HARMONISK ANALYSE
OG
POTENTIALTEORI

Forelæsninger efteråret 1973
ved
Christian Berg og Gunnar Forst

Forelæsninger foråret 1974
ved Christian Berg.

Indhold.

KAPITEL I. Indledning

§1. Den Brownske semigruppe på $\mathbb{R}^3$ 1

§2. Foldningssemigrupper 7

KAPITEL II. Harmonisk analyse

§1. Haarmål 14

§2. Foldning 23

§3. Dual gruppe og Fourier transformation 35

§4. Positiv definite funktioner 52

§5. Positiv definite mål. Plancherels sætning 69

§6. Positiv definite funktioner på $\mathbb{R}$ 83

§7. Pontriagin's dualitetssætning 94

§8. Kvotientgrupper og periodicitet 106

§9. Ortogonalitetsteori 119

KAPITEL III. Foldningssemigrupper

§1. Bernouille konvergens 135

§2. Foldningssemigrupper 149

§3. Negativ definite funktioner 161

§4. Levy-Khinchine's formel i det reelle tilfælde 191

§5. Kontraktionssemigrupper 205

§6. Potentialkernen for en foldningssemigruppe 223

Nogle rettelser og tilføjelser 434 ff

KAPITEL I. INDLEDNING

§1. Den Brownske semigruppe på $\mathbb{R}^3$.

I 1827 opdagede den engelske botaniker BROWN, at støvpartikler i vandig opslemning er i stadig og kaotisk bevægelse, og ustandselig skifter bevægelsesretning. Dette fænomen – de Brownske bevægelser – forklares ved, at støvpartiklerne hele tiden er udsat for stød fra molekylerne i den omgivende vædske.

En nærmere matematisk beskrivelse af de Brownske bevægelser blev givet af EINSTEIN og SMOLUCHOWSKI omkring 1905. Lad os betragte en Brownsk partikel, der til tiden $s \geq 0$ befinder sig i punktet $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Vi ønsker at angive sandsynligheden $P_{t,s}(x_0, B)$ for til tiden $t > s$, at finde partiklen i Borelmængden $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Idet partiklens bevægelse skyldes uregelmæssige stød fra vædskemolekylerne og disse stød kommer fra alle retninger med "lige stor" sandsynlighed, er det nærliggende (jvnf. den centrale grænseværdisætning fra sandsynlighedsregningen) at antage, at den søgte sandsynlighed er givet ud fra tætheden for en passende normal fordeling på følgende måde

$$P_{t,s}(x_0, B) = \int_B (2\pi\sigma^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\|x-x_0\|^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (1)$$

Variansen δ^2 kunne Einstein ved teoretiske overvejelser bestemme til en konstant faktor, afhængig af den omgivende vædske, gange tidsdifferencen $t-s$. Det blev senere, gennem eksperimenter udført af PERRIN, godtgjort, at disse sandsynlighedsudsagn stemmer overens med virkeligheden.

Man kan vise, at de Brownske bevægelser, i sandsynlighedsteoretisk forstand, er éntydigt fastlagt ud fra sandsynlighederne (1).

Et resultat af WIENER viser imidlertid, at denne model for de Brownske bevægelser, fra et fysisk synspunkt ikke er ganske dækkende. Wiener kunne nemlig bevise, at en Brownsk partikel, ifølge denne sandsynlighedsteoretiske model, "næsten sikkert" d.v.s. med sandsynlighed 1, bevæger sig ad en intetsteds differentiabel kurve, og altså ikke kan tilskrives en hastighed.

Vi vil dog benytte den ovenfor skitserede beskrivelse af de Brownske bevægelser i det følgende, hvor vi skal angive nogle simple egenskaber ved de Brownske bevægelser og se hvorledes disse egenskaber finder udtryk i sandsynlighederne (1). Vi kan uden indskrænkning antage, at vædskekonstanten, der indgår i δ^2, er lig 2, altså at

$$P_{t-s}(x_0, B) = (4\pi(t-s))^{-\frac{3}{2}} \int_B e^{-\frac{\|x-x_0\|^2}{4(t-s)}} dx. \quad (2)$$

For fast $t>0$ vil sandsynligheden $P_t(x,B)$ $(=P_{t-0}(x,B))$ kun afhænge af den indbyrdes placering af x og B, altså af mængden $B-x$, og ikke af hvor i $\mathbb{R}^3$, x og B befinder sig. Dette udtrykkes i, at de Brownske bevægelser er <u>translations invariante</u>; man kan også direkte aflæse i (2), at vi for $t>0$ har

$$P_t(x,B) = P_t(0, B-x)$$

for alle $x\in\mathbb{R}^3$ og alle Borelmængder $B\subseteq\mathbb{R}^3$.
Ved fastsættelsen

$$\mu_t(B) = P_t(0,B) \tag{3}$$

for $t>0$ og Borelmængder $B\subseteq\mathbb{R}^3$, defineres en familie $(\mu_t)_{t>0}$ af sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}^3$, og det følger af det ovenfor nævnte, at den Brownske bevægelse er fastlagt ved kendskabet til $(\mu_t)_{t>0}$. Disse mål $(\mu_t)_{t>0}$ har tætheder m.h.t. Lebesgue-målet på $\mathbb{R}^3$, nemlig funktionerne

$$g_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \quad \text{for } t>0 \text{ og } x\in\mathbb{R}^3. \tag{4}$$

Intuitivt vil en Brownsk partikel bevæge sig "<u>uden hukommelse</u>", i den forstand, at sandsynligheden for at træffe partiklen i Borelmængden B til tiden t, når det vides, at den til tiden s $(0\leq s<t)$ var i punktet x_0, er uafhængig af

hvordan partiklen nåede til x_0, altså uafhængig af partiklens opførsel i tidsrummet før s. Denne mangel på hukommelse kan formuleres helt præcist ved hjælp af det sandsynlighedsteoretiske begreb, betingede middelværdier.

De Brownske partiklers mangel på hukommelse har en vigtig konsekvens for de i (1) (eller (2)) opskrevne sandsynligheder. Lad os antage, at vores partikel til tiden $r \geq 0$ befinder sig i punktet x_0. Sandsynligheden for at finde partiklen i Borelmængden B til tiden t $(t > r)$, hvis vi ved, at den til det mellemliggende tidspunkt s $(r < s < t)$ befandt sig i "rumelementet" dy omkring punktet y, er da produktet

$$P_{s-r}(x_0, dy) \cdot P_{t-s}(y, B).$$

Ved at summere bidragene fra alle dy'erne fås

$$P_{t-r}(x_0, B) = \int_{y \in \mathbb{R}^3} P_{t-s}(y, B)\, P_{s-r}(x_0, dy), \quad (5)$$

hvor det drejer sig om integration m.h.t. målet

$$dy \longmapsto P_{s-r}(x_0, dy).$$

I litteraturen kaldes (5) ofte Chapman-Kolmogorov-ligningen. Ligningen (5) får en særlig simpel form når den formuleres ved hjælp af målene fra (3). For $u, v > 0$ har man nemlig ved at sætte $x_0 = 0$ i (5) at

$$\mu_{u+v}(B) = P_{u+v}(0, B) = \int_{y \in \mathbb{R}^3} \mu_u(B-y)\, d\mu_v(y)$$

for alle Borelmængder $B \subseteq \mathbb{R}^3$, altså at

$$\mu_{u+v}(B) = \mu_u * \mu_v\,(B)$$

og familien $(\mu_t)_{t>0}$ udgør følgelig en semigruppe ved foldning, den <u>Brownske foldningssemigruppe</u> på $\mathbb{R}^3$.

Det er nemt at regne efter, at tæthederne (4) for målene $(\mu_t)_{t>0}$ tilfredsstiller ligningen

$$g_{t+s}(x) = g_t * g_s\,(x) \quad \text{for } t, s > 0 \text{ og } x \in \mathbb{R}^3.$$

Lad $C_0(\mathbb{R}^3)$ betegne rummet af kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}^3$, der går mod 0 i det uendelige. Udstyret med supremumsnormen

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |f(x)| \quad \text{for } f \in C_0(\mathbb{R}^3)$$

er $C_0(\mathbb{R}^3)$ et Banachrum. Det er velkendt, at målene $(\mu_t)_{t>0}$ (eller funktionerne $(g_t)_{t>0}$) ved foldning giver anledning til en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t>0}$ af operatorer P_t på $C_0(\mathbb{R}^3)$, nemlig

$$P_t f = \mu_t * f \quad \text{for } t > 0 \text{ og } f \in C_0(\mathbb{R}^3).$$

Som et vigtigt hjælpemiddel i behandlingen af semigrupper indføres to operatorer (A, D_A) og (N, D_N). Her er (A, D_A), den <u>infinitesimale frembringer</u> for $(P_t)_{t>0}$, defineret ved

$$Af = \lim_{t \to 0} \frac{P_t f - f}{t} \qquad \text{for } f \in D_A,$$

hvor

$$D_A = \{ f \in C_0(\mathbb{R}^3) \mid \lim_{t \to 0} \frac{P_t f - f}{t} \text{ eksisterer i } C_0(\mathbb{R}^3) \}$$

Videre er (N, D_N), <u>potentialoperatoren</u> for $(P_t)_{t>0}$, givet ved

$$Nf = \lim_{t \to \infty} \int_0^t P_s f \, ds \qquad \text{for } f \in D_N,$$

hvor

$$D_N = \{ f \in C_0(\mathbb{R}^3) \mid \lim_{t \to \infty} \int_0^t P_s f \, ds \text{ eksisterer i } C_0(\mathbb{R}^3) \}.$$

Operatorerne A og $-N$ er indbyrdes inverse.

Det er nu afgørende, at A og N er "gamle kendinge" i matematiken. Operatoren A er nemlig på et passende underrum af $C_0(\mathbb{R}^3)$, "ikke andet end" <u>Laplace operatoren</u>:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

På et passende underrum af $C_0(\mathbb{R}^3)$ er operatoren N bestemt som foldning med <u>Newton-kernen</u>:

$$Nf(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \frac{1}{\|x-y\|} \, dy .$$

Den klassiske potentialteori, som løst sagt er studiet af Laplaceoperatoren og Newtonkernen, og teorien for de Brownske bevægelser er således "to sider af samme sag". Denne sammenhæng mellem sandsynlighedsregningen og potentialteorien blev opdaget i 1930'erne af LEVY og er siden blevet uddybet gennem arbejder af bl.a. KAKUTANI, DOOB og HUNT.

En nøjere undersøgelse af denne sammenhæng, eller hvad der kommer ud på det samme, et nærmere studium af operatorerne A og N, kræver et vist kendskab til den harmoniske analyse. Vi må derfor starte med at give en kort indføring i harmonisk analyse, inden vi kan gå i gang med forelæsningernes hovedemne, den analytiske behandling af foldningssemigrupper.

§2. Foldningssemigrupper.

Det synes rimeligt at betragte den i §1 skitserede situation i en mere generel ramme, hvor den harmoniske analyse er til rådighed og hvor vi kan definere translationsinvarians. Vi vil derfor erstatte det underliggende rum $\mathbb{R}^3$ med en vilkårlig lokalkompakt abelsk gruppe G.

Vi skal studere familier $(\mu_t)_{t>0}$ af positive mål på G med egenskaberne

$$\mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s \qquad \text{for } t,s>0 ,$$

$$\int d\mu_t \leq 1 \qquad \text{for } t>0 ,$$

$$\lim_{t\to 0} \mu_t = \varepsilon_0 \qquad \text{i den vage topologi},$$

hvor ε_0 er Dirac målet koncentreret i det neutrale element 0 af G. En sådan familie kaldes en vagt kontinuert <u>foldningssemigruppe</u> på G; den Brownske semigruppe på $\mathbb{R}^3$ er et eksempel på en foldningssemigruppe. Man kan vise, at der er en entydig korrespondance mellem foldningssemigrupper på G og translationsinvariante <u>Hunt-processer</u> (d.v.s. "generaliserede Brownske bevægelser") på G.

Ved Fouriertransformation af målene i en foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$ på G, fås en familie $(\hat{\mu}_t)_{t>0}$ af funktioner på den til G duale gruppe Γ. Denne familie har følgende speciel-le form

$$\hat{\mu}_t(\gamma) = e^{-t\psi(\gamma)} \qquad \text{for } t>0 \text{ og } \gamma\in\Gamma \qquad (1)$$

hvor ψ er en (af $(\mu_t)_{t>0}$ afhængig) kompleks funktion på Γ. Funktionen ψ er kontinuert og <u>negativ</u> <u>definit</u>, hvilket betyder, at det for alle naturlige tal n og alle n-sæt af elementer

$\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$ gælder, at matricen

$$\left(\psi(\gamma_i) + \overline{\psi(\gamma_j)} - \psi(\gamma_i - \gamma_j) \right)_{i,j=1,\cdots,n}$$

er positiv semidefinit. Omvendt vil der til hver kontinuert og negativ definit funktion ψ på Γ, ved ligningen (1) fastlægges en familie $(\mu_t)_{t>0}$ af mål på G, og denne familie udgør en foldningssemigruppe på G. Hvis $(\mu_t)_{t>0}$ er den Brownske semigruppe på $\mathbb{R}^3$, finder man

$$\hat{\mu}_t(y) = e^{-t\|y\|^2} \quad \text{for } t>0 \text{ og } y \in \mathbb{R}^3,$$

(den til $\mathbb{R}^3$ duale gruppe er $\mathbb{R}^3$) og funktionen

$$\mathbb{R}^3 \ni y = (y_1, y_2, y_3) \longrightarrow y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \|y\|^2 \in \mathbb{R}$$

er således negativ definit på $\mathbb{R}^3$.

Idet foldningssemigrupper på G er i entydig korrespondance med kontinuerte negativ definitte funktioner på Γ, er samtlige foldningssemigrupper på G "explicit" givet, når man kender alle kontinuerte negativ definitte funktioner på Γ. Klassen af kontinuerte negativ definitte funktioner er i princippet bestemt ved hjælp af en integralformel, den såkaldte <u>Levy-Khinchin formel</u>.

I tilfældet $\Gamma = \mathbb{R}^3$ findes der svarende til en kontinuert negativ definit funktion ψ på Γ:

- en positiv konstant c
- en linear form l på $\mathbb{R}^3$

$$l(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{3} b_j x_j \qquad (b_j \in \mathbb{R})$$

- en positiv kvadratisk form q på $\mathbb{R}^3$

$$q(\underline{x}) = \sum_{j,k=1}^{3} a_{jk} x_j x_k \qquad (a_{jk} \in \mathbb{R},\ a_{jk} = a_{kj})$$

- et positivt begrænset mål ν på $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

således at for $\underline{x} \in \Gamma$

$$\psi(\underline{x}) = c + i\,l(\underline{x}) + q(\underline{x}) + \int \left(1 - e^{-i\langle \underline{x}, y\rangle} - \frac{i\langle \underline{x}, y\rangle}{1+\|y\|^2}\right) \frac{1+\|y\|^2}{\|y\|^2}\, d\nu(y) \qquad (2)$$

Omvendt definerer (2) med c, l, q og ν som ovenfor en kontinuert negativ definit funktion på $\mathbb{R}^3$. Formlen (2) er Levy-Khinchin's formel for $\Gamma = \mathbb{R}^3$. Det er imidlertid vanskeligt at udregne integralet i (2) for konkrete mål ν.

Den Brownske foldningssemigruppe svarer til at vi i (2) har

$$c = 0, \quad l = 0, \quad \nu = 0$$
$$q(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|\underline{x}\|^2.$$

Lad nu $(\mu_t)_{t>0}$ være en fast valgt foldningssemigruppe på G og lad ψ være den tilhørende negativ definitte funktion på Γ. Rummet $C_0(G)$ af kontinuerte funktioner på G, der går mod 0

i det uendelige er et Banachrum, når det udstyres med supremumnormen. Som i §1 defineres derved

$$P_t f = \mu_t * f \quad \text{for } t>0 \text{ og } f \in C_0(G)$$

en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t>0}$ på $C_0(G)$, og ligesom tidligere har vi dermed den <u>infinitesimale</u> <u>frembringer</u> (A, D_A) og <u>potentialoperatoren</u> (N, D_N) for $(P_t)_{t>0}$.

Hvis det har mening at danne integralet

$$\int_0^\infty \mu_t \, dt \tag{3}$$

og hvis (3) definerer et mål $\varkappa$, må det forventes, at dette mål ved foldning "bestemmer" potentialoperatoren. Integralet (3) kan tillægges en fornuftig betydning i tilfældet hvor funktionen $\frac{1}{\psi}$ er lokalt integrabel på Γ, og i denne situation er $\varkappa$ simpelthen den "Fourier-transformerede" af $\frac{1}{\psi}$.

Videre vil det vise sig, at den infinitesimale frembringer A er den "Fourier-transformerede" af funktionen $-\psi$. Levy-Khinchin's formel, der herved kan fortolkes som en formel for strukturen af A giver, at A er sum af en (højst) anden-ordens differentialoperator (hvis man kan differentiere på G) og en integraloperator.

Disse udsagn må naturligvis præciseres, men i tilfældet $G = \mathbb{R}^3$ har den infinitesimale frembringer for $(P_t)_{t>0}$ følgende udseende (på tilstrækkeligt differentiable funktioner):

$$Af(\underline{x}) = c \cdot f(\underline{x}) + \sum_{j=1}^{3} b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}) + \sum_{j,k=1}^{3} a_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\underline{x})$$

$$+ \int \Big[f(\underline{x}+\underline{y}) - f(\underline{x}) - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}) \frac{y_j}{1+\|\underline{y}\|^2} \Big] \frac{1+\|\underline{y}\|^2}{\|\underline{y}\|^2} d\nu(\underline{y})$$

hvor c, (b_j), (a_{jk}) og ν har samme betydning som ovenfor.

Den til foldningssemigruppen hørende "generaliserede Brownske bevægelse" X kan nærmere karakteriseres ved hjælp af følgende begreber. Idet man opfatter X som en beskrivelse af en partikel, der bevæger sig tilfældigt på G, kaldes X kontinuert, hvis partiklen "altid" bevæger sig langs kontinuerte kurver i G. Det er muligt at afgøre om X er kontinuert direkte ud fra den infinitesimale frembringer for $(\mu_t)_{t>0}$ så vel som ud fra den negativ definitte funktion ψ. Videre kaldes X rekurrent, hvis det om en vilkårlig åben mængde gælder, at partiklen befinder sig i denne mængde vilkårligt ofte og til vilkårligt sene tidspunkter. Hvis X ikke er rekurrent, kaldes X transient. I dette tilfælde vil partiklen forlade enhver åben begrænset mængde på et eller andet tidspunkt og ikke komme tilbage til denne mængde. Det gælder nu, at X er transient, netop hvis realdelen af funktionen $\frac{1}{\psi}$ er lokalt integrabel på Γ. F. eks. er den Brownske bevægelse i rummet $\mathbb{R}^3$ transient, medens den Brownske bevægelse "på linien" $\mathbb{R}$ og "i planen" $\mathbb{R}^2$ er rekurrente.

Disse egenskaber ved den generaliserede Brownske bevægelse kan opfattes som egenskaber ved den tilhørende foldningssemigruppe. Resultaterne ovenfor er eksempler på hvorledes egenskaber ved foldningssemigruppen kan formuleres ved hjælp af den associerede negativ definitte funktion. Forelæsningerne skal give de nødvendige redskaber til denne "oversættelse", samt præsentere en række eksempler herpå.

KAPITEL II. HARMONISK ANALYSE

Den første fremstilling af den harmoniske analyse på vilkårlige lokalkompakte abelske grupper blev givet af André WEIL i L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, 1940.

Af moderne fremstillinger nævnes

W. Rudin: Fourier analysis on groups (1962),

E. Hewitt and K. Ross: Abstract harmonic analysis I+II (1963, 1970),

A. Guichardet: Analyse harmonique commutative (1968).

§1. Haarmål.

En <u>topologisk gruppe</u> G er en gruppe G forsynet med en topologi så kompositionen og inversdannelsen er kontinuerte. Vi kræver altså, at følgende afbildninger er kontinuerte:

$$(x,y) \longmapsto x\cdot y \qquad \text{af } G\times G \text{ ind i } G$$

$$x \longmapsto x^{-1} \qquad \text{af } G \text{ ind i } G.$$

Vi vil udelukkende beskæftige os med <u>abelske</u> topologiske grupper hvor topologien er <u>lokalkompakt</u>. Vi taler så om en <u>lokalkompakt abelsk gruppe</u> G (kort: En LCA-gruppe).

Idet følgende betegner G en fast LCA-gruppe, med komposition + (addition). Det neutrale element i G betegnes 0 og det til $x \in G$ inverse element er $-x$.

For hvert $a \in G$ betegner τ_a afbildningen $x \mapsto x+a$ af G på sig selv, og τ_a kaldes <u>translationen</u> bestemt ved a. Det er klart, at τ_a er en homeomorfi af G. Betegner $\grave{\mathcal{U}}(a)$ systemet af omegne af punktet $a \in G$ gælder derfor

$$\grave{\mathcal{U}}(a) = a + \grave{\mathcal{U}}(0).$$

En delmængde $B \subseteq G$ kaldes <u>symmetrisk</u> hvis $B = -B$. Inversdannelsens kontinuitet giver, at enhver omegn V af 0 indeholder en symmetrisk omegn (f.eks. $V \cap -V$) af 0. Da G er lokalkompakt findes således en basis for $\grave{\mathcal{U}}(0)$ bestående af kompakte, symmetriske mængder.

Additionens kontinuitet sikrer, at der til hver omegn W af 0 findes en omegn V af 0 så

$$V + V \subseteq W.$$

For en kompleks funktion f på G og for $a \in G$ betegner $\tau_a f$ funktionen f <u>translateret med a</u>, som er defineret ved

$$(\tau_a f)(x) = f(\tau_{-a} x) = f(x-a), \quad x \in G,$$

og $\check{f}$ betegner den til f <u>spejlede</u> funktion, givet ved

$$\check{f}(x) = f(-x) \quad , \quad x \in G .$$

Rummet af kontinuerte funktioner $f : G \to \mathbb{C}$ med kompakt støtte betegnes $\mathcal{K}(G)$. For $f \in \mathcal{K}(G)$ er $\tau_a f, \check{f} \in \mathcal{K}(G)$ og der gælder

$$\operatorname{supp}(\tau_a f) = a + \operatorname{supp} f \quad \text{og} \quad \operatorname{supp}(\check{f}) = -\operatorname{supp} f .$$

En funktion $f : G \to \mathbb{C}$ kaldes <u>ligeligt kontinuert</u> såfremt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U \in \mathcal{U}(0) \ \forall x,y \in G : \ x-y \in U \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Enhver funktion $f \in \mathcal{K}(G)$ er ligeligt kontinuert. (Overvej dette).

De positive linearformer på $\mathcal{K}(G)$ kaldes som bekendt <u>Radonmål</u> på G. Mere almindeligt vil vi kalde en linearform

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$$

hvor μ_j, $j = 1, \dots, 4$ er positive linearformer på $\mathcal{K}(G)$, for et <u>mål</u> på G. For et mål μ på G defineres det <u>spejlede</u> mål $\check{\mu}$ ved

$$\check{\mu}(f) = \mu(\check{f}) \quad \text{for } f \in \mathcal{K}(G),$$

og det med a $(a \in G)$ <u>translaterede</u> mål $\tau_a \mu$, ved

$$(\tau_a \mu)(f) = \mu(\tau_{-a} f)$$

eller på integralform

$$\int f(x)\, d(\tau_a\mu)(x) = \int (\tau_{-a} f)(x)\, d\mu(x) = \int f(x+a)\, d\mu(x)$$

for $f \in \mathcal{K}(G)$.

Et mål μ på G kaldes <u>translationsinvariant</u>, hvis

$$\tau_a \mu = \mu \qquad \text{for alle } a \in G,$$

og μ kaldes <u>spejlingsinvariant</u>, hvis

$$\mu = \check{\mu}.$$

Ifølge A. HAAR (1933) findes et Radonmål $\mu \neq 0$ på G som er translationsinvariant og translationsinvariante Radonmål på G er proportionale. De translationsinvariante Radonmål på G kaldes Haarmålene på G. I praksis fikseres et Haarmål μ på G, som kaldes <u>Haarmålet på G</u>.

Opfattes Haarmålet μ som Borelmål gælder

$$\mu(B+a) = \mu(B)$$

for enhver Borelmængde B og ethvert $a \in G$.

<u>Eksempler</u>. 1) $G = \mathbb{R}^n$, Haarmålet er Lebesguemålet.

2) $G = \mathbb{Z}$, Haarmålet er "tællemålet". Det kan

skrives $\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n$, hvor ε_n er Diracmålet i n.

3) $G = \mathbb{T}$ (cirkel- eller torus-gruppen)

$$\mathbb{T} = \{ x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1 \} \approx \mathbb{R}/_{2\pi}\mathbb{Z}$$

Haarmålet er Lebesguemålet på $[0, 2\pi]$.

4) Er G_1 og G_2 LCA-grupper med Haarmål μ_1 og μ_2 er produktmålet $\mu_1 \otimes \mu_2$ et Haarmål på produktgruppen $G_1 \times G_2$.

5) Enhver abelsk gruppe er en LCA-gruppe, når den udstyres med den diskrete topologi. Et Haarmål er igen tællemålet.

<u>Øvelse 1.1</u> Lad G være den multiplikative gruppe af positive reelle tal. Find det Haarmål μ på G hvor $\mu([1,2]) = 1$.

