e + H$, og $\psi^{-1}(k(x)) = \varphi(x)$. Idet således $\varphi = \psi^{-1} \circ k$, bliver φ kontinuert og åben, fordi både k og ψ^{-1} er kontinuerte og åbne.

Lad nu $e \in E \setminus H$. Da gælder ifølge lemma 22 $E = Ke + H$, hvor denne sum er algebraisk direkte. Projektionen p af E på Ke langs H er ifølge stk. 22 givet ved $p(x) = \varphi(x)e$, altså sammensat af den kontinuerte afbildning $\lambda \to \lambda e$ af K ind i E og linearformen φ. Hvis φ er kontinuert, bliver p det derfor også, hvilket ifølge sætn. 21 betyder, at summen $E = p(E) + p^{-1}(\underline{0}) = Ke + H$ bliver <u>topologisk direkte</u>. - Omvendt er det i øvrigt klart, at hvis den nævnte sum er topologisk direkte, da bliver H afsluttet i tilfælde af, at E er et <u>Hausdorffrum</u> (se bemærkningen efter sætn. 21).

24. <u>Om vektorrum af endelig dimension</u>.

<u>Sætning</u>. Ethvert Hausdorff t.v.r. E over K af endelig dimension m er (topologisk) isomorft med talrummet K^m og dermed fuldstændigt. Enhver algebraisk isomorfi mellem E og K^m er en homeomorfi.

<u>Bevis</u>. For $m = 1$ udsiger sætn. 5, at E er topologisk isomorft med K, og det fremgår af beviset, at enhver algebraisk isomorfi af K på E er en homeomorfi. Idet vi derefter går frem ved induktion, antager vi at det tilsvarende gælder for dimensionstallet $m - 1$. Lad nu E være et m-dimensionalt Hausdorff t.v.r. over K, og lad $(e_1, \dots, e_m)$ være en vilkårlig basis for E. Med H betegnes den af vektorerne $e_1, \dots, e_{m-1}$ frembragte hyperplan i E. Da denne er et (m-1)-dimensionalt Hausdorff t.v.r. i delrumstopologien, er den ifølge induktionsantagelsen isomorf med K^{m-1}, og den algebraiske isomorfi

(1) $$(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) \to \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{m-1} e_{m-1}$$

er en homeomorfi af K^{m-1} på H. Ifølge sætn. 14 er H fuldstændigt og derfor afsluttet i E (sætn. 12). Men så er summen $E = H \dotplus (Ke_m)$ topologisk direkte ifølge sætn. 23. Det betyder definitionsmæssigt (stk.21), at restriktionen af additionen i E til $H \times (Ke_m)$ er en homeomorfi af $H \times (Ke_m)$ på $H + (Ke_m) = E$. På den anden side er afbildningen

$$(2) \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m) \to (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{m-1} e_{m-1}, \lambda_m e_m)$$

åbenbart en homeomorfi af K^m på $H \times (Ke_m)$, fordi afbildningen (1) som nævnt er en homeomorfi af K^{m-1} på H, og afbildningen $\lambda_m \to \lambda_m e_m$ en homeomorfi af K på Ke_m ifølge det 1-dimensionale tilfælde.

Ved sammensætning af homeomorfi (2) med additionens restriktion til $H \times (Ke_m)$ fås afbildningen

$$(3) \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m) \to \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{m-1} e_{m-1} + \lambda_m e_m$$

af K^m på E, og denne algebraiske isomorfi er derfor ligeledes en homeomorfi. Hermed er induktionsbeviset gennemført, idet enhver algebraisk isomorfi af K^m på E jo er af formen (3) for en passende basis $(e_1, \ldots, e_m)$ for E, nemlig e_j = billedet af den j'te "enhedsvektor" i K^m. Endelig fremgår fuldstændigheden af E af sætn. 14.

<u>Korollar</u> 1. Ethvert endelig-dimensionalt underrum af et Hausdorff t.v.r. er afsluttet.

Dette fremgår af ovenstående sætning i forbindelse med sætn. 12.

<u>Korollar</u> 2. Enhver lineær afbildning $f: E \to F$ af et endelig-dimensionalt Hausdorff t.v.r. E over K ind i et t.v.r. F over K er kontinuert.

Thi ifølge sætningen ovenfor er det øjensynlig tilstrækkeligt at vise dette i tilfældet $E = K^m$; og her har f atter formen (3) med e_j = billedet ved f af den j'te enhedsvektor i K^m, $j=1,\dots,m$. Da regneoperationerne i F er kontinuerte, bliver f derfor kontinuert.

25. Om afsluttede underrum.

Sætning. Lad S være et afsluttet og T et endeligdimensionalt underrum af et t.v.r. E. Da er underrummet S + T afsluttet i E.

Bevis. Lad k betegne den kanoniske afbildning af E på E/S. Da S er afsluttet, er E/S Hausdorff (sætn. 8). Da T er et endeligdimensionalt underrum af E, og da k er lineær, bliver k(T) et endeligdimensionalt underrum af E/S og derfor afsluttet ifølge korollar 1 ovenfor. Da k er kontinuert, bliver $k^{-1}(k(T))$ således afsluttet i E. Nu er imidlertid

$$k^{-1}(k(T)) = \{k^{-1}(k(t)) \mid t \in T\}$$
$$= \{s + t \mid s \in S \wedge t \in T\} = S + T,$$

idet $x \in k^{-1}(k(t)) \iff k(x) = k(t) \iff k(x - t) = \underline{0} \iff x - t \in S$ $\iff x = s + t$ for passende $s \in S$.

26. Om afsluttede underrum af endelig co-dimension.

Sætning. Lad S være et afsluttet underrum af endelig co-dimension i et t.v.r. E. Da er ethvert algebraisk komplement T til S tillige et topologisk komplement.

Bevis. Vi betegner atter den kanoniske afbildning af E på Hausdorffrummet E/S med k. Da S er afsluttet i E, er $S \cap T$ afsluttet i delrumstopologien på T; og idet $S \cap T = \{\underline{0}\}$, må T være et Hausdorff t.v.r. ifølge stk. 3. At S har endelig co-dimension, betyder jo at E/S og T er endeligdimensionale. Ifølge lemma 20 er restriktionen $k|T$ af k til T en algebraisk isomorfi mellem de endeligdimensionale Hausdorff t.v.r. T og E/S. Ifølge sætn. 24 er $k|T$ en homeomorfi. Den omvendte afbildning $\varphi: E/S \to T$ er derfor ligeledes kontinuert. Vi har nu skemaet

$$E \xrightarrow{k} E/S \xrightarrow{\varphi} T,$$

hvor k og φ, og dermed også $\varphi \circ k$, er kontinuerte. Men $\varphi \circ k$ er netop projektionen p af E på T langs S; thi for vilkårligt $x \in E$ haves fremstillingen $x = s + t$ med $s \in S$ og $t = p(x) \in T$. Da bliver $x + S = t + S$, og derfor

$$\varphi(k(x)) = \varphi(k(t)) = t = p(x),$$

idet φ jo var den omvendte afbildning til $k|T$.

27. Om kegler. En delmængde A af et vektorrum E kaldes en kegle med toppunkt $\underset{\sim}{0}$, dersom

$$\lambda A \subseteq A \qquad \text{for ethvert } \lambda \in \mathring{R}_+,$$

idet $\mathring{R}_+ =]0, +\infty[$. Fællesmængden for er mængde af kegler med toppunkt $\underset{\sim}{0}$ er en kegle med toppunkt $\underset{\sim}{0}$. For enhver mængde $A \subseteq E$ er fællesmængden P for mængden af alle kegler, der omfatter A, derfor den mindste sådanne kegle. Åbenbart gælder

$$P = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathring{R}_+ \wedge x \in A\} = \bigcup_{\lambda \in \mathring{R}_+} \lambda A.$$

Lemma. Lad $A \subseteq E$ være konveks, og lad P være den mindste kegle med toppunkt $\underset{\sim}{0}$, som omfatter A. Da er P konveks.

Bevis. Vi betragter to punkter $\lambda_1 x_1$ og $\lambda_2 x_2$ af P, hvor altså $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathring{R}_+$ og $x_1, x_2 \in A$. For ethvert $\mu \in [0,1]$ gælder da

$$\mu\lambda_1 x_1 + (1-\mu)\lambda_2 x_2 = (\mu\lambda_1 + (1-\mu)\lambda_2)(\rho x_1 + (1-\rho)x_2),$$

hvor $\mu\lambda_1 + (1-\mu)\lambda_2 \in \mathring{R}_+$ fordi $\mathring{R}_+$ er konveks, og hvor ρ er defineret ved

$$\rho = \frac{\mu\lambda_1}{\mu\lambda_1 + (1-\mu)\lambda_2} .$$

Åbenbart er $\rho \in [0,1]$, og derfor $\rho x_1 + (1-\rho)x_2 \in A$, da A er konveks. Følgelig gælder $\mu\lambda_1 x_1 + (1-\mu)\lambda_2 x_2 \in P$.

28. Hahn-Banach's sætning. Som forberedelse bemærker vi først, at hvis E er et Hausdorff t.v.r. over $\mathring{R}$ af dimension ≥ 2, da er $E \setminus \{\underline{0}\}$ et sammenhængende topologisk rum i delrumstopologien. Lad nemlig a, b $\in E \setminus \{\underline{0}\}$, og lad S betegne det (eller et af de) 2-dimensionale underrum af E, som indeholder a og b. Da er S homeomorft med $\mathring{R}^2$ ifølge sætning 24, og resultatet fremgår derfor af, at $\mathring{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ åbenbart er sammenhængende (endda "kurvesammenhængende"). Bemærk også, at $E \setminus \{\underline{0}\}$ ikke er en konveks delmængde af E (se på a og -a).

Lemma. Lad A være en åben, konveks, ikke tom delmængde af et Hausdorff t.v.r. E over $\mathring{R}$ af dimension ≥ 2, og lad $\underline{0} \notin A$. Da eksisterer en linie gennem $\underline{0}$, som ikke møder A.

Bevis. Med P betegner vi den mindste kegle med toppunkt $\underline{0}$, som omfatter A. Da A er åben og ikke tom, gælder det samme om λA for ethvert $\lambda \in \mathring{R}_+$ og derfor også om $P = \bigcup_{\lambda \in \mathring{R}_+} \lambda A$. Endvidere er P konveks ifølge lemma 27. Da $\underline{0} \notin A$, gælder $\underline{0} \notin P$, altså $P \subsetneq E \setminus \{\underline{0}\}$. Da P er konveks i modsætning til $E \setminus \{\underline{0}\}$, har vi således $\emptyset \subset P \subset E \setminus \{\underline{0}\}$. Da $E \setminus \{\underline{0}\}$ er sammenhængende, fordi dim E ≥ 2, har P mindst ét randpunkt $x \in E \setminus \{\underline{0}\}$ som delmængde af det topologiske rum $E \setminus \{\underline{0}\}$. Åbenbart er x tillige et randpunkt for P som delmængde af E. Da P er åben, gælder $x \notin P$. Vi vil nu vise, at det én-dimensionale underrum $\mathring{R}x$ af E ikke møder P og dermed heller ikke A. Da P er en kegle og $x \notin P$, gælder åbenbart $\lambda x \notin P$ for $\lambda \in \mathring{R}_+$. Da $\underline{0} \notin P$, er det derfor tilstrækkeligt at vise, at $-x \notin P$, thi da vil $-\lambda x \notin P$ for $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Antog man nu, at $-x \in P$, så fandtes en omegn V af $-x$ med $V \subseteq P$. Men så var $-V$ en omegn af randpunktet x for P, og der fandtes derfor $y \in P \cap (-V)$. Idet således $y \in P$ og $-y \in V \subseteq P$, måtte $\underline{0} = \frac{1}{2}(y + (-y)) \in P$, fordi P er konveks; men som nævnt gælder $\underline{0} \notin P$.

Vi er nu i stand til at formulere og bevise hovedresultatet i indeværende afsnit, Hahn Banach's sætning, først i dens geometriske formulering.

<u>Sætning</u>. (Hahn-Banach). Lad E være et topologisk vektorrum over K ($=\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Lad A være en åben, konveks, ikke tom delmængde af E, og lad S være et sideunderrum af E med $S \cap A = \emptyset$. Da eksisterer der en afsluttet hyperplan H i E, for hvilken $H \supseteq S$ og $H \cap A = \emptyset$.

<u>Bevis i tilfældet</u> $K = \mathbb{R}$. Efter en parallelforskydning kan vi opnå, at $\underline{0} \in S$, altså at S er et underrum. Med M betegner vi mængden af alle underrum T af E for hvilke $T \supseteq S$ og $T \cap A = \emptyset$. Da er M induktivt ordnet ved inklusion, idet foreningsmængden af enhver fuldstændigt ordnet delmængde af M åbenbart igen er et underrum tilhørende M og således udgør en majorant for delmængden. Ifølge Zorns lemma eksisterer der et maximalt element H i M. Af $H \cap A = \emptyset$, altså $H \subseteq \complement A$, følger dels, at $H \neq E$ fordi $A \neq \emptyset$, og dels at $\overline{H} \subseteq \complement A$ fordi A er åben, altså at $\overline{H} \cap A = \emptyset$. Da nu $\overline{H}$ igen er et underrum af E (jvf. det tilsvarende om konvekse mængder i stk. 3), og da $\overline{H} \supseteq H \supseteq S$, er $\overline{H} \in M$, og derfor $\overline{H} = H$ fordi H var maximalt i M. Hermed er vist, at H er et afsluttet underrum af E.

Tilbage står at vise, at H er en hyperplan, altså at $\dim E/H = 1$. Nu er $F = E/H$ et Hausdorff t.v.r. (sætn. 8); og betegner vi med $\underline{k}$ den kanoniske afbildning af E på F, bliver $k(A)$ en åben, konveks, ikke tom delmængde af F, fordi k er åben og lineær. Endvidere indeholder $k(A)$ ikke nulelementet $\underline{0}_F$ i F, thi for vilkårligt $x \in A$ gælder $x \notin H$ og derfor $k(x) \neq \underline{0}_F$. Antog man nu, at $\dim E/H = \dim F \geq 2$, da fandtes ifølge ovenstående lemma et 1-dimensionalt underrum L af F med $L \cap k(A) = \emptyset$. Da var $k^{-1}(L)$ et underrum af E, og $k^{-1}(L) \cap A = \emptyset$. (Thi for $x \in A$ gælder $k(x) \in k(A)$ og derfor $k(x) \notin L$, $x \notin k^{-1}(L)$). Da k er surjektiv og $L \supset \{\underline{0}_F\}$, må $k^{-1}(L) \supset k^{-1}(\underline{0}_F) = H \supseteq S$. Vi er herved ført til, at $k^{-1}(L) \in \mathcal{M}$ og $k^{-1}(L) \supset H$, hvilket strider mod, at H var maximal i $\mathcal{M}$. Dermed er sætningen bevist i tilfældet $K = \mathring{R}$. Beviset i tilfældet $K = \mathring{C}$ bringes i næstestykke.

29. Om vektorrum over $\mathring{C}$. Et vektorrum E over $\mathring{C}$ kan også opfattes som et vektorrum over $\mathring{R}$; dette sidste kaldes så det underliggende reelle vektorrum hørende til det komplekse vektorrum E. Da begrebet konveksitet kun involverer reelle skalarer, er de konvekse delmængder de samme i begge tilfælde. Et underrum af det komplekse vektorrum E er naturligvis ligeledes et underrum af det underliggende reelle rum E_0; men det omvendte behøver ikke at være tilfældet. Da multiplikation med en skalar $\lambda \in \mathring{C} \setminus \{0\}$ er en isomorfi af det komplekse vektorrum E på sig selv, bliver det specielt en isomorfi af det reelle vektorrum E_0 på sig selv. For ethvert underrum M af E_0 er derfor iM ligeledes et underrum af E_0. Betingelsen for, at M er et underrum af E, er åbenbart at $iM = M$; thi for ethvert $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathring{C}$ gælder da

$$\lambda M = \alpha M + i\beta M \subseteq M + iM = M + M = M.$$

Lemma. Lad E være et vektorrum over $\mathring{C}$ og E_0 det underliggende vektorrum over $\mathring{R}$. For ethvert underrum M af E_0 er $M \cap (iM)$ et underrum af E. Hvis M er en hyperplan i E_0, er $M \cap (iM)$ en hyperplan i E.

Bevis. $M \cap (iM)$ er et underrum af E, fordi

$$i(M \cap iM) = (iM) \cap (i^2M) = M \cap (iM).$$

Lad nu M være en hyperplan i E_0. Hvis $M \subseteq iM$, er $M \cap (iM) = M$ åbenbart en hyperplan i E. Lad dernæst $M \not\subseteq iM$, og lad $e \in M$, $e \notin iM$. Da er $ie \notin i^2M = M$, og vi har de direkte summer

$$E_0 = \hat{R}(ie) \dotplus M = \hat{R}e \dotplus iM,$$

fordi M og iM er hyperplaner i E_0 (lemma 22). Vi viser nu, at $E = \hat{C}e + (M \cap iM)$, hvoraf fremgår, at underrummet $M \cap (iM)$ er en hyperplan i E. Ethvert $x \in E$ har en fremstilling $x = \beta(ie) + y$, hvor $\beta \in \hat{R}$, $y \in M$. Og y har en fremstilling $y = \alpha e + z$, hvor $\alpha \in \hat{R}$, $z \in iM$. Men så gælder

$$x = (\alpha + i\beta)e + z,$$

hvor $\alpha + i\beta \in \hat{C}$, og hvor $z \in M \cap (iM)$. At $z \in M$ fremgår nemlig af, at $z = y - \alpha e$, hvor $y, e \in M$ og $\alpha \in \hat{R}$. Hermed er lemmaet bevist.

Vi er nu i stand til at bevise Hahn-Banach's sætning for et t.v.r. E over $\hat{C}$. Med den foreliggende topologi på E bliver det underliggende vektorrum E_0 over $\hat{R}$ åbenbart et t.v.r. over $\hat{R}$. Det givne underrum S af E er som nævnt tillige et underrum af E_0. Ifølge den allerede beviste sætning for reelle t.v.r. findes der en afsluttet hyperplan H_0 i E_0 med $H_0 \supseteq S$ og $H_0 \cap A = \emptyset$. Da er iH_0 ligeledes afsluttet, og $H_0 \cap (iH_0) = H$ er en afsluttet hyperplan i E ifølge ovenstående lemma.
Da nu $iS = S$, fås

$$H = H_0 \cap (iH_0) \supseteq S \cap (iS) = S.$$

Det er klart, at H ikke møder A, fordi $H \subseteq H_0$ og H_0 ikke møder A.

30. Udspændt underrum. Total delmængde. Lad M være en delmængde af et vektorrum E over K (=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Fællesmængden F for mængden af underrum af E, som omfatter M, kaldes det af M udspændte underrum (i algebraisk betydning). Det består af alle vektorer i E, som kan fremstilles som linearkombination af endeligt mange vektorer fra M.

Dersom E er et t.v.r.,kaldes afslutningen $\bar{F}$ af F det af M udspændte afsluttede underrum af E. Åbenbart er $\bar{F}$ det mindste afsluttede underrum af E, som omfatter M.

Definition. En delmængde M af et t.v.r. E kaldes total, dersom det af M udspændte underrum F (i algebraisk betydning) er overalt tæt i E, altså dersom det af M udspændte afsluttede underrum af E udgør hele E : $\bar{F} = E$.

Sætning. En delmængde M af et lokalkonvekst t.v.r. E er total, hvis og kun hvis der for enhver kontinuert linearform f på E gælder, at

$$f(x) = 0 \text{ for alle } x \in M \Rightarrow f \equiv 0.$$

Anderledes udtrykt: M er total, hvis og kun hvis M skiller de kontinuerte linearformer på E i den forstand, at der for 2 vilkårlige sådanne, f_1 og f_2, gælder

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ for alle } x \in M \Rightarrow f_1 \equiv f_2.$$

Bevis. Den sidste formulering af sætningen fremgår af den første anvendt på den ved $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ definerede kontinuerte linearform $f = f_1 - f_2$ på E. For enhver delmængde $M \subseteq E$ og enhver kontinuert linearform f på E gælder, at

$$f(x) = 0 \text{ på } M \Rightarrow f(x) = 0 \text{ på } \bar{F},$$

når $\bar{F}$ betegner det af M udspændte afsluttede underrum af E. Dette følger straks af, at $f^{-1}(0)$ er et afsluttet underrum af E og derfor med M må omfatte $\bar{F}$. Heraf fremgår "kun hvis" - delen.

Beviset for "hvis" - delen føres indirekte. Antag altså, at M ikke er total, d.v.s. $\bar{F} \neq E$. Lad $y \in \complement\bar{F}$ (åben), og lad V være en åben, konveks omegn af $\underline{0}$ i E således at $y + V \subseteq \complement\bar{F}$. Ifølge Hahn-Banach's sætning eksisterer der en afsluttet hyperplan H i E med $H \supseteq \bar{F}$ og $H \cap (y + V) = \emptyset$. Lad $H = f^{-1}(0)$, hvor f er en kontinuert linearform på E (stk. 23). Da er altså $f = 0$ på H, specielt på M, men $f \neq 0$.

Korollar 1. Ethvert afsluttet egl. underrum $S \subset E$ af et lokalkonvekst t.v.r. E er fællesmængden for mængden af alle afsluttede hyperplaner $H \supseteq S$ i E; og sådanne hyperplaner eksisterer.

Thi i ovenstående bevis (med $S = M = F = \bar{F}$) fandt vi for ethvert $y \in \complement S$ en afsluttet hyperplan $H \supseteq S$ med $y \notin H$.

Korollar 2. Lad E være et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. af dimension > 0. Der eksisterer afsluttede hyperplaner i E, og kontinuerte linearformer $\neq 0$ på E.

Thi $S = \{\underline{0}\}$ er et afsluttet underrum af E, da E er Hausdorff; og $S \subset E$, da dim $E > 0$.