I analogi med Lebesguemålet på $\mathbb{R}^n$ skrives Haarmålet ofte dx, hvor x betegner et variabelt punkt i gruppen.

<u>Lemma 1.1</u> Lad μ være et Haarmål på G. Da er $\operatorname{supp}(\mu) = G$.

Bevis. Vi skal vise, at enhver ikke tom åben mængde O har positivt Haarmål $\mu(O)$. Antag $\mu(O) = 0$. Så er også $\mu(K) = 0$ for enhver kompakt mængde K og dermed er $\mu = 0$, thi der findes endelig mange punkter $a_1, \dots, a_m \in G$ så

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} a_i + \mathcal{O},$$

men så er

$$\mu(K) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(a_i + \mathcal{O}) = n \cdot \mu(\mathcal{O}) = 0 \;. \;\square$$

Lemmaet kan også udtrykkes, at hvis $f \in \mathcal{K}(G)_+$ $f \not\equiv 0$, så er $\int f \, d\mu > 0$.

<u>Lemma 1.2</u> Ethvert Haarmål μ på G er spejlingsinvariant.

Bevis. For $f \in \mathcal{K}(G)$ og $a \in G$ gælder

$$\tau_{-a}(\check{f}) = [\tau_a f]^{\vee}$$

og heraf ses, at hvis μ er et Haarmål, så er $\check{\mu}$ translationsinvariant og dermed et Haarmål. Der findes altså $\lambda > 0$ så $\check{\mu} = \lambda\mu$. Vælges $f \in \mathcal{K}(G)_+$ så $f \not\equiv 0$ og sætter vi $\varphi = f + \check{f}$ er $\varphi = \check{\varphi}$; altså fås

$$\check{\mu}(\varphi) = \lambda\mu(\varphi) = \mu(\check{\varphi}) = \mu(\varphi),$$

og heraf sluttes at $\lambda = 1$. $\square$

<u>Sætning 1.3</u> Lad G være en LCA-gruppe med Haarmål μ. Så er $\mu(G) < +\infty$ hvis og kun hvis G er kompakt.

Bevis. Den ikke trivielle vej går ud på at vise, at hvis G ikke er kompakt så er $\mu(G) = \infty$. Antag at G ikke er kompakt og lad K være en kompakt delmængde. Vi viser først at der til hvert $n \in \mathbb{N}$ findes punkter $a_1, \dots, a_n \in G$ så mængderne $(a_i + K)$ er parvis disjunkte. Antag nemlig at $a_1, \dots, a_n$ er fundet. Da mængden

$$L = \left[\bigcup_{i=1}^{n} (a_i + K) \right] - K$$

er kompakt, findes et punkt $a_{n+1} \in G \setminus L$. Mængderne $(a_i + K)$ for $i = 1, \dots, n, n+1$ er parvis disjunkte. Heraf følger nu at $\mu(G) \geq n \mu(K)$ for alle n og alle kompakte mængder K. Altså er $\mu(G) = \infty$. $\square$

Øvelse 1.2 Gruppen G er diskret hvis og kun hvis $\mu(0) > 0$.

Øvelse 1.3 En tællelig LCA-gruppe er diskret.

På kompakte grupper G normaliseres Haarmålet som regel så $\mu(G) = 1$ og på diskrete grupper vælges en normalisering så $\mu(0) = 1$. Disse to krav harmonerer ikke for endelige grupper.

Når vi har fixeret et Haarmål dx på G kan vi danne de sædvanlige Banachrum $L^p(G, dx)$, $1 \leq p \leq \infty$. Vi skriver kort $L^p(G)$ idet vi underforstår, at det er med hensyn til et Haarmål. Som mængde betragtet er $L^p(G)$ uafhængigt af det valgte

Haarmål, men p-normerne svarende til forskellige Haarmål er proportionale.

<u>Sætning 1.4.</u> Lad $1 \leq p < \infty$.

a) For $x \in G$ og $f \in L^p(G)$ er $\tau_x f \in L^p(G)$ og

$$\| \tau_x f \|_p = \| f \|_p$$

b) For fast $f \in L^p(G)$ er afbildningen

$$x \longmapsto \tau_x f$$

af G ind i $L^p(G)$ ligeligt kontinuert.

c) Afbildningen τ, der til $x \in G$ lader svare isometrien τ_x af $L^p(G)$ er en stærkt kontinuert repræsentation af G.

Bevis. a) Følger umiddelbart af Haarmålets translationsinvarians.

b) Da $\| \tau_{x+h} f - \tau_x f \|_p = \| \tau_h f - f \|_p$ er det nok at vise at afbildningen

$$x \longmapsto \tau_x f$$

er kontinuert i 0.

Antag først at $f \in \mathcal{K}(G)$ og vælg en kompakt omegn V af 0. Vi sætter $L = \operatorname{supp}(f) + V$. Da f er ligelig kontinuert findes til $\varepsilon > 0$ en omegn U af 0 så

$$|f(x-h)-f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } h \in U,$$

altså

$$|f(x-h)-f(x)| \leq \varepsilon \cdot 1_L(x) \quad \text{for } x \in G,\ h \in U \cap V.$$

Heraf fås for $h \in U \cap V$, at

$$\|\tau_h f - f\|_p^p \leq \int (\varepsilon \cdot 1_L(x))^p dx = \varepsilon^p \int_L dx$$

hvilket viser b) for $f \in \mathcal{K}(G)$.

Til vilkårligt $f \in L^p(G)$ og $\varepsilon > 0$ findes $g \in \mathcal{K}(G)$ så $\|f-g\|_p < \varepsilon$. Så fås

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|\tau_h g - g\|_p + \|g-f\|_p < 3\varepsilon$$

når h er så nær ved 0 at $\|\tau_h g - g\|_p < \varepsilon$.

c) For hvert x er $\tau_x : f \mapsto \tau_x f$ en isometri af $L^p(G)$ på sig selv og $\tau_x \circ \tau_y = \tau_{x+y}$. Dette viser, at τ er en homomorfi af G ind i gruppen af isometrier af $L^p(G)$ på sig selv. Dermed er τ altså en repræsentation af G i $L^p(G)$. Den stærke kontinuitet betyder at afbildningen

$$x \longmapsto \tau_x f$$

er kontinuert for fast $f \in L^p(G)$, hvilket netop er vist i b). $\square$

§2. Foldning

Lad G være en LCA-gruppe med Haarmål dx. Ved hjælp af Haarmålet og gruppekompositionen kan vi definere en komposition for visse funktioner og mål på gruppen. Denne komposition kaldes <u>foldning</u> og betegnes med $*$. Formelt er foldningen af to funktioner f og g på G funktionen

$$f*g\,(x) = \int_G f(y)g(x-y)\,dy \quad , \; x \in G. \qquad (1)$$

Da det opskrevne integral ikke altid har mening, er det ikke alle funktioner der kan foldes.

For at finde $f*g\,(x)$ betragter vi alle udtryk af formen $f(p)\cdot g(q)$ hvor $p+q=x$, og disse "integreres sammen over G". Dermed er det klart at

$$f*g\,(x) = g*f\,(x) \, ;$$

mere præcist fås dette ved hjælp af Haarmålets translations- og spejlingsinvarians således:

$$f*g\,(x) = \int f(y)g(x-y)\,dy = \int f(y+x)\,g(-y)\,dy$$
$$= \int f(x-y)\,g(y)\,dy = g*f\,(x),$$

gældende for de funktioner f og g for hvilke (1) har mening.

<u>Sætning 2.1</u> a) Hvis $f, g \in \mathcal{K}(G)$ vil $f*g \in \mathcal{K}(G)$

og $\operatorname{supp}(f*g) \subseteq \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$.

b) Hvis $f, g \in L^1(G)$ er $f*g(x)$ defineret for næsten alle x (m.h.t. Haarmålet), $f*g \in L^1(G)$ og

$$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

Bevis. a) I dette tilfælde er $f*g$ klart veldefineret, og hvis $x \notin \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$ vil funktionen

$$y \longmapsto f(y)\, g(x-y)$$

være identisk 0, altså $f*g(x) = 0$, hvilket viser påstanden om støtterne, specielt at $f*g$ har kompakt støtte.

For at se at $f*g$ er kontinuert, udnyttes at g er ligeligt kontinuert. Til $\varepsilon > 0$ findes derfor en omegn U af 0 så $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$ for $x - y \in U$. Så fås

$$\begin{aligned} |f*g(x) - f*g(z)| &\leq \int |f(y)|\, |g(x-y) - g(z-y)|\, dy \\ &\leq \varepsilon \int |f(y)|\, dy \end{aligned}$$

når $x - z \in U$, hvilket viser at $f*g$ er (endda ligeligt) kontinuert.

b) Hvis $f, g \in L^1(G)$ kan vi som repræsentanter for f og g vælge Borelfunktioner. Så er

$$(x,y) \longmapsto f(y)\, g(x-y)$$

en Borelfunktion på $G \times G$. Da

$$\int_G \int_G | f(y) g(x-y) | \, dx \, dy = \| f \|_1 \| g \|_1 < \infty$$

følger det af Fubini's sætning at

$$\phi(x) = \int | f(y) g(x-y) | \, dy$$

eksisterer for næsten alle x og at $\phi \in L^1(G)$. Dermed er $f * g$ defineret næsten overalt og er en funktion i $L^1(G)$ opfyldende

$$| f * g(x) | \leq \phi(x) .$$

Heraf ses at

$$\| f * g \|_1 \leq \| f \|_1 \| g \|_1 . \quad \square.$$

<u>Øvelse 2.1</u> Hvis $f \in L^p(G)$ med $1 \leq p \leq \infty$ og $g \in L^q(G)$ hvor $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, så er $f * g$ veldefineret og $f * g$ er en kontinuert begrænset funktion. Videre er $\| f * g \|_\infty \leq \| f \|_p \| g \|_q$. Hvis $1 < p < \infty$ vil $f * g$ gå mod 0 i ∞.

<u>Sætning 2.2</u> Med foldning som multiplikation er $L^1(G)$ en kommutativ Banachalgebra. Ved fastsættelsen $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ gøres $L^1(G)$ til en Banachalgebra med involution.

Der findes etelement i $L^1(G)$ præcis hvis G er diskret.

Bevis. Vi vil indse at $*$ er associativ. Lad så $f, g, h \in L^1(G)$.

$$\begin{aligned} f*(g*h)(x) &= \int f(y)\, g*h(x-y)\, dy \\ &= \int \Big[f(y) \int g(z)\, h(x-y-z)\, dz \Big] dy \\ &= \int \Big[f(y) \int g(z-y)\, h(x-z)\, dz \Big] dy \\ &= \int \Big[\Big(\int f(y)\, g(z-y)\, dy \Big) h(x-z) \Big] dz \\ &= \int f*g(z)\, h(x-z)\, dz \\ &= (f*g)*h(x). \end{aligned}$$

Vi har brugt translationsinvariansen og Fubini's sætning.

Hermed er det klart at $L^1(G)$ er en kommutativ Banachalgebra med involution.

Hvis G er diskret er funktionen $\delta : G \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = 0 \\ 0 & \text{for } x \neq 0 \end{cases}$$

etelement. Bemærk at $f : G \to \mathbb{C}$ i dette tilfælde tilhører $L^1(G)$ præcis hvis familien $(f(x))_{x \in G}$ er absolut summabel og

$$\|f\|_1 = \sum_{x \in G} |f(x)|.$$

At der ikke er etelement i $L^1(G)$ når G ikke er diskret er mindre elementært, men vil blive vist senere. □

<u>Bemærkning</u>. Under 1-normen $\|f\|_1 = \int |f(x)|\,dx$ er $\mathcal{K}(G)$ en normeret algebra med involution, men der er sædvanligvis ikke fuldstændig. $L^1(G)$ er en konkret fuldstændiggørelse af $\mathcal{K}(G)$.

Mængden af kontinuerte funktioner $f: G \to \mathbb{C}$ der går mod 0 i ∞ betegnes $C_0(G)$. Forsynet med den <u>ligelige norm</u>

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in G} |f(x)|$$

er $C_0(G)$ et Banachrum.

Det til $C_0(G)$ norm-duale Banachrum betegnes $M(G)$ og $M(G)$ kaldes rummet af <u>begrænsede mål</u> på G. Lad μ være et positivt, endeligt (d.v.s $\mu(G)<\infty$) mål på G. Dette mål er en kontinuert linearform på $\mathcal{K}(G)$ når $\mathcal{K}(G)$ udstyres med den ligelige norm, thi

$$\left| \int f(x)\,d\mu(x) \right| \leq \|f\|_\infty \cdot \mu(G).$$

Dermed kan μ på entydig måde fortsættes til en kontinuert linearform på $C_0(G)$, altså til et begrænset mål på G med norm $\leq \mu(G)$. (Der gælder faktisk at normen er lig $\mu(G)$. Vis dette!). Hvis omvendt μ er et positivt mål på G således at μ er en kontinuert linearform på $\mathcal{K}(G)$ udstyret med den ligelige norm, da er μ, som man let ser, et endeligt mål og der gælder at $\mu(G)$ er mindre end eller lig normen af denne linearform.

Mængden af positive endelige mål betegnes $M_+(G)$. Linearkombinationerne

$$\mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4) \tag{2}$$

hvor $\mu_j \in M_+(G)$ er også elementer af $M(G)$, og man kan vise, at ethvert element i $M(G)$ kan skrives på formen (2), hvilket begrunder, at $M(G)$ kaldes rummet af begrænsede mål på G.

For hvert $f \in L^1(G)$ defineres et element $\mu_f \in M(G)$ ved

$$\mu_f(\varphi) = \int \varphi(x) f(x)\, dx \quad , \quad \varphi \in C_0(G),$$

thi $|\mu_f(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1$ således at der gælder

$$\|\mu_f\| \leq \|f\|_1$$

Ved tilordningen $f \mapsto \mu_f$ er defineret en kontinuert lineær afbildning af $L^1(G)$ ind i $M(G)$.

<u>Lemma 2.3</u> Afbildningen $f \mapsto \mu_f$ er en isometri.

Bevis. Idet mængden

$$\{ f \in L^1(G) \mid \|f\|_1 = \|\mu_f\| \}$$

er afsluttet, er det nok at vise påstanden for den tætte mængde $\mathcal{K}(G)$. Lad $f \in \mathcal{K}(G)$ og $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes en kompakt mængde $K \subseteq \mathcal{O} = \{ x \in G \mid f(x) \neq 0 \}$ så Haarmålet af $\mathcal{O} \setminus K$ er mindre end ε. Vælg nu $\varphi \in \mathcal{K}(G)_+$, $0 \le \varphi \le 1$ så $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \mathcal{O}$ og $\varphi = 1$ på K. Funktionen

$$\rho(x) = \begin{cases} \varphi(x) \cdot \dfrac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & \text{for } x \in \mathcal{O} \\ 0 & \text{for } x \notin \mathcal{O} \end{cases}$$

tilhører $\mathcal{K}(G)$ og $\| \rho \|_\infty = 1$. Desuden er

$$\begin{aligned} |\mu_f(\rho)| &= \left| \int \rho(x) f(x) \, dx \right| \\ &= \left| \int_K \rho(x) f(x) \, dx + \int_{\mathcal{O} \setminus K} \rho(x) f(x) \, dx \right| \\ &\ge \int_K |f(x)| \, dx - \| f \|_\infty \cdot \varepsilon \\ &\ge \| f \|_1 - 2 \| f \|_\infty \cdot \varepsilon \, . \end{aligned}$$

Heraf fås

$$\| \mu_f \| \ge \| f \|_1 \quad \text{for} \quad f \in \mathcal{K}(G) . \; \square$$

For $f \in L^1(G)$ kaldes μ_f det begrænsede <u>mål med tæthed</u> f.

Det foregående viser, at $L^1(G)$ kan opfattes som et afsluttet underrum af $M(G)$, nemlig som de endelige mål med tæthed.

Man kan udvide foldningsoperationen fra $L^1(G)$

til hele $M(G)$. Derved bliver $M(G)$ en kommutativ Banachalgebra. Involutionen på $L^1(G)$ kan fortsættes til $M(G)$, ved til $\mu \in M(G)$ at knytte μ^* defineret ved

$$\langle f, \mu^* \rangle = \overline{\langle f^*, \mu \rangle} \quad \text{for } f \in C_0(G).$$

Foldningen af en funktion f på G og et mål μ på G defineres formelt som funktionen

$$\mu * f\,(x) = f * \mu(x) = \int f(x-y)\,d\mu(y) = \langle \tau_x \check{f}, \mu \rangle .$$

For at dette skal have mening må f og μ opfylde visse betingelser.

<u>Sætning 2.4</u> a) Hvis $f \in \mathcal{K}(G)$ og hvis μ er et positivt mål er $\mu * f$ en veldefineret kontinuert funktion. Hvis $\mu(G) < \infty$ er $\mu * f \in C_0(G)$.
b) Hvis $f \in L^1(G)$ og hvis $\mu \in M_+(G)$ er $\mu * f$ defineret næsten overalt og $\mu * f \in L^1(G)$. Endvidere er

$$\| \mu * f \|_1 \leq \mu(G) \, \| f \|_1 .$$

Bevis. a) Vi vil vise, at $\mu * f$ er kontinuert i punktet $x_0 \in G$. Dertil vælges en kompakt omegn V af x_0 og vi sætter $L = V - \operatorname{supp}(f)$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da f er ligeligt kontinuert findes en omegn U af 0 så

$$| f(x) - f(y) | \leq \varepsilon \quad \text{for } x - y \in U.$$

Da

$$|f(x-y) - f(x_0-y)| \leq \varepsilon \cdot 1_L(y) \quad \text{for } y \in G$$

når $x \in (x_0+U) \cap V$, fås

$$|\mu * f(x) - \mu * f(x_0)| \leq \varepsilon \cdot \mu(L) \quad \text{for } x \in (x_0+U) \cap V.$$

Antag nu, at $\mu(G) < \infty$. Til givet $\varepsilon > 0$ findes en kompakt mængde $K \subseteq G$ så $\mu(G \setminus K) \leq \varepsilon$. For $x \notin K + \operatorname{supp}(f)$ gælder

$$|\mu * f(x)| \leq \int_K |f(x-y)|\, d\mu(y) + \int_{G \setminus K} |f(x-y)|\, d\mu(y)$$

$$\leq \|f\|_\infty \, \mu(G \setminus K) \leq \|f\|_\infty \cdot \varepsilon ,$$

hvilket viser, at $\mu * f \in C_0(G)$.

b) Lad f være en Borelfunktion i $L^1(G)$ og lad $\mu \in M_+(G)$. Da

$$\int \left(\int |f(x-y)|\, dx \right) d\mu(y) = \|f\|_1 \, \mu(G) < +\infty$$

følger det af Fubini's sætning, at

$$\mu * f(x) = \int f(x-y)\, d\mu(y)$$

er defineret næsten overalt, og at $\mu * f \in L^1(G)$. Videre fås

$$\|\mu * f\|_1 = \int \left| \int f(x-y)\, d\mu(y) \right| dx$$

$$\leq \int \left(\int |f(x-y)|\, d\mu(y) \right) dx$$

$$= \int \left(\int |f(x-y)|\,dx \right) d\mu(y)$$

$$= \|f\|_1 \cdot \mu(G) \,. \qquad \square$$

Bemærkning. Hvis $f \in L^1(G)$ og $\mu \in M_+(G)$ er af formen $\mu = \mu_g$ for $g \in L^1(G)_+$, så er

$$f * \mu_g(x) = \int f(x-y)\,d\mu_g(y) = \int f(x-y)g(y)\,dy = f*g(x),$$

så det er i denne forbindelse ligegyldigt om vi opfatter g som funktion eller som målet med tæthed g.

Øvelse 2.2 Hvis $f \in L^p(G)$ med $1 \le p \le \infty$ og $\mu \in M_+(G)$ så er $f*\mu \in L^p(G)$ og $\|f*\mu\|_p \le \mu(G)\,\|f\|_p$.

Vi kan nu definere foldningen af to mål $\mu, \nu \in M_+(G)$. For $f \in \mathcal{K}(G)$ er $f*\check{\mu} \in C_0(G)$ og dermed er

$$< f*\check{\mu}, \nu > = \iint f(x+y)\,d\mu(y)\,d\nu(x)$$

veldefineret. Ved afbildningen

$$f \longmapsto < f*\check{\mu}, \nu >$$

defineres en positiv linearform på $\mathcal{K}(G)$, altså et positivt mål på G, som kaldes foldningen $\mu * \nu$ af μ og ν. Der gælder altså

$$< f, \mu*\nu > = < f*\check{\mu}, \nu > = < f*\check{\nu}, \mu >, \qquad (3)$$

specielt er foldningen en kommutativ operation.

Det ses let at

$$\mu * \nu (G) = \mu(G)\, \nu(G)$$

så $\mu * \nu \in M_+(G)$. Dermed er foldningen defineret på $M_+(G)$. Via spaltningen (2) udvides foldningen til hele $M(G)$ på entydig måde, når man kræver at $*$ skal være distributiv m.h.t. addition.

Bemærk, at værdien af et foldningsprodukt $\mu * \nu$ på en funktion f, i analogi med (3), kan beregnes ved at "flytte" den ene faktor μ (eller ν) over på f som $\check{\mu}$ (eller $\check{\nu}$).

Rummet $M(G)$ er således en algebra, endda en Banachalgebra idet

$$\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \, \|\nu\| .$$

Dette vil ikke blive vist. Bemærk dog at for positive μ og ν gælder endda $\|\mu * \nu\| = \|\mu\| \, \|\nu\|$.

Lad $\mu, \nu \in M(G)$ og f være en begrænset kontinuert funktion på G. Integralet

$$\int f(x) \, d(\mu * \nu)(x)$$

er da veldefineret og endeligt. Ved at reducere til positive μ, ν og f ser man at der gælder

$$\int f(x)\, d(\mu * \nu)(x) = \iint f(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) .$$

<u>Øvelse 2.3</u> For $\mu, \nu \in M(G)$ gælder at

$$\operatorname{supp}(\mu * \nu) \subseteq \overline{\operatorname{supp}(\mu) + \operatorname{supp}(\nu)} . \qquad (4)$$

I almindelighed har man ikke lighedstegn i (4)

Foldningen $\mu * \nu$ af målene $\mu, \nu \in M_+(G)$ hvor $\mu = \mu_f$ med $f \in L^1(G)_+$, er det begrænsede mål med tætheden $f * \nu$, altså

$$\mu_f * \nu = \mu_{f*\nu} .$$

For at indse dette skal vi vise at

$$< \varphi, \mu_f * \nu > = \int \varphi(y)\, f*\nu(y)\,dy$$

for alle $\varphi \in \mathcal{K}(G)$. Nu er

$$< \varphi, \mu_f * \nu > = < \varphi * \check{\mu}_f, \nu > = < \varphi * \mu_{\check{f}}, \nu >$$

$$= < \varphi * \check{f}, \nu >$$

$$= \int \left(\int \varphi(y) f(y-x)\, dy \right) d\nu(x)$$

$$= \int \varphi(y)\, f*\nu(y)\, dy .$$

Det følger af sætning 2.4 b), at $L^1(G)$ er et ideal i algebraen $M(G)$.

<u>Formler</u>. Idet vi med ε_a for $a \in G$ betegner Dirac målet koncentreret i punktet a, gælder

$$\varepsilon_a * \varepsilon_b = \varepsilon_{a+b} \qquad \text{for } a, b \in G,$$

$$\varepsilon_a * f(x) = f(x-a) = (\tau_a f)(x) \qquad \text{for } a \in G,$$

$$\varepsilon_a * \mu = \tau_a \mu \qquad \text{for } a \in G .$$

Sammenfattende kan vi sige at $M(G)$ er en kommutativ Banachalgebra med involution og etelement ε_0, og $L^1(G)$ er et afsluttet ideal i $M(G)$.

§3. Dual gruppe og Fouriertransformation.

Lad G være en LCA-gruppe med Haarmål dx.

Definition. En karakter på G er en kontinuert homomorfi af G ind i cirkelgruppen $\mathbb{T}$ $(= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\})$.

Anderledes sagt er en karakter γ på G en kontinuert afbildning $\gamma : G \to \mathbb{C}$, der tilfredsstiller

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\cdot\gamma(y) \quad \text{og} \quad |\gamma(x)| = 1 \quad \text{for } x,y \in G.$$

Mængden af karakterer på G betegnes $\hat{G}$ og $\hat{G}$ er på naturlig måde en abelsk gruppe, hvis komposition $+$ er punktvis multiplikation

$$(\gamma+\gamma')(x) = \gamma(x)\cdot\gamma'(x) \qquad , \gamma, \gamma' \in \hat{G}, \text{ og } x \in G.$$

Neutralelementet 0 i $\hat{G}$ er funktionen konstant 1 på G, og det til karakteren γ inverse element $-\gamma$ i $\hat{G}$ er funktionen

$$x \mapsto \overline{\gamma(x)} = \frac{1}{\gamma(x)}.$$

Vi vil nu udstyre gruppen $\hat{G}$ med en topologi. Da $\hat{G}$ er en delmængde af rummet $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$ af kontinuerte komplekse funktioner på G, kan vi udstyre $\hat{G}$ med delrumstopologien fra den <u>naturlige topologi</u> på $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$, nemlig topologien for <u>ligelig konvergens over kompakte mængder</u>, der er givet ved familien af seminormer p_K, K kompakt delmængde af G,

$$p_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)| \qquad , \; f \in \mathscr{C}(G,\mathbb{C}) .$$

Mængderne

$$\{\gamma \in \hat{G} \mid |\gamma(x) - \gamma_0(x)| < \varepsilon \;\; \forall x \in K\}$$

hvor K er kompakt i G og $\varepsilon > 0$, udgør en basis for omegnene af γ_0 i $\hat{G}$, specielt vil mængderne

$$\mathcal{U}_G(K,\varepsilon) = \{\gamma \in \hat{G} \mid |1 - \gamma(x)| < \varepsilon \;\; \forall x \in K\}$$

udgøre en basis for omegnene af 0 i $\hat{G}$.

Med denne topologi bliver $\hat{G}$ en topologisk gruppe. (Overvej dette).

Man kan også direkte vise, at $\hat{G}$ derved bliver en lokalkompakt gruppe, men beviset er ikke helt nemt, så vi foretrækker at få dette resultat som biprodukt af de følgende resultater.

Gruppen $\hat{G}$ kaldes den til G <u>duale gruppe</u>.

<u>Lemma 3.1</u> Afbildningen $(x,\gamma) \mapsto \gamma(x)$ af $G\times\hat{G}$ ind i $\mathbb{T}$ er kontinuert.

Bevis. Lad $x_0 \in G$, $\gamma_0 \in \hat{G}$, $\varepsilon > 0$. Der findes en kompakt omegn K af x_0 så $|\gamma_0(x) - \gamma_0(x_0)| < \varepsilon$ for alle $x \in K$. For $x \in K$ og for $\gamma \in \gamma_0 + \mathcal{U}_G(K, \varepsilon)$ gælder da

$$|\gamma(x) - \gamma_0(x_0)| \leq |\gamma(x) - \gamma_0(x)| + |\gamma_0(x) - \gamma_0(x_0)| < 2\varepsilon . \quad \blacksquare$$

Idet vi tænker os bevist, at den topologiske abelske gruppe $\hat{G}$ er lokalkompakt, kan vi danne dens duale gruppe $\hat{\hat{G}}$, som kaldes den til G biduale gruppe.

For hvert $x \in G$ defineres en karakter på $\hat{G}$ ved

$$\gamma \mapsto \gamma(x) \quad , \ \gamma \in \hat{G} .$$

Ved til $x \in G$ at lade svare karakteren $\gamma \mapsto \gamma(x)$ på $\hat{G}$ defineres en afbildning $j : G \to \hat{\hat{G}}$ og j er klart en gruppehomomorfi.

Det vil senere blive bevist (PONTRIAGIN's dualitetssætning) at j er en isomorfi af G på $\hat{\hat{G}}$, altså at j er en homeomorfi og en gruppeisomorfi. Bemærk analogien til topologiske vektorrum.

Da $L^1(G)$ er en kommutativ Banachalgebra, har vi den generelle Gelfand-transformation teori til rådighed. Vi vil vise, at spektret Δ for $L^1(G)$ kan identificeres med den duale gruppe $\hat{G}$.

Sætning 3.2 For hvert $\gamma \in \hat{G}$ defineres ved

$$L_\gamma(f) = \int_G f(x)\gamma(x)\,dx\,, \qquad f \in L^1(G)$$

en karakter L_γ på algebraen $L^1(G)$. Afbildningen $\gamma \overset{L}{\mapsto} L_\gamma$ er en homeomorfi af $\hat{G}$ på Δ.

Bevis. Vi vil forudsætte bekendt, at det topologisk duale rum til $L^1(G)$ kan identificeres med $L^\infty(G)$. Mere præcist, hvis $\varphi \in L^\infty(G)$ defineres en kontinuert linearform L_φ på $L^1(G)$ ved

$$L_\varphi(f) = \int_G f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

og afbildningen $\varphi \mapsto L_\varphi$ er en isometrisk isomorfi af $L^\infty(G)$ på $(L^1(G))'$.

Da $\gamma \in \hat{G}$ er en L^∞-funktion, ved vi altså at L_γ er en kontinuert linearform på $L^1(G)$. At L_γ er en karakter ses således:

$$L_\gamma(f*g) = \int\Big(\int f(y)g(x-y)\,dy\Big)\gamma(x)\,dx = \int\Big(f(y)\int g(x-y)\gamma(x)\,dx\Big)dy$$

$$= \int\Big(f(y)\int g(x)\gamma(x+y)\,dx\Big)dy = \int\Big(f(y)\gamma(y)\int g(x)\gamma(x)\,dx\Big)dy =$$

$$L_\gamma(f)\cdot L_\gamma(g).$$

Hvis γ_1 og γ_2 er forskellige karakterer er $\gamma_1 \neq \gamma_2$ som elementer af $L^\infty(G)$, fordi Haarmålets støtte er hele G. Dermed er afbildningen $L : \hat{G} \to \Delta$ givet ved $\gamma \mapsto L_\gamma$ en injektiv afbildning.

Vi vil nu vise, at L er surjektiv. Lad $\delta \in \Delta$. Da $\delta \in (L^1(G))'$ findes en L^∞-funktion φ på G så

$$\delta(f) = \int f(x)\varphi(x)dx \tag{1}$$

for alle $f \in L^1(G)$. For vilkårlige $f, g \in L^1(G)$ gælder

$$\int \delta(f)\varphi(y)g(y)dy = \int \delta(\tau_y f)\, g(y)dy \tag{2}$$

thi venstre side er lig med

$$\delta(f)\delta(g) = \delta(f*g) = \int\Big(g(y)\int f(x-y)\varphi(x)dx\Big)dy = \int \delta(\tau_y f)\, g(y)dy.$$

Af (2) følger at funktionerne $y \mapsto \delta(f)\varphi(y)$ og $y \mapsto \delta(\tau_y f)$ er ens i $L^\infty(G)$, men den sidste er kontinuert (sætning 1.4), så ved at vælge f så $\delta(f) \neq 0$ følger, at φ i L^∞-forstand er lig med en kontinuert funktion. I integralet (1) kan vi derfor antage at φ er kontinuert, men så følger at

$$\delta(f)\varphi(y) = \delta(\tau_y f) \tag{3}$$

for alle $y \in G$ og for alle $f \in L^1(G)$. Af (3) fås nu

$$\delta(f)\varphi(x+y) = \delta(\tau_{x+y} f) = \delta(\tau_x(\tau_y f)) = \delta(\tau_y f)\varphi(x) = \delta(f)\varphi(x)\varphi(y),$$

og vælges f så $\delta(f) \neq 0$ sluttes at

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) \tag{4}$$

Da φ ikke er identisk 0 følger af (4), at $\varphi(x)$ er forskellig fra 0 for alle $x \in G$. Da en karakter δ altid har norm $\|\delta\| \le 1$ er $\|\varphi\|_\infty \le 1$, altså

$$|\varphi(x)| \le 1 \quad \text{for alle } x \in G.$$

Af (*) følger, at $\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}$, altså er også

$$\left|\frac{1}{\varphi(x)}\right| \le 1$$

eller $|\varphi(x)| \ge 1$, så $|\varphi(x)| = 1$ for alle $x \in G$. Dermed er $\varphi \in \hat{G}$ og $\delta = L_\varphi$.

<u>L er kontinuert</u>. Dette kommer ud på at vise, at for fast $f \in L^1(G)$ er afbildningen af $\hat{G}$ ind i $\mathbb{C}$ givet ved

$$\gamma \mapsto L_\gamma(f) = \int f(x)\gamma(x)\,dx$$

kontinuert, idet topologien på Δ er en initialtopologi.

Lad $\gamma_0 \in \hat{G}$ og $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes en kompakt mængde $K \subseteq G$ så

$$\int_{G \setminus K} |f(x)|\,dx < \varepsilon .$$

For $\gamma \in \gamma_0 + \mathcal{U}_G(K, \varepsilon)$ gælder

$$|L_\gamma(f) - L_{\gamma_0}(f)| \le \int |f(x)||\gamma(x) - \gamma_0(x)|\,dx$$

$$= \int_{G \setminus K} |f(x)||\gamma(x) - \gamma_0(x)|\,dx + \int_K |f(x)||\gamma(x) - \gamma_0(x)|\,dx \le 2\varepsilon + \varepsilon\|f\|_1,$$

hvilket viser kontinuiteten.

Vi viser dernæst at for fast $f \in L^1(G)$ er afbildningen af $G \times \Delta \to \mathbb{C}$ givet ved

$$(x, \delta) \mapsto \delta(\tau_x f)$$

en kontinuert afbildning.

Lad $x_0 \in G$, $\delta_0 \in \Delta$ være fixeret og lad $\varepsilon > 0$. Af sætning 1.4 følger, at der findes en omegn $\mathcal{U}$ af x_0 i G så $\|\tau_x f - \tau_{x_0} f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ for $x \in \mathcal{U}$, og ifølge definitionen af topologien på Δ findes en omegn V af δ_0, så der for alle $\delta \in V$ gælder

$$|\delta(\tau_{x_0} f) - \delta_0(\tau_{x_0} f)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

For $(x, \delta) \in \mathcal{U} \times V$ har vi så

$$|\delta(\tau_x f) - \delta_0(\tau_{x_0} f)| \le |\delta(\tau_x f) - \delta(\tau_{x_0} f)| + |\delta(\tau_{x_0} f) - \delta_0(\tau_{x_0} f)|$$
$$\le \|\tau_x f - \tau_{x_0} f\|_1 + |\delta(\tau_{x_0} f) - \delta_0(\tau_{x_0} f)| < \varepsilon.$$

Vi kan nu se at $\underline{L^{-1} : \Delta \to \hat{G} \text{ er kontinuert.}}$

Af (3) følger at

$$\delta(\tau_x f) = \delta(f)\, L^{-1}(\delta)(x)$$

for $f \in L^1(G)$, $\delta \in \Delta$, $x \in G$. Lad $\delta_0 \in \Delta$ og lad $(\delta_i)_{i \in I}$ være et net på Δ der konvergerer mod δ_0. Lad K være en vilkårlig kompakt delmængde af G. Vi vælger $f \in L^1(G)$ så $\delta_0(f) \neq 0$. Af kontinuiteten af $\delta(\tau_x f)$ i de to variable x og δ følger at

$$\delta_i(\tau_x f) \to \delta_0(\tau_x f) \quad \text{ligeligt for } x \in K,$$

eller

$$\delta_i(f)\, L^{-1}(\delta_i)(x) \to \delta_0(f)\, L^{-1}(\delta_0)(x) \quad \text{ligeligt for } x \in K.$$

Da samtidig $\delta_i(f) \to \delta_0(f)$ $(\neq 0)$, følger heraf at

$$L^{-1}(\delta_i)(x) \to L^{-1}(\delta_0)(x) \qquad \text{ligeligt for } x \in K.$$

Dette viser, at $L^{-1}(\delta_i) \to L^{-1}(\delta_0)$ i $\hat{G}$, altså at L^{-1} er kontinuert. $\|$

Det er velkendt fra matematik 6 at Δ er et lokalkompakt rum, og derved har vi vist, at den duale gruppe $\hat{G}$ er en LCA-gruppe. Idet vi fra nu af identificerer $\hat{G}$ og Δ bliver Gelfandtransformationen en homomorfi $\mathcal{G}$ af $L^1(G)$ ind i algebraen $C_0(\hat{G})$ givet ved

$$\mathcal{G}f(\gamma) = \int_G f(x)\gamma(x)dx$$

Af historiske grunde indfører vi betegnelserne

$$\mathcal{F}f(\gamma) = \hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,dx$$

og

$$\overline{\mathcal{F}}f(\gamma) = \int_G f(x)\gamma(x)\,dx$$

og $\mathcal{F}$ eller $\hat{\ }$ kaldes <u>Fouriertransformationen</u> medens $\overline{\mathcal{F}}$ kaldes <u>co-Fouriertransformationen</u>.

Bemærk, at

$$\mathcal{F}(\check{f}) = (\mathcal{F}f)^\vee = \overline{\mathcal{F}}f \quad , \quad \mathcal{F}(f^*) = \overline{\mathcal{F}f}$$

og den sidste identitet viser, at $\mathcal{F}$ er en $*$ homomorfi af $L^1(G)$ ind i $C_0(\hat{G})$. Heraf følger at billedalgebraen

$$A(\hat{G}) = \mathcal{F}(L^1(G))$$

er en selvadjungeret delalgebra, og ved Stone-Weierstrass' sætning ses, at $A(\hat{G})$ er tæt i $C_0(\hat{G})$. Vi opsummerer det foregående i en sætning.

<u>Sætning 3.3</u> Fouriertransformationen $\mathcal{F}$ der afbilder $L^1(G)$ ind i $C_0(\hat{G})$ har egenskaberne

a) $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathcal{F}(f) + \beta\,\mathcal{F}(g)$

b) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$

c) $\|\mathcal{F}f\|_\infty \le \|f\|_1$

d) $\mathcal{F}(f^*) = \overline{\mathcal{F}f}$

e) $\mathcal{F}(\tau_y f)(\gamma) = \overline{\gamma(y)}\,\mathcal{F}f(\gamma)$; $\mathcal{F}(\gamma f) = \tau_\gamma \mathcal{F}(f)$

f) Billedet $A(\hat{G})$ er en selvadjungeret delalgebra af $C_0(\hat{G})$ der er tæt i $C_0(\hat{G})$.

<u>Bemærkning</u>. Der gælder $A(\hat{G}) = C_0(\hat{G})$ hvis og kun hvis G er en endelig gruppe. Jvfr. C.C. Graham, Proc. Amer. Math. Soc. 38, 2 (1973) p. 365-366.

<u>Sætning 3.4</u> Lad G være en LCA-gruppe med dual gruppe $\hat{G}$. For enhver kompakt mængde $K \subseteq G$ med indre punkter og for $0 < \varepsilon < 1$ er $\mathcal{U}_G(K, \varepsilon)$ en relativt kompakt omegn af 0 i $\hat{G}$.

Bevis. Vi vælger $f \in \mathcal{K}_+(G)$ så supp $f \subseteq K$ og $\int f(x)dx = 1$, hvilket er muligt da vi forudsætter, at K har ikke tomt indre. Vi vil indse at

$$\mathcal{U}_G(K,\varepsilon) \subseteq \{\gamma \in \hat{G} \mid |\hat{f}(\gamma)| \geq 1-\varepsilon\}$$

hvilket giver det ønskede, thi da $\hat{f} \in C_0(\hat{G})$ er

$$\{\gamma \in \hat{G} \mid |\hat{f}(\gamma)| \geq 1-\varepsilon\}$$

kompakt.

For $\gamma \in \mathcal{U}_G(K,\varepsilon)$ har vi

$$|\hat{f}(\gamma)| \geq \operatorname{Re} \hat{f}(\gamma) = \int \operatorname{Re} \gamma(x) f(x)dx = \int_K \operatorname{Re} \gamma(x) \cdot f(x)dx \geq (1-\varepsilon)\int_K f(x)dx$$

$= 1-\varepsilon$, idet $\operatorname{Re}(1-\gamma(x)) \leq |1-\gamma(x)| < \varepsilon$ for $\gamma \in \mathcal{U}_G(K,\varepsilon)$ og $x \in K$.

II

<u>Sætning 3.5</u> Hvis G er kompakt (resp. diskret) er $\hat{G}$ diskret (resp. kompakt).

Bevis. Hvis G er kompakt er karaktererne $\gamma \in \hat{G}$ kvadratisk integrable. Der gælder at forskellige karakterer er ortogonale. Hvis nemlig $\gamma \in \hat{G}$, $\gamma \not\equiv 1$, findes $x_0 \in G$ så $\gamma(x_0) \neq 1$. Så fås

$$\int \gamma(x)dx = \int \gamma(x+x_0)dx = \gamma(x_0)\int \gamma(x)dx,$$

og heraf ses at

$$\int \gamma(x)dx = 0 .$$

Derfor fås

$$\int \gamma_1(x)\overline{\gamma_2(x)}\, dx = \int (\gamma_1 - \gamma_2)(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \gamma_1 = \gamma_2 \\ 0 & \text{hvis } \gamma_1 \neq \gamma_2 . \end{cases}$$

(Vi har normaliseret Haarmålet på G så totalmassen er 1).

For funktionen f konstant lig med 1 har vi dermed

$$\hat{f}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{for } \gamma = 0 \\ 0 & \text{for } \gamma \neq 0, \end{cases}$$

men da $\hat{f}$ er kontinuert på $\hat{G}$, kan vi heraf slutte, at $\{0\} = \{|\hat{f}| > 0\}$ er en åben mængde, altså er $\hat{G}$ diskret.

Hvis G er diskret har $L^1(G)$ etelement og så er Δ kompakt.

Et mere direkte bevis for at $\hat{G}$ er kompakt, når G er diskret, fås af sætning 3.4 ifølge hvilken

$$\mathcal{U}_G(\{0\}, \tfrac{1}{2}) = \hat{G}$$

er relativt kompakt. Altså er $\hat{G}$ kompakt. $\square$

Eksempler.

1) $G = \mathbb{R}$. For hvert $a \in \mathbb{R}$ er funktionen

$$x \mapsto e^{iax} \qquad (*)$$

en karakter på $\mathbb{R}$, og afbildningen af $\mathbb{R}$ ind i $\hat{\mathbb{R}}$ der til a lader svare karakteren $(*)$ er injektiv. (Overvej dette). Omvendt er enhver karakter $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$ af denne form med et $a \in \mathbb{R}$. For $\delta > 0$ tilstrækkeligt nær ved 0 gælder

$$\int_0^\delta \gamma(t)\,dt = \alpha \neq 0 .$$

Da γ er en karakter finder vi

$$\alpha\,\gamma(x) = \gamma(x)\int_0^\delta \gamma(t)\,dt = \int_0^\delta \gamma(x+t)\,dt = \int_x^{x+\delta} \gamma(t)\,dt .$$

Nu er det sidste integral en kontinuert differentiabel funktion af x og dermed er γ en kontinuert differentiabel funktion. Ved at differentiere funktionalligningen for γ finder vi

$$\gamma'(t+x) = \gamma'(t)\gamma(x)$$

hvoraf for $t=0$

$$\gamma'(x) = \gamma'(0)\gamma(x) \qquad (**)$$

Som løsning til differentialligningen $(**)$ med begyndelsesbetingelsen $\gamma(0)=1$ har vi

$$\gamma(x) = e^{\gamma'(0)x} .$$

Af identiteten $\gamma(t)\overline{\gamma(t)} = 1$ følger ved differentiation at $\mathrm{Re}(\gamma'(t)\overline{\gamma(t)}) = 0$, specielt $\mathrm{Re}\,\gamma'(0) = 0$. Vi har derfor $\gamma'(0) = ia$ for et $a \in \mathbb{R}$.

Den til $\mathbb{R}$ duale gruppe $\hat{\mathbb{R}}$ kan således identificeres med $\mathbb{R}$ ved hjælp af isomorfien

$$a \in \mathbb{R} \quad \longleftrightarrow \quad (x \mapsto e^{iax}) \in \hat{\mathbb{R}} . \qquad (***)$$

<u>Øvelse 3.1</u> Et net af karakterer $(e^{ia_j \cdot})_{j\in J}$ konvergerer mod karakteren $e^{ia\cdot}$ i topologien på $\hat{\mathbb{R}}$ hvis og kun hvis $(a_j)_{j\in J}$ konvergerer mod a i $\mathbb{R}$. (Vink: Indirekte bevis).

Topologien på $\hat{\mathbb{R}}$ er altså via identifikationen $(***)$ den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$.

2) $G = \mathbb{T}$. Idet $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ er karaktererne på $\mathbb{T}$ netop de karakterer på $\mathbb{R}$, som er periodiske med perioden 2π. Den til $\mathbb{T}$ duale gruppe $\hat{\mathbb{T}}$ kan derfor identificeres med $\mathbb{Z}$:

$$\hat{\mathbb{T}} \ni e^{ia\cdot} \longleftrightarrow a \in \mathbb{Z}.$$

Topologien på $\hat{\mathbb{T}} \approx \mathbb{Z}$ er den diskrete, jfr. øvelse 1.3 og sætning 3.5.

For $f \in L^1(\mathbb{T})$ er $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ Fourierkoefficienterne i f's Fourierække

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{in\theta}$$

og

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta .$$

3) $G = \mathbb{Z}$. Karaktererne på $\mathbb{Z}$ er entydigt bestemt ved deres værdi i punktet 1. Denne værdi kan være et vilkårligt element i $\mathbb{T}$, altså et tal af formen $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0, 2\pi[$. Karakteren svarende til $e^{i\alpha} \in \mathbb{T}$ er funktionen

$$\gamma(n) = (e^{i\alpha})^n = e^{i\alpha n} \qquad \text{for } n \in \mathbb{Z}.$$

Den til $\mathbb{Z}$ duale gruppe $\hat{\mathbb{Z}}$ kan således identificeres med $\mathbb{T}$:

$$\hat{\mathbb{Z}} \ni \gamma \leftrightarrow e^{i\alpha} \in \mathbb{T}.$$

<u>Øvelse 3.2.</u> Topologien på $\hat{\mathbb{Z}}$ er, når $\hat{\mathbb{Z}}$ identificeres med $\mathbb{T}$, den sædvanlige topologi på $\mathbb{T}$.

4) Hvis $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ er et endeligt produkt af LCA-grupper er $\hat{G}$ isomorf med produktet $\hat{G}_1 \times \cdots \times \hat{G}_n$. Den til $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \hat{G}_1 \times \cdots \times \hat{G}_n$ svarende karakter på G er funktionen

$$G \ni (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \gamma_1(x_1)\cdots\gamma_n(x_n) \in \mathbb{T}.$$

Specielt kan den til $\mathbb{R}^n$ duale gruppe $\hat{\mathbb{R}}^n$ identificeres med $\mathbb{R}^n$. Til $a \in \mathbb{R}^n$ svarer karakteren

$$x \mapsto e^{i\langle a,x\rangle}$$

hvor $\langle a,x\rangle$ er skalarproduktet af a og x.

5) Lad G være en endelig cyklisk gruppe med elementerne $e, u, u^2, \dots, u^{n-1}$. En karakter γ på G er givet ved sin værdi i punktet u, $a = \gamma(u)$, og idet $a^n = \gamma(u^n) = \gamma(e) = 1$, er a en n'te enhedsrod. Man ser nu let, at $\hat{G}$ er isomorf med gruppen af n'te enhedsrødder, altså $\hat{G}$ er isomorf med G.

Idet enhver endelig abelsk gruppe er produkt af endelige cykliske grupper, er enhver endelig abelsk gruppe isomorf med sin duale gruppe.

<u>Øvelse 3.3</u>. Lad $G = (\mathbb{R}_+, \cdot)$ være den lokalkompakte gruppe af positive tal med multiplikation som komposition og udstyret med det Haarmål, der giver intervallet $[1, e]$ massen 1.

For en funktion $f \in L^1(G)$ defineres den <u>Mellintransformerede</u> funktion $Mf : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved

$$Mf(y) = \int_0^\infty x^{iy-1} f(x)\,dx$$

og afbildningen $f \mapsto Mf$ kaldes <u>Mellintransformationen</u>. (Robert Hjalmar Mellin, finsk matematiker, 1854–1933).

Gør rede for at Mellintransformationen er Fouriertransformationen af $L^1(G)$, og beskriv derved eksplicit karaktererne på G.

Vi skal nu udvide Fouriertransformationen fra $L^1(G)$ til rummet af begrænsede mål på G. Lad $\mu \in M(G)$. Integralet

$$\int_G \overline{\gamma(x)}\, d\mu(x)$$

er veldefineret og endeligt for $\gamma \in \hat{G}$, da γ er en kontinuert begrænset funktion og μ er linearkombination af positive endelige mål på G. Funktionen

$$\hat{G} \ni \gamma \longmapsto \mathcal{F}\mu(\gamma) = \int_G \overline{\gamma(x)}\, d\mu(x)$$

kaldes den <u>Fouriertransformerede af μ</u> og betegnes også $\hat{\mu}$. Analogt defineres den <u>co-Fouriertransformerede</u> af μ ved

$$\overline{\mathcal{F}}\mu(\gamma) = \int_G \gamma(x)\, d\mu(x) \qquad , \ \gamma \in \hat{G}.$$

<u>Bemærkning</u>. Af sætning 3.6 nedenfor fremgår, at afbildningen

$$M(G) \ni \mu \mapsto \hat{\mu}(\gamma) \in \mathbb{C}$$

er en karakter på algebraen $M(G)$, for alle $\gamma \in \hat{G}$; der er således en naturlig indlejring af $\hat{G}$ ind i spektret $\widehat{M(G)}$ for algebraen $M(G)$. Den Fouriertransformerede af målet $\mu \in M(G)$ kan således opfattes som restriktionen af den Gelfandtransformerede (i algebraen $M(G)$) af μ til "delmængden" $\hat{G} \subseteq \widehat{M(G)}$.

<u>Sætning 3.6</u> For alle $\mu \in M(G)$ er funktionen $\mathcal{F}\mu$ ligeligt kontinuert og begrænset, og hvis $\mu \in M(G)_+$ gælder

$$\|\mathcal{F}\mu\|_\infty \leq \|\mu\| = \mu(G).$$

Fouriertransformationen er en $*$-homomorfi af algebraen $M(G)$ ind i algebraen af kontinuerte begrænsede funktioner på $\hat{G}$.