31. Seminorm. Lad E være et vektorrum over K (=$\mathring{R}$ eller $\mathring{C}$). En funktion $p: E \to \mathring{R}$ kaldes en seminorm på E, dersom følgende 2 betingelser er opfyldt:

1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ for ethvert $\lambda \in K$, $x \in E$;

2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ for ethvert $x, y \in E$.

Det følger heraf at $p(\underline{0}) = 0$ (sæt $\lambda = 0$ i 1), og at $p(x) \geq 0$ for ethvert $x \in E$, idet

$$0 = p(\underline{0}) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x).$$

Endvidere gælder resten af "trekantsuligheden":

$$|p(x) - p(y)| \leqq p(x - y) ,$$

idet $p(x) \leqq p(y) + p(x - y)$ og $p(y) \leqq p(x) + p(y - x)$ ifølge 2), og $p(y - x) = p(x - y)$ ifølge 1).

Endelig er en seminorm en konveks funktion, idet

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqq p(\lambda x) + p((1 - \lambda)y) \leqq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y),$$

for $\lambda \in [0,1]$ og $x,y \in E$.

En seminorm p kaldes en norm, dersom $p(x) = 0 \Rightarrow x = \underline{0}$.

For enhver linearform $f: E \to K$ er den ved $x \to |f(x)|$ bestemte funktion $|f|$ en seminorm på E.

Lemma. Lad p være en seminorm på et vektorrum E. Da er mængden

$$A = \{x \in E \mid p(x) \leqq 1\}$$

konveks, symmetrisk og absorberende. Endvidere er

$$p(x) = \inf \{\alpha \in \dot{R}_+ \mid x \in \alpha A\}.$$

Bevis. Symmetrien følger af 1), konveksiteten af at p er en konveks funktion, og den absorberende egenskab af, at p er endelig. For ethvert $x \in E$ gælder nemlig $\lambda x \in A$ for $|\lambda| < 1/p(x)$. Åbenbart er for ethvert $\alpha \in \dot{R}^+$ ifølge 1)

$$\alpha A = \{x \in E \mid p(x) \leqq \alpha\},$$

og denne mængde er da ligeledes konveks, symmetrisk og absorberende. Idet således

$$p(x) \leqq \alpha \iff x \in \alpha A,$$

og idet $p(x) = \inf \{\alpha \in \mathring{R}_+ | \ p(x) \leqq \alpha\}$, fremkommer det anførte udtryk for $p(x)$.

32. Kontinuert seminorm på et t.v.r.

Lemma. En seminorm p på et t.v.r. E er ligelig kontinuert, dersom p er kontinuert i $\underline{0}$, eller blot begrænset i en omegn af $\underline{0}$.

Bevis. Lad $p(x) \leqq \alpha$ for alle $x \in U$, hvor $U \in \mathring{U}(\underline{0})$. Da gælder for ethvert $\varepsilon > 0$, at $p(y) \leqq \varepsilon$ for alle $y \in (\varepsilon/\alpha)\,U$, og $(\varepsilon/\alpha)U = V \in \mathring{U}(\underline{0})$. Endelig er

$$|p(x) - p(y)| \leqq p(x - y) \leqq \varepsilon \quad \text{for } x - y \in V.$$

Sætning. Lad E være et t.v.r. over K.

a) For enhver kontinuert seminorm p på E er mængden

$$A = \{x \in E \mid p(x) \leqq 1\}$$

en konveks, symmetrisk, afsluttet omegn af $\underline{0}$ i E.

b) Enhver konveks symmetrisk, afsluttet omegn af $\underline{0}$ fremkommer på denne måde ud fra netop én kontinuert seminorm p på E, nemlig

$$p(x) = \inf \{\alpha \in \mathring{R}_+ | \ x \in \alpha A\}.$$

Bevis. a) Klart ifølge lemma 31, idet A åbenbart nu er afsluttet, da p er kontinuert, og idet A omfatter den åbne mængde $\{x \in E \mid p(x) < 1\}$, som indeholder $\underline{0}$.

b) Ifølge samme lemma er der ikke andre muligheder for p end den i sætningen anførte. Da enhver omegn af $\underline{0}$ er absorberende, eksisterer der for ethvert $x \in E$ et tal $\alpha \in \mathring{R}_+$ så at $\alpha^{-1}x \in A$, altså $x \in \alpha A$, hvorfor $p(x)$ er veldefineret som et (endeligt) reelt tal $\geqq 0$.

For $\lambda \in K \setminus \{0\}$ og $\alpha \in \mathring{R}_+$ gælder

$$\lambda x \in \alpha A \iff x \in \lambda^{-1} \alpha A \iff x \in |\lambda|^{-1} \alpha A,$$

fordi A er symmetrisk. Derfor bliver

$$p(\lambda x) = \inf \{\alpha \in \mathring{R}_+ \mid x \in |\lambda|^{-1} \alpha A\}$$
$$|\lambda| \inf \{|\lambda|^{-1} \alpha \in \mathring{R}_+ \mid x \in |\lambda|^{-1} \alpha A\} = |\lambda| p(x).$$

Hermed er vist, at $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ for $\lambda \neq 0$; men det samme gælder åbenbart for $\lambda = 0$.

For at eftervise subadditiviteten betragter vi to tal $\alpha, \beta \in \mathring{R}_+$ og bemærker, at

$$x \in \alpha A \wedge y \in \beta A \Rightarrow x + y \in (\alpha + \beta)A$$
$$\Rightarrow p(x + y) \leqq \alpha + \beta.$$

Vi har her benyttet, at $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$, fordi A er konveks. Da nu α og β kan vælges vilkårligt tæt til henholdsvis $p(x)$ og $p(y)$, slutter vi, at $p(x + y) \leqq p(x) + p(y)$, og dermed at p er en seminorm.

Det er klart, at $x \in A \Rightarrow p(x) \leqq 1$. Antag dernæst, at $x \notin A$. Da $\complement A$ er åben, findes $\mu > 1$ så at $1 \leqq \alpha \leqq \mu \Rightarrow \alpha^{-1} x \notin A$. Nu er A konveks og indeholder $\underline{0}$, hvorfor A er stjerneformet (stk. 1, c), altså $\alpha A \subseteq A$ for ethvert $\alpha \in [0,1]$. Da $x \notin A$, gælder således $x \notin \alpha A$ for $\alpha \in [0,1]$, og dermed ialt for $\alpha \in [0,\mu]$, hvorfor $p(x) \geqq \mu > 1$. Hermed er vist, at $A = \{x \in E \mid p(x) \leqq 1\}$. Da således seminormen p er begrænset i omegnen A af $\underline{0}$, er p kontinuert ifølge lemmaet ovenfor.

Bemærkning. På ganske tilsvarende måde vises det, at for enhver kontinuert seminorm p er $B = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$ en konveks, symmetrisk, åben omegn af $\underline{0}$, og enhver sådan fremkommer på denne måde ud fra netop én seminorm p, nemlig $p(x) = \inf \{\alpha \in \mathring{R}_+ \mid x \in \alpha B\}$.

Det kan endvidere vises, at $B = \mathring{A}$ og $A = \overline{B}$.

33. Lokalkonveks topologi defineret ved seminormer. Lad E være et vektorrum over K (= $\mathring{R}$ eller $\mathring{C}$), og lad P være en given mængde af seminormer på E. For ethvert $p \in P$ og ethvert $\alpha \in \mathring{R}_+$ er mængden

$$V_{p,\alpha} = \{x \in E \mid p(x) \leqq \alpha\}$$

ifølge lemma 31 konveks, symmetrisk og absorberende. Med $\mathring{B}(\underline{O})$ betegner vi mængden af alle fællesmængder

$$V_{p_1,\alpha_1} \cap V_{p_2,\alpha_2} \cap \cdots \cap V_{p_m,\alpha_m}$$

af endelig mange mængder af formen $V_{p,\alpha}$ med $p \in P$, $\alpha \in \mathring{R}_+$. Da enhver fællesmængde af endeligt mange konvekse, symmetriske og absorberende mængder igen har disse tre egenskaber (og ifølge den sidste af disse ikke er tom), er $\mathring{B}(\underline{O})$ en filterbasis på E. For ethvert $\lambda \in \mathring{R}_+$ gælder $\lambda V_{p,\alpha} = V_{p,\lambda\alpha}$, hvoraf følger, at $V \in \mathring{B}(\underline{O}) \Rightarrow \lambda V \in \mathring{B}(\underline{O})$. Ifølge sætning 2 (jvf. tillige stk. 4) findes der derfor netop én topologi på E, hvorved E bliver et t.v.r. og $\mathring{B}(\underline{O})$ en basis for filtret af omegne af $\underline{O}$. Herved bliver $\{x + V \mid V \in \mathring{B}(\underline{O})\}$ en basis for $\mathring{U}(x)$. Vi kalder denne topologi for den ved mængden P af seminormer definerede topologi på E. Med denne topologi bliver E åbenbart et lokalkonvekst t.v.r.

Det ville ingen forskel gøre, om man i stedet definerede $V_{p,\alpha} = \{x \in E \mid p(x) < \alpha\}$; thi der gælder for $\alpha \in \mathring{R}_+$

$$\{x \in E \mid p(x) \leqq \alpha/2\} \subsetneqq \{x \in E \mid p(x) < \alpha\} \subsetneqq \{x \in E \mid p(x) \leqq \alpha\}.$$

Sætning. Den ved en mængde P af seminormer på et vektorrum E definerede lokalkonvekse topologi på E er den groveste topologi på E, der gør E til et t.v.r. og for hvilken enhver af seminormerne $p \in P$ er kontinuert.

Bevis. Det er klart, at ethvert $p \in P$ er kontinuert i den ved P definerede topologi, idet $V_{p,\alpha}$ er en omegn af $\underline{0}$ for ethvert $\alpha \in \dot{R}_+$. Betragter vi omvendt en vilkårlig topologi på E, hvorved E bliver et t.v.r. og ethvert $p \in P$ bliver kontinuert, da må $V_{p,\alpha}$ for ethvert $p \in P$ og $\alpha \in \dot{R}_+$ være en omegn af $\underline{0}$. Derfor er enhver af mængderne i $\dot{B}(\underline{0})$ en omegn af $\underline{0}$, og da parallelforskydningerne i E skal være homeomorfier, må $x + V$ være en omegn af x for ethvert $V \in \dot{B}(\underline{0})$. Dette viser, at den betragtede vilkårlige topologi med de anførte egenskaber er finere end den ved P bestemte topologi.

Det bemærkes, at enhver lokalkonveks topologi på et vektorrum E kan defineres ved seminormer på den angivne måde. Vi behøver nemlig blot at tage P som mængden af alle seminormer på E, som er kontinuerte i den forelagte topologi. Den ved P definerede nye topologi på E er ifølge ovenstående sætning grovere end den givne topologi. Lad omvendt V være en omegn af $\underline{0}$ i den givne topologi. Ved beviset for, at V også er en omegn af $\underline{0}$ i den ved P bestemte topologi, kan vi antage at V er konveks, symmetrisk og afsluttet. Ved $p(x) = \inf \{\alpha \in \dot{R}_+ | x \in \alpha V\}$ defineres ifølge sætn. 32 en kontinuert seminorm på E, og denne tilhører således P. Ifølge samme sætning er $V = V_{p,1} = \{x \in E \mid p(x) \leqq 1\}$, hvilket netop er en omegn af $\underline{0}$ i den ved P bestemte topologi. Da parallelforskydningerne er homeomorfier i begge topologier, er påstanden hermed bevist.

Lemma. Lad P være en mængde af seminormer på et vektorrum. Den ved P definerede topologi på E er Hausdorff, hvis og kun hvis der for ethvert $x \neq \underline{0}$ i E findes $p \in P$ med $p(x) \neq 0$.

Bevis. For et sådant p er $\{y \in E \mid p(y) = < \frac{1}{2}p(x)\}$ en omegn af $\underline{0}$, som ikke indeholder x. Hvis derimod $p(x) = 0$ for alle $p \in P$,

gælder $x \in V_{p,\alpha}$ for ethvert $p \in P$, $\alpha \in \mathring{R}_+$,
og derfor er $x \in V$ for enhver omegn V af $\underline{0}$ i den ved P definerede topologi, hvilket viser, at denne ikke er Hausdorff.

34. Kontinuitet af lineær afbildning udtrykt ved seminormer.
Lad E og F være lokalkonvekse topologiske vektorrum over samme legeme K, og lad topologien på E være defineret ved en mængde P af seminormer på E og topologien på F ved en mængde Q af seminormer på F.

Sætning. Med ovenstående betegnelser er en lineær afbildning $f: E \to F$ kontinuert, hvis og kun hvis der til enhver seminorm $q \in Q$ findes en endelig mængde af seminormer $p_i \in P$, $i = 1,2,\dots,m$, og et tal $c > 0$ så at

$$q(f(x)) \leq c \sup_{1\leq i\leq m} p_i(x) \quad \text{for alle } x \in E.$$

Bevis. Hvis f er kontinuert i $\underline{0}$, findes til omegnen $W = \{y \in F \mid q(y) \leq 1\}$ af $\underline{0}$ i F en omegn af formen $V = V_{p_1,\alpha_1} \cap \dots \cap V_{p_m,\alpha_m}$ af $\underline{0}$ i E, som ved f afbildes ind i W. Sættes $\alpha = \min_{1\leq i\leq m} \alpha_i$, gælder, at

$$\sup_{1\leq i\leq m} p_i(x) \leq \alpha \Rightarrow x \in V \Rightarrow f(x) \in W \Rightarrow q(f(x)) \leq 1,$$

hvoraf på grund af homogeniteten $q(f(x)) \leq \alpha^{-1} \sup_i p_i(x)$. Lad os dernæst antage, at betingelsen er opfyldt, og lad os vise, at f bliver kontinuert i $\underline{0}$ og dermed overalt. Enhver omegn af $\underline{0}$ i F omfatter fællesmængden af endeligt mange omegne af formen $W_{q,\beta} = \{y \in F \mid q(y) \leq \beta\}$, hvor $q \in Q$, $\beta \in \mathring{R}_+$. Det er da nok at vise, at $f^{-1}(W_{q,\beta})$ er en omegn af $\underline{0}$ i E. Til q findes ifølge forudsætning $p_1,\dots,p_m \in P$ og $c > 0$ så at den anførte ulighed gælder. Men så gælder åbenbart for $\alpha = \beta/c$, at

$$V_{p_1,\alpha} \cap \dots \cap V_{p_m,\alpha} \subseteq f^{-1}(W_{q,\beta}).$$

<u>Bemærkning</u>. Af denne sætning aflæses i tilfældet $E = F$, $f = i$ (=den identiske afbildning af E på sig selv) betingelsen for, at den ved én mængde P af seminormer på et vektorrum E definerede topologi på E er finere end (eller grovere end, eller identisk med) den ved en anden mængde Q af seminormer definerede topologi på E. To mængder af seminormer, P og Q, på E kaldes <u>ækvivalente</u>, dersom de definerer samme topologi på E.

Enhver endelig mængde af seminormer $p_1, \dots, p_m$ på et vektorrum E er åbenbart ækvivalent med en enkelt seminorm p, f.eks. $p = \sum_{i=1}^{m} p_i$ eller

$$p(x) = \sup_{1 \leq i \leq m} p_i(x).$$

35. <u>Hahn-Banach's sætning i analytisk formulering</u>.

<u>Sætning</u>. Lad p være en seminorm på et vektorrum E over K ($= \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Lad M være et underrum af E, og lad $f\colon M \to K$ være en linearform på M således at $|f(x)| \leq p(x)$ for alle $x \in M$. Da kan f udvides til en linearform $f_1\colon E \to K$ på E således at $|f_1(x)| \leq p(x)$ for alle $x \in E$.

<u>Bevis</u>. Vi kan antage $f \neq 0$, idet vi ellers blot tager $f_1 = 0$. Den givne seminorm p på E definerer en lokalkonveks topologi på E. Da p herved bliver kontinuert, er den konvekse mængde $A = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$ åben og ikke tom, idet $\underline{0} \in A$. Ved ligningen $f(x) = 1$ defineres en hyperplan $L = \{x \in M \mid f(x) = 1\}$ i M; og L er et side underrum af E, som ikke møder A, idet $p(x) \geq |f(x)| = 1$! for $x \in L$. Ifølge Hahn-Banach's sætning i geometrisk formulering (sætn. 28) eksisterer der en afsluttet hyperplan H i E med $H \supseteq L$ og $H \cap A = \emptyset$. I inklusionerne $L \subseteq H \cap M \subseteq M$ må lighedstegn indtræffe netop ét sted, fordi L er en hyperplan i M. Da $\underline{0} \in M$, hvorimod $\underline{0} \notin H$ (fordi $\underline{0} \in A \subseteq CH$), må $H \cap M \neq M$, og derfor er

$H \cap M = L$. Som vist i stk. 22 har H en ligning $f_1(x) = 1$, altså $H = \{x \in E \mid f_1(x) = 1\}$, hvor $f_1 : E \to K$ er en kontinuert linearform på E. Da således $L = H \cap M = \{x \in M \mid f_1(x) = 1\}$, har hyperplanen L i M både ligningen $f(x) = 1$ og ligningen $f_1(x) = 1$, hvorfor linearformerne f og f_1 stemmer overens på M (stk. 22), d.v.s. f_1 er en udvidelse af f. Tilbage står at eftervise, at $|f_1(x)| \leq p(x)$ for alle $x \in E$. Da $H \subseteq \complement A = \{x \in E \mid p(x) \geq 1\}$, er denne ulighed klar for $x \in H$, d.v.s. for $f_1(x) = 1$. For en vilkårlig værdi $\alpha \in K$ af $f_1(x)$ sluttes (hvis $\alpha \neq 0$), at $f_1(\alpha^{-1}x) = 1$ og derfor

$$p(x) = |\alpha| p(\alpha^{-1}x) \geq |\alpha| = |f_1(x)|.$$

Bemærkning. Hvis E er givet som et t.v.r., og hvis p er en kontinuert seminorm på E, da bliver f_1 en kontinuert linearform på E, som man umiddelbart ser ud fra uligheden $|f_1(x)| \leq p(x), x \in E$.

36. Normeret rum. Vi minder om, at en norm på et vektorrum E over K (= $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) er defineret som en seminorm, som kun antager værdien 0 i $\underline{0}$. Det er altså en afbildning $x \to \|x\|$ af E ind i $[0, +\infty[$, som opfylder kravene

1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ for ethvert $\lambda \in K$, $x \in E$;
2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for ethvert $x, y \in E$;
3) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \underline{0}$.

Et vektorrum E kaldes et normeret rum, dersom der er givet en norm $\| \; \|$ på E. Den ved denne ene (semi)norm definerede topologi på E kaldes normtopologien. Udstyret med denne topologi er E specielt et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r., idet betingelsen i lemma 33 er opfyldt ifølge 3). Endvidere er normen en kontinuert funktion på E.

Et normeret rum er samtidig et metrisk rum, idet afstanden defineres ved

$$\text{dist}\,(x,y) = \|x - y\|.$$

Det eftervises umiddelbart, at der herved virkelig defineres et afstandsmål på E. Den tilsvarende topologi på E er netop normtopologien, idet kuglerne $\{y \in E \mid \|x - y\| \leq r\}$, $r \in \mathring{R}_+$, i begge tilfælde danner en basis for filtret af omegne af $x \in E$. Også den ligelige struktur (jvf. stk. 10) er åbenbart den samme, hvadenten E opfattes som et t.v.r. (med normtopologien) eller som et metrisk rum (med den ovenfor angivne metrik).

Et t.v.r. E kaldes normerbart, dersom der findes en norm på E, således at den tilhørende normtopologi netop er den givne topologi på E.

Et fuldstændigt normeret vektorrum kaldes også er Banach-rum efter den polske matematiker S. Banach, der i sin bog: Théorie des operations linéaires har givet den første systematiske behandling af de (normerede) topologiske vektorrum.

Lad E og F være to normerede rum (over samme legeme K). Vi tillader os at benytte samme betegnelse for normerne i E og F. Lad $f: E \to F$ være en lineær afbildning af E ind i F. Ifølge sætn. 34 bliver f kontinuert, hvis og kun hvis der findes en konstant $c > 0$ således at

$$\|f(x)\| \leq c\,\|x\| \qquad \text{for alle } x \in E.$$

Det fremgår heraf specielt (i tilfældet $E = F$, $f = i$), at to normer $\|\ \|_1$ og $\|\ \|_2$ på et vektorrum E er ækvivalente (d.v.s. definerer samme topologi på E), hvis og kun hvis der findes en konstant $c > 0$ således at

$$c^{-1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c\|x\|_1 \qquad \text{for alle } x \in E.$$

Ses der derimod bort fra denførste af disse uligheder, fremkommer betingelsen for, at den ved $\| \|_1$ definerede normtopologi på E er finere end den ved $\| \|_2$ definerede.

En lineær afbildning $f: E \to F$ af et normeret rum E ind i et normeret rum F kaldes <u>isometrisk</u>, dersom normen bevares, altså

$$\|f(x)\| = \|x\| \qquad \text{for alle } x \in E.$$

En sådan afbildning er altså specielt kontinuert. Det naturlige isomorfibegreb for normerede rum er <u>isometrisk isomorfi</u>, altså eksistens af en bijektiv, lineær, isometrisk afbildning $f: E \to F$.

Til sætn. 17 om <u>udvidelse ved kontinuitet</u> kan føjes følgende i det tilfælde, hvor E og F er normerede rum og hvor F altså er et Banach-rum: Da den givne lineære afbildning $f: M \to F$ af det overalt tætte underrum M af E ind i F er forudsat kontinuert, eksisterer der ifølge det foregående et tal $c > 0$ så at $\|f(x)\| \leq c\,\|x\|$ for alle $x \in M$. Den entydigt bestemte udvidelse af f til en kontinuert lineær afbildning $f_1: E \to F$ opfylder nu automatisk den tilsvarende ulighed $\|f_1(x)\| \leq c\,\|x\|$ for alle $x \in E$. Dette følger af, at $\{x \in E \mid \|f_1(x)\| - c\|x\| \leq 0\}$ åbenbart er afsluttet (fordi venstre side af uligheden afhænger kontinuert af x) og omfatter M, som er tæt i E.