Bevis. For at vise at $\mathcal{F}\mu$ er ligeligt kontinuert, kan vi antage at $\mu \in M(G)_+$. Til et givet $\delta > 0$ findes en kompakt mængde $K \subseteq G$ så $\mu(G \setminus K) < \delta$. For $\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$ finder vi

$$|\mathcal{F}\mu(\gamma_1) - \mathcal{F}\mu(\gamma_2)| = \left|\int_G \overline{(\gamma_1(x) - \gamma_2(x))}\, d\mu(x)\right|$$

$$= \left|\int_G \overline{\gamma_2(x)}\,\overline{((\gamma_1 - \gamma_2)(x) - 1)}\, d\mu(x)\right| \leq \int_G |(\gamma_1 - \gamma_2)(x) - 1|\, d\mu(x).$$

For $\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$ opfyldende $\gamma_1 - \gamma_2 \in \mathcal{U}_G(K, \delta)$ gælder da

$$|\mathcal{F}\mu(\gamma_1) - \mathcal{F}\mu(\gamma_2)| \leq \int_K |(\gamma_1 - \gamma_2)(x) - 1|\, d\mu(x) + \int_{G\setminus K} |(\gamma_1 - \gamma_2)(x) - 1|\, d\mu(x)$$

$$\leq \delta\mu(K) + 2\delta.$$

Det er klart at $\|\mathcal{F}\mu\|_\infty \leq \mu(G)$ for $\mu \in M_+(G)$, og heraf følger at $\mathcal{F}\mu$ er begrænset for vilkårligt $\mu \in M(G)$.

Da Fouriertransformationen på $M(G)$ klart er lineær skal vi blot vise at

$$\mathcal{F}(\mu * \nu) = \mathcal{F}\mu \cdot \mathcal{F}\nu \qquad \text{for } \mu, \nu \in M(G)$$

og

$$\mathcal{F}\mu^* = \overline{\mathcal{F}\mu} \qquad \text{for } \mu \in M(G).$$

For $\mu, \nu \in M(G)$ og $\gamma \in \hat{G}$ finder vi

$$\mathcal{F}(\mu*\nu)(\gamma) = \int \overline{\gamma(x)}\, d\mu*\nu(x)$$

$$= \iint \overline{\gamma(x+y)}\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

$$= \int \overline{\gamma(x)}\, d\mu(x) \int \overline{\gamma(y)}\, d\nu(y)$$

$$= \mathcal{F}\mu(\gamma) \cdot \mathcal{F}\nu(\gamma) ,$$

og analogt

$$\mathcal{F}\mu^*(\gamma) = \int \overline{\gamma(x)}\, d\mu^*(x) = \overline{\int \overline{\overline{\gamma(-x)}}\, d\mu(x)}$$

$$= \overline{\int \overline{\gamma(x)}\, d\mu(x)} = \overline{\mathcal{F}\mu(\gamma)} . \qquad \square$$

<u>Bemærkning</u>. Hvis vi udregner $\mathcal{F}\mu$ for $\mu = \varepsilon_0$ finder vi

$$\mathcal{F}\varepsilon_0(\gamma) = \int \overline{\gamma(x)}\, d\varepsilon_0(x) = \overline{\gamma(0)} = 1 \qquad \text{for } \gamma \in \hat{G},$$

og $\mathcal{F}\mu$ vil således ikke i almindelighed tilhøre $C_0(\hat{G})$. Hvis derimod μ har tætheden $f \in L^1(G)$, gælder naturligvis at $\mathcal{F}\mu = \mathcal{F}f$, som tilhører $C_0(\hat{G})$.

<u>Formler</u>. For $\mu \in M(G)$, $x \in G$ og $\gamma, \gamma_1 \in \hat{G}$ gælder

(1) $\quad \mathcal{F}\check{\mu} = (\mathcal{F}\mu)^{\vee} = \overline{\mathcal{F}}\mu$.

(2) $\quad \mathcal{F}\varepsilon_x(\gamma) = \overline{\gamma(x)} \quad , \quad \overline{\mathcal{F}}\varepsilon_x(\gamma) = \gamma(x)$.

(3) $\quad \mathcal{F}(\varepsilon_x*\mu)(\gamma) = \overline{\gamma(x)}\, \mathcal{F}\mu(\gamma) \quad , \quad \overline{\mathcal{F}}(\varepsilon_x*\mu)(\gamma) = \gamma(x)\, \overline{\mathcal{F}}\mu(\gamma)$.

$$(4) \quad \mathcal{F}(\gamma_1\mu)(\gamma) = \int \overline{\gamma(x)}\,\gamma_1(x)\,d\mu(x) = \int \overline{(\gamma-\gamma_1)(x)}\,d\mu(x) =$$

$$= \mathcal{F}\mu(\gamma-\gamma_1) = \tau_{\gamma_1}\mathcal{F}\mu(\gamma) = \varepsilon_{\gamma_1} * \mathcal{F}\mu(\gamma).$$

Formlen $\overline{\mathcal{F}}\varepsilon_x(\gamma) = \gamma(x)$, altså $\overline{\mathcal{F}}\varepsilon_x = j(x)$, kan udtrykkes, at den co-Fouriertransformerede af målet ε_x på G er karakteren x på $\hat{G}$ (egentlig karakteren $j(x)$ som identificeres med x).

§4. Positiv definite funktioner.

Vi minder om at en $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})$ af komplekse tal kaldes <u>positiv hermite'sk</u> eller <u>positiv-semidefinit</u>, såfremt den ved A bestemte operator i Hilbertrummet $\mathbb{C}^n$ er en positiv hermite'sk operator, altså såfremt

$$(A\underline{c}\,|\,\underline{c}) \geq 0 \quad \text{for alle } \underline{c} \in \mathbb{C}^n, \qquad (1)$$

d.v.s.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\overline{c_i}\,c_j \geq 0 \quad \text{for alle } \underline{c} \in \mathbb{C}^n.$$

Matricen A er positiv hermite'sk hvis og kun hvis A er hermite'sk, d.v.s. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, og A's egenværdier er ≥ 0.

<u>Lemma 4.1</u> Lad $A = (a_{ij})$ og $B = (b_{ij})$ være positive hermite'ske matricer. Så er matricen

$$C = (c_{ij}) \quad \text{hvor } c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$$

positiv hermite'sk.

Bevis. Der findes en positiv hermite'sk matrix P så $B = P^*P$. Idet $P = (p_{ij})$ har vi

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \overline{p_{ki}}\, p_{kj} ,$$

og dermed er

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij}\, \bar{c}_i\, c_j = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \overline{(p_{ki} c_i)} (p_{kj} c_j) \Big) \geq 0 . \quad \|$$

Lad G være en LCA-gruppe.

<u>Definition</u>. En funktion $\varphi : G \to \mathbb{C}$ kaldes <u>positiv definit</u>, såfremt det for alle naturlige tal n og alle n-sæt af elementer $x_1, \dots, x_n \in G$ gælder, at matricen $(\varphi(x_i - x_j))$ er positiv hermite'sk.

Lad φ være en positiv definit funktion. Da 1×1 matricen $(\varphi(0))$ er positiv hermite'sk er $\varphi(0) \geq 0$.

For hvert $x \in G$ er matricen

$$\begin{pmatrix} \varphi(0) & \varphi(-x) \\ \varphi(x) & \varphi(0) \end{pmatrix}$$

positiv hermite'sk, altså gælder

(a) $\qquad \varphi(-x) = \overline{\varphi(x)} \qquad (\text{d.v.s. } \varphi^* = \varphi)$

(b) $\qquad |\varphi(x)| \leq \varphi(0)$

Specielt er φ begrænset og $\sup_{x \in G} |\varphi(x)| = \varphi(0)$.

For alle $x, y \in G$ er matricen

$$\begin{pmatrix} \varphi(0) & \varphi(x) & \varphi(y) \\ \overline{\varphi(x)} & \varphi(0) & \overline{\varphi(x-y)} \\ \overline{\varphi(y)} & \varphi(x-y) & \varphi(0) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

positiv hermitisk. Vælges

$$\underline{c} = \left(1, \frac{\lambda|\varphi(x)-\varphi(y)|}{\varphi(x)-\varphi(y)}, -\frac{\lambda|\varphi(x)-\varphi(y)|}{\varphi(x)-\varphi(y)}\right)$$

hvor $\lambda \in \mathbb{R}$, giver (1)

$$\varphi(0)(1+2\lambda^2) + 2\lambda|\varphi(x)-\varphi(y)| - 2\lambda^2 \operatorname{Re}\varphi(x-y) \geq 0$$

Diskriminanten for dette 2. grads polynomium i λ er ≤ 0, altså

$$\text{(c)} \qquad |\varphi(x)-\varphi(y)|^2 \leq 2\varphi(0)(\varphi(0) - \operatorname{Re}\varphi(x-y)).$$

Hvis 3×3 matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ \bar\lambda & 1 & \xi \\ \bar\mu & \bar\xi & 1 \end{pmatrix}$$

er positiv hermite'sk er determinanten (= produktet af egenværdierne) ≥ 0, altså er

$$1 + \lambda\xi\bar\mu + \mu\bar\lambda\bar\xi \geq |\mu|^2 + |\xi|^2 + |\lambda|^2$$

eller

$$|\bar\xi - \lambda\bar\mu|^2 \leq (1-|\lambda|^2)(1-|\mu|^2).$$

Anvendes dette på 3×3 matricen $(*)$, hvor vi har divideret alle elementer med $\varphi(0)$ fås følgende ulighed:

$$(d)\quad \left|\frac{\varphi(x-y)}{\varphi(0)} - \frac{\varphi(x)}{\varphi(0)}\,\frac{\overline{\varphi(y)}}{\varphi(0)}\right| \le \left(1-\left|\frac{\varphi(x)}{\varphi(0)}\right|^2\right)\left(1-\left|\frac{\varphi(y)}{\varphi(0)}\right|^2\right),$$

eller for positiv definite funktioner så $\varphi(0)=1$ under benyttelse af (a)

$$(e)\quad |\varphi(x+y) - \varphi(x)\,\varphi(y)| \le (1-|\varphi(x)|^2)(1-|\varphi(y)|^2).$$

<u>Lemma 4.2.</u> En positiv definit funktion φ på G er ligeligt kontinuert blot $\operatorname{Re}\varphi$ er nedad halvkontinuert i 0.

Bevis. Hvis funktionen $\operatorname{Re}\varphi$ er nedad halvkontinuert i 0 er den faktisk kontinuert i 0, thi for $\varepsilon > 0$ er

$$\{x\in G \mid \operatorname{Re}\varphi(x) \in \,]\varphi(0)-\varepsilon, \varphi(0)+\varepsilon[\,\}$$

$$= \{x\in G \mid \operatorname{Re}\varphi(x) > \varphi(0)-\varepsilon\}$$

på grund af uligheden $\operatorname{Re}\varphi(x) \le |\varphi(x)| \le \varphi(0)$. Af uligheden (c) aflæses direkte, at hvis $\operatorname{Re}\varphi$ er kontinuert i 0, så er φ ligeligt kontinuert. ‖.

Mængden af <u>kontinuerte positiv definite funktioner</u> på G betegnes $\mathcal{P}(G)$.

<u>Sætning 4.3.</u>

(i) Mængden $\mathcal{P}(G)$ er en konveks kegle.

(ii) For $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(G)$ er $\varphi\cdot\psi \in \mathcal{P}(G)$

(iii) For $\varphi \in \mathcal{P}(G)$ er $\overline{\varphi}$ og $\operatorname{Re}\varphi \in \mathcal{P}(G)$.

(iv) Lad φ være en kontinuert funktion og antag at der findes et net $(\varphi_i)_{i\in I}$ på $\mathcal{P}(G)$ så $\varphi_i \to \varphi$ punktvis på G. Så er $\varphi \in \mathcal{P}(G)$.

Beviset er umiddelbart.

<u>Øvelse 4.1</u> Lad $\varphi : G \to \mathbb{R}$ være en reel lige funktion, d.v.s. $\varphi(-x) = \varphi(x)$ for alle $x \in G$. Så er φ positiv definit hvis og kun hvis det for alle naturlige tal n, alle n-sæt af elementer $x_1, \cdots, x_n \in G$ og alle n-sæt af reelle tal $c_1, \cdots, c_n$ gælder

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(x_i - x_j) c_i c_j \geq 0 .$$

I ovenstående ulighed er det endda nok at se på n-sæt $c_1, \cdots, c_n$ af hele tal.

<u>Øvelse 4.2</u>. 1° Lad H være en ikke tom delmængde af G. Den karakteristiske funktion 1_H for H er positiv definit hvis og kun hvis H er en undergruppe af G. (Vink: Udnyt (c) eller (e)).

2° Funktionen 1 er positiv definit.

3° Lad H være en undergruppe af G og lad φ være en positiv definit funktion på G. Så er funktionen ψ defineret ved

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{for } x \in H \\ 0 & \text{for } x \notin H \end{cases}$$

en positiv definit funktion på G.

4° Der findes en positiv definit funktion på $\mathbb{R}$

som er en Borelfunktion, men som ikke er kontinuert i noget punkt.

Øvelse 4.3. Lad $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ være en hel holomorf funktion hvis koefficienter a_n alle er ≥ 0. Som eksempel kan nævnes $f(z) = \exp(z)$.

For $\varphi \in P(G)$ er $f \circ \varphi \in P(G)$.

Bemærkning. Indtil nu har vi ikke udnyttet at G er en LCA-gruppe og det foregående er da også rigtigt for en vilkårlig (topologisk) gruppe G; dog må $-x$ erstattes af x^{-1} og $x-y$ af $y^{-1}\cdot x$.

Eksempler. (a) For $f \in L^2(G)$ er $\varphi = f^* * f$ en kontinuert positiv definit funktion.

Vi ved (Øvelse 2.1) at $\varphi \in C_0(G)$. For $x_1, \cdots, x_n \in G$ og $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ har vi

$$\sum_{i,j} \varphi(x_i - x_j)\bar{c}_i c_j = \sum_{i,j} \bar{c}_i c_j \int f(y)\bar{f}(y - x_i + x_j)\,dy$$

$$= \sum_{i,j} \bar{c}_i c_j \int f(y+x_i)\bar{f}(y+x_j)\,dy = \int \Big| \sum_i \bar{c}_i f(y+x_i) \Big|^2 dy \geq 0 .$$

(b) Hver karakter $\gamma \in \hat{G}$ er positiv definit og dermed er ethvert "trigonometrisk polynomium" $\sum_{n=1}^{k} a_n \gamma_n$, hvor $a_n > 0$, $\gamma_n \in \hat{G}$, positiv definit. Mere generelt, hvis $\mu \in M_+(\hat{G})$, så er

$$\varphi(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma)$$

en kontinuert positiv definit funktion.

At φ er kontinuert ses som i sætning 3.6. Vi har videre

$$\sum_{i,j} \varphi(x_i - x_j)\bar{c}_i c_j = \int_{\hat{G}} \Big(\sum_{i,j} \gamma(x_i - x_j)\bar{c}_i c_j\Big) d\mu(\gamma)$$

$$= \int \Big|\sum_i \bar{c}_i \gamma(x_i)\Big|^2 d\mu(\gamma) \quad \geq 0$$

I tilfældet $G = \mathbb{R}$ er funktionerne $x \mapsto e^{iax}$ altså positiv definite for alle $a \in \mathbb{R}$. Ved at tage realdelen af disse funktioner ses at $\cos(ax)$ er positiv definit. Dermed er f.eks. $\cos^n x$, $n \in \mathbb{N}$, specielt $1 - \sin^2 x$ positiv definite funktioner. I § 6 vil se en række konkrete positiv definite funktioner på $\mathbb{R}$ udregnet svarende til forskellige mål μ på $\hat{\mathbb{R}} \approx \mathbb{R}$.

<u>Sætning 4.4</u> Lad φ være en kontinuert kompleks funktion på G. Så er følgende betingelser ensbetydende:

(i) φ er positiv definit.

(ii) φ er begrænset og for ethvert $f \in L^1(G)$ gælder

$$\langle \varphi, f^* * f \rangle \geq 0$$

altså

$$\iint \varphi(x-y) f(x) \bar{f}(y)\, dx\, dy \geq 0 .$$

(iii) For hvert $f \in \mathcal{K}(G)$ gælder

$$\langle \varphi, f^* * f \rangle \geq 0$$

altså

$$\iint \varphi(x-y) f(x) \bar{f}(y)\, dx\, dy \geq 0 .$$

I beviset for sætning 4.4 får vi brug for følgende resultat:

<u>Lemma 4.5.</u> Lad X være et kompakt rum. For hvert positivt mål μ på X findes et net $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ af positive mål af formen

$$\mu_\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varepsilon_{x_i} \quad , \; c_i > 0 ,\; x_i \in X ,$$

så $\mu_\alpha \to \mu$ i den svage topologi $\sigma(M(X), C(X))$.

Bevis. Lad $\mathcal{E}$ betegne afslutningen af mængden af mål

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varepsilon_{x_i} \;\middle|\; c_i > 0 ,\; x_i \in X ,\; n \in N \right\} .$$

Så er $\mathcal{E}$ en afsluttet konveks kegle i $M_+(X)$ og påstanden er at $\mathcal{E} = M_+(X)$. Antager vi at der findes $\mu \in M_+(X)\setminus\mathcal{E}$, kan vi ifølge Hahn-Banach's sætning separere μ og $\mathcal{E}$ med en afsluttet hyperplan. Der findes altså en kontinuert funktion f på X så

$$\langle f, \mu \rangle > 0 \quad \text{og} \quad \langle f, \nu \rangle \le 0 \quad \text{for alle } \nu \in \mathcal{E} .$$

Specielt gælder $f(x) = \langle f, \varepsilon_x \rangle \le 0$ for alle $x \in X$, men så må $\langle f, \mu \rangle \le 0$, hvilket er en modstrid. ‖

<u>Øvelse 4.4</u> Lad X være et kompakt rum og lad $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ og $(\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ være net af positive mål på X der konvergerer mod positive mål μ og ν i den svage topologi. Så vil nettet $(\mu_\alpha \otimes \nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ konvergere svagt mod $\mu\otimes\nu$.

Bevis for sætning 4.4. (i) $\Rightarrow$ (iii). Antag at φ er positiv definit og lad $f \in \mathcal{K}(G)$. Funktionen

$$(x,y) \longmapsto \varphi(x-y)\, f(x)\, \bar{f}(y)$$

er en kontinuert funktion på $G\times G$ med støtte indenfor $S\times S$ hvor $S = \operatorname{supp}(f)$. Haarmålets restriktion til S er svag grænseværdi for et net $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ af mål af formen

$$\mu_\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varepsilon_{x_i}$$

hvor $c_i > 0$, $x_i \in S$. Heraf følger, at restriktionen af Haarmålet på $G\times G$ til $S\times S$ er svag grænseværdi af nettet af produktmål $(\mu_\alpha \otimes \mu_\alpha)_{\alpha\in A}$. Da

$$\iint \varphi(x-y) f(x) \bar{f}(y)\, d\mu_\alpha\otimes\mu_\alpha(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(x_i - x_j) f(x_i) \bar{f}(x_j)\, c_i c_j \geq 0,$$

følger, at grænseværdien

$$\iint \varphi(x-y) f(x) \bar{f}(y)\, dx\, dy$$

er ≥ 0.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Vi antager at φ er positiv definit. Da φ er begrænset er mængden

$$E = \{ f \in L^1(G) \mid \langle \varphi, f^* * f \rangle \geq 0 \}$$

er afsluttet delmængde af $L^1(G)$, og da (i) $\Rightarrow$ (iii) vil $E \supseteq \mathcal{K}(G)$. Heraf følger at $E = L^1(G)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) er triviel.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Lad $x_1, \cdots, x_n \in G$ og $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ være givne. Til en omegn $\mathcal{U}$ af 0 i G vælges $\varphi_i \in \mathcal{K}_+(G)$ så

$$\operatorname{supp} \varphi_i \subseteq x_i + \mathcal{U} \quad \text{og så} \quad \int \varphi_i(x)\,dx = 1 \quad , i=1,\cdots,n,$$

og vi sætter

$$f = \sum_{i=1}^{n} \overline{c_i}\, \varphi_i \quad .$$

Så fås

$$\iint \varphi(x-y) f(x) \bar{f}(y)\,dx\,dy \; - \sum_{i,j} \varphi(x_i - x_j) \overline{c_i} c_j$$

$$= \sum_{i,j} \overline{c_i} c_j \iint [\varphi(x-y) - \varphi(x_i - x_j)]\, \varphi_i(x)\, \varphi_j(y)\,dx\,dy \quad .$$

Da φ er kontinuert kan vi til $\varepsilon > 0$ finde en omegn V af 0 så der for alle $i,j = 1, \cdots, n$ og alle z så $z \in x_i - x_j + V$ gælder

$$|\varphi(z) - \varphi(x_i - x_j)| < \varepsilon .$$

Vi vælger dernæst en omegn $\mathcal{U}$ af 0 så $\mathcal{U} - \mathcal{U} \subseteq V$ og vælger φ_i'erne ovenfor svarende til et sådant $\mathcal{U}$. Der gælder da

$$\left| \iint [\varphi(x-y) - \varphi(x_i - x_j)]\, \varphi_i(x)\, \varphi_j(y)\,dx\,dy \right| \le \varepsilon$$

for alle $i,j = 1, \cdots, n$.

Dette rasonnement viser, at vi kan finde $f \in \mathcal{K}(G)$ så

$$\iint \varphi(x-y) f(x) \bar{f}(y)\,dx\,dy \; - \sum_{i,j} \varphi(x_i - x_j) \overline{c_i} c_j$$

er vilkårligt nær ved 0, men den første størrelse er forudsat ≥ 0, og vi kan altså slutte at

$$\sum_{i,j} \varphi(x_i - x_j)\bar{c}_i c_j \geq 0 . \qquad \square$$

Lemma 4.6. Lad $\mu \in M(\hat{G})$ være et begrænset mål på $\hat{G}$ og antag at

$$\int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma) = 0 \qquad \text{for alle } x \in G.$$

Så er $\mu = 0$.

Bevis. For $f \in L^1(G)$ gælder

$$\int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma)\, d\mu(\gamma) = \int_{\hat{G}} \Big(\int_G \overline{\gamma(x)} f(x)\, dx \Big) d\mu(\gamma) = \int_G \Big(\check{f}(x) \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma) \Big) dx = 0 ,$$

hvilket viser at μ er 0 på den tætte delmængde $A(\hat{G})$ af $C_0(\hat{G})$. Følgelig er $\mu = 0$. $\square$

Vi kan nu bevise et hovedresultat om positiv definite funktioner på LCA-grupper, der blev vist af BOCHNER for $G = \mathbb{R}$ i 1933, men allerede i 1911 af HERGLOTZ i tilfældet $G = \mathbb{Z}$.

Sætning 4.7 (Bochner's sætning). En kontinuert funktion φ på G er positiv definit hvis og kun hvis der findes et positivt begrænset mål $\mu \in M_+(\hat{G})$ på $\hat{G}$ så

$$\varphi(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma) \tag{2}$$

Målet μ er entydigt bestemt ved φ og kaldes det til φ associerede mål.

Bevis. I eksempel (6) p. 57 har vi vist, at (2) definerer en kontinuert positiv definit funktion.

Af lemma 4.6 følger at målet μ er entydigt bestemt ved φ.

Lad nu φ være en kontinuert positiv definit funktion. Vi kan uden indskrænkning antage at $\varphi(0) = 1$. Da φ er begrænset giver φ anledning til en kontinuert linearform L_φ på $L^1(G)$ defineret ved

$$L_\varphi(f) = \int f(x)\varphi(x)\,dx .$$

Ved fastsættelsen $(f|g)_\varphi = L_\varphi(g^* * f)$ defineres en sesquilinear form på $L^1(G)$, og af sætning 4.4 følger at den er positiv, i.e.

$$(f|f)_\varphi \geq 0 \quad \text{for alle } f \in L^1(G).$$

Enhver positiv sesquilinear form opfylder Cauchy-Schwarz' ulighed, der i dette tilfælde bliver

$$|(f|g)_\varphi|^2 \leq (f|f)_\varphi \cdot (g|g)_\varphi \quad , \; f,g \in L^1(G). \tag{3}$$

Vi sætter nu $g = \frac{1}{m(V)} 1_V$, hvor V er en kompakt symmetrisk omegn af 0 med Haarmål $m(V)$, og dermed har vi

$$(f|g)_\varphi - L_\varphi(f) = \int_G \Big[f(x) \frac{1}{m(V)} \int_V (\varphi(x-y) - \varphi(x))\,dy \Big] dx \,,$$

$$(g|g)_\varphi - 1 = \frac{1}{m(V)^2} \int_V\int_V (\varphi(x-y) - 1)\,dx\,dy$$

Da φ ifølge lemma 4.2 er ligeligt kontinuert, vil disse udtryk gå mod 0 når V "skrumper sammen til 0". Af (3) fås da følgende ulighed for $f \in L^1(G)$:

$$|L_\varphi(f)|^2 \leq (f|f)_\varphi = L_\varphi(f^* * f) . \qquad (4)$$

Vi sætter $h = f^* * f$ og $h^n = h^{n-1} * h$, $n = 2, 3, \cdots$. Da $\|L_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty = 1$ får vi ved gentagen anvendelse af (4) med $f = h, h^2, h^4, \cdots$

$$|L_\varphi(f)|^2 \leq L_\varphi(h) \leq \{L_\varphi(h^2)\}^{\frac{1}{2}} \leq \{L_\varphi(h^4)\}^{\frac{1}{4}} \leq \cdots \leq \{L_\varphi(h^{2^n})\}^{2^{-n}}$$
$$\leq \|h^{2^n}\|_1^{2^{-n}} .$$

For $n \to \infty$ vil $\|h^{2^n}\|_1^{2^{-n}}$ konvergere mod spektralradius for h

$$r(h) = \|\hat{h}\|_\infty = \sup_{\gamma \in \hat{G}} |\hat{h}(\gamma)| ,$$

og dermed har vi

$$|L_\varphi(f)|^2 \leq \|\hat{h}\|_\infty = \|\hat{f}\|_\infty^2 ,$$

altså

$$|L_\varphi(f)| \leq \|\hat{f}\|_\infty \qquad \text{for } f \in L^1(G). \qquad (5)$$

Hvis $f_1, f_2 \in L^1(G)$ opfylder $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$, giver (5) at

$$L_\varphi(f_1) = L_\varphi(f_2).$$

Dermed er $\hat{f} \mapsto L_\varphi(f)$ en veldefineret linearform på $A(\hat{G})$, og af (5) følger, at den er kontinuert når $A(\hat{G})$

er udstyret med den ligelige norm. Da $A(\hat{G})$ er tæt i $C_0(\hat{G})$ kan denne linearform på entydig måde fortsættes til en kontinuert linearform L på $C_0(\hat{G})$. Der gælder således

$$L(\hat{f}) = L_\varphi(f) \qquad \text{for } f \in L^1(G) .$$

Vi påstår nu at L er en positiv linearform. Lad $\psi \in C_0^+(\hat{G})$, $\varepsilon > 0$. Vi vil finde $f \in L^1(G)$ så

$$\| \psi - |\hat{f}|^2 \|_\infty < \varepsilon ,$$

og heraf følger

$$|L(\psi) - L(|\hat{f}|^2)| \leq \|L\| \varepsilon ,$$

men da

$$L(|\hat{f}|^2) = L((f^* * f)^\wedge) = L_\varphi(f^* * f) \geq 0 ,$$

kan vi slutte at $L(\psi) \geq 0$.

Da $\psi^{\frac{1}{2}} \in C_0(\hat{G})$ findes $h \in L^1(G)$ så

$$\| \psi^{\frac{1}{2}} - \hat{h} \|_\infty \leq \delta ,$$

hvor $\delta > 0$ er valgt så $(2\|\psi^{\frac{1}{2}}\|_\infty + \delta)\delta < \varepsilon$. Sættes $f = \frac{1}{2}(h + h^*)$ ses at også

$$\| \psi^{\frac{1}{2}} - \hat{f} \|_\infty \leq \delta ,$$

og $\hat{f}$ er en reel funktion. Videre har man

$$\| \psi - |\hat{f}|^2 \|_\infty = \| (\psi^{\frac{1}{2}} + \hat{f})(\psi^{\frac{1}{2}} - \hat{f}) \|_\infty \leq (\| \psi^{\frac{1}{2}} \|_\infty + \|\hat{f}\|_\infty)\delta \leq (2\|\psi^{\frac{1}{2}}\|_\infty + \delta)\delta \leq \varepsilon .$$

Af Riesz' repræsentationssætning følger at L kan repræsenteres ved et positivt begrænset mål μ på $\hat{G}$. Der gælder altså

$$L(\hat{f}) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma)\, d\mu(\gamma) = \int_{\hat{G}} \Big(\int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\, dx \Big)\, d\mu(\gamma)$$

$$= \int_G \Big(f(x) \int_{\hat{G}} \overline{\gamma(x)}\, d\mu(\gamma) \Big)\, dx = L_\varphi(f) = \int f(x)\varphi(x)\, dx$$

for alle $f \in L^1(G)$. Heraf sluttes at

$$\varphi(x) = \int_{\hat{G}} \overline{\gamma(x)}\, d\mu(\gamma) \qquad (6)$$

som funktioner i $L^\infty(G)$, men da begge funktioner er kontinuerte gælder ligningen (6) for alle $x \in G$.

Målet $\check{\mu}$ på $\hat{G}$ opfylder ligningen (2). ▯

Lad φ og ψ være kontinuerte positiv definite funktioner på G med associerede mål μ og ν. Vi skriver kort $\varphi \leftrightarrow \mu$, $\psi \leftrightarrow \nu$. Vi opskriver nedenfor de associerede mål til en række kontinuerte positiv definite funktioner defineret ud fra φ og ψ:

$$\varphi + \lambda\psi \leftrightarrow \mu + \lambda\nu \qquad (\lambda \geq 0)$$

$$\varphi\psi \leftrightarrow \mu * \nu$$

$$\bar{\varphi} \leftrightarrow \check{\mu}$$ (Heraf ses: φ reel $\Leftrightarrow$ μ symmetrisk)

$$\operatorname{Re}\varphi \leftrightarrow \tfrac{1}{2}(\mu + \check{\mu})$$

$$\gamma \leftrightarrow \varepsilon_\gamma \qquad (\gamma \in \hat{G})$$

$$\gamma\varphi \leftrightarrow \varepsilon_\gamma * \mu = \tau_\gamma \mu$$

$$1 \leftrightarrow \varepsilon_0 .$$

<u>Øvelse 4.5.</u> Funktionen $x \mapsto \Gamma(ix)$, hvor Γ er gammafunktionen, er en positiv definit funktion på $\mathbb{R}$ (Vink. Øvelse 3.3)

<u>Øvelse 4.6.</u> Lad φ være en kontinuert positiv definit funktion på G og antag at $|\varphi(x)| = 1$ for alle $x \in G$. Så er φ en karakter på G.

<u>Øvelse 4.7.</u> Lad φ være en kontinuert positiv definit funktion på G. Så gælder uligheden

$$(\operatorname{Im} \varphi(x))^2 \leq \frac{\varphi(0)}{2}\left(\varphi(0) - \operatorname{Re} \varphi(2x)\right) \quad , x \in G$$

hvor $2x = x + x$. (Vink. Hvad siger uligheden når $G = \mathbb{R}$, og når φ er en karakter).

Der gælder $\varphi(0) = \mu(\hat{G})$ med betegnelserne fra Bochners sætning.

I sandsynlighedsteorien kaldes en kontinuert positiv definit funktion φ så $\varphi(0) = 1$ den <u>karakteristiske funktion</u> for sandsynlighedsmålet μ på $\hat{G}$ associeret med φ på grund af den entydige korrespondance Bochners sætning etablerer mellem de kontinuerte positiv definite funktioner φ så $\varphi(0) = 1$ og sandsynlighedsmålene på $\hat{G}$.

Mængden af karakteristiske funktioner, altså mængden

$$\mathcal{P}^1(G) = \{\varphi \in \mathcal{P}(G) \mid \varphi(0) = 1\},$$

er konveks, og de ekstreme punkter i $\mathcal{P}^1(G)$ er netop karaktererne $\gamma \in \hat{G}$.

At $\gamma \in \hat{G}$ er ekstremt punkt i $P^1(G)$ følger let af øvelse 4.6. At omvendt ethvert ekstremt punkt i $P^1(G)$ er en karakter, følger via Bochners sætning af at de ekstreme punkter for den konvekse mængde af sandsynlighedsmål på $\hat{G}$ netop er punktmålene ε_γ, $\gamma \in \hat{G}$.

(Hvis et sandsynlighedsmål μ på $\hat{G}$ er ekstremt punkt må supp(μ) være reduceret til et enkelt punkt. Hvis nemlig $\gamma_1 \neq \gamma_2$ tilhører supp(μ) vælges $\varphi \in \mathcal{K}_+(\hat{G})$ så $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi(\gamma_1) = 1$, $\varphi(\gamma_2) = 0$. Sættes $\lambda = \int \varphi d\mu$ gælder

$$\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$$

hvor

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda}\varphi\mu \quad \text{og} \quad \mu_2 = \frac{1}{1-\lambda}(1-\varphi)\mu$$

er sandsynlighedsmål på $\hat{G}$ og $\mu_1 \neq \mu_2$. Dette strider mod at μ er ekstremt).

Man kan vise at mængden af ekstreme punkter for $P^1(G)$ er $\hat{G}$ uden brug af Bochners sætning.

Dermed åbnes mulighed for at vise Bochners sætning ved hjælp af Krein–Milmans sætning. Se f.eks. G. Choquet: Deux exemples classiques de représentations intégrales. L'enseignement Mathématique XV (1969).

<u>Sætning 4.8</u> Lad φ være en kontinuert positiv definit funktion på G med associeret mål μ. For hvert $f \in L^1(G)$ er funktionen $\varphi * f^* * f$ en kontinuert positiv definit funktion

med associeret mål $|\hat{f}|^2\mu$.

Bevis. Af øvelse 2.1 følger at $\varphi * f^* * f$ er en kontinuert begrænset funktion og ifølge sætning 4.4 (ii) er den positiv definit, idet der for $g \in L^1(G)$ gælder

$$\langle \varphi * f^* * f, g^* * g \rangle = \langle \varphi, (\bar{f} * g)^* * (\bar{f} * g) \rangle \geq 0 .$$

Videre har vi

$$\varphi * f^* * f(x) = \int_G \varphi(y) f^* * f(x-y) dy = \int_G \Big(\int_{\hat{G}} \gamma(y) d\mu(\gamma) \Big) f^* * f(x-y) \Big) dy$$

$$= \int_{\hat{G}} \Big(\gamma(x) \int_G \overline{\gamma(y)}\, f^* * f(y) dy \Big) d\mu(\gamma) = \int_{\hat{G}} \gamma(x) |\hat{f}|^2(\gamma) d\mu(\gamma) ,$$

og dette viser, at det til $\varphi * f^* * f$ associerede mål er $|\hat{f}|^2\mu$. $\square$

§5. Positiv definite mål. Plancherels sætning.

Definition. Et mål Φ på G kaldes positiv definit såfremt

$$\langle f^* * f, \Phi \rangle \geq 0$$

for alle $f \in \mathcal{K}(G)$.

Mængden af positiv definite mål udgør en konveks kegle betegnet $\mathcal{E} = \mathcal{E}(G)$. Hvis målet Φ har en kontinuert tæthed φ med hensyn til Haarmålet dx på G ved vi fra sætning 4.4, at Φ er et positiv definit mål hvis og kun hvis φ er en positiv definit funktion.

Eksempler. 1) Haarmålet m på G er positiv definit. Dette følger af, at funktionen konstant 1 er positiv definit, eller af vurderingen

$$< f^* * f, m > = |< f, m >|^2 = |\hat{f}(0)|^2 \geq 0,$$

hvor vi har udnyttet, at 1 er en karakter.

2) For hvert $\nu \in M(G)$ er målet $\Phi = \nu^* * \nu$ positiv definit, idet

$$< f^* * f, \nu^* * \nu > = (\bar{f} * \nu)^* * (\bar{f} * \nu)(0)$$
$$= \int |\bar{f} * \nu|^2 dx = \| \bar{f} * \nu \|_2^2 \geq 0 .$$

3) Diracmålet ε_0 på G er positiv definit, thi $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^* * \varepsilon_0$. (I øvrigt gælder $< f^* * f, \varepsilon_0 > = f^* * f(0) = \|f\|_2^2 \geq 0$).

Vi vil nu vise følgende generalisation af Bochners sætning:

Sætning 5.1. Lad Φ være et positiv definit mål på G. For hvert $f \in \mathcal{K}(G)$ er $\Phi * f^* * f$ en kontinuert positiv definit funktion. Der findes et og kun et positivt mål μ på $\hat{G}$, så der for alle $f \in \mathcal{K}(G)$ og $x \in G$ gælder

$$\int |\hat{f}|^2 d\mu < \infty \tag{1}$$

$$\Phi * f^* * f(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x) |\hat{f}|^2(\gamma)\, d\mu(\gamma) \tag{2}$$

Målet μ, kaldes det til Φ associerede mål.

Bevis. Af sætning 2.4 (a) følger at $\Phi * f^* * f$ er en kontinuert funktion. For $g \in \mathcal{K}(G)$ har vi

$$< \Phi * f^* * f \,,\, g^* * g > \; = \; < (\bar{f} * g)^* * (\bar{f} * g) \,,\, \Phi > \; \geq 0$$

og dermed er $\Phi * f^* * f$ positiv definit ifølge sætning 4.4 (iii). Det til $\Phi * f^* * f$ associerede mål, som er et positivt begrænset mål på $\hat{G}$, betegnes σ_f.

For $f, g \in \mathcal{K}(G)$ gælder

$$|\hat{f}|^2 \cdot \sigma_g = |\hat{g}|^2 \sigma_f \tag{3}$$

thi ifølge sætning 4.8 er begge disse mål associeret med den kontinuerte positiv definite funktion $\Phi * f^* * f * g^* * g$.

<u>Analyse</u>. Det søgte mål μ skal opfylde

$$\sigma_f = |\hat{f}|^2 \mu \qquad \text{for alle } f \in \mathcal{K}(G)$$

altså gælder formelt

$$\mu = \frac{\sigma_f}{|\hat{f}|^2} \,.$$

For at dette har mening må $\hat{f} \neq 0$, men i almindelighed findes ikke noget $f \in \mathcal{K}(G)$ så $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ for alle $\gamma \in \hat{G}$. Vi har imidlertid følgende "lokale" resultat:

Til enhver kompakt delmængde $K \subseteq \hat{G}$ findes $f \in \mathcal{K}(G)$ så

$$\hat{f}(\gamma) \neq 0 \qquad \text{for alle } \gamma \in K \,.$$

Da $\mathcal{K}(G)$ er tæt i $L^1(G)$ og da $\mathcal{F}(L^1(G))$ er tæt i $C_0(\hat{G})$ er $\mathcal{F}(\mathcal{K}(G))$ tæt i $C_0(\hat{G})$ er heraf følger påstanden.

For $\varphi \in \mathcal{K}(\hat{G})$ vælges $f \in \mathcal{K}(G)$ så $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ for alle $\gamma \in \mathrm{supp}(\varphi)$. Med $\frac{\varphi}{|\hat{f}|^2}$ betegner vi kort funktionen

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi}{|\hat{f}|^2} & \text{i punkter hvor } \hat{f}(\gamma) \neq 0 \\ 0 & \text{i punkter hvor } \hat{f}(\gamma) = 0, \end{cases}$$

som er en kontinuert funktion med kompakt støtte.

Af ligningen $\sigma_f = |\hat{f}|^2 \cdot \mu$ følger da, at

$$\mu(\varphi) = \int_{\hat{G}} \frac{\varphi}{|\hat{f}|^2} |\hat{f}|^2 d\mu = \int \frac{\varphi}{|\hat{f}|^2} d\sigma_f$$

hvilket viser, at μ er entydigt bestemt.

<u>Konstruktion af μ.</u> Den eneste mulighed for at definere μ består i til $\varphi \in \mathcal{K}(\hat{G})$ at vælge $f \in \mathcal{K}(G)$ så $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ for alle $\gamma \in \mathrm{supp}(\varphi)$ og dernæst sætte

$$\mu(\varphi) = \int \frac{\varphi}{|\hat{f}|^2} d\sigma_f \tag{4}$$

Tallet $\mu(\varphi)$ er uafhængigt af det valgte $f \in \mathcal{K}(G)$ med egenskaben $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ for alle $\gamma \in \mathrm{supp}(\varphi)$. Er nemlig $g \in \mathcal{K}(G)$ en funktion som opfylder $\hat{g}(\gamma) \neq 0$ for alle $\gamma \in \mathrm{supp}(\varphi)$ viser (3), at

$$\int \frac{\varphi}{|\hat{f}|^2} d\sigma_f = \int \frac{\varphi}{|\hat{g}|^2} d\sigma_g$$

Det er nu let at eftervise, at μ er en positiv lineær form på $\mathcal{K}(\hat{G})$, altså et positivt mål på $\hat{G}$. (For at vise, at $\mu(\varphi+\psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$ vælges $f \in \mathcal{K}(G)$ så $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ for alle $\gamma \in \mathrm{supp}(\varphi) \cup \mathrm{supp}(\psi)$).

Målet μ opfylder

$$\sigma_f = |\hat{f}|^2 \mu \tag{5}$$

for alle $f \in \mathcal{K}(G)$. Lad nemlig $\varphi \in \mathcal{K}(\hat{G})$ og $g \in \mathcal{K}(G)$ så $\hat{g}(\gamma) \neq 0$ for alle $\gamma \in \mathrm{supp}(\varphi)$. Ifølge (3) gælder da

$$\mu(\varphi|\hat{f}|^2) = \int \frac{\varphi|\hat{f}|^2}{|\hat{g}|^2}\, d\sigma_g = \int \frac{\varphi}{|\hat{g}|^2} |\hat{g}|^2 d\sigma_f = \int \varphi\, d\sigma_f .$$

Da σ_f ifølge Bochner's sætning er et endeligt mål viser (5), at

$$\int |\hat{f}|^2 d\mu = \sigma_f(\hat{G}) < \infty ,$$

og videre har vi

$$\Phi * f^* * f(x) = \int \gamma(x)\, d\sigma_f(\gamma) = \int \gamma(x) |\hat{f}|^2(\gamma)\, d\mu(\gamma) . \square$$

<u>Øvelse 5.1</u> Lad Φ være et positiv definit mål med associeret mål μ. For alle $f \in \mathcal{K}(G)$ gælder

$$\Phi(f^* * f) = \int |\overline{\mathcal{F}} f|^2 d\mu .$$

<u>Eksempler</u> 1) Det til Haarmålet m på G associerede mål på $\hat{G}$ er ε_0.

2) Lad $\nu \in M(G)$. Det til $\Phi = \nu^* * \nu$ associerede mål har tætheden $|\hat{\nu}|^2$ m.h.t. et Haarmål på $\hat{G}$. Dette er en konsekvens af sætning 5.6 nedenfor.

3) Vi vil vise, at det til ε_0 associerede mål μ er et Haarmål på $\hat{G}$. Med betegnelserne fra beviset for sætning 5.1 gælder

$$f^* * f(x) = \int \gamma(x)\, d\sigma_f(\gamma) \quad , \quad f \in \mathcal{K}(G).$$

For $\gamma_0 \in \hat{G}$ er $\gamma_0 \cdot f^* * f$ positiv definit og det associerede mål er $\tau_{\gamma_0}\sigma_f$. På den anden side har vi

$$\gamma_0 (f^* * f) = (\gamma_0 f)^* * (\gamma_0 f)$$

og dermed gælder

$$\tau_{\gamma_0}\sigma_f = \sigma_{\gamma_0 f} \tag{6}$$

For $\varphi \in \mathcal{K}(\hat{G})$ og $\gamma_0 \in \hat{G}$ vælges $f \in \mathcal{K}(G)$ så $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ for alle $\gamma \in \operatorname{supp}(\varphi)$. Idet

$$\mathcal{F}(\gamma_0 f) = \tau_{\gamma_0}\hat{f}$$

har vi på grund af (6), at

$$\mu(\tau_{\gamma_0}\varphi) = \int \frac{\tau_{\gamma_0}\varphi}{|\mathcal{F}(\gamma_0 f)|^2}\, d\sigma_{\gamma_0 f}$$

$$= \int \frac{\tau_{\gamma_0}\varphi}{|\tau_{\gamma_0}\hat{f}|^2}\, d\tau_{\gamma_0}\sigma_f$$

$$= \int \frac{\varphi}{|\hat{f}|^2}\, d\sigma_f = \mu(\varphi),$$

hvilket viser, at μ er translationsinvariant, altså et Haarmål.

Når vi har fikseret et Haarmål på G vil vi som Haarmål på $\hat{G}$ altid benytte det til ε_0 associerede mål på $\hat{G}$, som vi betegner $d\gamma$. Vi siger kort at Haarmålene på G og $\hat{G}$ harmonerer.

Der gælder altså

$$f^* * f(x) = \int \gamma(x)\, |\hat{f}|^2(\gamma)\, d\gamma \tag{7}$$

for alle $f \in \mathcal{K}(G)$, specielt for $x = 0$

$$f^* * f(0) = \|f\|_2^2 = \int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma .$$

Dette viser, at Fouriertransformationen er en isometrisk afbildning af $\mathcal{K}(G) \subseteq L^2(G)$ ind i $L^2(\hat{G})$.

<u>Sætning 5.2 (Plancherel's sætning)</u> Fouriertransformationen $\mathcal{F} : \mathcal{K}(G) \to L^2(\hat{G})$ kan på entydig måde udvides til en isometrisk isomorfi (også kaldet $\mathcal{F}$) af $L^2(G)$ på $L^2(\hat{G})$. Der gælder altså

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\hat{G}} \mathcal{F}f(\gamma)\, \overline{\mathcal{F}g(\gamma)}\, d\gamma$$

for alle $f, g \in L^2(G)$.

Bevis. Da $\mathcal{K}(G)$ er tæt i $L^2(G)$ kan $\mathcal{F}$ på entydig måde udvides til en isometri $\tilde{\mathcal{F}}$ af $L^2(G)$ ind i $L^2(\hat{G})$. For at vise, at $\tilde{\mathcal{F}}$ er surjektiv, er det nok at vise at $\mathcal{F}(\mathcal{K}(G))$ er tæt i $L^2(\hat{G})$. Antag at $\psi \in L^2(\hat{G})$ er ortogonal på $\mathcal{F}(\mathcal{K}(G))$, altså

$$\int \hat{f}(\gamma)\overline{\psi(\gamma)}\, d\gamma = 0 \qquad \text{for alle } f \in \mathcal{K}(G).$$

Erstattes f med $\tau_{-x} f$ for $x \in G$ fås

$$\int \hat{f}(\gamma)\overline{\psi(\gamma)}\,\gamma(x)\,d\gamma = 0\,,$$

og lemma 4.6 medfører da at L^1-funktionen $\hat{f}\overline{\psi}$ på $\hat{G}$ er 0-målet på $\hat{G}$, og derfor er $\hat{f}\overline{\psi}$ lig 0 (Lemma 2.3). For enhver kompakt mængde $K \subseteq \hat{G}$ findes $f \in \mathcal{K}(G)$ så $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ for alle $\gamma \in K$, og dermed er $\overline{\psi} = 0$ næsten overalt i K. Heraf følger at

$$\int \varphi(\gamma)\overline{\psi(\gamma)}\,d\gamma = 0$$

for alle $\varphi \in \mathcal{K}(\hat{G})$, og dermed at $\psi = 0$.

Dermed er vist at $\mathcal{F}(\mathcal{K}(G))$ er tæt i $L^2(\hat{G})$.

For $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ gælder $\mathcal{F}f = \tilde{\mathcal{F}}f$. Hertil skal vi benytte at vi kan vælge en følge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ med $f_n \in \mathcal{K}(G)$ så $f_n \to f$ såvel i $L^1(G)$ som i $L^2(G)$ (jvfr. Øvelse 5.3). Lad $\varphi \in \mathcal{K}(\hat{G})$. Da $\mathcal{F}f_n \to \mathcal{F}f$ ligeligt gælder

$$\int \mathcal{F}f_n\,\varphi\,d\gamma \longrightarrow \int \mathcal{F}f\,\varphi\,d\gamma$$

og da $\tilde{\mathcal{F}}f_n \to \tilde{\mathcal{F}}f$ i $L^2(\hat{G})$ gælder

$$\int \tilde{\mathcal{F}}f_n\,\varphi\,d\gamma \longrightarrow \int \tilde{\mathcal{F}}f\,\varphi\,d\gamma$$

hvoraf det sluttes at

$$\int \mathcal{F}f\,\varphi\,d\gamma = \int \tilde{\mathcal{F}}f\,\varphi\,d\gamma\,.$$

Da $\varphi \in \mathcal{K}(\hat{G})$ er vilkårlig, fås heraf at

$$\mathcal{F}f = \tilde{\mathcal{F}}f\,.$$

Da $\tilde{\mathcal{F}}$ således er en udvidelse af $\mathcal{F}$ fra $L^1(G) \cap L^2(G)$ til $L^2(G)$ vil vi ikke længere benytte betegnelsen $\tilde{\mathcal{F}}$, men kalde udvidelsen $\mathcal{F}$. $\square$

Lad G være en kompakt abelsk gruppe og lad Haarmålet m på G være normaliseret så $m(G) = 1$. Det dermed harmonerende Haarmål m' på den diskrete gruppe $\hat{G}$ lægger massen 1 i hvert punkt. For funktionen $f = 1$ på G gælder nemlig

$$\hat{f}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{for } \gamma = 0 \\ 0 & \text{for } \gamma \neq 0, \end{cases}$$

og af Plancherel's sætning følger da

$$1 = \int_G |f(x)|^2 dm(x) = \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\gamma)|^2 dm'(\gamma) = m'(\{0\}).$$

På analog måde fås, at hvis Haarmålet m på en diskret gruppe G er normaliseret så $m(\{0\}) = 1$, så er det harmonerende Haarmål på den kompakte gruppe $\hat{G}$ af totalmasse 1.

<u>Øvelse 5.2</u> Lad G_1 og G_2 være LCA-grupper med Haarmål m_1 og m_2 og lad m_1' og m_2' være Haarmål på $\hat{G}_1$ og $\hat{G}_2$ harmonerende med m_1 og m_2. Så vil Haarmålet $m_1' \otimes m_2'$ på $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ harmonere med Haarmålet $m_1 \otimes m_2$ på $G_1 \times G_2$.