På samme måde ses det, at hvis f er en isometri, da gælder det samme om f_1.

37. <u>Sætning</u>. Ethvert <u>endeligt</u> produkt af normerede rum E_i $(i = 1,2,\dots,m)$ er normerbart. Idet normen på E_i betegnes med $\| \|_i$, defineres produktrumstopologien på $E = \prod_{i=1}^{m} E_i$ eksempelvis ved følgende norm $\| \|$:

$$\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq m} \|x_i\|_i \qquad (x = (x_1,\dots,x_m) \in E).$$

Bevis. Det eftervises let, at der herved defineres en norm på E. Idet α gennemløber $\mathring{R}_+$ danner mængderne

$$\{x \in E \mid \|x\| \leqq \alpha\} = \prod_{i=1}^{m} \{x_i \in E_i \mid \|x_i\|_i \leqq \alpha\}$$

en basis for filtret af omegne af $\underline{0}$ i E såvel i normtopologien på E som i produktrumstopologien.

Det tilføjes, at der ved $x \to \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_i$ åbenbart defineres en anden norm på E, og den er ækvivalent med ovenstående norm (nemlig $\geqq$ denne og $\leqq$ m gange denne), definerer altså ligeledes produkttopologien på E. Det samme kan mere almindeligt vises for ethvert $p \in [1, +\infty[$ om afbildningen $x \to (\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_i^p)^{1/p}$.

Vi minder om, at produktrummet $E = \prod_{i=1}^{m} E_i$ er fuldstændigt (altså et Banach-rum), hvis og kun hvis hvert af rummene E_i er fuldstændigt (sætn. 16).

Eksempelvis er det K-dimensionale talrum K^m et Banach-rum over K for enhver af normerne

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p)^{1/p} \qquad (1 \leqq p < \infty)$$

og også med normen

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leqq i \leqq m} |x_i| .$$

38. For at komme til eksempler på uendeligdimensionale normerede rum betragter vi (som forberedelse) svarende til en given, ikke tom mængde T vektorrummet K^T bestående af alle afbildninger $x: T \to K$. Således er K^T identisk med produktrummet $\prod_{t \in T} K_t$, hvor $K_t = K$ for ethvert $t \in T$. Produktrumstopologien på K^T defineres åbenbart ved systemet af seminormer

$$x \to |x(t)| \qquad (x \in K^T),$$

hvor t gennemløber T. Denne topologi kaldes også topologien for <u>punktvis konvergens</u>, fordi eksempelvis en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på K^T konvergerer mod $x \in K^T$, hvis og kun hvis $x_n(t) \to x(t)$ for ethvert $t \in T$. Udstyret med denne topologi er K^T åbenbart et fuldstændigt, lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. (sætn. 9 og sætn. 16); men normerbart er det kun i det ovenfor betragtede tilfælde, hvor T er en endelig mængde.

For enhver mængde T danner de <u>begrænsede</u> funktioner $x : T \to K$ (hvor altså $\sup_{t\in T} |x(t)| < \infty$) et underrum af vektorrummet K^T. På dette underrum, som vi vil betegne med $B(T) = B(T,K)$, indfører vi følgende norm:

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in T} |x(t)| \qquad (x \in B(T)).$$

Det eftervises umiddelbart, at dette virkelig er en norm på $B(T)$. Den tilhørende normtopologi på $B(T)$ kaldes topologien for <u>ligelig konvergens</u>, fordi en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på $B(T)$ åbenbart konvergerer mod $x \in B(T)$ i normtopologien, hvis og kun hvis $x_n(t) \to x(t)$ (punktvis og) ligeligt med hensyn til $t \in T$. Da $|x(t)| \leqq \|x\|_\infty$ for ethvert $t \in T$, er topologien for ligelig konvergens på $B(T)$ finere end topologien for punktvis konvergens (delrumstopologien på underrummet $B(T)$ og K^T).

Vi viser nu, at det normerede rum $B(T)$ er <u>fuldstændigt</u>, altså et Banach-rum. Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en fundamentalfølge på $B(T)$. Til $\varepsilon > 0$ findes altså $N \in \mathbb{N}$ med

$$\|x_m - x_n\|_\infty = \sup_{t\in T} |x_m(t) - x_n(t)| \leqq \varepsilon \quad \text{for } m,n \geqq N.$$

For ethvert $t \in T$ er følgen $(x_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ derfor en fundamentalfølge på K. Da K er fuldstændigt, eksisterer for ethvert $t \in T$ en grænseværdi $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$. Hermed er vist, at den givne følge

(x_n) konvergerer mod funktionen $x \in K^T$ i topologien for punktvis konvergens på K^T. Tilbage står at vise, at $x \in B(T)$ og at $\|x - x_n\|_\infty \to 0$ for $n \to \infty$. Ved at lade $n \to \infty$ i uligheden $|x_m(t) - x_n(t)| \leqq \varepsilon$ for $m, n \geqq N$ finder vi, at $|x(t) - x_n(t)| \leqq \varepsilon$ for $n \geqq N$. Dette viser dels, at $x - x_n$ er en begrænset funktion for $n \geqq N$, altså at $x - x_n \in B(T)$ og dermed $x \in B(T)$, og dels at $\|x - x_n\|_\infty \leqq \varepsilon$ for $n \geqq N$, hvorfor $x_n \to x$ i normtopologien på $B(T)$. Da således enhver fundamentalfølge på $B(T)$ er konvergent, er $B(T)$ fuldstændigt ifølge sætn. 11, idet $B(T)$ som normeret rum jo har en numerabel basis for filtret af omegne af $\underline{0}$, f.eks. kuglerne med centrum $\underline{0}$ og radius $1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

Lad os nu særlig betragte det tilfælde, hvor mængden T er et topologisk rum. De begrænsede funktioner $x : T \to K$, som tillige er <u>kontinuerte</u>, udgør åbenbart et underrum af $B(T)$, og dette underrum er afsluttet i normtopologien på $B(T)$, fordi kontinuitet bevares ved ligelig konvergens. De begrænsede, kontinuerte funktioner på et topologisk rum T danner derfor ifølge sætn. 13 et Banach-rum under benyttelse af normen $\| \ \|_\infty$. Vi fremhæver det vigtige tilfælde, hvor T er kompakt og enhver kontinuert funktion på T derfor begrænset:

<u>Sætning</u>. Vektorrummet $C(T) = C(T,K)$ af alle kontinuerte funktioner $x: T \to K$ på et kompakt topologisk rum T er et Banach-rum med normen

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in T} |x(t)| = \max_{t \in T} |x(t)|, \qquad x \in C(T).$$

39. <u>Fuldstændiggørelse</u>. Lad E betegne et Hausdorff t.v.r. over $K (= \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C})$. Ved en <u>fuldstændiggørelse</u> af E forstås et par $(\hat{E}, k)$, hvor $\hat{E}$ er et fuldstændigt Hausdorff t.v.r. (over samme koefficientlegeme som E), og hvor k er en isomorfi (altså

lineær homeomorfi) af E på et overalt tæt underrum $k(E)$ af $\hat{E}$.

Dersom E er et normeret rum, forlanges desuden, at $\hat{E}$ er at normeret rum (og dermed et Banachrum), og at k er en <u>isometri</u>, altså $\|k(x)\| = \|x\|$ for alle $x \in E$.

<u>Sætning</u>. Ethvert Hausdorff t.v.r. har en fuldstændiggørelse, og ligeså ethvert normeret rum.

Vi skal ikke gennemføre beviset for denne sætning, men dog skitsere beviset i tilfælde af et normeret rum. Her gås frem på lignende måde som ved Cantor's udvidelse af $\hat{Q}$ til $\hat{R}$, idet elementerne i $\hat{E}$ defineres som klasser af ækvivalente fundamentalfølger på E. To fundamental følger på E kaldes ækvivalente, dersom deres differens konvergerer mod $\underline{0}$. Summen $x + y$ af to ækvivalensklasser x og y, repræsenterede ved fundamentalfølgerne $(x_n)_{n\in\hat{N}}$ og $(y_n)_{n\in\hat{N}}$ på E, defineres som den ækvivalensklasse, der indeholder følgen $(x_n + y_n)_{n\in\hat{N}}$. Denne sidste ses let at være en fundamentalfølge, ligesom det vises, at resultatet $x + y$ ikke afhænger af de valgte repræsentanter for x og y. På analog måde defineres λx for $\lambda \in K$, $x \in \hat{E}$, og det påvises, at $\hat{E}$ er et vektorrum. Normen $\|x\|$ af $x \in \hat{E}$ defineres ved

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|,$$

som eksisterer, fordi normen på E er ligelig kontinuert (lemma 32) og derfor overføre fundamentalfølgen $(x_n)_{n\in\hat{N}}$ i en fundamentalfølge $(\|x_n\|)_{n\in\hat{N}}$ på det fuldstændige rum K. (Eller direkte: $|\|x_m\| - \|x_n\|| \leq \|x_m - x_n\|$.) Igen er resultatet uafhængigt af den valgte repræsenterende fundamentalfølge $(x_n)_{n\in\hat{N}}$, og det eftervises let, at $\hat{E}$ er et normeret rum.

Idet man for $x \in E$ definerer $k(x)$ som klassen af alle følger, der konvergerer mod x, repræsenteret ved følgen $(x,x,\dots,x,\dots)$, bliver k øjensynlig en (isometrisk) isomorfi af E på et underrum k(E) af $\hat{E}$, og k(E) bliver tæt i $\hat{E}$. Thi et element $x \in \hat{E}$, repræsenteret ved en fundamentalfølge $(x_n)_{n\in\hat{N}}$, er åbenbart grænseværdien for følgen $\{k(x_n)\}_{n\in\hat{N}}$, eftersom

$$\|x - k(x_n)\| = \lim_{m\to\infty} \|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$$

for alle tilstrækkelig store n. En fundamentalfølge $(x^{(n)})_{n\in\hat{N}}$ på k(E) er øjensynlig konvergent i $\hat{E}$, idet elementerne $x_n = k^{-1}(x^{(n)})$ af E danner en fundamentalfølge $(x_n)_{n\in\hat{N}}$ på E, og denne repræsenterer et element $x \in \hat{E}$, for hvilket vi ovenfor viste, at $x = \lim k(x_n) = \lim x^{(n)}$. For til slut at bevise, at enhver fundamentalfølge $(x^{(n)})_{n\in\hat{N}}$ på $\hat{E}$ er konvergent i $\hat{E}$, vælges $y^{(n)}\in k(E)$ så at $\| y^{(n)} - x^{(n)} \| \to 0$ for $n \to \infty$. Da bliver $(y^{(n)})_{n\in\hat{N}}$ en fundamentalfølge på k(E), og derfor eksisterer $\lim y^{(n)} = y \in \hat{E}$. Men så gælder også $\lim x^{(n)} = y$, hvormed er vist, at $\hat{E}$ er fuldstændigt.

I tilfælde af et generelt Hausdorff t.v.r. må man naturligvis operere med fundamentalfiltre i stedet for fundamentalfølger. Man definerer $\hat{E}$ som mængden af minimale fundamentalfiltre på E, d.v.s. de minimale elementer (ved inklusion $\subseteq$) i mængden af alle fundamentalfiltre på E. Der gælder den sætning, at der til ethvert fundamentalfilter Φ på E findes netop ét minimalt fundamentalfilter Φ_o grovere end Φ. En basis for Φ_o er

$$\{A + V \mid A \in \Phi \wedge V \in \mathcal{U}(0) \}.$$

Heraf træder en vis analogi med ækvivalensklasser af fundamentalfølger frem. I øvrigt må henvises til Bourbaki. Topologie générale, ch. 2, § 3.

40. En sætning af Baire og dens rolle i funktionalanalysen.

Sætning (Baire). Lad E være et fuldstændigt, metrisk rum. Foreningsmængden $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ for en følge af afsluttede mængder $A_n \subseteq E$ uden indre punkter er en mængde uden indre punkter.

Ved overgang til komplementærmængder lyder komklusionen, at fællesmængden $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ for en følge af åbne, overalt tætte mængder $A_n \subseteq E$ er overalt tæt i E.

Bevis (i den sidste formulering). Vi betegner med $K(x,\rho) = \{y \in E \mid \text{dist}(x,y) < \rho\}$ den åbne kugle med centrum $x \in E$ og radius $\rho > 0$. Opgaven er at vise, at $\bar{A} = E$, altså at ethvert punkt $x_1 \in E$ er kontaktpunkt for $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, idet det er givet, at $\bar{A}_n = E$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi skal således påvise, at $K(x_1,\rho_1) \cap A \neq \emptyset$ for ethvert opgivet $x_1 \in E$ og $\rho_1 > 0$. Hertil bestemmes ved induktion en følge af kugler $K_n = K(x_n,\rho_n)$, $n \in \mathbb{N}$ (af hvilke K_1 er den forelagte), således at

$$\bar{K}_{n+1} \subseteq K_n \cap A_n, \qquad \rho_n \leq \rho_1/n$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Er K_n bestemt, vælges $x_{n+1} \in K_n \cap A_n$, hvilket er muligt fordi K_n er en omegn af x_n og derfor møder den tætte mængde A_n. Dernæst vælges $\rho_{n+1} \leq \rho_1/(n+1)$ og så lille, at den åbne omegn $K_n \cap A_n$ af x_{n+1} omfatter den afsluttede kugle $\{y \in E \mid \text{dist}(x_{n+1}, y) \leq \rho_{n+1}\}$, som jo atter omfatter $\bar{K}_{n+1} = \overline{K(x_{n+1},\rho_{n+1})}$. Det er nu klart, at følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er fundamental: thi for $m > n$ er $x_m \in K_m \subseteq K_n$, og derfor $\text{dist}(x_m,x_n) < \rho_n \to 0$ for $n \to \infty$. Da E er forudsat fuldstændigt, eksisterer $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ er $x \in \bar{K}_{n+1} \subseteq K_n \cap A_n \subseteq K_1 \cap A_n$, fordi $x_m \in K_{n+1}$ for $m > n$. Dette viser, at $x \in K_1 \cap A$.

Vi skal nu anvende Baires sætning på topologiske vektorrum. Spørgsmålet melder sig da, hvilke topologiske vektorrum E er metriserbare ? Som nævnt er ethvert normerbart rum E metriserbart, idet vi som afstand mellem x og y benytter $\mathrm{dist}(x,y) = \|x-y\|$, hvor $\| \|$ er den givne norm. Denne metrik er translationsinvariant, d.v.s.

$$\mathrm{dist}(a+x,a+y) = \mathrm{dist}(x,y) \quad \text{for alle} \quad a,x,y \in E.$$

Mere almindeligt gælder, at et topologisk vektorrum E er metriserbart, hvis og kun hvis det er Hausdorff og opfylder det 1. numerabilitetskriterium. I bekræftende fald kan man endda altid vælge en translationsinvariant metrik på E.

Vi skal ikke vise dette resultat her, men gør opmærksom på at resultatet er indeholdt i opgave 15 i det lokalkonvekse tilfælde.

41. Rum af kontinuerte lineære afbildninger.

Lad E og F være t.v.r. over K. Mængden af kontinuerte lineære afbildninger $L(E,F)$ af E ind i F er et underrum af vektorrummet $\mathrm{Lin}(E,F)$ af alle lineære afbildninger af E ind i F. Det er naturligt at spørge, om det ikke er muligt at gøre $L(E,F)$ til et topologisk vektorrum. Der er normalt flere muligheder, og vi vil her kun behandle to tilfælde

1) E og F er normerede rum,

2) E lokalkonvekst Hausdorff t.v.r., $F = K$, og i dette tilfælde består $L(E,K)$ altså af alle kontinuerte linearformer på E. (Se §44).

Vi antager nu at E og F er normerede rum og normen betegnes i begge rum $\| \|$. En lineær afbildning $f: E \to F$ er ifølge sætning 34 kontinuert, hvis og kun hvis der findes et tal

$c \geq 0$ så

(1) $\|f(x)\| \leq c\|x\|$ for alle $x \in E$.

For enhver lineær afbildning $f\colon E \to F$ defineres

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} \leq \infty .$$

Af (1) følger at $\|f\| \leq c$ (specielt $\|f\| < \infty$), når f er kontinuert. Hvis der på den anden side gælder $\|f\| < \infty$, er det klart, at (1) gælder med $c = \|f\|$ (se på $\|x\|^{-1}x$), så f er kontinuert, og $\|f\|$ er det mindste tal c så (1) gælder.

Sætning: Lad E og F være normerede rum. Vektorrummet $L(E,F)$ af alle kontinuerte lineære afbildninger $f\colon E \to F$ er normeret ved normen

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\| \leq 1\},$$

og der gælder $\|f(x)\| \leq \|f\|\,\|x\|$ for alle $f \in L(E,F)$, $x \in E$. Hvis F er et Banachrum, da også $L(E,F)$.

Bevis: Vi skal eftervise betingelserne 1)-3) for en norm

$$\|\lambda f\| = \sup\{\|\lambda f(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\lambda|\,\|f(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} = |\lambda|\,\|f\|$$

$$\|f+g\| = \sup\{\|f(x)+g(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|f(x)\|+\|g(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} \leq \|f\|+\|g\|.$$

Som bemærket gælder (1) med $c = \|f\|$, altså $\|f(x)\| \leq \|f\|\,\|x\|$ for alle $x \in E$. Af $\|f\| = 0$ følger derfor $\|f(x)\| = 0$, d.v.s. $f(x) = \underline{0}$, for alle $x \in E$, altså $f = \underline{0}$.

Lad dernæst F være fuldstændigt, og lad $(f_n)_{n\in\mathring{N}}$ være en fundamentalfølge i $L(E,F)$. Til $\varepsilon > 0$ findes altså $N \in \mathring{N}$ så at $\|f_m - f_n\| \leq \varepsilon$ for $m,n \geq N$, d.v.s.

(2) $\|f_m(x)-f_n(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$ for $m,n \geq N$, $x \in E$.

For fastholdt $x \in E$ ses heraf, at følgen $(f_n(x))_{n\in\mathring{N}}$ er en fundamentalfølge i F, og derfor defineres en afbildning $f: E \to F$ ved

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{for alle} \quad x \in E.$$

Det vises let, at f er lineær, idet f.eks.

$$f(x+y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x)+f_n(y)) = f(x)+f(y).$$

Lader vi nu $m \to \infty$ i (2) fås

(3) $\|f(x)-f_n(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$ for $n \geq N$, $x \in E$,

hvoraf følger, at $\|f-f_N\| \leq \varepsilon$, altså $f-f_N$ er kontinuert, og så vil $f = (f-f_N)+f_N \in L(E,F)$.

Af (3) følger videre at $\|f-f_n\| \leq \varepsilon$ for $n \geq N$, og dette viser at $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ i $L(E,F)$, som derfor er fuldstændigt. $\|$

<u>Bemærkning:</u> At $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ i $L(E,F)$ betyder at $\lim_{n\to\infty} \|f-f_n\| = 0$, altså at $\lim_{n\to\infty} \|f(x)-f_n(x)\| = 0$ ligeligt for x tilhørende enhedskuglen i E. Dette udtrykkes sprogligt, at f_n konvergerer mod f ligeligt over enhedskuglen i E.

Hvis $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ i $L(E,F)$ gælder specielt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for alle $x \in E$, hvilket udtrykkes at f_n konvergerer mod f punktvis.

Normtopologien på $L(E,F)$ kaldes ofte den ligelige topologi på $L(E,F)$.

Den følgende sætning kaldes princippet om ligelig begrænsning eller Banach-Steinhaus' sætning.

Sætning. Lad E og F være normerede rum, af hvilke E er fuldstændigt. Hvis en mængde $M \subseteq L(E,F)$ af kontinuerte lineære afbildninger er punktvis begrænset, d.v.s. $\sup\{\|f(x)\| \mid f \in M\} < \infty$ for alle $x \in E$, så er M ligeligt begrænset, d.v.s. $\sup\{\|f\| \mid f \in M\} < \infty$.

Bevis. Vi indfører tallene $M_x = \sup\{\|f(x)\| \mid f \in M\}$, $x \in E$, som alle er endelige ifølge forudsætningen. (Påstanden kommer i øvrigt ud på at $\sup\{M_x \mid \|x\| \leq 1\} < \infty$). For ethvert $n \in \mathbb{N}$ er mængden

$$A_n = \{x \in E \mid M_x \leq n\} = \bigcap_{f \in M} \{x \in E \mid \|f(x)\| \leq n\}$$

afsluttet, og der gælder åbenbart $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Af Baire's sætning følger da, at mindst en af mængderne A_n har et indre punkt. Hvis x_o er et indre punkt af A_n findes $\rho > 0$ så $\|x\| \leq \rho \Rightarrow x_o + x \in A_n$. For $\|x\| \leq \rho$, $f \in M$ gælder da

$$\|f(x)\| = \|f(x+x_o) - f(x_o)\| \leq \|f(x+x_o)\| + \|f(x_o)\| \leq M_{x+x_o} + M_{x_o} \leq 2n,$$

og dermed af homogenitetsgrunde $\|f(x)\| \leq \frac{2n}{\rho}$ for $\|x\| \leq 1$, $f \in M$, altså $\sup\{\|f\| \mid f \in M\} \leq \frac{2n}{\rho}$. $\|$

Corollar. Lad E og F være normerede rum, af hvilke E er fuldstændigt, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af kontinuerte lineære afbildninger af E ind i F. Hvis for alle $x \in E$ $f_n(x) \to f(x)$, så er f en kontinuert lineær afbildning.