<u>Definition</u>. Ved en <u>approksimativ</u> <u>enhed</u> på G, for-

stås en familie $(\varphi_V)_{V \in \mathcal{U}(0)}$, indiceret af omegnsfilteret af 0, af funktioner på G opfyldende

1) $\forall V \in \mathcal{U}(0) : \varphi_V \in \mathcal{K}(G)_+ , \ \mathrm{supp}(\varphi_V) \subseteq V$.

2) $\forall V \in \mathcal{U}(0) : \int \varphi_V \, dx = 1$

For hvert $V \in \mathcal{U}(0)$ findes ifølge Urysohn's lemma $\varphi_V \in \mathcal{K}(G)_+$ så $\mathrm{supp}(\varphi_V) \subseteq V$ og så $\varphi_V \not\equiv 0$, men så er $\int \varphi_V \, dx > 0$. Heraf ses eksistensen af approksimative enheder.

<u>Lemma 5.3</u> Lad $f \in \mathcal{K}(G)$ og lad μ være et mål på G. For en approksimativ enhed (φ_V) gælder at

$$\lim \langle f * \varphi_V , \mu \rangle = \langle f, \mu \rangle$$

hvor grænseværdien tages langs den tilhørende mængde $\mathcal{U}(0)$.

Bevis. Det er åbenbart nok at vise påstanden for positive mål μ. Vi vælger en kompakt omegn U_0 af 0 og sætter $L = \mathrm{supp}(f) + U_0$. Da f er ligelig kontinuert kan vi til $\varepsilon > 0$ finde en omegn V_0 af 0 så

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon \quad \text{for } x - y \in V_0 .$$

For $V \in \mathcal{U}(0)$ så $V \subseteq U_0 \cap V_0$ gælder

$$\int |f(x) - f(x-y)| \varphi_V(y) \, dy \le \varepsilon \, 1_L(x)$$

altså

$$|\langle f,\mu\rangle - \langle f*\varphi_V,\mu\rangle| \leq \int\left(\int |f(x)-f(x-y)|\varphi_V(y)\,dy\right)d\mu(x)$$

$$\leq \varepsilon\cdot\mu(L),$$

hvilket viser påstanden. □.

Det følgende lemma viser, at et mål på G er fastlagt ved sine værdier på funktionerne $f^* * f$, $f \in \mathcal{K}(G)$.

<u>Lemma 5.4</u> Lad μ være et mål på G som opfylder $\langle f^* * f,\mu\rangle = 0$ for alle $f \in \mathcal{K}(G)$. Så er $\mu = 0$.

Bevis. Af polariseringsidentiteten (regn efter!)

$$g^* * f = \frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3} i^\nu (f+i^\nu g)^* * (f+i^\nu g)$$

følger, at $\langle g^* * f,\mu\rangle = 0$ for alle $f,g \in \mathcal{K}(G)$, altså

$$\langle f*g,\mu\rangle = 0 \quad \text{for alle} \quad f,g \in \mathcal{K}(G).$$

Ved på g's plads at indsætte funktioner fra en approksimativ enhed, følger af lemma 5.3, at

$$\langle f,\mu\rangle = 0$$

for alle $f \in \mathcal{K}(G)$, altså $\mu = 0$. □

<u>Øvelse 5.3</u> For $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ og $\varepsilon > 0$ findes $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ så $\|f-\varphi\|_i < \varepsilon$, $i = 1,2$.

<u>Øvelse 5.4</u> For $f,g \in L^2(G)$ er $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$. Videre er $A(\hat{G}) = \{f_1 * f_2 \mid f_i \in L^2(\hat{G})\}$.

<u>Øvelse 5.5</u> Et positiv definit mål Φ opfylder $\Phi = \Phi^*$, altså

$$\langle f^*, \Phi \rangle = \overline{\langle f, \Phi \rangle} \quad \text{for alle } f \in \mathcal{K}(G).$$

Et positivt, positiv definit mål Φ opfylder $\Phi = \check{\Phi}$.

Den Fouriertransformerede funktion $\hat{f}$ af en funktion $f \in L^1(G)$ er i almindelighed ikke integrabel på $\hat{G}$. Hvis imidlertid $\hat{f}$ er integrabel, kan vi danne funktionen

$$x \longmapsto \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, \hat{f}(\gamma)\, d\gamma,$$

og det er nu fundamentalt, at vi genfinder funktionen f. Når vi har vist Pontriagin's dualitetssætning er ovenstående funktion den co-Fouriertransformerede af funktionen $\hat{f}$. Der gælder altså, at co-Fouriertransformationen på $\hat{G}$ er den inverse afbildning til Fouriertransformationen på G.

<u>Sætning 5.5 (Inversionssætningen)</u> Lad μ være et begrænset mål på G og antag at $\hat{\mu} \in L^1(\hat{G})$. Så har målet μ en kontinuert tæthed φ mht. Haarmålet dx på G, nemlig funktionen

$$\varphi(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, \hat{\mu}(\gamma)\, d\gamma,$$

som altså er en kontinuert L^1-funktion på G.

Bevis. Ifølge lemma 5.4 er det nok at vise, at målene μ og φdx stemmer overens på funktioner af formen $f^* * f$, $f \in \mathcal{K}(G)$. For $f \in \mathcal{K}(G)$ gælder imidlertid (jvfr. (7))

$$f^* * f(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, |\hat{f}(\gamma)|^2\, d\gamma ,$$

og dermed har vi

$$\int_G f^* * f(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_G \Big(f^* * f(x) \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, \hat{\mu}(\gamma)\, d\gamma \Big)\, dx$$

$$= \int_{\hat{G}} \Big(\int_G f^* * f(x)\, \overline{\gamma(x)}\, dx \Big)\, \hat{\mu}(-\gamma)\, d\gamma$$

$$= \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\gamma)|^2\, \hat{\mu}(-\gamma)\, d\gamma$$

$$= \int_{\hat{G}} \Big(|\hat{f}(\gamma)|^2 \int_G \gamma(x)\, d\mu(x) \Big)\, d\gamma$$

$$= \int_G f^* * f(x)\, d\mu(x) . \quad \square$$

<u>Sætning 5.6</u> Et begrænset mål σ på G er positiv definit hvis og kun hvis $\hat{\sigma}(\gamma) \geq 0$ for alle $\gamma \in \hat{G}$.

Hvis σ er et positiv definit begrænset mål, er det associerede mål på $\hat{G}$ målet $\hat{\sigma}\, d\gamma$.

Bevis. Lad σ være et begrænset mål på G og lad $f \in \mathcal{K}(G)$. Så er $\sigma * f^* * f$ en L^1-funktion på G og den Fouriertransformerede $\hat{\sigma}\, |\hat{f}|^2$ er en L^1-funktion på $\hat{G}$ fordi $\hat{\sigma}$ er begrænset (sætning 3.6) og $\hat{f} \in L^2(\hat{G})$ ifølge

Plancherel's sætning. Af inversionssætningen fås så

$$\delta * f^* * f(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, \hat{\delta}(\gamma)\, |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma .$$

Hvis δ er positiv definit, viser denne formel, at det til δ associerede mål er $\hat{\delta}(\gamma)\,d\gamma$, og da dette mål er positivt gælder $\hat{\delta}(\gamma) \geq 0$ for alle $\gamma \in \hat{G}$.

Sættes $x=0$ og erstattes f med $\check{f}$ i formlen fås

$$< f^* * f , \delta > = \int_{\hat{G}} \hat{\delta}(\gamma)\, |\overline{\mathcal{F}} f(\gamma)|^2 d\gamma ,$$

og heraf ses, at δ er positiv definit såfremt $\hat{\delta} \geq 0$. □

På grund af sætning 5.6 vil vi for et positiv definit mål Φ på G kalde det til Φ associerede mål μ på $\hat{G}$ for det <u>Fouriertransformerede</u> til Φ, og skrive

$$\mu = \hat{\Phi} \quad \text{eller} \quad \mu = \mathcal{F}\Phi$$

For en kontinuert positiv definit funktion φ på G er $\hat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$ det associerede mål μ fra Bochner's sætning, der således kan fortolkes som en inversionssætning (når vi kender Pontragin's sætning):

$$\varphi = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi) = \overline{\mathcal{F}}\mu .$$

Dermed er Fouriertransformationen en afbildning af keglen $\mathcal{E}(G)$ af positiv definite mål på G ind i keglen af positive mål på $\hat{G}$, endda ind i keglen af de positive mål μ på $\hat{G}$ for hvilke

$$\int |\hat{f}|^2 \, d\mu < \infty \quad \text{for alle} \quad f \in \mathcal{K}(G).$$

Det er imidlertid ikke alle sådanne mål der er det Fouriertransformerede af et positiv definit mål. Det er såvidt vides et uløst problem at karakterisere de positive mål på $\hat{G}$ der er det Fouriertransformerede af et positiv definit mål på G.

Vi bemærker, at øvelse 5.1 og lemma 5.4 sikrer, at Fouriertransformationen $\mathcal{F}$ er en injektiv afbildning af $\mathcal{E}(G)$ ind i keglen af positive mål på $\hat{G}$.

§6. Positiv definite funktioner på $\mathbb{R}$.

Vi vil nu nærmere studere tilfældet $G = (\mathbb{R}, +)$. Som Haarmål på $\mathbb{R}$ fikserer vi Lebesgue-målet λ (eller dx) med den sædvanlige normalisering $\lambda([0,1]) = 1$.

Karaktererne på $\mathbb{R}$ er funktionerne

$$x \longmapsto e^{ixy}, \quad y \in \mathbb{R}$$

og dermed identificeres $\hat{\mathbb{R}}$ med $\mathbb{R}$. Det med λ harmonerende Haarmål på $\hat{\mathbb{R}}$ $(=\mathbb{R})$ må være $k \cdot \lambda$ for et passende $k > 0$. Vi skal nu bestemme k.

For funktionen

$$f(x) = e^{-|x|}$$

finder vi

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\, e^{-|x|}\, dx = \frac{2}{1+y^2} , \qquad (1)$$

idet $\hat{f}(y) = 2 \cdot \int_0^\infty \cos(xy)\, e^{-x}\, dx$.

Da $f \in L^1(\mathbb{R})$ og $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ følger det af inversionssætningen, at

$$1 = f(0) = k \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\,dy = 4k \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = 4k \left[\operatorname{Arctan} y\right]_0^\infty = 2k\pi$$

hvoraf $k = \frac{1}{2\pi}$.

Det med Lebesguemålet harmonerende Haarmål på $\mathbb{R}$ er derfor $\frac{1}{2\pi}$ gange Lebesguemålet.

Hvis man vil undgå denne usymmetri, kan man f.eks. bruge $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ gange Lebesguemålet på begge eksemplarer af $\mathbb{R}$. Dette vil vi dog ikke gøre.

Af inversionssætningen anvendt på (1) følger

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \frac{1}{1+y^2}\, dy \qquad (2)$$

<u>Øvelse 6.1</u> Den til $\mathbb{R}$ duale gruppe $\hat{\mathbb{R}}$ kan identificeres med $\mathbb{R}$ via isomorfien

$$\mathbb{R} \ni y \longleftrightarrow (x \mapsto e^{2\pi i xy}) \in \hat{\mathbb{R}}$$

Lebesguemålet på $\mathbb{R}$ og på $\hat{\mathbb{R}}$ identificeret med $\mathbb{R}$ er harmonerende Haarmål. Dette forklarer en ofte anvendt definition af Fouriertransformationen på $\mathbb{R}$.

For et positivt begrænset mål μ er den Fouriertransformerede givet som

$$\hat{\mu}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy}\, d\check{\mu}(x)$$

Af Bochner's sætning følger, at $\hat{\mu}$ er en kontinuert positiv definit funktion på $\mathbb{R}$ og enhver kontinuert positiv definit funktion er den Fouriertransformerede af et positivt begrænset mål.

Vi angiver nu i tabelform en række sandsynlighedsmål μ på $\mathbb{R}$ og deres Fouriertransformerede $\hat{\mu}$, som altså er positiv definite funktioner på $\mathbb{R}$ med værdien 1 i 0. Argumentet i $\hat{\mu}$ betegnes y.

Sandsynlighedsmål μ		$\hat{\mu}$
Udartet fordeling	ε_{x_0}	$e^{-ix_0 y}$
Binomialfordeling med parameter $p \in]0,1[$, $q = 1-p$	$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \varepsilon_j = (p\varepsilon_1 + q\varepsilon_0)^{*n}$	$(q + pe^{-iy})^n$
Poissonfordeling med parameter $\lambda > 0$	$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \varepsilon_n$	$\exp(\lambda(e^{-iy} - 1))$
Ligelig fordeling på intervallet $[-a,a]$, $a>0$	$\frac{1}{2a} 1_{[-a,a]}(x)dx$	$\frac{\sin(ay)}{ay}$
Cauchy fordeling med parameter $t>0$	$\frac{t}{\pi} \frac{1}{t^2+x^2} dx$	$e^{-t\lvert y\rvert}$
Laplace fordeling med parameter $\sigma>0$	$\frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{\lvert x\rvert}{\sigma}\right) dx$	$\frac{1}{1+\sigma^2 y^2}$
Normal fordeling med parameter $t>0$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) dx$	$\exp(-ty^2)$

De fire første formler eftervises direkte og de Fouriertransformerede af Cauchy- og Laplace-fordelingen er udregnet i formlerne (1) og (2). Den Fouriertransformerede af normalfordelingen er ikke helt let at udregne. Vi henviser til Mat 6, Spec. Op. p. 39.

Vi har tidligere set, at en positiv definit funktion er ligeligt kontinuert blot den er kontinuert i 0 (jvfr. 4.2). Man kunne derfor fristes til at tro, at en positiv definit funktion måske var differentiabel eller endnu pænere.

Der findes imidlertid kontinuerte, positiv definite funktioner som ikke er differentiable i noget punkt. Det klassiske eksempel af Weierstrass (se Weierstrass saml. værker bd. II, p. 71) på en kontinuert funktion, der ikke er differentiabel i noget punkt er netop en positiv definit funktion

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$$

hvor $0<a<1$, b ulige helt tal ≥ 3 så $ab > 1+\frac{3}{2}\pi$, f.eks $a=\frac{1}{2}$, $b=13$.

<u>Definition</u> Lad μ være et positivt mål på $\mathbb{R}$. Hvis det for et positivt, helt tal n gælder, at funktionen

$$x \longmapsto x^n$$

er μ-integrabel, kaldes

$$M_n = \int x^n \, d\mu(x)$$

det <u>n'te moment</u> af μ, og vi siger at μ <u>har moment</u> af orden n.

Hvis μ har moment af orden n, så har μ moment af orden $k = 0, 1, \cdots, n-1$, thi

$$|x^k| \leq \begin{cases} 1 & \text{for } |x| \leq 1 \\ |x|^n & \text{for } |x| > 1 \end{cases}$$

Målet μ er endeligt, præcis hvis μ har moment af 0'te orden.

<u>Sætning 6.1</u> Lad μ være et positivt mål på $\mathbb{R}$ og antag at μ har moment af orden n. Så er $\mathcal{F}\mu$ n gange kontinuert differentiabel og

$$(\mathcal{F}\mu)^{(k)} = (-i)^k \mathcal{F}(x^k \mu) \quad , \quad k = 0, 1, \cdots, n .$$

Specielt har vi

$$(\mathcal{F}\mu)^{(k)}(0) = (-i)^k M_k .$$

Bevis. Det er nok at vise sætningen for $n=1$. Idet

$$\frac{1}{h}(\mathcal{F}\mu(y+h) - \mathcal{F}\mu(y)) - \int (-ix) e^{-ixy} d\mu(x) =$$

$$\int e^{-ixy} \left(\frac{1}{h}(e^{-ixh} - 1) + ix\right) d\mu(x) ,$$

finder vi

$$\left|\frac{1}{h}(\mathcal{F}\mu(y+h) - \mathcal{F}\mu(y)) - (-i)\mathcal{F}(x\mu)(y)\right|$$

$$\leq \int \left|\frac{1}{h}(e^{-ixh} - 1) + ix\right| d\mu(x) .$$

Højresiden går mod o når $h \to 0$, ifølge Lebesgue's sætning om domineret konvergens, som kan anvendes fordi

$$\frac{1}{h}(e^{-ixh}-1)+ix = -ix\, e^{-ix\theta(x,h)} + ix$$

hvor $|\theta(x,h)| \le |h|$, altså

$$\left|\frac{1}{h}(e^{-ixh}-1)+ix\right| \le 2|x| . \quad \square$$

<u>Korollar 6.2</u> For et positivt mål μ med kompakt støtte er den Fouriertransformerede funktion $\mathcal{F}\mu$ en C^∞-funktion.

<u>Øvelse 6.2</u> For enhver kontinuert, positiv definit funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ og ethvert $\varepsilon > 0$ findes en positiv definit C^∞-funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ så

$$\|\varphi - \psi\|_\infty < \varepsilon .$$

Den næste sætning kan benyttes til at udelukke, at en forelagt funktion er positiv definit. Vi indskrænker os til at betragte karakteristiske funktioner, d.v.s. positiv definite funktioner φ så $\varphi(0) = 1$. For en sådan vil naturligvis $1-\varphi(x)$ gå mod o for $x \to 0$, men sætningen siger at $1-\varphi(x)$ ikke kan gå særlig hurtigt mod o.

<u>Sætning 6.3</u> Lad φ være en karakteristisk funktion på $\mathbb{R}$ som opfylder

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\varphi(x)}{x^2} = 0$$

Så gælder $\varphi \equiv 1$.

Bevis. Ifølge Bochner's sætning findes et sandsynligheds-mål μ på $\mathbb{R}$ så

$$\varphi(x) = \int e^{ixy}\, d\mu(y) .$$

Altså har vi for $x \neq 0$

$$\frac{2-\varphi(x)-\varphi(-x)}{x^2} = \int \frac{2 - e^{ixy} - e^{-ixy}}{x^2}\, d\mu(y)$$

$$= \int \frac{2-2\cos(xy)}{x^2}\, d\mu(y)$$

$$= \int \left(\frac{\sin\frac{xy}{2}}{\frac{xy}{2}}\right)^2 y^2\, d\mu(y) .$$

Idet

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\frac{xy}{2}}{\frac{xy}{2}}\right)^2 y^2 = y^2 \quad \text{for alle } y\in\mathbb{R},$$

følger det af Fatou's lemma, at

$$0 \le \int y^2\, d\mu(y) = \int \left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{xy}{2}}{\frac{xy}{2}}\right)^2 y^2\right] d\mu(y)$$

$$\le \liminf_{x\to 0} \int \left(\frac{\sin\frac{xy}{2}}{\frac{xy}{2}}\right)^2 y^2\, d\mu(y)$$

$$= \liminf_{x\to 0} \frac{2-\varphi(x)-\varphi(-x)}{x^2} = 0,$$

ifølge forudsætningen. Altså er

$$\int y^2\, d\mu(y) = 0 .$$

For enhver kompakt mængde $K \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ findes $\lambda > 0$, så

$1_K \leq \lambda y^2$, og heraf følger at $\mu(K) = 0$. Altså er $\mu = \varepsilon_0$ og dermed $\varphi = \hat{\mu} = 1$. ▯.

<u>Eksempel</u>. Funktionen $\varphi(x) = e^{-x^2}$ er positiv definit, som Fouriertransformeret af en normal fordeling. For denne funktion gælder

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \varphi(x)}{x^2} = 1$$

Funktionerne $e^{-|x|^\alpha}$, $\alpha > 2$ er ikke karakteristiske funktioner fordi

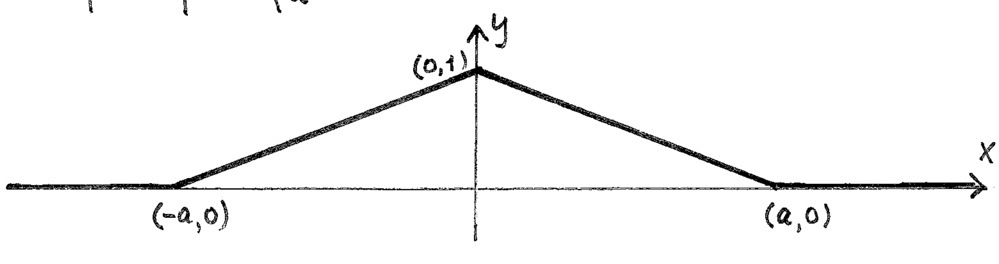
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-|x|^\alpha}}{x^2} = 0$$

Vi vil senere vise, at $e^{-|x|^\alpha}$ er en karakteristisk funktion for alle $\alpha \in \,]0,2]$. For $\alpha = 1$ fremgår dette af tabellen.

Som optakt til den næste sætning vil vi indføre en familie $(\varphi_a)_{a>0}$ af funktioner $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$\varphi_a(x) = \varphi_a(-x), \qquad \varphi_a(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{a} & \text{for } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{for } x > a. \end{cases}$$

Grafen for φ_a har altså udseendet:



<u>Lemma 6.4</u> For hvert $a>0$, er φ_a en karakteristisk funktion.

Bevis. Vi viser, at $\widehat{\varphi_a}$ er en positiv funktion, og ifølge 5.6 er φ_a dermed en positiv definit funktion.

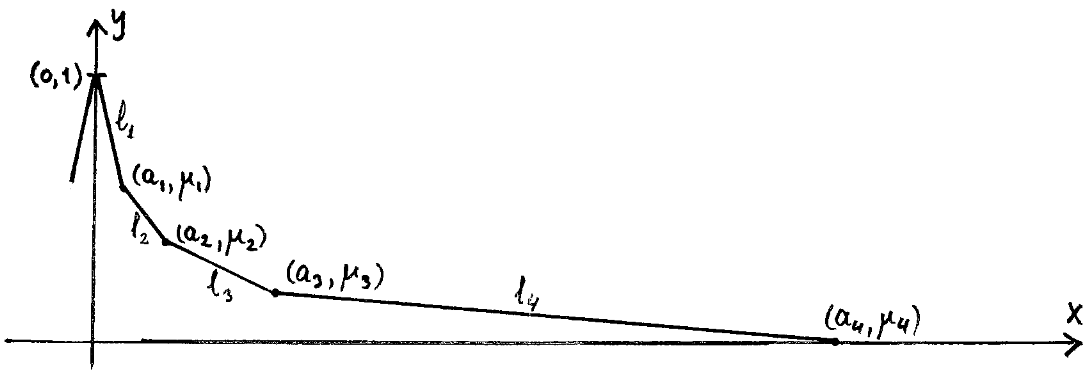
$$\widehat{\varphi_a}(y) = 2\int_0^a \cos(xy)\,(1-\tfrac{x}{a})\,dx$$

$$= \frac{2(1-\cos(ay))}{ay^2} = a\left(\frac{\sin\frac{ay}{2}}{\frac{ay}{2}}\right)^2 . \quad \square$$

Til givne tal $0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n$ og tal $0=\mu_n<\mu_{n-1}<\cdots<\mu_2<\mu_1<\mu_0=1$ med egenskaben at følgen

$$\left(\frac{\mu_k-\mu_{k-1}}{a_k-a_{k-1}}\right) \quad k=1,\cdots,n$$

er voksende, defineres en funktion ψ på $\mathbb{R}$ ved at $\psi(x) = \psi(-x)$, $\psi(0)=1$, $\psi(x)=0$ for $x\geq a_n$ og ved at ψ's graf på intervallet $[a_{k-1},a_k]$ er liniestykket l_k gennem punkterne (a_{k-1},μ_{k-1}) og (a_k,μ_k) for $k=1,\cdots,n$. Vi skitserer grafen af ψ i et eksempel med $n=4$.



At følgen $\left(\frac{\mu_k-\mu_{k-1}}{a_k-a_{k-1}}\right)$ er voksende betyder, at hældningen af liniestykket l_k er voksende. Dermed er ψ konveks på intervallet $[0,\infty[$.

Funktionen ψ kan fremstilles på formen

$$\psi = \lambda_1 \varphi_{a_1} + \lambda_2 \varphi_{a_2} + \cdots + \lambda_n \varphi_{a_n} \tag{*}$$

hvor $\lambda_i > 0$ og $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Vi vil vise dette ved induktion efter antallet af knæk n. Hvis $n=1$ er $\psi = \varphi_{a_1}$ og påstanden er vist. Antag nu at (*) er vist for funktioner med $(n-1)$ knæk. For den givne funktion ψ med n knæk vil linien bestemt ved liniestykket l_n skære y-aksen i et punkt $(0,\lambda)$ med $0<\lambda<1$, og denne linie falder på intervallet $[0,a_n]$ sammen med funktionen $\lambda\varphi_{a_n}$. Funktionen

$$\psi' = \frac{1}{1-\lambda}(\psi - \lambda\varphi_{a_n})$$

er klart af samme type som ψ, men med $(n-1)$ knæk. Ifølge induktionsforudsætningen har vi

$$\psi' = \lambda_1' \varphi_{a_1} + \lambda_2' \varphi_{a_2} + \cdots + \lambda_{n-1}' \varphi_{a_{n-1}}$$

hvor $\lambda_i' > 0$ og $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i' = 1$, men så fås

$$\psi = (1-\lambda)\lambda_1' \varphi_{a_1} + \cdots + (1-\lambda)\lambda_{n-1}' \varphi_{a_{n-1}} + \lambda\varphi_{a_n}$$

og dermed er (*) vist for funktioner med n knæk.

Af (*) følger at ψ er en karakteristisk funktion.