Bevis: Det er let at se, at f er lineær. Da $f_n(x)$ er konvergent for alle $x \in E$ er $\{f_n\}$ punktvis begrænset og dermed ligeligt begrænset, altså der findes $c > 0$ så $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| \leq c$. For hvert $x \in E$ med $\|x\| \leq 1$ gælder da

$$\|f(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|f_n\| \leq c ,$$

altså $\|f\| \leq c$, og derfor er f kontinuert. $\|$

Advarsel: Der behøver ikke gælde $f_n \to f$ i $L(E,F)$.

42. Banach's åben-afbildning sætning.

Sætning (Banach). Lad E og F være fuldstændige, metriserbare t.v.r. (f.eks. Banach-rum), og lad $f: E \to F$ være en kontinuert, lineær afbildning. Hvis f er surjektiv, er f åben.

Bevis. Vi viser først at for enhver omegn U af $\underline{0}$ i E er afslutningen $\overline{f(U)}$ af billedet af U en omegn af $\underline{0}$ i F, dernæst at $f(U)$ selv er en omegn af $\underline{0}$. Heraf følger på grund af lineariteten, at $f(x+U) = f(x) + f(U)$ er en omegn af

$f(x)$ for ethvert $x \in E$, og dermed at f er en åben afbildning.

Lad V være en stjerneformet symmetrisk omegn af $\underline{0}$ i E med $V+V \subseteq U$. Da V er absorberende, er $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nV = E$ (stk. 1), og derfor $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(nV) = f(E) = F$. Så meget mere overdækkes F af de afsluttede mængder $\overline{f(nV)} = \overline{nf(V)} = n\overline{f(V)}$. Ifølge ovenstående sætning af Baire har mindst én af mængderne $n\overline{f(V)}$ derfor indre punkter, og det samme må da gælde om $\overline{f(V)}$. (Vi benytter flere gange, at multiplikation med $\lambda \neq 0$ er en homeomorfi.) Lad da y være et indre punkt af $\overline{f(V)}$ og dermed $-y$ et (indre) punkt af $-\overline{f(V)} = \overline{-f(V)} = \overline{f(-V)} = \overline{f(V)}$ (her benyttes, at V er symmetrisk.) Der findes altså $W \in \mathcal{U}_F(\underline{0})$ med $y + W \subseteq \overline{f(V)}$ og derfor

$$W = (-y) + (y + W) \subseteq \overline{f(V)} + \overline{f(V)}$$
$$\subseteq \overline{f(V) + f(V)} = \overline{f(V + V)} \subseteq \overline{f(U)}.$$

(Thi da additionen i F er kontinuert, bliver $y_1 + y_2$ et kontaktpunkt for $f(V) + f(V)$, dersom y_1 og y_2 er kontaktpunkter for $f(V)$.) Hermed er da vist, at $\overline{f(U)}$ er en omegn af $\underline{0}$ i F.

I resten af beviset tænkes på hvert af rummene E og F indført en forskydningsinvariant metrik, som bestemmer den givne topologi på det pågældende rum. I begge tilfælde betegner vi med $d(x)$ afstanden mellem $\underline{0}$ og x, (altså $d(x) = \|x\|$ i tilfælde af Banach-rum.) Ifølge trekantsuligheden er $d(x + y) \leq d(x) + d(y)$, og tilsvarende for summer af flere vektorer. For $\rho > 0$ betegner vi med $K(x,\rho)$ kuglen med centrum x og radius ρ, igen såvel i E som i F.

Opgaven er til opgivet $r > 0$ at vise, at $f(K(\underline{0},r))$ er en omegn af $\underline{0}$ i F, altså at der findes $\rho > 0$ så at $f(K(\underline{0},r)) \supseteq K(\underline{0},\rho)$. Hertil sættes $r_n = 2^{-n}r$ for $n \in \hat{N}$. Ifølge det allerede beviste er $\overline{f(K(\underline{0},r_n))}$ en omegn af $\underline{0}$ i F, og der findes således $\rho_n > 0$ så at

$$\overline{f(K(\underline{0},r_n))} \supseteq K(\underline{0},\rho_n).$$

Vi kan desuden antage, at $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$.

Lad nu $y \in K(\underline{0},\rho_1) \subseteq F$. Vi skal bestemme $x \in K(\underline{0},r) \subseteq E$ så at $f(x) = y$. Hertil bestemmes successivt $x_1, x_2, \ldots$ i E således at, idet $x_0 = \underline{0}$,

$$(*) \qquad d(x_n - x_{n-1}) < r_n, \qquad d(f(x_n) - y) < \rho_{n+1}.$$

Hvis x_i er bestemt i overensstemmelse med disse krav for $i = 1,2,\ldots,n-1$, gælder $d(f(x_{n-1})-y) < \rho_n$. Da således $y - f(x_{n-1}) \in K(\underline{0},\rho_n) \subseteq \overline{f(K(\underline{0},r_n))}$, eksisterer $u_n \in K(\underline{0},r_n)$ med $d(y-f(x_{n-1}) - f(u_n)) < \rho_{n+1}$. Idet vi sætter $x_n = x_{n-1} + u_n$, bliver $(*)$ opfyldt på grund af lineariteten af f. Nu er $(x_n)_{n\in\hat{N}}$ en fundamentalfølge på E, idet der for $m > n$ gælder

$$d(x_m - x_n) = d\Big(\sum_{i=n+1}^{m} u_i\Big) \leq \sum_{i=n+1}^{m} d(u_i) < \sum_{i=n+1}^{m} r_i < 2^{-n}r,$$

som går mod 0 for $n \to \infty$. Da E er fuldstændigt, eksisterer $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E$, og der gælder

$$d(x) = \lim d(x_n) = \lim d(\sum_{i=1}^{n} u_i) \leqq \lim \sum_{i=1}^{n} d(u_i) < \sum_{n=1}^{\infty} r_n = r,$$

altså $x \in K(\underline{0},r)$. Da f er kontinuert, bliver $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ ifølge $(*)$, fordi $\lim_{n\to\infty} \rho_{n+1} = 0$. ||

Korollar 1. *En bijektiv, lineær, kontinuert afbildning af et fuldstændigt, metriserbart t.v.r. på et andet er en homeomorfi (og dermed en topologisk isomorfi)*.

Korollar 2. *Lad* E *være et fuldstændigt, metriserbart t.v.r. Hvis* E *er algebraisk direkte sum af to afsluttede underrum* S *og* T, *da er denne sum* $E = S + T$ *topologisk direkte*.

Thi som delrum af E er S og T fuldstændige ifølge sætning 13. Da de også er metriserbare, bliver $S \times T$ et fuldstændigt, metriserbart rum. Afbildningen $f\colon S \times T \to S + T = E$ givet ved $f(s,t) = s + t$ er bijektiv, lineær og kontinuert, og derfor en homeomorfi ifølge det første korollar.

43. Banach's afsluttet-graf sætning.

Sætning. *En lineær afbildning* $f\colon E \to F$ *af et fuldstændigt, metriserbart t.v.r. ind i et andet sådant er kontinuert, hvis og kun hvis grafen*

$$G = \{(x,y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$$

for f *er en afsluttet delmængde* af $E \times F$.

Bevis. Med $p\colon E \times F \to E$ og $q\colon E \times F \to F$ betegnes projektionerne af $E \times F$ på E og F givet ved $p(x,y) = x$, $q(x,y) = y$. Vi viser først, at f bliver kontinuert, såfremt G er afsluttet. Da p og q er kontinuerte og lineære, bliver restriktionen $\varphi = p|G$ af p til G kontinuert og lineær. Desuden er φ åbenbart bijektiv. Dens omvendte afbildning $\varphi^{-1}: E \to G$ er givet ved $\varphi^{-1}(x) = (x,f(x))$, og den er ligeledes kontinuert ifølge korollar 1 ovenfor. Men så bliver f selv kontinuert, idet der åbenbart gælder $f = q \circ \varphi^{-1}$.

At omvendt grafen G for en kontinuert afbildning $f: E \to F$ er afsluttet, er et elementært resultat, som gælder uafhængigt af lineariteten af f, og som blot forudsætter, at E og F er topologiske rum, og F Hausdorff. Lad nemlig $(x,y) \in E \times F$ være et kontaktpunkt for G. Da inducerer filtret af omegne af (x,y) i $E \times F$ et filter Φ på G, og dette vil - opfattet som filterbasis på $E \times F$ - konvergere mod (x,y). Da p og q er kontinuerte, vil $p(\Phi) \to x$ og $q(\Phi) \to y$. Da f er kontinuert, gælder derfor $(f \circ p)(\Phi) = f(p(\Phi)) \to f(x)$. Nu har $f \circ p$ og q åbenbart samme restriktion til G, og da Φ består af delmængder af G, bliver $(f \circ p)(\Phi) = q(\Phi)$. Da F er Hausdorff, har den konvergente filterbasis $(f \circ p)(\Phi) = q(\Phi)$ kun ét grænsepunkt, hvorfor $f(x) = y$. ||

44. Dualt rum.

Overalt i denne § betegner E et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. over K. Vektorrummet $L(E,K)$ af kontinuerte linearformer $f: E \to K$ kaldes det <u>topologisk duale rum</u> til E og betegnes E'. Det er et underrum af <u>det algebraisk duale rum</u>

E^*, som består af alle linearformer $f: E \to K$. Vi kan yderligere opfatte E^* som underrum i vektorrummet K^E af alle afbildninger af E ind i K. Rummet K^E er et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. under produkttopologien, som er initialtopologien for familien af projektioner $(\pi_x)_{x\in E}$, hvor $\pi_x: K^E \to K$ er givet ved $\pi_x(f) = f(x)$. (Jvf. §§ 9,38).

Ved <u>den svage topologi</u> på E' forstås delrumstopologien af K^E på E', og den betegnes $\sigma(E',E)$. Den svage topologi gør E' til et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r.

For hvert $x \in E$ defineres en seminorm p_x på E' ved fastsættelsen

$$p_x(f) = |f(x)|, \quad f \in E',$$

og det er let at se, at alle disse seminormer p_x, $x \in E$ er kontinuerte i den svage topologi.

Dette viser, at den ved familien $(p_x)_{x\in E}$ definerede lokalkonvekse topologi τ på E' er grovere end den svage topologi, jvf. §33.

På den anden side er den kanoniske indlejring $i: E' \to K^E$ kontinuert, når E' forsynes med topologien τ, thi det kommer ud på, at alle de sammensatte afbildninger $\pi_x \circ i: E' \to K$, $x \in E$ er τ-kontinuerte, og det følger af sætning 34, idet

$$|\pi_x \circ i(f)| = |f(x)| = p_x(f) \quad \text{for} \quad x \in E,\ f \in E'.$$

Heraf følger, at den svage topologi er grovere end τ, og dermed har vi vist:

<u>Den svage topologi på</u> E' <u>kan karakteriseres som den topologi på</u> E', <u>der er defineret ved familien af seminormer</u>

$(p_x)_{x \in E}$.

Rummet E' skiller punkterne af E i den forstand, at der til to forskellige punkter $a, b \in E$ findes en kontinuert linearform $f \in E'$ så $f(a) \neq f(b)$.

Dette er et specialtilfælde af følgende resultat:

Lemma: Til vilkårligt endeligt mange lineært uafhængige vektorer $x_1, \ldots, x_n \in E$ findes en kontinuert linearform $f \in E'$ så

$$f(x_1) = 1, \quad f(x_2) = \ldots = f(x_n) = 0.$$

Bevis: Underrummet F af E udspændt af $x_2, \ldots, x_n$ er af endelig dimension og derfor afsluttet i E (Corollar 1, §24). Da $x_1 \notin F$ findes en åben konveks omegn A af x_1 så $A \cap F = \emptyset$. Ifølge Hahn-Banach's sætning (§28) findes en afsluttet hyperplan $H \supseteq F$ så $H \cap A = \emptyset$, og ifølge §23 findes en kontinuert linearform f på E så $H = f^{-1}(0)$, og derfor er $f(x_2) = \ldots = f(x_n) = 0$, $f(x_1) \neq 0$. Ved at erstatte f med $f(x_1)^{-1} f$ opnås det ønskede. ||

For hvert $x \in E$ defineres en linearform φ_x på E' ved fastsættelsen $\varphi_x(f) = f(x)$, $f \in E'$. Da φ_x er restriktionen af π_x til E', er det klart, at φ_x er kontinuert i den svage topologi $\sigma(E', E)$. Herved defineres en lineær afbildning $\varphi: x \to \varphi_x$ af E ind i det topologisk duale rum til E', som vi skriver $(E', \sigma(E', E))'$. At φ er injektiv kommer ud på, at hvis $x \neq \underline{0}$, så findes $f \in E'$ med egenskaben $\varphi_x(f) = f(x) \neq 0$, men dette følger af ovenstående lemma.

Det er nu afgørende, at φ er surjektiv, altså til enhver kontinuert linearform Φ på E' findes et $x \in E$ så $\varphi_x = \Phi$.

Ifølge sætning 34 findes $c > 0$ og $x_1, \ldots, x_n \in E$ så

$$(*) \quad |\Phi(f)| \leq c \sup_{1 \leq i \leq n} p_{x_i}(f) = c \sup_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)| \quad \text{for alle } f \in E'.$$

Her kan vi uden videre indskrænkning antage at $x_1, \ldots, x_n$ er lineært uafhængige, thi hvis f.eks. $x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i$ fås

$$|f(x_1)| \leq \left(\sum_{i=2}^{n} |\lambda_i|\right) \sup_{2 \leq i \leq n} |f(x_i)|, \quad \text{og dermed}$$

$$|\Phi(f)| \leq c' \sup_{2 \leq i \leq n} |f(x_i)| \quad \text{for alle } f \in E',$$

hvor $c' = c \max(1, \sum_{i=2}^{n} |\lambda_i|)$.

Ifølge lemmaet kan vi finde $f_i \in E'$, $i = 1, \ldots, n$, så $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. Til $f \in E'$ betragtes $g \in E'$ defineret ved

$$g = f - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i ,$$

og da $g(x_1) = \ldots = g(x_n) = 0$, følger af $(*)$, at $\Phi(g) = 0$, altså

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Phi(f_i) \quad \text{for alle } f \in E'.$$

Dette viser, at $\Phi = \varphi_x$, med $x = \sum_{i=1}^{n} \Phi(f_i) x_i$.

Det er nu praktisk at indføre en mere symmetrisk skrivemåde. For $x \in E$, $f \in E'$ skrives $\langle x,f \rangle = f(x)$ og herved defineres en bilineær afbildning $E \times E' \to K$ nemlig: $(x,f) \to \langle x,f \rangle$.

Det foregående kan da resumeres således:

Dualitetssætningen. Lad E være et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r., E' det topologisk duale rum. Udstyres E' med den svage topologi $\sigma(E',E)$ - topologien defineret ved seminormerne $f \to |\langle x,f\rangle|$, $x \in E$ - er E' også et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r., og dets topologisk duale rum er E. For hvert $x \in E$ er $f \to \langle x,f\rangle$ en kontinuert linearform på E' og enhver kontinuert linearform på E' har denne form for præcis et $x \in E$.

Da E er det topologisk duale rum til E' med topologien $\sigma(E',E)$, kan vi også udstyre E med en svag topologi, det bliver topologien givet ved seminormerne $(p_f)_{f\in E'}$, hvor p_f er seminormen på E: $p_f(x) = |\langle x,f\rangle| = |f(x)|$. Denne topologi betegnes $\sigma(E,E')$, og det er den groveste topologi på E, der gør E til et t.v.r., og for hvilken seminormerne p_f, $f \in E'$ er kontinuerte. Dette viser, at den svage topologi $\sigma(E,E')$ er svagere (= grovere) end den oprindelige topologi på E. Det topologisk duale rum til E forsynet med $\sigma(E,E')$ er stadig E'.

45. Alaoglu-Bourbaki's sætning.

Lad E være et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. med topologisk dualt rum E' forsynet med den svage topologi $\sigma(E',E)$.

For enhver delmængde U af E defineres polaren af U som delmængden U^o af E':

$$U^o = \{f \in E' \mid |\langle x,f\rangle| \leq 1 \quad \text{for alle} \quad x \in U\}.$$

Vi siger også, at U^o er den polære mængde til U. Hvis U består af et enkelt punkt $U = \{x\}$, er det klart at

$$\{x\}^{o} = \{f \in E' \mid |\langle x,f\rangle| \leq 1\} = p_x^{-1}([0,1])$$

er en konveks symmetrisk svagt afsluttet delmængde af E', og da

$$U^{o} = \bigcap_{x\in U} \{x\}^{o}$$

gælder generelt, at polaren er en <u>svagt afsluttet, konveks og symmetrisk delmængde</u> af E'.

<u>Sætning(Alaoglu-Bourbaki, 1938)</u>. <u>Hvis</u> U <u>er en omegn af</u> <u>0</u> <u>i</u> E <u>er polaren</u> U^{o} <u>svagt kompakt</u>.

<u>Bevis</u>: Det algebraisk duale rum E^* er et afsluttet underrum af K^E, thi E^* er fællesmængde for systemet af mængder

$$\{f \in K^E \mid f(\lambda x+\mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y) = 0\},$$

idet λ,μ gennemløber K og x,y gennemløber E, og enhver af disse mængder er afsluttet i K^E, fordi den pågældende afbildning

$$f \mapsto f(\lambda x+\mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)$$

af K^E ind i K er kontinuert ifølge definitionen af produkttopologien på K^E.

Vi vil nu se, at U^{o} er en afsluttet delmængde af K^E. Da E^* er afsluttet i K^E, må afslutningen $\overline{U^{o}}$ af U^{o} i K^E være indeholdt i E^*. Hvis $f \in E^*$ tilhører $\overline{U^{o}}$ gælder for alle $x \in E$, at

$$f(x) = \pi_x(f) \in \pi_x(\overline{U^{o}}) \subseteq \overline{\pi_x(U^{o})} \ ,$$

og for $x \in U$ er $\pi_x(U^o) \subseteq \{z \in K \mid |z| \leq 1\}$. Derfor gælder

$$(*) \qquad |f(x)| \leq 1 \quad \text{for alle} \quad x \in U ,$$

altså er f begrænset på en omegn U af $\underline{0}$, og dette medfører at f er kontinuert, d.v.s. $f \in E'$. Af $(*)$ følger da at $f \in U^o$.

For hvert $x \in E$ findes et tal $\lambda_x > 0$ så $x \in \lambda_x U$ fordi U er absorberende. Mængden $D_x = \{z \in K \mid |z| \leq \lambda_x\}$ er kompakt i K (et begrænset interval eller en afsluttet cirkelskive eftersom $K = \mathbb{R}$ eller $K = \mathbb{C}$), og ifølge Tychonoff's sætning er så også

$$D = \prod_{x \in E} D_x$$

en kompakt delmængde af K^E. For $x \in E$ er $\lambda_x^{-1} x \in U$, og for $f \in U^o$ gælder derfor $|f(\lambda_x^{-1} x)| \leq 1$ eller $f(x) \in D_x$. Dette viser, at $U^o \subseteq D$, og som afsluttet delmængde af en kompakt mængde er U^o selv kompakt i K^E og dermed kompakt i den svage topologi på E'. ||

46. Dualt rum til et normeret rum. Refleksivt rum.

Lad E være et normeret rum over K. Det topologisk duale rum E' kan udstyres med en norm i henhold til §41:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid \|x\| \leq 1\} \quad \text{for} \quad f \in E',$$

og da legemet K er fuldstændigt, er E' et Banachrum. Normtopologien på E' som ifølge §41 hedder den ligelige topologi på E', kaldes ofte den stærke topologi på E'.

På E' har vi også den svage topologi $\sigma(E',E)$, som er defineret ved seminormerne $(p_x)_{x\in E}$ på E'. Der gælder

$$p_x(f) = |f(x)| \leq \|f\| \; \|x\|,$$

så p_x er begrænset på enhedskuglen i E' (nemlig ved $\|x\|$), og derfor kontinuert i den stærke topologi på E' (Lemmaet §32). Dette viser, at den svage topologi $\sigma(E',E)$ på E' er grovere end den stærke topologi på E'.

For at præcisere hvilken af de to topologier der er på tale, skrives svagt eller stærkt foran de topologiske begreber. F.eks. taler man om svagt kompakte og stærkt åbne mængder i E' og mener naturligvis mængder, som er kompakte i den svage topologi resp. åbne i den stærke topologi.

Hvis vi lader S og S' betegne enhedskuglerne i E og E' indser man, at S' er polaren af S, thi

$$S^o = \{f\in E' \mid |\langle x,f\rangle| \leq 1 \text{ for alle } x\in S\} = \{f\in E' \mid \|f\| \leq 1\} = S',$$

og hermed fås følgende vigtige specialtilfælde af Alaoglu-Bourbaki's sætning:

Corollar 1. Lad E være et normeret rum. Enhedskuglen S' i det topologisk duale rum E' er svagt kompakt.

(Derimod er S' stærkt kompakt hvis og kun hvis E' (og dermed E) er af endelig dimension, jvf. opg. 52. Heraf følger iøvrigt, at den svage og stærke topologi på E' er identiske, præcis når E' er af endelig dimension).

Det topologisk duale rum til E' forsynet med den stærke topologi betegnes E'' og kaldes det biduale rum til E. Dette er et Banachrum under normen

$$\|x''\| = \sup\{\,|\langle x',x''\rangle| \mid x' \in S'\}, \quad x'' \in E'' ,$$

idet som før $\langle x',x''\rangle$ betegner værdien af linearformen x'' i punktet $x' \in E'$.

For hvert $x \in E$ har vi betragtet linearformen φ_x på E' givet ved

$$\varphi_x(x') = \langle x,x'\rangle = x'(x) \quad \text{for} \quad x' \in E' ,$$

og den er kontinuert i den svage topologi $\sigma(E',E)$ på E'. Så meget desmere er den kontinuert i den stærke topologi på E', altså $\varphi_x \in E''$, men dette fremgår også direkte af vurderingen

$$|\varphi_x(x')| \leq \|x'\|\,\|x\|,$$

der viser at $\|\varphi_x\| \leq \|x\|$.

Der gælder endda $\|\varphi_x\| = \|x\|$, thi der findes $x' \in E'$ så $\|x'\| \leq 1$ og så $\varphi_x(x') = \|x\|$. Dette følger af Hahn-Banach's sætning i den analytiske formulering (§35) anvendt på underrummet Kx udspændt af x. Defineres nemlig

$$f(\lambda x) = \lambda\|x\| \quad \text{for} \quad \lambda \in K ,$$

er f en linearform på Kx med $|f(\lambda x)| = |\lambda|\,\|x\| = \|\lambda x\|$, altså $|f(y)| = \|y\|$ for $y \in Kx$. Der eksisterer derfor en linearform x' på E, som udvider f, og for hvilken $|x'(y)| \leq \|y\|$ for alle $y \in E$. Heraf følger at $x' \in E'$ og at $\|x'\| \leq 1$, og desuden er $\varphi_x(x') = x'(x) = f(x) = \|x\|$.

Ved $x \to \varphi_x$ defineres altså en isometrisk lineær afbildning φ af E ind i E''. Af isometriegenskaben følger specielt, at φ er injektiv, og vi kalder φ den kanoniske indlejring af E i sit biduale rum E''.

Hermed har vi vist det vigtigste af følgende resultat:

Sætning 1. Lad E være et normeret rum. Den kanoniske indlejring $\varphi: E \to E''$ er en isometrisk isomorfi af E på et underrum $\varphi(E)$ af E''. Desuden er φ en isomorfi af E på $\varphi(E)$, når E er forsynet med den svage topologi $\sigma(E,E')$ og $\varphi(E)$ er forsynet med delrumstopologien af den svage topologi $\sigma(E'',E')$ på E''.

Bevis: Topologien $\sigma(E,E')$ på E er defineret ved seminormerne $x \to |\langle x,x'\rangle|$ når x' gennemløber E', og topologien $\sigma(E'',E')$ på E'' er givet ved seminormerne $x'' \to |\langle x',x''\rangle|$, når x' gennemløber E'. Af opg. 32 følger, at delrumstopologien på $\varphi(E)$ er givet ved disse seminormers restriktion til $\varphi(E)$. Formlen $\langle x',\varphi_x\rangle = \langle x,x'\rangle$ viser da, at $\varphi: E \to \varphi(E)$ og $\varphi^{-1}: \varphi(E) \to E$ er kontinuerte i de nævnte topologier (jvf. §34), og derfor er φ en isomorfi. $\|$

Af sætningen følger, at $(\overline{\varphi(E)},\varphi)$ er en fuldstændiggørelse af E, idet $\overline{\varphi(E)}$ er et afsluttet underrum af Banach-rummet E'' og derfor selv et Banachrum.

I almindelighed er φ ikke surjektiv, og i så fald findes der linearformer på E', som er kontinuerte i den stærke topologi på E', men som ikke er kontinuerte i den grovere svage topologi $\sigma(E',E)$ (jvf. §44).

Definition: Et normeret rum E kaldes refleksivt, såfremt den kanoniske indlejring φ er surjektiv, altså såfremt $E'' = \varphi(E)$.

Et refleksivt rum E er et Banachrum, fordi det er isometrisk isomorft med E'', som er et Banachrum. For et refleksivt rum E er φ også en isomorfi når E og E'' er udstyret med de svage topologier $\sigma(E,E')$ og $\sigma(E'',E')$. Anvendes Corollar 1 på E' i stedet for E, finder man, at enhedskuglen i E'' er $\sigma(E'',E')$ kompakt, og via φ^{-1} får man da "hvis-delen" af følgende sætning:

Sætning 2. Enhedskuglen i et normeret rum E er svagt kompakt hvis og kun hvis E er refleksivt.

Vi skal ikke vise den anden halvdel af sætningen her, men henviser til opg. 68. Det bemærkes, at enhedskuglen i E er kompakt i den stærke topologi præcis hvis E er endelig dimensionalt, jvf. opg. 52.

Vi viser senere, at et Hilbertrum er refleksivt, og derfor er enhedskuglen i et Hilbertrum svagt kompakt. Vi nævner uden bevis, at det duale til $L^p(\mathbb{R}^n)$ er $L^q(\mathbb{R}^n)$ når $1 \leq p < \infty$, $p^{-1}+q^{-1} = 1$. Heraf følger at $L^p(\mathbb{R}^n)$ er refleksivt for $1 < p < \infty$. Tilsvarende gælder for L^p-rum hørende til mere generelle mål end Lebesguemålet.

47. Krein-Milman's sætning.

Lad E være et vektorrum over $\mathbb{R}$, og lad A og B være delmængder af E opfyldende $A \subseteq B \subseteq E$. Vi kalder A en ekstrem delmængde af B såfremt

$$\forall\, x,y \in B \;\forall \lambda \in \,]0,1[\; (\lambda x + (1-\lambda)y \in A \Rightarrow x,y \in A),$$

altså såfremt et punkt af A kun kan ligge på det indre af forbindelseslinien mellem to punkter i B, hvis disse ligger i A.

Et punkt $x \in B$ kaldes et <u>ekstremt punkt</u> i B, hvis $A = \{x\}$ er en ekstrem delmængde af B. Mængden af ekstreme punkter i B betegnes Ext B. Den er en ekstrem delmængde af B, (idet også $\emptyset$ må regnes som en ekstrem delmængde af B).

Hvis $(A_i)_{i \in I}$ er en familie af ekstreme delmængder af B er også $\bigcap_{i\in I} A_i$ og $\bigcup_{i \in I} A_i$ ekstreme.

Relationen "ekstrem delmængde af" er transitiv, altså hvis A er en ekstrem delmængde af B, som igen er en ekstrem delmængde af C, så er A en ekstrem delmængde af C.

For en trekant er randen og hver af de tre sider ekstreme delmængder. De tre vinkelspidser udgør de ekstreme punkter.

Det er let at angive mængder uden ekstreme punkter, f.eks. rette linier, hvorimod et liniestykke har endepunkterne som ekstreme punkter. Der gælder følgende generelle resultat:

<u>Sætning</u>. <u>Lad</u> K <u>være en ikke tom kompakt delmængde af et reelt lokalkonvekst Hausdorff t.v.r.</u> E. <u>Så er</u> Ext $K \neq \emptyset$.

<u>Bevis</u>: Lad $\mathcal{F}$ betegne mængden af ikke tomme afsluttede ekstreme delmængder af K. Mængden $\mathcal{F}$ er ikke tom $(K \in \mathcal{F})$ og partielt ordnet ved inklusion. Desuden er $\mathcal{F}$ <u>induktivt ordnet</u> i den forstand, at enhver totalt ordnet delmængde $\mathcal{F}_0$ af $\mathcal{F}$ har en minorant i $\mathcal{F}$ nemlig

$$A_0 = \bigcap_{A \in \mathcal{F}_0} A ,$$

som ikke er tom ifølge sætn. 12,1, top.p.34.

Ifølge Zorn's lemma findes et minimalt element $M \in \mathring{F}$. Lad os antage, at der findes to forskellige punkter $a, b \in M$. Der findes da en kontinuert linearform f på E så $f(a) < f(b)$ (jvf. §44).

Mængden

$$N = \{x \in M \mid f(x) = \sup_M f\}$$

N aflukket.

er en ikke tom ægte delmængde af M. Desuden er N ekstrem i M (og dermed i K), thi hvis $x, y \in M$, $\lambda \in]0,1[$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in N$ fås

$$\sup_M f = f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

og da $f(x), f(y) \leq \sup_M f$, ses heraf at $f(x) = f(y) = \sup_M f$, altså $x, y \in N$.

Dette strider mod minimaliteten af M, og derfor består M af et punkt, som følgelig tilhører $\operatorname{Ext} K$. ||

<u>Sætning</u> <u>(Krein-Milman, 1940).</u> <u>For enhver kompakt mængde K i et reelt lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. E gælder</u>

$$\overline{\operatorname{conv}(K)} = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{Ext} K)}.$$

<u>Hvis specielt K er en kompakt konveks mængde i E gælder</u>

$$K = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{Ext} K)},$$

<u>K er altså afslutningen af det konvekse hylster af sine ekstreme punkter.</u>

<u>Bevis:</u> Inklusionen $\supseteq$ er klar, og den modsatte inklusion følger, når vi har vist

$$K \subseteq \overline{\text{conv}(\text{Ext } K)}.$$

Dette gøres indirekte ved at antage at der findes et punkt $x_o \in K$ så $x_o \notin \overline{\text{conv}(\text{Ext } K)}$. Ifølge opg. 45 T.V.R. findes $\alpha \in R$ og en kontinuert linearform f på E så $f(x_o) > \alpha$, $f(y) < \alpha$ for alle $y \in \overline{\text{conv}(\text{Ext } K)}$.
Mængden

$$G = \{x \in K \mid f(x) = \sup_K f\}$$

er en ikke tom kompakt mængde, og som i den foregående sætning ses at G er ekstrem i K, og derfor er $\text{Ext } G \subseteq \text{Ext } K$, altså

$$f(y) < \alpha \quad \text{for alle} \quad y \in \text{Ext } G.$$

Da $\text{Ext } G \neq \emptyset$ giver dette en modstrid, fordi der også gælder

$$\alpha < f(x_o) \leq \sup_K f = f(y) \quad \text{for alle} \quad y \in \text{Ext } G. \quad ||$$

Bemærkninger: 1. En sætning af Milman (1947) siger, at hvis det om en kompakt konveks mængde K gælder, at $K = \overline{\text{conv } A}$ for en delmængde $A \subseteq K$, så er $\bar{A} \supseteq \text{Ext } K$, så $\text{Ext } K$ er i en vis forstand en minimal "frembringermængde".

2. Da ethvert komplekst t.v.r. kan opfattes som et reelt t.v.r., og da ekstreme og konvekse delmængder kun vedrører de reelle tal, gælder de to foregående sætninger også i et komplekst lokalkonvekst Hausdorff t.v.r.

48. Banachrummet $C(T)$, Arzelà-Ascoli's sætning.

Lad T være et ikke tomt kompakt rum. Vi vil studere Banachrummet $C(T) = C(T,K)$ lidt nærmere (jvf. T.V.R. 38). Vi skriver kort $||f|| = ||f||_\infty$ for $f \in C(T)$.

Sætning (Arzelà-Ascoli). En delmængde $F \subseteq C(T)$ er relativ kompakt (d.v.s. $\overline{F}$ kompakt) hvis og kun hvis følgende to betingelser er opfyldt:

(1) F er ligeligt begrænset, i.e.

$$\exists A > 0 \ \forall f \in F(\|f\| \leq A)$$

(2) F er ækvikontinuert, i.e.

$$\forall x \in T \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ U \in \mathring{U}(x) \ \forall y \in U \ \forall f \in F(|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Bevis: Antag først at $\overline{F}$ er kompakt. Betingelsen (1) er klart opfyldt. For at eftervise (2) fixeres $x \in T$ og $\varepsilon > 0$. Med $B(f,r)$ betegner vi den åbne kugle med centrum $f \in C(T)$ og radius $r > 0$,

$$B(f,r) = \{g \in C(T) \mid \|f-g\| < r\}.$$

Da $\overline{F}$ er kompakt findes endelig mange funktioner $f_1,\dots,f_n \in \overline{F}$ så

$$\bigcup_{i=1}^{n} B(f_i,\tfrac{\varepsilon}{3}) \supseteq \overline{F}.$$

Da f_i er kontinuert findes en omegn U_i af x så

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{for alle} \quad y \in U_i \ , \ i = 1,\dots,n.$$

Som omegn U af x i (2) kan vi nu bruge $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Til $f \in F$ findes nemlig $i \in \{1,\dots,n\}$ så $\|f-f_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$, altså for $y \in U$ gælder

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_i(x)|+|f_i(x)-f_i(y)|+|f_i(y)-f(y)| < \varepsilon.$$

Antag dernæst at betingelserne (1) og (2) er opfyldt. Vi viser først, at F er prækompakt, d.v.s.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; f_1,\dots,f_n \in F : F \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(f_j,\varepsilon)$$

(jvf. opg. 27).

Lad så $\varepsilon > 0$ være givet, og lad os for hvert $x \in T$ med $U(x)$ betegne en åben omegn af x svarende til ækvikontinuitetsbetingelsen med $\frac{\varepsilon}{3}$.

Da T er kompakt, findes endelig mange punkter $x_1,\dots,x_p \in T$ så

$$\bigcup_{i=1}^{p} U(x_i) = T.$$

For $i=1,\dots,p$ gælder altså

$$|f(x_i)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ for alle } f \in F \; , \; x \in U(x_i).$$

Mængden $G = \{(f(x_1),\dots,f(x_p)) | f \in F\}$ er ifølge (1) en delmængde af den kompakte mængde $\{z \in K^p | \; |z_i| \leq A, \; i=1,\dots,p\}$, og derfor er $\overline{G}$ kompakt i K^p.

For hvert $f \in F$ er

$$O_f = \{z \in K^p | \; |z_i - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \; , \; i=1,\dots,p\}$$

en åben mængde i K^p. Hvis $z \in \overline{G}$ findes $f \in F$ så $|z_i-f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$ for $i=1,\dots,p$, altså $z \in O_f$, og derfor udgør $O_f, f \in F$ en åben overdækning af $\overline{G}$. Der findes følgelig funktioner $f_1,\dots,f_n \in F$ så

$$\overline{G} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} O_{f_j}$$

og hermed gælder

$$F \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(f_j,\varepsilon).$$

Til $f \in F$ findes nemlig $j \in \{1,\dots,n\}$ så

$$(f(x_1),\dots,f(x_p)) \in O_{f_j} ,$$

og til $x \in T$ findes $i \in \{1,\dots,p\}$ så $x \in U(x_i)$, og dermed gælder

$$|f(x)-f_j(x)| \leq |f(x)-f(x_i)|+|f(x_i)-f_j(x_i)|+|f_j(x_i)-f_j(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

altså $\|f-f_j\| < \varepsilon$.

Vi viser dernæst at $\bar{F}$ er kompakt.

Lad g_n være en følge af elementer fra $\bar{F}$. For ethvert $\varepsilon > 0$ findes endelig mange funktioner $f_1,\dots,f_n \in F$ så

$$\bar{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \overline{B(f_j,\tfrac{\varepsilon}{3})} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(f_j,\tfrac{\varepsilon}{2}),$$

og derfor findes en delfølge g_{n_p} indeholdt i en af kuglerne $B(f_j,\frac{\varepsilon}{2})$. Der gælder altså $\|g_{n_p}-g_{n_q}\| < \varepsilon$ for alle p,q.

Vi anvender nu dette succesivt for $\varepsilon = 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,$ og finder således:

En delfølge g_n' af g_n opfyldende $\|g_n'-g_m'\| < 1$ for alle $n,m\in\mathbb{N}$

En delfølge g_n'' af g_n' opfyldende $\|g_n''-g_m''\| < \frac{1}{2}$ for alle $n,m\in\mathbb{N}$

.

.

.

En delfølge $g_n^{(k)}$ af $g_n^{(k-1)}$ opfyldende $\|g_n^{(k)}-g_m^{(k)}\|<\frac{1}{k}$ for alle $n,m\in\mathbb{N}$

.

.

Diagonalfølgen $\varphi_n = g_n^{(n)}$ er en delfølge af g_n opfyldende $\|\varphi_n-\varphi_m\| < \frac{1}{k}$ for $n,m \geq k$, altså er φ_n en fundamentalfølge og dermed konvergent, da $C(T)$ er fuldstændigt. Dette viser at $\bar{F}$ er kompakt. ||

Bemærkninger: Ifølge opgave 27 er en mængde $F \subseteq C(T)$ relativt kompakt præcis når F er prækompakt, fordi $C(T)$ er et fuldstændigt rum. For den læser der er fortrolig med opgave 27 er den sidste del af beviset (F prækompakt $\Rightarrow \overline{F}$ kompakt) altså overflødigt.

De to italienske matematikere Arzelà og Ascoli viste i det væsentlige sætningen i 1880'erne for $T = [0,1]$.

49. Stone-Weierstrass' sætning.

Lad igen T være et ikke tomt kompakt rum, og lad A være en delmængde af $C(T)$. Stone-Weierstrass' sætning angiver tilstrækkelige betingelser for at $\overline{A} = C(T)$, og er altså af natur en approximationssætning. Stone beviste sætningen i 1937, og når man også nævner Weierstrass, er det på grund af et uhyre vigtigt specialtilfælde, der skyldes ham:

Til enhver kontinuert funktion $f:[a,b] \to \mathring{R}$ og til hvert $\varepsilon > 0$ findes et polynomium $p \in \mathring{R}[X]$ så

$$|f(x)-p(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in [a,b],$$

altså underrummet af polynomier er tæt i $C([a,b])$.

For funktioner $f,g \in C(T,\mathring{R})$ betegner $f \vee g$ og $f \wedge g$ de kontinuerte funktioner

$$f \vee g(x) = \max(f(x),g(x)), \quad f \wedge g(x) = \min(f(x),g(x))$$

og en delmængde $A \subseteq C(T,\mathring{R})$ kaldes et gitter såfremt

$$\forall f,g \in A (f \vee g \in A \ , \ f \wedge g \in A).$$

Af formlerne

$$f \vee g = \tfrac{1}{2}(f+g + |f-g|) = f+g - f \wedge g \ , \ |f| = f \vee (-f)$$

følger at et underrum $A \subseteq C(T,\dot{R})$ er et gitter hvis og kun hvis

$$\forall f \in A(|f| \in A).$$

Lemma 1. Lad A være et gitter i $C(T,\dot{R})$. Så er også $\bar{A}$ et gitter, og der gælder om $f \in C(T,\dot{R})$ at $f \in \bar{A}$ hvis og kun hvis

$$\forall p,q \in T\ \forall \varepsilon > 0\ \exists g \in A\ (|f(x)-g(x)| < \varepsilon \quad \text{for} \quad x = p,q).$$

Bevis: Hvis en funktion $f \in C(T,\dot{R})$ kan approximeres ligeligt med funktioner fra A, kan den specielt approximeres samtidigt i to punkter $p,q \in T$. Vi skal også vise det omvendte. Vi tænker os derfor givet $f \in C(T,\dot{R})$, for hvilken vi til $\varepsilon > 0$, $p,q \in T$ kan finde $f(p,q,\varepsilon) \in A$ så

$$|f(x)-f(p,q,\varepsilon)(x)| < \varepsilon \quad \text{for} \quad x = p,q.$$

Vi sætter

$$U(p,q,\varepsilon) = \{x \in T \mid f(p,q,\varepsilon)(x) < f(x)+\varepsilon\}$$
$$V(p,q,\varepsilon) = \{x \in T \mid f(p,q,\varepsilon)(x) > f(x)-\varepsilon\},$$

hvilket er åbne mængder indeholdende p,q. Systemet $\{U(p,q,\varepsilon) \mid p \in T\}$ er, for fast q,ε, en åben overdækning af T. Vi kan derfor udtage $p_1,\ldots,p_n \in T$ så

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} U(p_i,q,\varepsilon), \quad \text{og vi sætter} \quad V(q,\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} V(p_i,q,\varepsilon)$$

og $f(q,\varepsilon) = f(p_1,q,\varepsilon)\wedge\ldots\wedge f(p_n,q,\varepsilon)$. Funktionen $f(q,\varepsilon)$ tilhører A og der gælder

$$f(q,\varepsilon)(x) < f(x)+\varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in T,$$
$$f(q,\varepsilon)(x) > f(x)-\varepsilon \quad \text{for} \quad x \in V(q,\varepsilon).$$

Da $V(q,\varepsilon)$ er en åben mængde indeholdende q, giver et kompakthedsræsonnement, at der findes punkter $q_1,\dots,q_m \in T$ så

$$T = \bigcup_{i=1}^{m} V(q_i,\varepsilon),$$

og vi sætter $f(\varepsilon) = f(q_1,\varepsilon)\vee\dots\vee f(q_m,\varepsilon)$. Funktionen $f(\varepsilon)$ tilhører A og der gælder

$$f(x)-\varepsilon < f(\varepsilon)(x) < f(x)+\varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in T,$$

altså $\|f-f(\varepsilon)\| < \varepsilon$.

Til $\varepsilon > 0$ har vi fundet $f(\varepsilon) \in A$ så $\|f-f(\varepsilon)\| < \varepsilon$, altså $f \in \overline{A}$ og dermed har vi vist den givne karakterisering af $\overline{A}$.

Af formlen $\||f|-|g|\| \leq \|f-g\|$ følger, at afbildningen $f \twoheadrightarrow |f|$ er en kontinuert afbildning af $C(T,\dot{R})$ ind i $C(T,\dot{R})$, og heraf følger at kompositionerne $(f,g) \to f \vee g$, $(f,g) \to f \wedge g$ er kontinuerte som afbildninger af $C(T,\dot{R}) \times C(T,\dot{R})$ ind i $C(T,\dot{R})$.

For en vilkårlig mængde $A \subseteq C(T,\dot{R})$ gælder derfor $\overline{A} \vee \overline{A} \subseteq \overline{A \vee A}$ og analogt for $\wedge$, og dette viser, at hvis A er et gitter, så gælder dette også om $\overline{A}$. ||

<u>Definition</u>: En mængde $A \subseteq C(T,\dot{R})$ siges at <u>skille punkterne i</u> T, såfremt der til vilkårlige forskellige punkter $p,q \in T$ findes $\varphi \in A$ så $\varphi(p) \neq \varphi(q)$.

Vi siger, at A er <u>lineært skillende</u>, eller at A <u>skiller punkterne i</u> T <u>lineært</u>, såfremt der til vilkårlige forskellige punkter $p,q \in T$ findes $\varphi,\psi \in A$ så

$$\det\begin{pmatrix} \varphi(p) & \psi(p) \\ \varphi(q) & \psi(q) \end{pmatrix} \neq 0$$

Hvis T kun består af et punkt $p, T = \{p\}$, er begge betingelserne tomme. Det viser sig imidlertid at være bekvemt i dette tilfælde at kræve at der findes $\varphi \in A$ så $\varphi(p) \neq 0$. Vi kan identificere $C(\{p\},\dot{R})$ med $\dot{R}$ og betingelsen $A \subseteq \dot{R}$ skiller punkter (lineært) kommer så ud på, at A indeholder et fra 0 forskelligt tal.