Sætning 6.5 (Polya, 1920) Lad $\varphi : \mathbb{R} \to [0,\infty[$ være en kontinuert funktion med egenskaberne

(i) $\varphi(0) = 1$

(ii) φ er lige, d.v.s. $\varphi(-x) = \varphi(x)$

(iii) φ er aftagende og konveks på intervallet $[0,\infty[$.

Så er φ en karakteristisk funktion.

Bevis. Grænseværdien $\alpha = \lim_{x\to\infty} \varphi(x)$ eksisterer og $0 \le \alpha \le 1$. Hvis $\alpha = 1$ er φ konstant lig 1. Hvis $\alpha < 1$ betragtes funktionen

$$\varphi_1 = \frac{1}{1-\alpha}(\varphi - \alpha)$$

som også opfylder betingelserne (i) – (iii) og desuden opfylder $\lim_{x\to\infty} \varphi_1(x) = 0$. Hvis φ_1 er en karakteristisk funktion, så er også φ en karakteristisk funktion, og dermed er beviset reduceret til tilfældet $\alpha = 0$. Vi vil vise, at et sådant φ kan approksimeres ligeligt med karakteristiske funktioner og dermed er φ selv en karakteristisk funktion.

Lad $\varepsilon \in]0,1[$ være givet. Da $\alpha = 0$ findes et $x_0 > 0$ så $\varphi(x_0) = \varepsilon$. For $x \in]0, x_0[$ gælder $\varphi(x) > \varepsilon$ og for $x \in]x_0, \infty[$ gælder $\varphi(x) < \varepsilon$. (Tegn!)

Da φ er ligeligt kontinuert på intervallet $[0, x_0]$ findes punkter a_i med $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} = x_0$ så

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon \quad \text{for } x,y \in [a_{k-1}, a_k],\ k = 1,\dots,n-1.$$

Vi sætter $\mu_i = \varphi(a_i)$, $i = 0,1,\dots,n-1$ og har da

$$1 = \mu_0 > \mu_1 > \cdots > \mu_{n-1} \quad (=\varepsilon).$$

Vi betragter den lige funktion ψ defineret ved at ψ's graf på intervallet $[a_{k-1}, a_k]$ er liniestykket ℓ_k gennem punkterne (a_{k-1}, μ_{k-1}) og (a_k, μ_k), $k = 1, 2, \cdots, n-1$. For at definere ψ på $[a_{n-1}, \infty[$, forlænges liniestykket ℓ_{n-1} til det skærer x-aksen i punktet $(a_n, 0)$. På $[a_{n-1}, a_n]$ defineres ψ's graf ved ℓ_{n-1}'s forlængelse og på $[a_n, \infty[$ sættes $\psi = 0$.

Konveksiteten af φ sikrer at funktionen ψ er af den ovenfor nævnte type (*), og dermed en karakteristisk funktion, og desuden gælder

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}. \ \Box.$$

Funktionen e^{-x^α} er konveks på $]0, \infty[$ for $\alpha \in]0, 1]$, men ikke for $\alpha > 1$. Af Polya's kriterium følger derfor, at $e^{-|x|^\alpha}$ er positiv definit for $\alpha \in]0, 1]$.

§7. Pontriagin's dualitetssætning

Lad G være en LCA-gruppe med Haarmål dx og lad $\hat{G}$ være den duale gruppe med Haarmål $d\gamma$ så dx og $d\gamma$ harmonerer.

Vi ved at mængderne

$$U_G(K, \varepsilon) = \{ \gamma \in \hat{G} \mid |1 - \gamma(x)| < \varepsilon \text{ for } x \in K \}$$

udgør en basis for omegnene af 0 i $\hat{G}$, når K gennemløber de kompakte delmængder af G og $\varepsilon > 0$.

For en kompakt mængde $C \subseteq \hat{G}$ og $\varepsilon > 0$ sættes

$$N(C,\varepsilon) = \{x \in G \mid |1-\gamma(x)| < \varepsilon \text{ for alle } \gamma \in C\}$$

<u>Lemma 7.1</u> Mængderne $N(C,\varepsilon)$, hvor C er kompakt i $\hat{G}$ og $\varepsilon > 0$ udgør en basis for omegnene af 0 i G.

Bevis. Vi viser først at $N(C,\varepsilon)$ er en omegn af 0 i G. For $\gamma \in C$ findes en omegn $U(\gamma)$ af 0 i G og en omegn $V(\gamma)$ af γ i $\hat{G}$ så

$$|1-\delta(x)| < \varepsilon \quad \text{for} \quad x \in U(\gamma) \text{ og } \delta \in V(\gamma),$$

(jvnfr. Lemma 3.1). Da C er kompakt findes endelig mange punkter $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in C$ så

$$C \subseteq V(\gamma_1) \cup \dots \cup V(\gamma_n).$$

Da $U = U(\gamma_1) \cap \dots \cap U(\gamma_n)$ er en omegn af 0 i G, og da der gælder

$$U \subseteq N(C,\varepsilon),$$

er $N(C,\varepsilon)$ en omegn af 0 i G.

Lad nu V være en omegn af 0 i G. Lad W være en omegn af 0 så $W - W \subseteq V$ og lad $f \in \mathcal{K}(G)_+$ være en funktion så $\operatorname{supp}(f) \subseteq W$ og $\int f(x)^2\,dx = 1$.

Af Plancherel's sætning følger

$$1 = \int_G f(x)^2\,dx = \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\gamma)|^2\,d\gamma,$$

og der findes derfor en kompakt mængde $C \subseteq \hat{G}$ så

$$\int_C |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma > \tfrac{2}{3}.$$

Vi påstår nu, at $N(C,\frac{1}{3}) \subseteq V$. For $x \in N(C,\frac{1}{3})$ og $\gamma \in C$ gælder nemlig

$$1 - \operatorname{Re}\gamma(x) \leq |1-\gamma(x)| < \tfrac{1}{3}$$

altså $\operatorname{Re}\gamma(x) > \frac{2}{3}$, og dermed har vi

$$f^* * f(x) = \int_C \gamma(x)\,|\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma + \int_{\hat{G}\setminus C} \gamma(x)\,|\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma$$

$$= \int_C \operatorname{Re}\gamma(x)\,|\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma + \int_{\hat{G}\setminus C} \operatorname{Re}\gamma(x)\,|\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma$$

$$> \tfrac{4}{9} - \int_{\hat{G}\setminus C} |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma$$

$$> \tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{9},$$

hvilket viser at $x \in \operatorname{supp}(f^* * f) \subseteq W - W \subseteq V$. $\square$.

<u>Korollar 7.2</u> Punkterne i G skilles af $\hat{G}$, d.v.s. hvis $x,y \in G$ og $x \neq y$ så findes $\gamma \in \hat{G}$ så $\gamma(x) \neq \gamma(y)$.

Bevis. Da G er Hausdorff findes en kompakt mængde $C \subseteq \hat{G}$ og $\varepsilon > 0$ så $x - y \notin N(C,\varepsilon)$, og derfor findes $\gamma \in C$ så $|1-\gamma(x-y)| \geq \varepsilon$, altså $\gamma(x) \neq \gamma(y)$. $\square$

En funktion af formen

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i(x) \quad , \; x \in G \text{ og } \gamma_i \in \hat{G}$$

kaldes et <u>trigonometrisk</u> <u>polynomium</u> på G. Mængden af trigonometriske polynomier på G er en algebra under punktvis addition og multiplikation. Den er selvadjungeret og skiller punkterne i G. Stone-Weierstrass's sætning giver derfor følgende resultat:

Hvis G er kompakt udgør de trigonometriske polynomier på G en tæt delalgebra af $C(G)$.

Heraf følger, at mængden af trigonometriske polynomier også er tæt i $L^2(G)$, hvilket medfører, at karaktererne $\gamma \in \hat{G}$ udgør en ortonormal basis for $L^2(G)$ (jvfr. beviset for 3.5).

Plancherel's sætning 5.2 for kompakte grupper reduceres hermed til Plancherel's sætning vedrørende udviklingen af et element i et Hilbertrum efter en ortonormal basis:

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \sum_{\gamma \in \hat{G}} |\hat{f}(\gamma)|^2 \quad , \quad f \in L^2(G),$$

idet $\hat{f}(\gamma) = (f|\gamma)$ er det indre produkt af f og enhedsvektoren γ.

<u>Lemma 7.3</u> For enhver ikke tom åben mængde $\mathcal{O} \subseteq \hat{G}$ findes $f \in L^1(G)$ så $\hat{f} \not\equiv 0$ og så $\mathrm{supp}(\hat{f}) \subseteq \mathcal{O}$.

Bevis. Først vælges $g \in \mathcal{K}_+(\hat{G})$, $g \not\equiv 0$, så $\mathrm{supp}(g) \subseteq \mathcal{O}$ og dernæst vælges en omegn V af 0 i $\hat{G}$ så $\mathrm{supp}(g) + V \subseteq \mathcal{O}$. Lad $h \in \mathcal{K}_+(\hat{G})$, $h \not\equiv 0$ være valgt så $\mathrm{supp}(h) \subseteq V$. Ifølge øvelse 5.3 findes en funktion $f \in L^1(G)$ så $\hat{f} = g * h$, og derfor gælder $\mathrm{supp}(\hat{f}) \subseteq \mathrm{supp}(g) + \mathrm{supp}(h) \subseteq \mathcal{O}$. $\square$

<u>Lemma 7.4</u> Lad G være en Hausdorff-topologisk gruppe og lad H være en undergruppe af G som er lokalkompakt i delrumstopologien fra G. Så er H afsluttet.

Beviset for lemma 7.4 bygger på følgende resultater a) og b):

a) Lad X være et Hausdorff-rum og lad A være en tæt delmængde af X som er lokalkompakt i den inducerede topologi. Så er A åben.

Lad $x \in A$ og lad K være en kompakt omegn af x i A med delrumstopologien. Der findes en omegn U af x i X så $K = U \cap A$. Det må nu gælde $\overset{\circ}{U} \subseteq K$ og dermed er A en omegn af x, thi hvis $U^{\circ} \setminus K \neq \emptyset$ må også $(U^{\circ} \setminus K) \cap A \neq \emptyset$, da den tætte mængde A har punkter fælles med enhver ikke tom åben mængde. At $(U^{\circ} \setminus K) \cap A \neq \emptyset$ strider imidlertid mod $K = A \cap U$. Dermed er A en omegn af hvert af sine punkter og altså åben.

b) Lad G være en topologisk gruppe og H en åben undergruppe. Så er H også afsluttet.

Sideklasserne i G for undergruppen H udgør en klasseinddeling af G i parvis disjunkte åbne mængder. Hver af sideklasserne er komplementærmængden til den åbne foreningsmængde af de øvrige sideklasser, og derfor afsluttet. Specielt er H afsluttet.

Beviset for lemmaet forløber nu således:

Afslutningen $\overline{H}$ af H i G er en Hausdorff topologisk gruppe og H er en tæt, lokalkompakt delmængde heraf. Ifølge a) er H så en åben undergruppe af $\overline{H}$ og ifølge b) dermed en afsluttet undergruppe af $\overline{H}$. Da H altså er en afsluttet og en tæt delmængde af $\overline{H}$ er $H = \overline{H}$. □

Lad nu igen G være en LCA-gruppe med dual gruppe $\hat{G}$ og bidual gruppe $\hat{\hat{G}}$. Vi har tidligere defineret en homomorfi $j: G \to \hat{\hat{G}}$ ved fastsættelsen

$$j(x)(\gamma) = \gamma(x) \quad \text{for} \quad x \in G \text{ og } \gamma \in \hat{G}.$$

<u>Sætning 7.5</u> (Pontragin's dualitetssætning) For enhver lokalkompakt abelsk gruppe G er afbildningen $j: G \to \hat{\hat{G}}$ en isomorfi af G på $\hat{\hat{G}}$ som lokalkompakte abelske grupper. Haarmålet på G afbildes ved j i det Haarmål på $\hat{\hat{G}}$ det harmonerer med Haarmålet på $\hat{G}$.

Bevis. At j er injektiv følger af, at $\hat{G}$ skiller punkterne i G. Idet vi lader C gennemløbe de kompakte delmængder af $\hat{G}$ og ε de positive tal, udgør mængderne

$$N(C,\varepsilon) = \{ x \in G \mid |1-\gamma(x)| < \varepsilon \text{ for alle } \gamma \in C \}$$

og

$$U_{\hat{G}}(C,\varepsilon) = \{ \delta \in \hat{\hat{G}} \mid |1-\delta(\gamma)| < \varepsilon \text{ for alle } \gamma \in C \}$$

baser for omegnene af 0 i henholdsvis G og $\hat{\hat{G}}$.

Da j er en gruppeisomorfi af G på $j(G)$, og da

$$j(N(C,\varepsilon)) = j(G) \cap U_{\hat{G}}(C,\varepsilon),$$

følger det at $j: G \to j(G)$ og $j^{-1}: j(G) \to G$ er kontinuerte i 0, når $j(G)$ udstyres med delrumstopologien fra $\hat{\hat{G}}$.

Dermed er j en homeomorfi af G på $j(G)$ som følgelig er en lokalkompakt gruppe i delrumstopologien. Af Lemma 7.4 fås da, at $j(G)$ er afsluttet i $\hat{\hat{G}}$. Hvis $j(G)$ er en ægte del af $\hat{\hat{G}}$ giver lemma 7.3 anvendt på gruppen $\hat{G}$, at der findes $f \in L^1(\hat{G})$ så $\mathcal{F}_{\hat{G}} f \not\equiv 0$ og så $\operatorname{supp}(\mathcal{F}_{\hat{G}} f) \subseteq \hat{\hat{G}} \setminus j(G)$, altså

$$\mathcal{F}_{\hat{G}} f\,(j(x)) = \int_{\hat{G}} \overline{\gamma(x)}\, f(\gamma)\, d\gamma = 0 \quad \text{for alle } x \in G.$$

Af lemma 4.6 følger imidlertid at $f = 0$, men så er $\mathcal{F}_{\hat{G}} f = 0$ hvilket er en modstrid. Altså er $j(G) = \hat{\hat{G}}$.

(Vi bruger gruppen G som index i betegnelsen for Fouriertransformationen, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_G$, når vi vil fremhæve, at den anvendes på funktioner eller mål på G. Betegnelsen $\overline{\mathcal{F}}_G$ bruges analogt.)

Lad m være et Haarmål på G, m' det dermed harmonerende Haarmål på $\hat{G}$ og m'' det dermed harmonerende Haarmål på $\hat{\hat{G}}$. Billedmålet $j(m)$ af Haarmålet m på G er defineret ved

$$\int_{\hat{\hat{G}}} f \, d(j(m)) = \int_G f \circ j \, dm \quad \text{for } f \in \mathcal{K}(\hat{\hat{G}}),$$

og da j er en isomorfi ses, at $j(m)$ er et Haarmål på $\hat{\hat{G}}$. Vi skal vise, at $m'' = j(m)$, og da de er proportionale er det nok at vise at

$$\int_{\hat{\hat{G}}} f \, d(j(m)) = \int_{\hat{\hat{G}}} f \, dm''$$

for en enkelt funktion $f \not\equiv 0$ som tilhører $L^1(\hat{\hat{G}}, m'')$.

For $g \in \mathcal{K}_+(G)$, $g \neq 0$, sættes $\varphi = g^* * g$. Af inversionssætningen følger

$$\varphi(x) = \check{\varphi}(x) = \int_{\hat{G}} \overline{\gamma(x)}\, \mathcal{F}_G \varphi(\gamma)\, dm'(\gamma)$$

altså

$$\varphi(x) = \mathcal{F}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G \varphi(j(x)) .$$

For $f = |\mathcal{F}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G \varphi|^2 \in L^1(\hat{\hat{G}}, m'')$ gælder da

$$\int_{\hat{\hat{G}}} f\, d(j(m)) = \int_G f \circ j\, dm = \int_G |\varphi|^2\, dm .$$

Ifølge Plancherel's sætning anvendt først for G og dernæst for $\hat{G}$ gælder

$$\int_G |\varphi|^2 dm = \int_{\hat{G}} |\mathcal{F}_G \varphi|^2 dm' = \int_{\hat{\hat{G}}} f\, dm''$$

altså

$$\int_{\hat{\hat{G}}} f\, d(j(m)) = \int_{\hat{\hat{G}}} f\, dm'' . \quad \square$$

På grund af Pontriagin's dualitetssætning vil vi identificere G og $\hat{\hat{G}}$ og vi siger kort, at G er den duale gruppe til $\hat{G}$.

For fremtiden vil vi for $x \in G$ og $\gamma \in \hat{G}$ ofte skrive

$$\langle x, \gamma \rangle = \gamma(x)$$

for at lade symmetrien mellem G og $\hat{G}$ træde frem.

Afbildningerne $(x \mapsto \langle x, \gamma \rangle)_{\gamma \in \hat{G}}$ er karaktererne på G, og afbildningerne $(\gamma \mapsto \langle x, \gamma \rangle)_{x \in G}$ er karaktererne på $\hat{G}$.

<u>Sætning 7.6</u> Afbildningerne $\mathcal{F}_G$ og $\overline{\mathcal{F}}_G$ er isometrier af $L^2(G)$ på $L^2(\hat{G})$ og de inverse afbildninger er henholdsvis $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}$ og $\mathcal{F}_{\hat{G}}$. Der gælder altså

$$\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}(\mathcal{F}_G f) = \mathcal{F}_{\hat{G}}(\overline{\mathcal{F}}_G f) = f$$

og videre

$$\mathcal{F}_{\hat{G}}(\mathcal{F}_G f) = \check{f}$$

for alle $f \in L^2(G)$.

Bevis. Ifølge inversionssætningen gælder

$$\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G(f * g) = f * g$$

for alle $f, g \in \mathcal{K}(G)$. Da mængden $\{ f*g \mid f, g \in \mathcal{K}(G)\}$ er tæt i $L^2(G)$ (overvej dette) følger ved kontinuitet at

$$\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}} \mathcal{F}_G f = f$$

for alle $f \in L^2(G)$. De øvrige identiteter udledes ved hjælp af formlerne p. 42 nederst. □

Ved hjælp af den fuldstændige symmetri mellem G og $\hat{G}$ kan vi skærpe forskellige resultater fra de foregående paragraffer:

1) G er kompakt hvis og kun hvis $\hat{G}$ er diskret

(jvfr. sætning 3.5)

2) $L^1(G)$ har etelement hvis og kun hvis G er diskret (jvfr. sætning 2.2).

Hvis nemlig $L^1(G)$ har ételement, er spektret $\hat{G}$ kompakt, men så er G diskret.

3) Hvis $\mu \in M(G)$ og hvis $\mathcal{F}\mu(\gamma) = 0$ for alle $\gamma \in \hat{G}$, så er $\mu = 0$.

Dette følger af lemma 4.6

4) $M(G)$ og $L^1(G)$ er <u>semi-simple</u> <u>Banachalgebraer</u>.

At en kommutativ Banach algebra er semi-simpel betyder per. definition, at Gelfandtransformationen er injektiv. Dermed er 4) en følge af 3).

5) For hvert $\mu \in M_+(G)$ er $\mathcal{F}\mu$ en kontinuert positiv definit funktion på $\hat{G}$ og enhver sådan har formen $\mathcal{F}\mu$ for præcis et $\mu \in M_+(G)$.

Dette er Bochner's sætning anvendt på $\hat{G}$, idet man samtidig udnytter at

$$\int_G \langle x, \gamma \rangle \, d\check{\mu}(x) = \mathcal{F}\mu(\gamma).$$

<u>Øvelse 7.1</u> Lad μ og ν være positive begrænsede mål på G og antag at $\mu * \nu = \varepsilon_0$. Der findes $a \in G$ så $\mu = \varepsilon_a$ og $\nu = \varepsilon_{-a}$.

Vi minder om, at et lokalkompakt rum X kaldes <u>σ-kompakt</u> eller <u>numerabelt i det uendelige</u>, såfremt der findes en følge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ af kompakte mængder $K_n \subseteq X$ så

$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Der findes så også en <u>udtømmende</u> følge (L_n) af kompakte mængder L_n, d.v.s. en følge med egenskaben, at der til enhver kompakt delmængde $C \subseteq X$ findes et $n\in\mathbb{N}$ så $C \subseteq L_n$ (jvfr. Mat 6, Top. opg. 35).

<u>Sætning 7.7</u> Lad G være en LCA-gruppe med dual gruppe $\hat{G}$.

a) G er metriserbar hvis og kun hvis $\hat{G}$ er σ-kompakt.

b) G har en numerabel basis for topologien hvis og kun hvis $\hat{G}$ har en numerabel basis for topologien.

Bevis. a) Hvis G er metriserbar findes en numerabel basis $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for omegnssystemet af 0 bestående af kompakte omegne. Ifølge sætning 3.4 er mængderne $\mathcal{U}_G(V_n,\frac{1}{2})$ relativt kompakte og der gælder

$$\hat{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_G(V_n,\tfrac{1}{2}), \qquad (*)$$

hvilket viser at $\hat{G}$ er σ-kompakt. For at indse $(*)$ betragter vi $\gamma\in\hat{G}$. Mængden

$$U = \{x\in G \mid |1-\gamma(x)| < \tfrac{1}{2}\}$$

er en omegn af 0 i G og der findes derfor et $n\in\mathbb{N}$ så $V_n \subseteq U$, altså $\gamma\in \mathcal{U}_G(V_n,\frac{1}{2})$.

Hvis $\hat{G}$ er σ-kompakt findes en udtømmende følge af kompakte mængder K_n i $\hat{G}$. Topologien for ligelig konvergens over kompakte delmængder, på rummet $C(\hat{G},\mathbb{C})$, kan derfor defineres ved numerabelt mange seminormer

$$p_n(f) = \sup_{\gamma \in K_n} |f(\gamma)| \,,$$

og derfor er $C(\hat{G}, \mathbb{C})$ metriserbart. Specielt er $G \subseteq C(\hat{G}, \mathbb{C})$ metriserbar.

b) Hvis G har en numerabel basis for topologien ser man let at G er σ-kompakt og så er $\hat{G}$ metriserbar. Desuden har G en numerabel basis for omegnene af 0, og af beviset for a) fremgår, at så må $\hat{G}$ være σ-kompakt. Vi påstår nu, at et σ-kompakt og metriserbart rum er separabelt. For at se dette er det nok at vise, at et kompakt metriserbart rum X er separabelt. Af kompaktheden følger nemlig, at der til hvert $n \in \mathbb{N}$ findes en endelig delmængde $A_n \subseteq X$ så

$$X = \bigcup_{a \in A_n} B(a, \tfrac{1}{n})$$

hvor $B(a, \frac{1}{n})$ er den åbne kugle med centrum a og radius $\frac{1}{n}$. Det er nu let at se, at

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

er tæt i X.

Da $\hat{G}$ er σ-kompakt og metriserbart er $\hat{G}$ altså separabelt. Et separabelt metriserbart rum har imidlertid en numerabel basis. $\square$.

<u>Bemærkninger.</u> Der gælder følgende generelle resul-

tater:

1) En Hausdorff-topologisk gruppe er metriserbar hvis og kun hvis der findes en numerabel basis for omegnene af 0.

2) Et lokalkompakt rum har en numerabel basis for topologien hvis og kun hvis det er σ-kompakt og metriserbart.

Under anvendelse af 2) er b) en triviel følge af a).

§8. Kvotientgrupper og periodicitet

Lad G være en abelsk gruppe og H en undergruppe af G. Ved fastsættelsen

$$x \sim y \iff x-y \in H$$

defineres en ækvivalensrelation $\sim$ i G. Ækvivalensklasserne er af formen $x+H$, $x \in G$, og mængden af ækvivalensklasser udgør en abelsk gruppe G/H under kompositionen

$$(x+H)+(y+H) = (x+y)+H .$$

Gruppen G/H kaldes <u>kvotientgruppen</u> af G modulo H. Afbildningen $\pi: G \to G/H$, der til $x \in G$ knytter ækvivalensklassen $\pi(x) = x+H$ indeholdende x, er en surjektiv homomorfi, kaldet den <u>kanoniske homomorfi</u>.

Vi antager nu, at G er en topologisk abelsk gruppe, og udstyrer G/H med finaltopologien bestemt ved π. En delmængde $O \subseteq G/H$ er åben i G/H netop hvis $\pi^{-1}(O)$ er åben i G.

Sætning 8.1 Lad G være en topologisk abelsk gruppe, H en undergruppe. Kvotientgruppen G/H er en topologisk gruppe, og $\pi : G \to G/H$ er kontinuert og åben. Kvotientgruppen G/H er et Hausdorff rum hvis og kun hvis H er afsluttet, og G/H er diskret hvis og kun hvis H er åben. Hvis G er en LCA-gruppe og H er en afsluttet undergruppe er G/H en LCA-gruppe.

Bevis. Overlades til læseren. Jvfr. Mat 6. T.V.R. p. 12.

Lad G være en LCA-gruppe. En kontinuert funktion $f: G \to \mathbb{C}$ kaldes periodisk med periode $a \in G$ såfremt

$$\tau_a f = \varepsilon_a * f = f ,$$

altså såfremt

$$f(x-a) = f(x) \qquad \text{for alle } x \in G.$$

Mængden af perioder P_f for en kontinuert funktion $f: G \to \mathbb{C}$, er en afsluttet undergruppe af G. Hvis nemlig $a, b \in P_f$ gælder

$$\varepsilon_{a+b} * f = \varepsilon_a * \varepsilon_b * f = \varepsilon_a * f = f$$

$$\varepsilon_{-a} * f = \varepsilon_{-a} * \varepsilon_a * f = \varepsilon_0 * f = f$$

og hvis $(a_i)_{i \in I}$ er et net på P_f så $\lim_{i \in I} a_i = a$, gælder

$$\varepsilon_a * f(x) = f(x-a) = \lim_{i \in I} f(x-a_i) = f(x)$$

fordi f er kontinuert, altså $a \in P_f$.