Hvis A er lineært skillende må enten $\varphi(p) \neq \varphi(q)$ eller $\psi(p) \neq \psi(q)$, og A skiller derfor punkterne i T.

På den anden side, hvis A skiller punkterne i T og hvis funktionen $1 \in A$, er A også lineært skillende (brug $\psi = 1$).

<u>Sætning (Stone's sætning).</u> <u>Hvis</u> A <u>er et underrum og et gitter i</u> $C(T,\dot{R})$, <u>og hvis</u> A <u>er lineært skillende, så er</u> A <u>tæt i</u> $C(T,\dot{R})$, <u>altså</u> $\overline{A} = C(T,\dot{R})$.

<u>Bevis</u>: Hvis T består af et enkelt punkt p gælder klart $A = C(T,\dot{R})$.

Vi antager derfor, at T indeholder mindst to punkter. Lad $f \in C(T,\dot{R})$ og lad $p,q \in T$. Hvis vi kan finde $g \in A$ så $f(x) = g(x)$ for $x = p,q$, følger det af lemma 1, at $f \in \overline{A}$ og sætningen er vist.

Hvis $p \neq q$ findes $\varphi,\psi \in A$ så

$$\det\begin{pmatrix} \varphi(p) & \psi(p) \\ \varphi(q) & \psi(q) \end{pmatrix} \neq 0 ,$$

men det viser, at ligningssystemet

$$\varphi(p)t_1 + \psi(p)t_2 = f(p)$$
$$\varphi(q)t_1 + \psi(q)t_2 = f(q)$$

har præcis en løsning $(t_1,t_2) \in \dot{R}^2$, og funktionen

$g = t_1\varphi + t_2\psi \in A$ opfylder det ønskede.

Hvis $p = q$ vælges $r \in T$, $r \neq p$, og det lige viste sikrer at der findes $g \in A$ så $f(p) = g(p)$ (og desuden $f(r) = g(r)$, men dette skal vi ikke bruge). ||

Som forberedelse til en anden version af Stone's sætning viser vi et par lemmaer:

Lemma 2. Til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et polynomium $p \in \mathbb{R}[X]$ uden konstantled (i.e. $p(0) = 0$) så

$$|\sqrt{x}-p(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in [0,1].$$

Bevis: Til givet $\varepsilon > 0$ vælges $a > 0$ så $2a+2\sqrt{a} \leq \varepsilon$. For $z = \frac{x-1}{a+1}$ gælder

$$(a+x)^{\frac{1}{2}} = (a+1)^{\frac{1}{2}}(1+z)^{\frac{1}{2}} = (a+1)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} z^n ,$$

hvor rækken er ligelig konvergent for $|z| \leq 1/1+a$, specielt for $x \in [0,1]$ idet rækkens konvergensradius som bekendt er 1. Der findes derfor $N \in \mathbb{N}$ så

$$|(a+x)^{\frac{1}{2}}-(a+1)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N} \binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{x-1}{a+1}\right)^n| \leq a \quad \text{for} \quad x \in [0,1],$$

altså et polynomium q så $|(a+x)^{\frac{1}{2}}-q(x)| \leq a$ for $x \in [0,1]$. Heraf fås $|q(0)| \leq a+\sqrt{a}$. Polynomiet $p(x) = q(x)-q(0)$ opfylder det ønskede:

$$|\sqrt{x}-p(x)| \leq |\sqrt{x}-(x+a)^{\frac{1}{2}}|+|(x+a)^{\frac{1}{2}}-q(x)|+|q(0)| \leq$$
$$a(\sqrt{x}+(x+a)^{\frac{1}{2}})^{-1}+a+a+\sqrt{a} \leq 2a+2\sqrt{a} \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad x \in [0,1],$$

idet $\sqrt{x}+(x+a)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{a}$ for $x \geq 0$. ||

Lemma 3. En afsluttet delalgebra A af $C(T,\mathbb{R})$ er et gitter.

Bevis: Vi minder om, at en delalgebra A af $C(T,\dot{R})$ er et underrum som med f,g også indeholder fg. Som bemærket tidligere er A et gitter, hvis blot $|f| \in A$ når $f \in A$, og her kan vi uden indskrænkning antage at $\|f\| \leq 1$.
Til $\varepsilon > 0$ findes ifølge lemma 2 et polynomium p uden konstantled så $|\sqrt{x}-p(x)| \leq \varepsilon$ for $x \in [0,1]$. Hvis polynomiet p er $p(x) = a_1x+\ldots+a_nx^n$ er

$$g = p(f^2) = a_1f^2+\ldots+a_nf^{2n}$$

en funktion fra A, fordi A er forudsat at være en algebra.
Da $|f^2(t)| \leq 1$ for alle $t \in T$ ($\|f\| \leq 1$) fås

$$||f|(t)-g(t)| = |\sqrt{f^2(t)}-p(f^2(t))| \leq \varepsilon \quad \text{for alle} \quad t \in T,$$

d.v.s. $\||f|-g\| \leq \varepsilon$. Da A var forudsat afsluttet følger heraf at $|f| \in A$. $\|$

Sætning (Stone-Weierstrass). Lad A være en delalgebra af $C(T,\dot{R})$ der skiller punkterne i T. Enten findes der et punkt $t_o \in T$ så $f(t_o) = 0$ for alle $f \in A$ og så er $\overline{A} = \{f \in C(T,\dot{R}) | f(t_o) = 0\}$, eller også er A tæt i $C(T,\dot{R})$, altså $\overline{A} = C(T,\dot{R})$.

Bevis: Hvis T består af et enkelt punkt gælder klart $A = C(T,\dot{R})$. Vi antager dernæst, at T indeholder mere end et punkt.

Lad p og q være to forskellige punkter i T, og antag at der findes $f,g \in A$ så $f(p) \neq 0$, $g(q) \neq 0$. Så findes $\varphi,\psi \in A$ der skiller p og q lineært, i,e. så

$$\det\begin{pmatrix}\varphi(p) & \psi(p)\\ \varphi(q) & \psi(q)\end{pmatrix} \neq 0$$

Som første skridt på vejen til dette resultat bemærkes, at der findes $h \in A$ så $0 \neq h(p) \neq h(q) \neq 0$. Der findes nemlig $k \in A$ så $k(p) \neq k(q)$, og hvis f. eks. $k(p) = 0$, vil der findes $\lambda \in \grave{R}$ så

$$0 \neq k(p)+\lambda f(p) \neq k(q)+\lambda f(q) \neq 0,$$

thi da $f(p) \neq 0$, $k(q) \neq 0$, er hver af de tre uligheder opfyldt for alle $\lambda \in \grave{R}$ pånær højst èt. Vi kan således sætte $h = k+\lambda f$ for passende reelt λ.

Herefter ses at $\varphi = h$, $\psi = h^2$ skiller p og q lineært, idet den betragtede determinant bliver $h(p)h(q)\,(h(p)-h(q))$.

Afslutningen $\bar{A}$ af A ses igen at være en delalgebra af $C(T,\grave{R})$ og dermed er $\bar{A}$ et gitter (lemma 3).

Mængden $N = \{t \in T \mid \forall f \in A\ (f(t) = 0)\}$ kan ikke indeholde to forskellige punkter, fordi A er forudsat at skille punkterne i T. Der er derfor to muligheder:

1) $\underline{N = \{t_o\}}$. Så gælder klart

$$\bar{A} \subseteq \{f \in C(T,\grave{R}) \mid f(t_o) = 0\},$$

fordi den sidste mængde er afsluttet i $C(T,\grave{R})$. Lad nu $f \in C(T,\grave{R})$ opfylde $f(t_o) = 0$ og lad $p,q \in T$. Hvis vi kan finde $g \in A$ så $f(x) = g(x)$ for $x = p,q$, følger det af lemma 1 at $f \in \bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Hvis $p = q = t_o$ bruges $g = 0$, og hvis $p \neq q$, $q = t_o$ eller $p = q \neq t_o$ findes $\varphi \in A$ så $\varphi(p) \neq 0$, men så kan $g = \lambda\varphi$ bruges for passende λ. Hvis endelig $p \neq q$, $p \neq t_o$, $q \neq t_o$ findes $\varphi_1, \varphi_2 \in A$ så $\varphi_1(p) \neq 0$, $\varphi_2(q) \neq 0$, men så sikrer resultatet i begyndelsen af beviset, at p og q kan skilles lineært, og dermed findes $g \in A$ med den ønskede egenskab.

2) $\underline{N = \emptyset}$. For hvert punkt $p \in T$ findes derfor $\varphi \in A$ så $\varphi(p) \neq 0$, og resultatet i begyndelsen af beviset sikrer da, at A (og dermed også $\overline{A}$) er lineært skillende. Det følger så af Stone's sætning, at $\overline{A}$ er tæt i $C(T,\mathbb{R})$, altså $\overline{A} = C(T,\mathbb{R})$. ||

Vi har hidtil kun arbejdet med det reelle rum $C(T,\mathbb{R})$. Skal man undersøge om $A \subseteq C(T,\mathbb{C})$ er tæt i $C(T,\mathbb{C})$ kan man undersøge om mængden $B = A \cap C(T,\mathbb{R})$ er tæt i $C(T,\mathbb{R})$ ved de angivne kriterier og deraf uddrage information om A. Vi angiver det vigtigste eksempel nedenfor.

En delmængde $A \subseteq C(T,\mathbb{C})$ kaldes <u>selvadjungeret</u> såfremt

$$\forall f \in A \ (\overline{f} \in A).$$

<u>Sætning (Stone- Weierstrass). Lad A være en selvadjungeret delalgebra af $C(T,\mathbb{C})$, der skiller punkterne i T. Enten findes et punkt $t_0 \in T$ så $f(t_0) = 0$ for alle $f \in A$ og så er $\overline{A} = \{f \in C(T,\mathbb{C}) \mid f(t_0) = 0\}$, eller også er A tæt i $C(T,\mathbb{C})$, altså $\overline{A} = C(T,\mathbb{C})$.</u>

<u>Bevis</u>: Mængden $B = A \cap C(T,\mathbb{R})$ er en delalgebra af $C(T,\mathbb{R})$ og for $f \in A$ vil $\mathrm{Re}(f)$ og $\mathrm{Im}(f)$ tilhøre B, fordi $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f+\overline{f})$, $\mathrm{Im}(f) = -\mathrm{Re}(if)$. Heraf ses at B skiller punkterne i T. Hvis der findes $t_0 \in T$ så $\overline{B} = \{f \in C(T,\mathbb{R}) \mid f(t_0) = 0\}$ vil $f(t_0) = \mathrm{Re}(f)(t_0)+i\,\mathrm{Im}(f)(t_0) = 0$ for alle $f \in A$, altså er $\overline{A} \subseteq \{f \in C(T,\mathbb{C}) \mid f(t_0) = 0\}$. Hvis $f \in C(T,\mathbb{C})$ opfylder $f(t_0) = 0$, må $\mathrm{Re}(f)(t_0) = \mathrm{Im}(f)(t_0) = 0$, altså $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \overline{B}$ og dermed $f \in \overline{B}+i\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Det ses analogt, at hvis $\overline{B} = C(T,\mathbb{R})$, så er $\overline{A} = C(T,\mathbb{C})$. ||

Vi samler de hyppigst anvendelige former for Stone-Weierstrass' sætning i følgende form:

Scholium: Lad $A \subseteq C(T,K)$, $K = \mathring{R}$ eller $\mathring{C}$, være et underrum som skiller punkterne i T, og som indeholder funktionen 1. Så er $\overline{A} = C(T,K)$ under følgende ekstra betingelser

$K = \mathring{R}$: A er et gitter eller en delalgebra.

$K = \mathring{C}$: A er en selvadjungeret delalgebra.

Eksempel: Lad T være en kompakt delmængde af $\mathring{R}^n$. Mængden af funktionen: $(x_1,\dots x_n) \mapsto p(x_1,\dots,x_n)$, hvor $(x_1,\dots,x_n) \in T$ og p er et reelt (henholdsvis komplekst) polynomium af n reelle variable, er en tæt delalgebra af $C(T,\mathring{R})$ (henholdsvis $C(T,\mathring{C})$).

Funktionerne $(x_1,\dots,x_n) \mapsto 1$, $(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_i$, $i = 1,\dots,n$, er reelle polynomier og de n sidste skiller punkterne i T.

Hvis specielt $T = [a,b] \subseteq \mathring{R}$ fås Weierstrass' approximationssætning.

50. Banachrummet $C_o(X)$.

Lad X være et ikke tomt lokalkompakt rum. En kontinuert funktion $f: X \to K$ ($K = \mathring{R}$ eller $\mathring{C}$) siges at gå mod 0 i ∞, såfremt mængden $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ er kompakt for ethvert $\varepsilon > 0$, eller anderledes udtrykt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \text{ kompakt} \subseteq X \ (|f(x)| < \varepsilon \text{ for } x \in X \setminus K).$$

Hvis X er kompakt vil enhver kontinuert funktion $f: X \to K$ gå mod 0 i ∞. Hvis X ikke er kompakt betragtes èt-punkts kompaktificeringen $X_\infty = X \cup \{\infty\}$, og da de åbne omegne af ∞ netop er $X \setminus K \cup \{\infty\}$, når K gennemløber de kompakte delmængder af X, ser man, at f går mod 0 i ∞ betyder det sædvanlige: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. På den anden side ved man, at dette er ensbetydende med at funktionen $\tilde{f}: X_\infty \to K$ givet ved

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \\ 0 \quad , & x = \infty \end{cases}$$

er kontinuert.

Mængden af kontinuerte funktioner $f:X \to K$ der går mod 0 i ∞ udgør klart et vektorrum, og det betegnes $C_o(X)$ eller $C_o(X,K)$. Afbildningen $\sim: f \to \tilde{f}$ er en isomorfi af $C_o(X)$ på underrummet $\{f \in C(X_\infty) | f(\infty) = 0\}$ af $C(X_\infty)$. For enhver funktion $f \in C_o(X)$ gælder videre

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \, | x \in X\} = \sup\{|\tilde{f}(x)| \, | x \in X_\infty\} = \|\tilde{f}\| < \infty .$$

Dette viser, at $C_o(X)$ er et underrum af Banachrummet $CB(X)$ af kontinuerte begrænsede funktioner, og at $C_o(X)$ ved $\sim$ er isometrisk isomorft med det afsluttede underrum

$$\{f \in C(X_\infty) | f(\infty) = 0\} \quad \text{af} \quad C(X_\infty),$$

altså er $C_o(X)$ selv et Banachrum.

Rummet $C_c(X) = C_c(X,K)$ består af alle kontinuerte funktioner $f:X \to K$ som har kompakt støtte. Det forudsættes altså, at f er 0 udenfor en passende kompakt mængde, og derfor er $C_c(X) \subseteq C_o(X)$.

Lemma: Underrummet $C_c(X)$ er tæt i Banachrummet $C_o(X)$.

Bevis: Hvis X er kompakt gælder endda $C_c(X) = C_o(X)$. Vi kan derfor antage at X ikke er kompakt og betragter $f \in C_o(X)$, $\varepsilon > 0$. Mængden $K = \{x \in X | |f(x)| \geq \varepsilon\}$ er kompakt, og ifølge top. sætning 12.6 findes en kontinuert funktion $\varphi: X \to [0,1]$ med kompakt støtte så $\varphi(K) \subseteq \{1\}$.

Funktionen $g = f \cdot \varphi \in C_c(X)$ og der gælder $|f(x)-g(x)| = 0$ for $x \in K$, hvorimod $|f(x)-g(x)| \leq 2|f(x)| < 2\varepsilon$ for $x \in X \setminus K$, altså $\|f-g\| < 2\varepsilon$. Dette viser at $f \in \overline{C_c(X)}$. $\|$

Via identifikationen $\sim$ mellem $C_o(X)$ og $\{f \in C(X_\infty) | f(\infty) = 0\}$ kan man af sætninger om $C(X_\infty)$ få information om $C_o(X)$. Vi giver et eksempel:

Sætning (Stone-Weierstrass). Lad A være en delalgebra af $C_o(X,K)$ som skiller punkterne i X, og antag at der til hvert $x \in X$ findes $\varphi \in A$ så $\varphi(x) \neq 0$. I tilfældet $K = \mathbb{C}$ antages desuden at A er selvadjungeret $(f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A)$. Så er A tæt i $C_o(X)$.

Bevis: Identificeres $C_o(X)$ med $\{f \in C(X_\infty) | f(\infty) = 0\}$ ved $\sim$ bliver $\tilde{A}$ en delalgebra af $C(X_\infty)$, der skiller punkterne i X_∞, idet $x \in X$ og ∞ skilles af $\tilde{\varphi}$, hvor $\varphi \in A$ opfylder $\varphi(x) \neq 0$.

Af de to muligheder i Stone-Weierstrass sætning foreligger der nu den, at alle $\tilde{\varphi} \in \tilde{A}$ opfylder $\tilde{\varphi}(0) = 0$, og så er

$$\overline{\tilde{A}} = \{f \in C(X_\infty) | f(\infty) = 0\},$$

altså $\overline{A} = C_o(X)$. $\|$

Bemærk at lemmaet er et specialtilfælde af denne sætning.

I tilfældet $X = \mathbb{R}$ er f.eks. $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ en kontinuert funktion der går mod o i ∞, men $f(x) = e^{-x}$ går ikke mod 0 i ∞.

Variant

§§5, 24 kan erstattes af følgende mere direkte behandling af de endeligdimensionale Hausdorff t.v.r.

For ethvert $m \in \hat{N}$ er ifølge sætn. 9 (eller direkte) talrummet K^m et (for øvrigt lokalkonvekst) Hausdorff t.v.r. over K, fordi koefficientlegemet K selv er et sådant.

Lemma. Enhver lineær afbildning $f: K^m \to E$ af K^m ind i et t.v.r. E over K er kontinuert.

Bevis. Det er åbenbart (jvf. §15) tilstrækkeligt at påvise kontinuiteten i $(0,\cdots,0)$. Til given omegn U af $\underline{0}$ i E findes en omegn V af $\underline{0}$ i E med

$$\underbrace{V + V + \cdots + V}_{m \text{ led}} \subsetneq U .$$

Da V er absorberende, findes for ethvert $n = 1,\cdots,m$ en omegn W_n af 0 i K således at $\lambda f(e_n) \in V$ for alle $\lambda \in W_n$. Vi har her indført basisvektorerne

$$e_1 = (1,0,\cdots,0) \ , \ \cdots \ , \ e_m = (0,\cdots,0,1)$$

i K^m. For ethvert $x = (x_1,\cdots,x_m) \in K^m$ haves $x = \sum_{n=1}^{m} x_n e_n$, og derfor gælder

$$f(x) = \sum_{n=1}^{m} x_n f(e_n) \in \sum_{n=1}^{m} V \subsetneq U ,$$

såfremt blot $x \in \prod_{n=1}^{m} W_n$. Da denne sidste mængde er en omegn af $(0,\cdots,0)$ i K^m, er f kontinuert i dette punkt. |

__Sætning.__ Ethvert Hausdorff t.v.r. E over K ($=\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) af endelig dimension m er topologisk isomorft med talrummet K^m.

__Bevis.__ Der eksisterer en algebraisk isomorfi (bijektiv lineær afbildning) $f: K^m \to E$. Vi viser, at __enhver__ sådan er en homeomorfi. Ifølge ovenstående lemma er f kontinuert. Tilbage står at vise, at $f^{\circ -1}$ er kontinuert f.eks. i $\underline{0}$, altså at billedet $f(U)$ af enhver (basis-)omegn U af $(0,\cdots,0)$ i K^m er en omegn af $\underline{0}$ i ~~åbent i~~ E. Da K^m åbenbart er lokalkompakt, kan vi antage, at U er kompakt. Randen U^* er en afsluttet delmængde af U og dermed ligeledes kompakt, og $(0,\cdots,0) \notin U^*$. Da f er kontinuert og E Hausdorff, bliver $f(U^*)$ kompakt og derfor afsluttet i E; og da f er lineær og injektiv, gælder $\underline{0} = f(0,\cdots,0) \notin f(U^*)$. Da $E \setminus f^*(U)$ således er en (åben) omegn af $\underline{0}$ i E, eksisterer en stjerneformet omegn V af $\underline{0}$ i E således at $V \subseteq E \setminus f(U^*)$, altså $V \cap f(U^*) = \emptyset$, og dermed

$$f^{\circ -1}(V) \cap U^* = \emptyset .$$

Da f er lineær, er $f^{\circ -1}(V)$ ligeledes stjerneformet. Derfor gælder $f^{\circ -1}(V) \subseteq U$. Thi antog man, at der eksisterer $x \in f^{\circ -1}(V) \cap \complement U$, så ville liniestykket

$$\{\lambda x \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq f^{\circ -1}(V)$$

møde $\complement U$ (for $\lambda = 1$) og U (for $\lambda = 0$) og derfor også møde randen U^* i strid med at $f^{\circ -1}(V) \cap U^* = \emptyset$. Da f er surjektiv, slutter vi af $f^{\circ -1}(V) \subseteq U$, at

$$V = f(f^{\circ -1}(V)) \subseteq f(U) ,$$

og dermed at $f(U)$ ligesom V er en omegn af $\underline{0}$ i E. |

Korollar. Enhver lineær afbildning af et endeligdimensionalt Hausdorff t.v.r. E ind i et t.v.r. F er kontinuert. Enhver algebraisk isomorfi mellem to endeligdimensionale Hausdorff t.v.r. E og F er en homeomorfi (og dermed en topologisk isomorfi).

Bevis. Ifølge sætningen reducerer det første udsagn sig til tilfældet $E = K^m$ behandlet i det ovenstående lemma. Det sidste udsagn fremgår af det første ved anvendelse på den inverse afbildning. |

Bemærkning. Sætningen (eller korollaret) kan åbenbart også formuleres derhen, at der på K^m kun eksisterer én topologi, der gør K^m til et Hausdorff t.v.r. (nemlig den sædvanlige). Thi den identiske afbildning af K^m er en algebraisk isomorfi. Derimod er den diffuse topologi på K^m et eksempel på en topologi, der gør K^m til et (for øvrigt lokalkonvekst) t.v.r., som ikke er Hausdorff.

Opgaver til Topologiske vektorrum.

Ved vektorrum forstås vektorrum over $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

1. Vis, at enhver foreningsmængde af stjerneformede, henholdsvis symmetriske, delmængder af et vektorrum er stjerneformet, henholdsvis symmetrisk.

2. Vis, at enhver absorberende delmængde af et vektorrum omfatter en stjerneformet symmetrisk absorberende mængde.

3. (Konveks funktion). Lad A betegne en konveks delmængde af et vektorrum E. En funktion $f: A \to \mathbb{R}$ kaldes konveks dersom det for ethvert $\lambda \in [0,1]$ og $x_1, x_2 \in A$ gælder, at

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) .$$

Bevis, at definitionen er ensbetydende med kravet om, at "overgrafen"

$$\{(x,y) \in A \times R \mid y \geqq f(x)\}$$

er en konveks delmængde af $E \times \mathbb{R}$. (I stedet for $y \geqq f(x)$ kunne her også skrives $y > f(x)$.)

4. Lad A betegne en konveks delmængde af et vektorrum E. Idet $x_j \in A$ og $\lambda_j \in [0,1]$ for $j = 1,\cdots,m$, og idet $\Sigma\lambda_j = 1$, skal man vise, at $\Sigma\lambda_j x_j \in A$. Lad endvidere $f: A \to \mathbb{R}$ være konveks. Vis, at $f(\Sigma\lambda_j x_j) \leqq \Sigma\lambda_j f(x_j)$.

5. Lad $\{A_j\}_{j\in J}$ være en mængde af konvekse delmængder af et vektorrum. Vis, at det konvekse hylster af foreningsmængden

$A := \bigcup_{j\in J} A_j$ består af samtlige konvekse kombinationer $\sum_{j\in J} \lambda_j x_j$ af endeligt mange punkter $x_j \in A_j$ (altså $\lambda_j \in [0,1]$, $\sum_{j\in J} \lambda_j = 1$, og $\lambda_j \neq 0$ kun for endeligt mange $j \in J$). Specialiser derpå til det tilfælde hvor hver af mængderne A_j kun består af ét punkt x_j.

6. Lad A og B betegne to konvekse delmængder af et vektorrum E, og lad $A \cap B = \emptyset$. Bevis at der eksisterer to konvekse mængder U og V, således at $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$ og $U \cup V = E$. (Benyt Zorns lemma).

7. Giv et eksempel på en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^2$, som er afsluttet, men hvor conv A ikke er afsluttet.
V

8. Lad A betegne en delmængde af et t.v.r. Bevis:

V a) A åben $\Rightarrow$ conv A åben.

b) A konveks $\Rightarrow$ $\mathring{A}$ konveks.

9. Lad A betegne en konveks delmængde af et t.v.r. Lad $x_0 \in \mathring{A}$, $x \in \bar{A}$. Bevis, at samtlige punkter $y \neq x$ på liniestykket med endepunkter x_0 og x er indre punkter af A, altså $y \in \mathring{A}$. (Betragt f.eks. først tilfældet $x \in A$).
V

10. Lad A betegne en konveks delmængde af et t.v.r., og lad $\mathring{A} \neq \emptyset$. Vis, at $\bar{\mathring{A}} = \bar{A}$ og $\mathring{\bar{A}} = \mathring{A}$. (Benyt opgave 9).
V

11. Lad $f: A \to \mathbb{R}$ betegne en konveks funktion defineret i en konveks, åben delmængde $A \neq \emptyset$ af et t.v.r. Bevis, at f er kon-

tinuert, hvis og kun hvis f er opadtil begrænset i en passende, ikke tom, åben delmængde af A. (Vejledning vedr. "hvis": Vis først, at f er kontinuert i $x_o \in A$ dersom f er opadtil begrænset i en omegn af x_o. Vis dernæst, at f er opadtil begrænset i en passende omegn af et vilkårligt punkt af A).

12. Lad $f: A \to \hat{R}$ være en konveks funktion defineret i en konveks, åben delmængde $A \neq \emptyset$ af $\hat{R}^n$. Bevis, at f er kontinuert. (Benyt opgave 11 og det forhold, at filtret af omegne af et punkt i $\hat{R}^n$ har en basis bestående af mængder, som hver er det konvekse hylster af en endelig mængde).

13. Lad E betegne et vektorrum, og lad $\hat{B}(\underline{O})$ betegne mængden af alle konvekse delmængder U af E som er symmetriske og absorberende. Bevis, at $\hat{B}(\underline{O})$ udgør en basis for filtret af omegne af $\underline{O}$ i den fineste topologi på E, hvorved E er et lokalkonvekst t.v.r. Bevis tillige, at E herved bliver et Hausdorff rum. (Vejledning til dette sidste: Lad $e \in E$, $e \neq \underline{O}$, og lad H betegne en hyperplan i E gennem $\underline{O}$, som ikke indeholder e. Da vil $H +]-1,1[e \in \hat{B}(\underline{O})$).

14. Lad E være et vektorrum udstyret med den i opg. 13 omtalte fineste lokalkonvekse topologi. Bevis følgende:

a) Enhver seminorm på E er kontinuert.

b) Enhver linearform på E er kontinuert.

c) Ethvert underrum af E er afsluttet.

d) Et punkt $x_o \in E$ er et indre punkt af en konveks mængde $A \subseteq E$ hvis og kun hvis der på enhver linie gennem x_o

findes et i A indeholdt liniestykke, hvortil x_0 hører uden at være endepunkt for liniestykket.

15. √ Lad E være et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r.. Bevis, at følgende udsagn er ækvivalente (jvf. T.V.R., side 56 f.)

1°) Der eksisterer et forskydningsinvariant afstandsmål på E, som netop bestemmer den givne topologi på E.

2°) E er metriserbart.

3°) Der eksisterer en numerabel basis for filtret af omegne af $\underline{0}$ i E.

4°) Topologien på E kan defineres ved en numerabel mængde af seminormer p_n, $n \in \mathring{N}$.

Vejledning: Vis, at $1^\circ \Rightarrow 2^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 4^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Ved $4^\circ \Rightarrow 1^\circ$ sættes $\operatorname{dist}(x,y) = d(x-y)$, hvor

$$d(x) = \sum_{n\in\mathring{N}} 2^{-n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} .$$

Eftervis og benyt derpå følgende uligheder:

a) $\lambda/(1+\lambda) \leqq \mu/(1+\mu)$ for $0 \leqq \lambda \leqq \mu$.

b) $(\lambda+\mu)/(1+\lambda+\mu) \leqq \lambda/(1+\lambda) + \mu/(1+\mu)$ for $\lambda,\mu \geqq 0$.

c) $\lambda/(1+\lambda) \leqq 2\lambda$ for $\lambda \in [0,1]$

d) $p_n(x) \leqq \varepsilon$ gælder for ethvert $\varepsilon > 0$, $n \in \mathring{N}$, $x \in E$ for hvilke $d(x) \leqq \varepsilon/2^{n+1}$.

- Det kan for øvrigt vises, at $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ er ækvivalente også uden antagelsen om lokalkonveksitet.

16. √ (Filtrerende mængde af seminormer.) Lad p og q være seminormer på et vektorrum E.

a) Vis, at den ved

$$p =\!< q \iff \exists c \in \mathring{R}_+ \ \forall x \in E: p(x) \leqq cq(x)$$

definerede relation på mængden S af alle seminormer på E er reflexiv og transitiv, altså en præordensrelation. To seminormer p og q kaldes ækvivalente, dersom

$p =\!< q \wedge q =\!< p.$

b) Vis, at S er <u>filtrerende</u> ved relationen $=\!<$.

c) Lad $P \subsetneq S$ være en filtrerende mængde af seminormer (d.v.s. at to vilkårlige seminormer $p,q \in P$ har en fælles majorant i P). Vis, at mængderne $\{x \in E \mid p(x) \leq \alpha\}$ danner en basis for filtret af omegne af $\underline{0}$ i den ved P definerede lokalkonvekse topologi på E.

d) Lad P være en filtrerende mængde af seminormer på et vektorrum E og Q en vilkårlig mængde af seminormer på et vektorrum F. Vis, at en lineær afbildning $f: E \to F$ er kontinuert i de ved P og Q definerede topologier på E og F, hvis og kun hvis

$$\forall q \in Q \quad \exists p \in P: \quad q \circ f =\!< p.$$

e) Lad Q være en vilkårlig mængde af seminormer på et vektorrum. Vis, at Q kan udvides til en filtrerende mængde P af seminormer på E, således at P og Q er ækvivalente, d.v.s. definerer samme topologi på E.

17. (Kvotient af Banachrum.) Lad E være et normeret rum og F et afsluttet underrum E. For ethvert sideunderrum $\dot{x} \in E/F$ sættes

$$\|\dot{x}\| = \inf\{\|x\| \mid x \in \dot{x}\} .$$

Vis, at der herved defineres en norm på E/F og at den derved bestemte lokalkonvekse topologi på E/F er identiske med kvotienttopologien. Vis dernæst, at hvis E er fuldstændigt, da gælder det samme om det normerede rum E/F.

18. En delmængde B af et t.v.r. E kaldes begrænset, dersom den absorberes af enhver omegn af $\underline{0}$ i E i den forstand, at

$$\forall V \in \mathcal{U}(\underline{0})\ \exists \lambda \in \mathring{R}_+ : \lambda B \subseteq V .$$

Det er klart, at enhver delmængde af en begrænset mængde er begrænset. Bevis følgende:

a) Foreningen af endeligt mange begrænsede mængder er begrænset.

b) Enhver endelig mængde er begrænset.

c) Enhver kompakt mængde er begrænset.

d) Elementerne i enhver fundamentalfølge udgør en begrænset mængde.

e) Afslutningen af en begrænset mængde er begrænset.

f) I et lokalkonvekst rum er det konvekse hylster for en begrænset mængde begrænset.

19. Lad P være en mængde af seminormer på et vektorrum E. Bevis, at en mængde $B \subseteq E$ er begrænset i den ved P definerede topologi, hvis og kun hvis enhver af seminormerne $p \in P$ er begrænset på B, altså hvis

$$\forall p \in P \quad \exists c \in \mathring{R}_+ \quad \forall x \in B : \quad p(x) \leq c .$$

20. Bevis, at en delmængde B af et t.v.r. E over K er begrænset hvis og kun hvis det for enhver punktfølge $(x_n)_{n\in\mathring{N}}$ på B og enhver talfølge $(\lambda_n)_{n\in\mathring{N}}$ på K med $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ gælder, at $\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \underline{0}$ i E.

21. Bevis, at en delmængde B af et t.v.r. E er begrænset hvis (og kun hvis) enhver numerabel delmængde af B er begrænset. (Benyt opg. 20.)

22. Lad $f:E \to F$ være en kontinuert lineær afbildning af et t.v.r. E ind i et t.v.r. F, og lad $B \subseteq E$ være begrænset i E. Vis, at $f(B)$ er begrænset i F.

23. Lad $E = \prod_{i \in I} E_i$ være et produkt af t.v.r. E_i. Vis, at en mængde $B \subseteq E$ er begrænset, hvis og kun hvis hver af dens projektioner $p_i(B)$ er begrænset.

24. Vis, at summen af to begrænsede mængder er begrænset.

25. Vis, at et t.v.r. E er <u>normerbart</u>, hvis og kun hvis E er lokalkonvekst og Hausdorff og der eksisterer en begrænset omegn af $\underline{0}$.

26. Vis, at fuldstændiggørelse af et Hausdorff t.v.r. E er entydigt bestemt pånær isomorfi i følgende forstand: Lad $\varphi_i : E \to E_i$ $(i=1,2)$ være fuldstændiggørelser af E. Da eksisterer der en (topologisk) isomorfi ψ af E_1 på E_2 så at $\psi \circ \varphi_1 = \varphi_2$.

27. En delmængde A af et t.v.r. E kaldes <u>prækompakt</u>, dersom der til enhver omegn V af $\underline{0}$ i E findes en endelig mængde $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq E$ således at

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (x_i + V) = X + V .$$

a) Vis, at det i givet fald kan opnås, at $X \subseteq A$.

b) Vis, at det er tilstrækkeligt at betragte omegne V fra en forelagt <u>subbasis</u> for $\mathfrak{U}(\underline{0})$, d.v.s. en delmængde $\mathfrak{S}(\underline{0})$ af $\mathfrak{U}(\underline{0})$ således at fællesmængderne af endeligt mange mængder udtagne af $\mathfrak{S}(\underline{0})$ danner en basis for $\mathfrak{U}(\underline{0})$.

c) Lad E være Hausdorff, og lad $\varphi: E \to \hat{E}$ være en fuldstændiggørelse af E. Vis, at $A \subseteq E$ er prækompakt, hvis og kun hvis $\varphi(A)$ har kompakt afslutning i $\hat{E}$.

28. Bevis de til a) - e) i opg. 18 samt opg. 22 og 24 svarende udsagn, idet "begrænset" overalt erstattes med "prækompakt". Vis også, at enhver prækompakt mængde er begrænset.

29. Lad $A_1, \cdots, A_m$ være kompakte konvekse delmængder af et Hausdorff t.v.r. E. Bevis at conv $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ ligeledes er kompakt.

30. Vis, at det stjerneformet symmetriske hylster af en kompakt (eller blot prækompakt) delmængde af et Hausdorff t.v.r. E er kompakt (resp. prækompakt).

31. Vis, at det konvekse hylster af en prækompakt delmængde af af et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. E er prækompakt. Vis, derved, at hvis E desuden er <u>fuldstændigt</u>, har det konvekse hylster af enhver kompakt delmængde af E kompakt afslutning i E.

32. Lad E være et vektorrum over K (=$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). For ethvert j fra en indeksmængde J lad $f_j: E \to F_j$ være en lineær afbildning af E ind i et t.v.r. F_j over K. Idet man udstyrer E med den tilhørende initialtopologi (den groveste topologi på E for hvilken alle afbildningerne f_j er kontinuerte), skal det vises, at E er et t.v.r.. Vis også, at hvis topologien på F_j for hvert $j \in J$ er defineret ved en seminorm q_j (man kunne også betragte flere), så er topologien på E defineret ved mængden af seminormer $q_j \circ f_j$, $j \in J$. Specialtil-

fælde: underrum, produktrum.

33. (Topologien for kompakt konvergens i $C(X)$.) Lad X være et ikke tomt, lokalkompakt topologisk rum. Med $\mathring{K} = \mathring{K}(X)$ betegner vi mængden af alle kompakte delmængder af X. Med $C(X)$ betegnes det underrum af $\mathring{R}^X$ (henholdsvis $\mathring{C}^X$), der består af alle kontinuerte funktioner $X \to \mathring{R}$ (henh. $X \to \mathring{C}$). Vi udstyrer $C(X)$ med den groveste topologi for hvilken enhver af de lineære afbildninger

$$f \to f|K \quad \text{(restriktionen af } f \text{ til } K)$$

af $C(X)$ ind i $C(K)$, $K \in \mathring{K}(X)$, er kontinuert. Herved benyttes på $C(K)$ den ligelige topologi, bestemt ved supremumnormen $\|\ \|_\infty$. -Den således definerede initialtopologi på $C(X)$ kaldes topologien for ligelig konvergens på kompakte delmængder af X, eller kort topologien for <u>kompakt konvergens</u>.

a) Vis, at der for ethvert $K \in \mathring{K}(X)$ defineres en seminorm p_K på $C(X)$ ved

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| \qquad (f \in C(X)) ,$$

og at mængden af disse seminormer er filtrerende (opg.16) og bestemmer den omhandlede topologi på $C(X)$, som derfor er lokalkonveks. Vis også, at $C(X)$ er Hausdorff.

b) Udfyld detaillerne i nedenstående bevisskitse for at $C(X)$ er <u>fuldstændigt</u>: Ovennævnte restriktionsafbildning $f \to f|K$ inducerer for ethvert $K \in \mathring{K}(X)$ en afbildning af et forelagt fundamentalfilter Φ på $C(X)$ over på en fundamentalfilterbasis Φ_K på $C(K)$. Der eksisterer en funktion f på X med $f|K = \lim \Phi_K$ for ethvert $K \in \mathring{K}(X)$. Da X er lokalkompakt, bliver f kontinuert. Ifølge en sætning om initialtopologi gælder $\Phi \to f$ i $C(X)$.

c) Vis, at $C(X)$ er metriserbart, hvis X er numerabelt i det uendelige.

d) Vis, at $C(X)$ er normerbart hvis og kun hvis X er kompakt, og at i så fald den omhandlede topologi på $C(X)$ er den ligelige, d.v.s. defineret ved supremumnormen $\| \|_\infty$.

34. Lad E være et vektorrum over K og lad $(E_i)_{i\in I}$ være en familie af underrum af E hvis foreningsmængde er E. Vi forudsætter at hvert E_i er et lokalkonvekst t.v.r. Vis at der findes en og kun en topologi på E i hvilken E er et lokalkonvekst t.v.r. og i hvilken systemet

$$\mathcal{B}(\underline{o}) =$$
$$\{V \subseteq E \mid V \text{ konveks, symm., } V \cap E_i \text{ omegn af } \underline{o} \text{ i } E_i \text{ for alle } i \in I\}$$

er en basis for omegnene af $\underline{o}$. Vis videre at denne topologi er den fineste topologi på E i hvilken E er et lokalkonvekst t.v.r. og i hvilken de kanoniske indlejringer $j_i: E_i \to E$ er kontinuerte. Vi siger, at E med denne topologi er den <u>induktive limes</u> af rummene E_i.

Lad nu yderligere F være et lokalkonvekst t.v.r. og lad $\varphi: E \to F$ være en lineær afbildning. Vis at φ er kontinuert i den induktive limes topologi hvis og kun hvis φ's restriktion til E_i er kontinuert for hvert $i \in I$.

35. Lad X være et ikke tomt lokalkompakt rum, og antag desuden at X ikke er kompakt. Lad $\mathcal{K}$ betegne mængden af kompakte delmængder af X og betragt for hvert $A \in \mathcal{K}$ underrummet

$$C_c(X,A) = \{f \in C_c(X) \mid st(f) \subseteq A\},$$

hvor $C_c(X)$ er rummet af kontinuerte reelle funktioner på X med kompakt støtte.

a) Vis at $C_c(X,A)$ er et afsluttet underrum af $C_o(X)$ forsynet med den ligelige norm. Ved den <u>stærke topologi</u> på $C_c(X)$ forstås den induktive limes af topologierne på $C_c(X,A)$ når A gennemløber systemet $\mathring{K}$ af kompakte delmængder af X.

b) Vis at denne stærke topologi er Hausdorff, og at delrumstopologien på $C_c(X,A)$ netop er den oprindelige ligelige topologi.

c) De kontinuerte linearformer μ på $C_c(X)$ kaldes <u>Radonmål</u>. Vis at enhver positiv linearform $\mu: C_c(X) \to \mathring{R}$, altså en linearform så $f \geq 0 \Rightarrow \mu(f) \geq 0$, er kontinuert (og dermed et Radonmål).

d) Antag nu at X er numerabelt i det uendelige, og at A_n er en følge af kompakte delmængder af X så $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ og så $A_n \subseteq \mathring{A}_{n+1}$ for alle n. Vis at den stærke topologi på $C_c(X)$ er den induktive limes af rummene $C_c(X,A_n)$, $n \in \mathring{N}$.

36. (Vanskelig). Lad X være et lokalkompakt ikke kompakt rum, som desuden antages numerabelt i det uendelige. Vi sætter

$$C_+(X) = \{h \in C(X,\mathring{R}) \mid h(x) > 0 \text{ for alle } x \in X\},$$

og for hvert $h \in C_+(X)$:

$$p_h(f) = \sup\{|f(x)|\, h(x) \mid x \in X\}, \quad f \in C_c(X)$$

a) Vis at $P = \{p_h | h \in C_+(X)\}$ er en ikke tom filtrerende familie af seminormer på $C_c(X)$, og at hvert p_h endda er en norm.

b) Vis at den ved P bestemte lokalkonvekse topologi på $C_c(X)$ netop er den stærke topologi på $C_c(X)$ (jvf. opg. 35).

c) Vis at $C_c(X)$ er fuldstændigt i den stærke topologi.

d) Vis at $C_c(X)$ <u>ikke</u> er metriserbart.

37. <u>Rummet</u> $H(\Omega)$ af <u>holomorfe funktioner</u>. Lad Ω være en åben delmængde af den komplekse plan $\mathbb{C}$, og lad $H(\Omega)$ være mængden af funktioner $f: \Omega \to \mathbb{C}$ der er holomorfe i Ω. Vi forsyner $H(\Omega)$ med topologien for kompakt konvergens (jvf. opg. 33), altså topologien givet ved seminormerne

$$p_K(f) = \sup\{|f(z)| \,|\, z \in K\}, \quad K \text{ kompakt} \subseteq \Omega.$$

a) Vis at $H(\Omega)$ er metriserbart, og dernæst at $H(\Omega)$ er fuldstændigt. (Brug evt. Cauchy's integralformel).

b) Vis at $f \to f'$ er en kontinuert lineær afbildning af $H(\Omega)$ ind i sig selv.

<u>Vink</u>: Lad K, L være kompakte delmængder af Ω så $K \subseteq \overset{\circ}{L}$. Vis at der findes $a > 0$ afhængigt af K og L så $p_K(f') \leqq a p_L(f)$ for alle $f \in H(\Omega)$. Hertil kan man igen bruge Cauchy's integralformel.

c) Vis at enhver begrænset mængde $A \subseteq H(\Omega)$ er ækvikontinuert, d.v.s.

$$\forall z \in \Omega \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall w \in \Omega \; \forall f \in A \; (|z-w| \leqq \delta \Rightarrow$$
$$|f(z) - f(w)| \leqq \varepsilon).$$

d) Vis at enhver begrænset mængde $A \subseteq H(\Omega)$ er prækompakt. (Brug Arzelà-Ascoli's sætning).

e) Vis at en mængde $A \subseteq H(\Omega)$ er kompakt, hvis og kun hvis den er afsluttet og begrænset. Dette resultat kaldes <u>Montel's</u> <u>sætning</u> og formuleres ofte således: Af enhver begrænset følge $f_n \in H(\Omega)$ kan udtages en konvergent delfølge.

38. Lad $\mathcal{E}$ betegne mængden af vilkårligt ofte differentiable funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ved <u>topologien for kompakt konvergens af alle de afledede</u> forstås den lokalkonvekse topologi på $\mathcal{E}$ defineret ved seminormerne

$$p_{m,n}(f) = \sup\{|f^{(m)}(x)| \mid |x| \leq n\}, \quad n = 1,2,\ldots, \quad m = 0,1,2\ldots.$$

a) Vis at $\mathcal{E}$ er et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r., og at det er metriserbart og fuldstændigt.

b) Vis at enhver af afbildningerne $f \to f^{(m)}$ er kontinuert og lineær, $m = 0,1,2,\ldots$.

c) Vis at en begrænset delmængde $A \subseteq \mathcal{E}$ er ækvikontinuert, d.v.s.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R}\ \forall f \in A(|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon).$$

d) Vis ved c) og Arzelà-Ascoli's sætning, at en mængde $A \subseteq \mathcal{E}$ er kompakt hvis og kun hvis den er afsluttet og begrænset.

39. Lad $\mathcal{D}$ betegne vektorrummet af vilkårligt ofte differentiable funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med kompakt støtte, $\mathcal{D}_n$ under-

rummet af $\mathcal{D}$ bestående af de f for hvilke $st(f) \subseteq [-n,n]$.

a) Vis at $\mathcal{D}_n$ er et afsluttet underrum af $\mathcal{E}$ for alle n.

b) Vi udstyrer nu $\mathcal{D}$ med den induktive limes af rummene $\mathcal{D}_n$ (som har delrumstopologien fra $\mathcal{E}$). Vis at $\mathcal{D}$ hermed er et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r.

c) Vis at $f \to f^{(m)}$ er en kontinuert lineær afbildning af $\mathcal{D}$ ind i $\mathcal{D}$ for $m = 0,1,2,\ldots$.

d) Elementerne i det topologisk duale rum $\mathcal{D}'$ kaldes <u>distributioner</u>. Lad $\varphi\colon \mathring{R} \to \mathring{R}$ være en målelig funktion som er integrabel over ethvert begrænset interval. Vis at der ved

$$L_\varphi(f) = \int f(x)\,\varphi(x)dx$$

defineres en kontinuert linearform $L_\varphi\colon \mathcal{D} \to \mathring{R}$, altså en distribution. Vis endelig at L_φ er 0-distributionen hvis og kun hvis $\varphi = 0$ næsten overalt.

e) For hver distribution $T \in \mathcal{D}'$ defineres $T'\colon \mathcal{D} \to \mathring{R}$ ved

$$T'(f) = -\,T(f'), \quad f \in \mathcal{D}.$$

Vis at T' er en distribution og at der gælder $L_\varphi' = L_{\varphi'}$ når $\varphi\colon \mathring{R} \to \mathring{R}$ er en C^1-funktion. Vi kalder derfor T' for differentialkvotienten af T.

f) Lad Y betegne funktionen, der er lig 0 for $x < 0$, og som er lig 1 for $x \geq 0$, og lad $\delta_o\colon \mathcal{D} \to \mathring{R}$ være linearformen $\delta_o(f) = f(o)$. Vis at δ_o er en distribution (kaldet Diracmålet i o) og at $L_Y' = \delta_o$.

4o. Lad $0 < p < 1$, og lad l^p være mængden af reelle talfølger $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for hvilke $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Vis at l^p er et vektorrum og at

$$\mathrm{dist}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p$$

er en translationsinvariant metrik på l^p, der gør l^p til et t.v.r. Vis at l^p er fuldstændigt men ikke lokalkonvekst.

Vink: Vis og udnyt $|x+y|^p \leqq |x|^p + |y|^p$.

41. Vis påstanden T.V.R. p. 18: En kontinuert afbildning $f: M \to F$ af en quasikompakt delmængde M i et t.v.r. E ind i et t.v.r. F er ligelig kontinuert.

42. Lad E betegne vektorrummet af kontinuerte funktioner $f: I \to \mathbb{R}$, hvor $I = [0,1]$. For hvert talpar (δ, ε), hvor $0 < \delta < 1$, $\varepsilon > 0$, sættes

$$V(\delta,\varepsilon) = \{f \in E \mid m\{t \in I \mid |f(t)| > \varepsilon\} < \delta\},$$

hvor m betegner Lebesguemålet.

a) Vis, at $\{V(\delta,\varepsilon) \mid 0 < \delta < 1,\ \varepsilon > 0\}$ er en basis for omegnsfiltret af $\underline{0}$ i E for netop én topologi på E, der gør E til et t.v.r. Vis at E er Hausdorff i denne topologi.

b) Vis, at der for ethvert (δ,ε) med $0 < \delta < 1$, $\varepsilon > 0$, eksisterer $n \in \mathbb{N}$ således at

$$V(\delta,\varepsilon) + V(\delta,\varepsilon) + \ldots + V(\delta,\varepsilon) = E$$

(n ens led på venstre side). Vis først, at den konstante funktion 1 kan skrives som sum af stykkevis lineære funktioner $\in E$ hvis støtter har Lebesguemål $< \delta$.

c) Vis, at E ikke er lokalkonvekst, og at den eneste kontinuerte linearform på E er nulformen.

43. Lad A være en afsluttet og B en kompakt delmængde af et t.v.r. E, og lad $A \cap B = \emptyset$. Vis, at der findes en omegn V af $\underline{0}$ i E så at $(A + V) \cap (B + V) = \emptyset$.

44. Lad A være en afsluttet og B en kompakt delmængde af et t.v.r. E. Vis, at $A + B$ (og $A - B$) er afsluttede. (Reducer f.eks. til tilfældet $\underline{0} \notin A - B$, og benyt opg. 43 til at vise, at der så findes en omegn V af $\underline{0}$, som ikke møder $A - B$.) Giv et eksempel på to afsluttede delmængder af $\mathbf{R}^2$, hvis differens ikke er afsluttet.

45. (Adskillelse af konvekse mængder.) Lad H være en afsluttet hyperplan i et t.v.r. E over $\mathbf{R}$, og lad $f(x) = \alpha$ være en ligning for H. Vi siger, at H <u>adskiller</u> to delmængder A og B af E, dersom A og B er delmængder af hver sit af de afsluttede halvrum $f^{-1}(\,]-\infty,\alpha])$ og $f^{-1}([\alpha,+\infty[\,)$ af E. Hvis desuden $H \cap A = H \cap B = \emptyset$, siges H at adskille A og B <u>strengt</u>.

Bevis følgende om to disjunkte, <u>konvekse</u>, ikke-tomme delmængder A og B af E:

a) Hvis A er åben, kan A og B adskilles ved en hyperplan. (Se på $A - B$.)

b) Hvis både A og B er åbne, kan de adskilles strengt ved en hyperplan.

c) Hvis A er afsluttet og B er kompakt, da kan A og B adskilles strengt ved en hyperplan, forudsat at E er <u>lokalkonvekst</u>. (Benyt b og opg. 43.)

46. Lad A være en afsluttet, konveks, ægte delmængde af et lokalkonvekst t.v.r. E over $\mathbb{R}$. Vis, at A er fællesmængden for mængden af alle afsluttede halvrum af E, som omfatter A. (Benyt opg. 45c). Vis desuden, at hvis E tillige er Hausdorff og A kompakt og ikke tom, så kan man nøjes med at medtage sådanne afsluttede halvrum $(\supseteq A)$, hvis begrænsende hyperplan møder A. (Sådanne hyperplaner kaldes støttehyperplaner for A.)

47. Lad f være en kontinuert, lineær afbildning af et underrum M af et lokalkonvekst t.v.r. E ind i koefficientlegemet. Vis, at der findes en kontinuert seminorm p på E, for hvilken $|f(x)| \leq p(x)$ for alle $x \in M$. Vis derved, at f kan udvides til en kontinuert linearform på E.

48. Lad f være en kontinuert, lineær afbildning af et underrum M af et lokalkonvekst t.v.r. E over K ind i et <u>endeligdimensionalt</u> Hausdorff t.v.r. F over K. Vis, at f kan udvides til en kontinuert lineær afbildning af E ind i F. (Benyt opg. 47).

49. Lad M være et endeligdimensionalt underrum af et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. E. Vis, at der eksisterer et af-

sluttet underrum N af E således at $E = M + N$, hvor denne sum er topologisk direkte. (Benyt opg. 48 på den identiske afbildning af M på sig selv.)

5o. Lad E være et t.v.r. over K og $F: E \to K$ en linearform som ikke er identisk 0. Vis at f er en åben afbildning.

51. Lad E være et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. over K, A en afsluttet konvekst symmetrisk delmængde. Vis at der til hvert $a \notin A$ findes en kontinuert linearform $f \in E'$ så $f(a) > 1$, $|f(x)| \leq 1$ for alle $x \in A$. (Brug evt. opg. 5o).

52. Lad E være et Hausdorff t.v.r. Vis at E er lokalkompakt hvis og kun hvis $\dim E < \infty$. Vis dernæst at enhedskuglen i et normeret rum E er kompakt hvis og kun hvis $\dim E < \infty$.

<u>Vink</u> til E lokalkompakt $\Rightarrow \dim E < \infty$: Lad U være en kompakt symmetrisk omegn. Vis at der findes endelig mange punkter $a_1, \ldots, a_n \in E$ så $U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{2}U$ og lad M være underrummet udspændt af $a_1, \ldots, a_n$. Vis at $U \subseteq M + (\frac{1}{2})^k U$ for alle $k = 1,2,\ldots$ og slut heraf $U \subseteq \overline{M}$ og endelig $E = M$.

53. Lad E være et t.v.r. opfyldende 1. numerabilitetsaxiom, og lad f være en lineær afbildning af E ind i et andet t.v.r. F. Vis at f er kontinuert såfremt $f(B)$ er begrænset i F for alle begrænsede mængder $B \subseteq E$. (Jvf. opg. 22)

54. Lad E og F være normerede rum, f_n, $f \in L(E,F)$. Vis at

$f_n \to f$ i det normerede rum $L(E,F)$ hvis og kun hvis $f_n(x) \to f(x)$ ligeligt over begrænsede delmængder af E.

55. Bipolarsætningen. Lad E være et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r., E' dets topologisk duale rum. For enhver delmængde $B \subseteq E'$ defineres polaren

$$B^{o} = \{x \in E \mid |\langle x,f\rangle| \leq 1 \text{ for alle } f \in B\}.$$

Vis at B^{o} er konveks, symmetrisk og afsluttet. Hvis $A \subseteq E$ har vi tidligere defineret $A^{o} \subseteq E'$. Vis, at for en vilkårlig delmængde $A \subseteq E$ er $A^{oo} = (A^{o})^{o}$ (bipolaren) den mindste afsluttede, symmetriske og konvekse mængde der omfatter A, altså A^{oo} er hvad man kunne kalde det afsluttede konvekse symmetriske hylster af A. (Brug evt. opg. 51).

56. Lad E være et t.v.r. over $\mathbb{R}$, F en afsluttet hyperplan. Vis at delmængden $E \setminus F$ er usammenhængende.

57. Lad K være en kompakt konveks mængde i et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. over $\mathbb{R}$. Lad Q være mængden af kontinuerte konvekse funktioner $f: K \to \mathbb{R}$. Vis at Q er en afsluttet konveks kegle i Banachrummet $C(K,\mathbb{R})$ og at Q er maximum-stabil: $f,g \in Q \Rightarrow f \vee g \in Q$. Vis endelig at Q er en total delmængde af $C(K,\mathbb{R})$.

58. Lad S være enhedskuglen i $\mathbb{R}^n$ med den euklidiske metrik:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\}.$$

Vis at ethvert randpunkt af S er ekstremt punkt i S.

59. Lad T være et ikke tomt kompakt rum, S_K enhedskuglen i Banachrummet $C(T,K)$, hvor $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Vis at de ekstreme punkter i S_K er de kontinuerte funktioner $f: T \to K$ der opfylder $|f(x)| = 1$ for alle $x \in T$.

Fortolk dette resultat når $T = \{1,\dots,n\}$ forsynet med den diskrete topologi.

Antag nu, at T desuden er sammenhængende og består af mere end et punkt (f.eks. $T = [0,1]$). Hvad bliver de ekstreme punkter i $S_{\mathbb{R}}$ i dette tilfælde. Vis dernæst at $C(T,\mathbb{R})$ ikke er refleksivt.

60. Lad X være et lokalkompakt rum som ikke er kompakt, og lad S være enhedskuglen i Banachrummet $C_0(X)$ af kontinuerte reelle eller komplekse funktioner på X der går mod 0 i ∞. Vis at $\operatorname{Ext} S = \emptyset$ og slut heraf, at $C_0(X)$ ikke er refleksivt.

61. Lad K være en konveks delmængde af et vektorrum E over $\mathbb{R}$. Vis at hvis A er en ekstrem delmængde af K så er $K\setminus A$ konveks, og at det omvendte ikke behøver at være rigtigt. Vis at følgende er ensbetydende om $x \in K$:

a) $x \in \operatorname{Ext} K$.

b) $K\setminus\{x\}$ er konveks.

c) $\forall\, a,b \in K \left(x = \frac{a+b}{2} \Rightarrow x = a = b\right)$.

62. Lad E være et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r. over $\mathbb{R}$,

$K \subseteq E$ en kompakt konveks mængde, $f: K \to \mathring{R}$ en opad halvkontinuert konveks funktion. Vis at f antager sit supremum over K i en afsluttet ekstrem delmængde af K.

63. Lad T være et ikke tomt kompakt rum, $F \subseteq C(T)$ en ækvikontinuert delmængde. Vis at også $\overline{F}$ er ækvikontinuert. Hvis $F = \{f_n \mid n \in \mathring{N}\}$, $g \in C(T)$ skal man vise biimplikationen:

$$f_n(x) \to g(x) \quad \text{for hvert} \quad x \in T \iff \|f_n - g\| \to 0.$$

64. Lad T være et ikke tomt kompakt rum, M et afsluttet underrum af $C(T,\mathring{C})$ og vi forudsætter desuden at $1 \in M$ og at M er et gitter.

Vis at M også er en algebra.

Vink: Det er nok at vise: $\|f\| \leq 1$, $f \in M \Rightarrow f^2 \in M$. Betragt for $\lambda \in]0,1[$ funktionen $\varphi_\lambda : [0,1] \to \mathring{R}$ defineret ved

$$\varphi_\lambda(x) = (1+\lambda)\left((x-\lambda) \vee 0 + \frac{\lambda^2}{1+\lambda}\right).$$

Vis at $\varphi_\lambda(x) \geq x^2$ for $x \in [0,1]$. Lad nu λ_n være en følge som ligger tæt i $]0,1[$ og sæt $\psi_n = \varphi_{\lambda_1} \wedge \varphi_{\lambda_2} \wedge \ldots \wedge \varphi_{\lambda_n}$. Vis ved Dini's lemma (Top. opg. 37) at $\psi_n(x) \to x^2$ ligeligt for $x \in [0,1]$.

Find et eksempel der viser, at forudsætningen $1 \in M$ ikke kan undværes.

65. Lad $T = \{z \in \mathring{C} \mid |z| \leq 1\}$ og lad A være mængden af funktioner $z \mapsto p(z)$, $z \in T$, p polynomium med komplekse koefficienter. Vis at $\overline{A} \neq C(T,\mathring{C})$. Hvad er $\overline{A}$?

66. Ved et trigonometrisk polynomium forstås en funktion $p: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ af formen

$$p(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

hvor $a_k \in \mathbb{C}$, $n = 0,1,2,\dots$. Vis at man til enhver kontinuert funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som er periodisk med perioden 2π og til hvert $\varepsilon > 0$ kan finde et trigonometrisk polynomium p så $|f(\theta)-p(\theta)| \leq \varepsilon$ for alle $\theta \in \mathbb{R}$.

Vis desuden, at man kan vælge p af formen

$$p(\theta) = a_o + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \quad .$$

hvor $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, hvis f er reel.

Vink: Betragt de periodiske funktioner som funktioner på enhedscirklen $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

67. Lad E være et normeret rum.

a) Lad $x_n \in E$ opfylde $\sup_n |f(x_n)| < \infty$ for alle $f \in E'$. Vis at $\sup_n \|x_n\| < \infty$.

b) Vis at de svagt begrænsede delmængder af E er de samme som de stærkt begrænsede delmængder af E.

68. Lad E være et normeret rum, $\varphi: E \to E''$ den kanoniske indlejring i det biduale rum. Idet S og S'' betegner enhedskuglerne i E og E'' skal man vise at $\overline{\varphi(S)} = S''$ idet afslutningen refererer til den svage topologi $\sigma(E'',E')$ på E''. (Som vink henvises til opg. 51). Vis dernæst, at E er refleksivt såfremt S er $\sigma(E,E')$-kompakt.

69. Lad E være et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r., K en kompakt konveks delmængde af E. Vis at $K^{\circ} = (\mathrm{Ext}\ K)^{\circ}$. Lad nu $E = \mathring{R}^n$. Idet E' identificeres med $\mathring{R}^n$ ved at $f \longleftrightarrow x \in \mathring{R}^n$ via formlen $f(y) = x \circ y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, kan polaren af $A \subseteq \mathring{R}^n$ fås som

$$A^{\circ} = \{x \in \mathring{R}^n \mid |a \circ x| \leq 1 \text{ for alle } a \in A\}.$$

Find A° i tilfældet $n = 3$ når A er de platoniske legemer indskrevet i enhedskuglen.

70. Lad $\mathcal{S}$ betegne mængden af alle komplekse funktioner φ, der er definerede på $\mathring{R}$, er vilkårligt ofte differentiable, og som har den egenskab, at

$$x^m \varphi^{(n)}(x) \to 0$$

for $x \to \pm\infty$, og for alle $m,n = 0,1,2,\dots$. Vi kalder $\mathcal{S}$ for <u>rummet af hurtigt aftagende funktioner</u>. Vi udstyrer $\mathcal{S}$ med den ved seminormerne $p_{m,n}$ definerede topologi:

$$p_{m,n}(\varphi) = \sup\{|x|^m |\varphi^{(n)}(x)| \mid x \in \mathring{R}\}, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

$m,n = 0,1,2,\dots$.

a) Vis at $\mathcal{S}$ er et metriserbart lokalkonvekst t.v.r.

b) Vis at Fouriertransformationen $\mathcal{F}$ er en isomorfi af $\mathcal{S}$ på sig selv.

c) Det topologisk duale rum $\mathcal{S}'$ kaldes rummet af <u>tempererede distributioner</u>. For $f \in L^p(\mathring{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, skal man vise at $L_f: \mathcal{S} \to \mathring{C}$ er en tempereret distribution

$$L_f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\varphi(x)dx ,$$

og at $L_f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ næsten overalt.

d) Vis, at der ved formlen

$$\mathcal{F}(T)(\varphi) = T(\mathcal{F}\varphi), \quad T \in \mathcal{S}', \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

defineres en isomorfi $\mathcal{F}$ af $\mathcal{S}'$ på $\mathcal{S}'$, og at der gælder

$$\mathcal{F}(L_\varphi) = L_{\mathcal{F}\varphi} \quad \text{for} \quad \varphi \in L^1(\dot{R}), \ L^2(\dot{R}) .$$

Dette viser, at $\mathcal{F}$ er en udvidelse af den sædvanlige Fouriertransformation fra $L^1(\dot{R})$ og $L^2(\dot{R})$ til $\mathcal{S}'$.

e) Vis at $\mathcal{F}1 = \delta_o$, hvor δ_o er Diracmålet i o som er en tempereret distribution $\varphi \mapsto \varphi(o)$.

71. Vi opfatter rummet af kontinuerte funktioner $f: \dot{R} \to \dot{C}$ som er periodiske med perioden 2π, som Banachrummet $C(\dot{T})$ af kontinuerte funktioner på den kompakte enhedscirkel $\dot{T} = \{z \in \dot{C} \mid |z| = 1\}$. Hvert $f \in C(\dot{T})$ har en Fourierrække, hvis n'te afsnit $s_n(f)$ igen tilhører $C(\dot{T})$ og det er givet ved

$$s_n(f) = f * D_n ,$$

hvor D_n er Dirichlet's kerne.

a) Vis at $s_n: C(\dot{T}) \to C(\dot{T})$ er en kontinuert lineær afbildning af norm

$$\|s_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt$$

b) Vis at $\|s_n\| \to \infty$ for $n \to \infty$.

<u>Vink</u>: Nok at vise at

$$\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t} dt \to \infty \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

Omskriv dette integral til $\sum_{k=0}^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t+\frac{1}{2}k\pi)|dt}{t+\frac{k\pi}{2}}$

og vurder ved den harmoniske række.

c) Vis at der findes en kontinuert periodisk funktion f og et punkt $t_o \in \grave{R}$, så f's Fourierrække ikke er konvengent i t_o, altså så $s_n(f)(t_o)$ ikke konvengerer.

Vink: Indirekte. Anvend opg. 67 og princippet om ligelig begrænsning.