Lad H være en afsluttet undergruppe af G. Hvis det om en kontinuert funktion $f : G \to \mathbb{C}$ gælder at $P_f \supseteq H$, så findes der præcis en funktion $\mathring{f} : G/H \to \mathbb{C}$ så

$$f(x) = \mathring{f}(\pi(x)) \quad \text{for} \quad x \in G$$

altså så følgende diagram kommuterer

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & G/H \arrow[dl, "\mathring{f}"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

Da G/H er udstyret med en finaltopologi er $\mathring{f}$ kontinuert. Vi siger, at funktionen f <u>faktoriseres</u> i funktionen $\mathring{f}$ på G/H.

Lad X være et lokalkompakt rum og Y en afsluttet delmængde. For $f \in \mathcal{K}(X)$ er restriktionen $f|_Y$ af f til Y en kontinuert funktion med kompakt støtte på Y.

Er μ et positivt Radonmål på Y, definerer

$$f \longmapsto \langle f|_Y , \mu \rangle \qquad \text{for } f \in \mathcal{K}(X),$$

et positivt Radonmål på X, som betegnes $j(\mu)$. Hermed defineres en afbildning j af de positive Radonmål på Y ind i de positive Radonmål på X. Afbildningen j er injektiv, som man let ser ved hjælp af Tietze's udvidelsessætning, og vi vil derfor identificere μ og $j(\mu)$. Vi kan således opfatte ethvert positivt mål på Y som et positivt mål på X, og dermed også ethvert mål på Y som et mål X.

Lad G være en LCA-gruppe og H en afsluttet undergruppe. Det er let at se, at H er lokalkompakt. Lad ω_H være et Haarmål på H. Ifølge bemærkningen ovenfor, opfatter vi ω_H som et mål på G. For $f \in \mathcal{K}(G)$ er funktionen $f^\natural = \omega_H * f$, altså

$$f^\natural(x) = \omega_H * f(x) = \int f(x-y)\, d\omega_H(y) = \int f(x+y)\, d\omega_H(y),$$

ifølge sætning 2.4 a), en kontinuert funktion på G.

Funktionen $f^\natural$ er periodisk med alle $h \in H$ som periode, thi for $h \in H$ gælder

$$\varepsilon_h * f^\natural = \varepsilon_h * \omega_H * f = \omega_H * f = f^\natural$$

fordi $\varepsilon_h * \omega_H = \tau_h \omega_H = \omega_H$ for alle $h \in H$.

Funktionen $f^\natural$ kan derfor faktoriseres i en funktion $\dot{f}^\natural$ på kvotientgruppen G/H så følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f^\natural"'] & & G/H \arrow[dl, "\dot{f}^\natural"] \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

Der gælder $\operatorname{supp}(\dot{f}^\natural) \subseteq \pi(\operatorname{supp}(f))$, og dermed $\dot{f}^\natural \in \mathcal{K}(G/H)$.

Hvis nemlig $\dot{f}^\natural(\pi(x)) \neq 0$, altså $f^\natural(x) \neq 0$, så findes $h \in H$ med $f(x+h) \neq 0$, altså $x + h \in \operatorname{supp}(f)$, hvoraf

$$\pi(x) = \pi(x+h) \in \pi(\mathrm{supp}(f)).$$

<u>Lemma 8.2.</u> Afbildningen $\sigma : \mathcal{K}(G) \to \mathcal{K}(G/H)$ defineret ved

$$\sigma(f) = f^{\flat}$$

er en surjektiv positiv lineær afbildning. Der gælder endda, at der til hvert $h \in \mathcal{K}_+(G/H)$ findes $f \in \mathcal{K}_+(G)$ så $\sigma(f) = h$. For $a \in G$ gælder

$$\sigma(\tau_a f) = \tau_{\pi(a)}\,\sigma(f).$$

Bevis. Det er klart at σ er en positiv lineær afbildning.

Vi viser først, at der til en vilkårlig kompakt mængde $C \subseteq G/H$ findes en kompakt mængde $K \subseteq G$ så $\pi(K) = C$.

Lad nemlig $\mathcal{U}$ være en kompakt omegn af 0 i G. Da er $\pi(\mathcal{U})$ en kompakt omegn af 0 i G/H, og så findes endelig mange punkter $x_1, \dots, x_n \in G$ så

$$\bigcup_{i=1}^{n} \pi(x_i) + \pi(\mathcal{U}) \supseteq C.$$

Mængden

$$K = \Big(\bigcup_{i=1}^{n} x_i + \mathcal{U}\Big) \cap \pi^{-1}(C)$$

er kompakt, og der gælder $\pi(K) = C$. For $\pi(x) \in C$ findes nemlig et x_i så $\pi(x) \in \pi(x_i) + \pi(\mathcal{U})$, og dermed findes et $h \in H$ så $x + h \in x_i + \mathcal{U}$. Punktet $y = x + h$

tilhører K og $\pi(y) = \pi(x)$.

Lad dernæst $h \in \mathcal{K}_+(G/H)$ og lad K være en kompakt mængde i G så $\pi(K) = \operatorname{supp}(h)$. Vi vælger $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ så $\varphi(x) = 1$ for alle $x \in K$.

Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)\, h(\pi(x))}{\varphi^\natural(x)} & , \text{ for } \varphi^\natural(x) \neq 0 \\ 0 & , \text{ for } \varphi^\natural(x) = 0 \end{cases}$$

tilhører $\mathcal{K}_+(G)$.

For at se at f er kontinuert bemærkes, at hvis $\varphi^\natural(x) = 0$, så er $\pi(x) \notin \operatorname{supp}(h)$, specielt $h(\pi(x)) = 0$. Der gælder nemlig

$$\varphi(x+h) = 0 \quad \text{for alle } h \in H$$

altså

$$x + h \notin K \quad \text{for alle } h \in H,$$

men så er $\pi(x) \notin \pi(K) = \operatorname{supp}(h)$.

For et punkt x så $\varphi^\natural(x) = 0$ er $\pi^{-1}(C\operatorname{supp}(h))$ en åben omegn af x hvori f er identisk 0, og dette viser at f er kontinuert i x.

Om den således definerede funktion $f \in \mathcal{K}_+(G)$ gælder

$$f(x+h) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+h)\, h(\pi(x))}{\varphi^\natural(x)} & , \text{ for } \varphi^\natural(x) \neq 0 \\ 0 & , \text{ for } \varphi^\natural(x) = 0 \end{cases}$$

for alle $h \in H$, idet $\varphi^\natural(x) = \varphi^\natural(x+h)$. Altså har vi

$$f^{\natural}(x) = \begin{cases} h(\pi(x)) & , \text{ for } \varphi^{\natural}(x) \neq 0 \\ 0 & , \text{ for } \varphi^{\natural}(x) = 0 . \end{cases}$$

Idet $h(\pi(x)) = 0$ når $\varphi^{\natural}(x) = 0$ fås

$$f^{\natural}(x) = h(\pi(x)) \quad \text{for alle } x \in G,$$

eller $\sigma(f) = \dot{f}^{\natural} = h$.

For $f \in \mathcal{K}(G)$, $a \in G$ har vi

$$\tau_{\pi(a)}\sigma(f)(\pi(x)) = \sigma(f)(\pi(x) - \pi(a)) = \sigma(f)(\pi(x-a)) = f^{\natural}(x-a) =$$

$$\varepsilon_a * f^{\natural}(x) = \varepsilon_a * (f * \omega_H)(x) = (\tau_a f) * \omega_H(x) = (\tau_a f)^{\natural}(x) =$$

$$\sigma(\tau_a f)(\pi(x)),$$

hvilket viser at

$$\tau_{\pi(a)}\sigma(f) = \sigma(\tau_a f) . \qquad \square$$

Et mål μ på G kaldes <u>periodisk</u> med <u>periode</u> $a \in G$ såfremt

$$\tau_a \mu = \varepsilon_a * \mu = \mu .$$

Mængden af perioder P_μ for μ udgør en afsluttet undergruppe af G. (Overvej dette).

Hvis μ er et positivt mål på G/H defineres ved

$$f \longmapsto \langle \sigma(f), \mu \rangle = \langle \dot{f}^{\natural}, \mu \rangle$$

en positiv linearform på $\mathcal{K}(G)$, altså et positivt mål på G, som betegnes $\sigma^*(\mu)$. Målet $\sigma^*(\mu)$ er periodisk med alle $h \in H$ som periode, thi ifølge lemma 8.2

har vi for $h \in H$, $f \in \mathcal{K}(G)$ at

$$\sigma(\tau_h f) = \tau_{\pi(h)} \sigma(f) = \tau_0 \sigma(f) = \sigma(f),$$

altså

$$<f, \tau_h \sigma^*(\mu)> = <\tau_{-h} f, \sigma^*(\mu)> = <\sigma(\tau_{-h} f), \mu>$$

$$= <\sigma(f), \mu> = <f, \sigma^*(\mu)>,$$

hvilket viser, at

$$\tau_h \sigma^*(\mu) = \sigma^*(\mu).$$

<u>Bemærkning</u>. Man kan vise at $\sigma : \mathcal{K}(G) \to \mathcal{K}(G/H)$ er kontinuert, når disse rum er udstyret med deres naturlige topologier. Dermed er σ^* den transponerede afbildning af $\mathcal{K}(G/H)'$ ind i $\mathcal{K}(G)'$, altså af Radonmålene på G/H ind i Radonmålene på G. For $\mu \in \mathcal{K}(G/H)'$ er $\sigma^*(\mu)$ et periodisk Radonmål på G. Vi har ovenfor indskrænket os til at betragte σ^*'s restriktion til de positive mål på G/H.

For et Haarmål $\omega_{G/H}$ på G/H er $\sigma^*(\omega_{G/H})$ et Haarmål på G, thi for alle $a \in G$, $f \in \mathcal{K}(G)$ har vi

$$<\tau_a f, \sigma^*(\omega_{G/H})> = <\tau_{\pi(a)} \sigma(f), \omega_{G/H}> = <\sigma(f), \omega_{G/H}>$$

$$= <f, \sigma^*(\omega_{G/H})>,$$

hvilket viser, at $\sigma^*(\omega_{G/H})$ er translationsinvariant. Dermed har vi vist følgende resultat:

<u>Sætning 8.3.</u> Lad G være en LCA-gruppe, H en afsluttet undergruppe. Det er muligt at vælge Haarmålene ω_G, ω_H og $\omega_{G/H}$ på G, H og G/H så der for $f \in \mathcal{K}(G)$ gælder

$$\int_G f \, d\omega_G = \int_{G/H} \dot{f}^{\natural} \, d\omega_{G/H} = \int_{G/H} \sigma(f) \, d\omega_{G/H} , \qquad (1)$$

hvor det for $x \in G$ gælder

$$\dot{f}^{\natural}(\pi(x)) = f^{\natural}(x) = f * \omega_H(x) = \int_H f(x+h) \, d\omega_H(h) \qquad (2).$$

I det følgende tænker vi os Haarmålene på G, H og G/H valgt så (1) og (2) gælder, hvilket vi symbolsk skriver

$$\omega_{G/H} = \frac{\omega_G}{\omega_H} .$$

Operationen $\natural$ og afbildningerne σ og σ^* afhænger af Haarmålet på H. Når dette er valgt er Haarmålene ω_G og $\omega_{G/H}$ forbundet af formlen $\sigma^*(\omega_{G/H}) = \omega_G$.

<u>Øvelse 8.1.</u> Lad G være en kompakt abelsk gruppe, H en afsluttet undergruppe. Hvis vi som Haarmål på de kompakte grupper G, H og G/H bruger ω_G, ω_H og $\omega_{G/H}$ alle med totalmasse 1, gælder

$$\omega_{G/H} = \frac{\omega_G}{\omega_H} .$$

<u>Øvelse 8.2.</u> Lad G være en diskret abelsk gruppe,

H en undergruppe. Hvis vi som Haarmål på de diskrete grupper G, H og G/H bruger ω_G, ω_H og $\omega_{G/H}$, alle normaliseret så punkterne har masse 1 gælder

$$\omega_{G/H} = \frac{\omega_G}{\omega_H} .$$

<u>Sætning 8.4.</u> Afbildningen σ^* er en bijektiv afbildning af mængden af positive mål på G/H på mængden af de positive mål på G, der har alle elementer i H som periode. Med andre ord: For hvert positivt mål μ på G så $P_\mu \supseteq H$ findes et og kun et positivt mål $\dot{\mu}$ på G/H så

$$\sigma^*(\dot{\mu}) = \mu ,$$

altså så

$$\int_G f \, d\mu = \int_{G/H} f^\natural \, d\dot{\mu} \qquad \text{for alle } f \in \mathcal{K}(G).$$

Bevis. Ifølge lemma 8.2 er σ surjektiv, men så er σ^* injektiv.

Lad nu μ være et positivt mål på G så $P_\mu \supseteq H$. For $h \in \mathcal{K}(G/H)$ findes $f \in \mathcal{K}(G)$ så $f^\natural = h$, og det søgte mål $\dot{\mu}$ må derfor opfylde

$$\int_G f \, d\mu = \int_{G/H} h \, d\dot{\mu} , \tag{3}$$

hvilket fastlægger $\dot{\mu}$ entydigt. For at vise at $\dot{\mu}$ kan defineres ved (3) må vi eftervise, at hvis $f_1, f_2 \in \mathcal{K}(G)$

opfylder $\dot{f}_1^{\natural} = \dot{f}_2^{\natural}$, så er

$$\int f_1 \, d\mu = \int f_2 \, d\mu .$$

Vi viser først, at der for vilkårligt $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ gælder

$$\langle f_1 * \varphi, \mu \rangle = \langle f_2 * \varphi, \mu \rangle . \qquad (4)$$

For $f \in \mathcal{K}(G)$ finder vi

$$\langle f * \varphi, \mu \rangle = \langle f, \check{\varphi} * \mu \rangle = \int_G f \cdot (\check{\varphi} * \mu) \, d\omega_G$$

$$= \int_{G/H} \sigma[f \cdot (\check{\varphi} * \mu)] \, d\omega_{G/H} .$$

Idet $\check{\varphi} * \mu$ også er periodisk med alle $h \in H$ som periode har vi

$$[f \cdot (\check{\varphi} * \mu)]^{\natural} = f^{\natural} \cdot (\check{\varphi} * \mu),$$

altså

$$\sigma[f \cdot (\check{\varphi} * \mu)] = \sigma(f)(\check{\varphi} * \mu)^{\bullet},$$

og dermed har vi

$$\langle f * \varphi, \mu \rangle = \int_{G/H} \sigma(f) \cdot (\check{\varphi} * \mu)^{\bullet} \, d\omega_{G/H} .$$

Da $\sigma(f_1) = \sigma(f_2)$ følger (4). Lader vi i (4) φ gennemløbe en approximativ enhed følger af lemma 5.3 at

$$\int f_1 \, d\mu = \int f_2 \, d\mu .$$

Defineres $\dot{\mu}$ ved (3) er det klart, at $\dot{\mu}$ er en positiv linearform på $\mathcal{K}(G/H)$, altså et positivt mål på G/H, og dermed er sætningen vist. $\square$

Lad μ være et positivt mål på G så $P_\mu \supseteq H$. Vi siger at μ <u>faktoriseres</u> i det entydigt bestemte mål $\dot{\mu}$ på G/H så

$$\int f \, d\mu = \int f^{\natural} \, d\dot{\mu} \qquad , \qquad f \in \mathcal{K}(G) .$$

Afbildningen $\mu \mapsto \dot{\mu}$ er den inverse til σ^*.

<u>Bemærkning.</u> Sætning 8.4 kan generaliseres således: Afbildningen σ^* er en bijektiv lineær afbildning af mængden af Radonmål på G/H på mængden af Radonmål μ på G, for hvilke $P_\mu \supseteq H$. Jvfr. bemærkningen p. 113.

<u>Øvelse 8.3.</u> Lad f være en positiv kontinuert funktion på G så $P_f \supseteq H$. Målet med f som tæthed med hensyn til Haarmålet på G betegnes $\mu = f\omega_G$. Så er $P_\mu = P_f$ og $\dot{\mu} = \dot{f}\,\omega_{G/H}$.

<u>Sætning 8.5.</u> Lad μ være et positivt mål på G så $P_\mu \supseteq H$. For hvert $a \in G$ vil $P_{\tau_a \mu} = P_\mu$ og

$$(\tau_a \mu)^{\cdot} = \tau_{\pi(a)} \dot{\mu} .$$

Specielt er μ periodisk med a som periode hvis og kun hvis $\dot{\mu}$ er periodisk med $\pi(a)$ som periode.

Bevis. For $h \in P_\mu$ vil

$$\tau_a\mu * \varepsilon_h = \varepsilon_a * \mu * \varepsilon_h = \varepsilon_a * \mu = \tau_a\mu$$

altså $h \in P_{\tau_a\mu}$. Dermed har vi $P_\mu \subseteq P_{\tau_a\mu}$, og derfor også

$P_{\tau_a\mu} \subseteq P_{\tau_{-a}\tau_a\mu} = P_\mu$, altså $P_\mu = P_{\tau_a\mu}$.

For $f \in \mathcal{K}(G)$ gælder

$$\langle \sigma(f), (\tau_a\mu)^\cdot \rangle = \langle f, \tau_a\mu \rangle = \langle \tau_{-a}f, \mu \rangle$$

$$= \langle \sigma(\tau_{-a}f), \dot{\mu} \rangle = \langle \tau_{\pi(-a)}\sigma(f), \dot{\mu} \rangle = \langle \sigma(f), \tau_{\pi(a)}\dot{\mu} \rangle,$$

hvilket viser, at

$$(\tau_a\mu)^\cdot = \tau_{\pi(a)}\dot{\mu} .$$

Hvis $a \in P_\mu$ er $\tau_a\mu = \mu$ og dermed

$$(\tau_a\mu)^\cdot = \tau_{\pi(a)}\dot{\mu} = \dot{\mu},$$

hvilket viser at $\pi(a) \in P_{\dot{\mu}}$. Hvis omvendt $\pi(a) \in P_{\dot{\mu}}$ er

$$\tau_{\pi(a)}\dot{\mu} = (\tau_a\mu)^\cdot = \dot{\mu},$$

og da "$\cdot$" er injektiv er $\tau_a\mu = \mu$. $\square$

<u>Corollar 8.6.</u> Lad μ være et positivt mål på G. Det til μ faktoriserede mål $\dot{\mu}$ på G/P_μ har kun den trivielle periode 0.

<u>Sætning 8.7.</u> For en funktion $f \in C_0(G)$, $f \neq 0$, er gruppen af perioder P_f kompakt. For et mål $\mu \in M(G)$, $\mu \neq 0$, er gruppen P_μ af perioder kompakt.

Bevis. Lad x_0 være et punkt så $|f(x_0)| = \|f\|$. Mængden

$$\{x \in G \mid |f(x)| \geq \|f\|\}$$

er kompakt og den indeholder $x_0 + P_f$, altså er $x_0 + P_f$ kompakt. Dermed er P_f kompakt.

Idet $\mu \neq 0$ findes $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ så $f = \mu * \varphi \neq 0$. Da $f \in C_0(G)$ og da $P_f \supseteq P_\mu$, følger af første del af beviset, at P_μ er kompakt. $\blacksquare$

§ 9. Ortogonalitetsteori.

Lad G være en LCA-gruppe med dual gruppe $\hat{G}$. Den til $\hat{G}$ duale gruppe er identificeret med G.

<u>Definition.</u> Ved det <u>ortogonale</u> til en delmængde $M \subseteq G$ forstås delmængden $M^\perp \subseteq \hat{G}$ defineret ved

$$M^\perp = \{\gamma \in \hat{G} \mid \langle x, \gamma \rangle = 1 \text{ for alle } x \in M\}.$$

Delmængden $M^\perp$ kaldes også <u>annihilatoren</u> for M.

Der gælder $\emptyset^\perp = \hat{G}$, $G^\perp = \{0\}$, og hvis $M_1 \subseteq M_2$ vil $M_1^\perp \supseteq M_2^\perp$. Idet

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} \{x\}^\perp$$

er det klart, at $M^\perp$ er en <u>afsluttet undergruppe</u> af $\hat{G}$.

For en familie af mængder $(M_i)_{i \in I}$ gælder

$$\Big(\bigcup_{i \in I} M_i\Big)^\perp = \bigcap_{i \in I} M_i^\perp .$$

Sætning 9.1. Lad M være en delmængde af G og lad H være den afsluttede undergruppe frembragt af M. Så er $M^\perp = H^\perp$ og $M^{\perp\perp} = H$.

Bevis. Den afsluttede undergruppe H frembragt af M er fællesmængden af alle afsluttede undergrupper af G der indeholder M, altså den mindste sådanne. Idet der klart gælder $M \subseteq M^{\perp\perp}$, har vi altså $H \subseteq M^{\perp\perp}$.

Lad π være den kanoniske afbildning af G på G/H. For $x \in G \setminus H$ er $\pi(x) \neq 0$ i G/H og derfor findes en karakter χ på G/H så $\chi(\pi(x)) \neq 1$ (Korollar 7.2). Så er $\gamma = \chi \circ \pi$ en karakter på G som er 1 på H, specielt $\gamma \in M^\perp$, men da $\gamma(x) \neq 1$ må der gælde $x \notin M^{\perp\perp}$. Dette viser at $H = M^{\perp\perp}$. Heraf følger $H^\perp = (M^\perp)^{\perp\perp} = M^\perp$. ▯

Korollar 9.2. Afbildningen $H \mapsto H^\perp$ definerer en bijektiv forbindelse mellem de afsluttede undergrupper af G og de afsluttede undergrupper af $\hat{G}$.

Lad G_1 og G_2 være LCA-grupper og lad $\varphi : G_1 \to G_2$ være en kontinuert homomorfi. For hver karakter γ på G_2 er $\gamma \circ \varphi$ en karakter på G_1. Afbildningen $\gamma \mapsto \gamma\circ\varphi$ betegnes $\hat{\varphi}$ og er altså en afbildning af $\hat{G}_2 \to \hat{G}_1$. Det er klart at $\hat{\varphi}$ er en homomorfi, og den er kontinuert, idet der for enhver kompakt mængde K i G_1 og $\varepsilon > 0$ gælder

$$\hat{\varphi}(\mathcal{U}_{G_2}(\varphi(K), \varepsilon)) \subseteq \mathcal{U}_{G_1}(K, \varepsilon).$$

<u>Definition.</u> Ved den <u>duale afbildning</u> til en kontinuert homomorfi $\varphi : G_1 \to G_2$ forstås den kontinuerte homomorfi $\hat{\varphi} : \hat{G}_2 \to \hat{G}_1$ defineret ved $\hat{\varphi}(\gamma) = \gamma \circ \varphi$ for $\gamma \in \hat{G}_2$, eller

$$\langle x, \hat{\varphi}(\gamma) \rangle = \langle \varphi(x), \gamma \rangle \quad , x \in G_1 , \gamma \in \hat{G}_2 .$$

Betegner $j_i : G_i \to \hat{\hat{G}}_i$ den kanoniske isomorfi af G_i på den biduale gruppe $\hat{\hat{G}}_i$, $i=1,2$, ser man at følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \\ \downarrow j_1 & & \downarrow j_2 \\ \hat{\hat{G}}_1 & \xrightarrow{\hat{\hat{\varphi}}} & \hat{\hat{G}}_2 \end{array} \qquad \text{:} \quad j_2 \circ \varphi = \hat{\hat{\varphi}} \circ j_1$$

Når man identificerer G med $\hat{\hat{G}}$ for LCA-gruppen G identificeres φ og $\hat{\hat{\varphi}}$.

Hvis $\varphi : G \to G$ er den identiske afbildning er $\hat{\varphi} : \hat{G} \to \hat{G}$ den identiske afbildning, og hvis $\varphi : G_1 \to G_2$ og $\psi : G_2 \to G_3$ er kontinuerte homomorfier er

$$(\psi \circ \varphi)^\wedge = \hat{\varphi} \circ \hat{\psi} .$$

Heraf følger, at hvis $\varphi : G_1 \to G_2$ er en topologisk isomorfi af G_1 på G_2, så er $\hat{\varphi} : \hat{G}_2 \to \hat{G}_1$ en topologisk isomorfi af $\hat{G}_2$ på $\hat{G}_1$.

<u>Sætning 9.3.</u> Lad $\varphi : G_1 \to G_2$ være en kontinuert homomorfi med dual homomorfi $\hat{\varphi} : \hat{G}_2 \to \hat{G}_1$. Så er

$$\ker \hat{\varphi} = (\operatorname{Im} \varphi)^\perp .$$

Specielt er $\hat{\varphi}$ injektiv, hvis og kun hvis φ har tæt billede.

Bevis. Formlen følger umiddelbart af definitionsligningen

$$\langle x, \hat{\varphi}(\gamma)\rangle = \langle \varphi(x), \gamma\rangle \quad , x \in G_1, \gamma \in \hat{G}_2 .$$

For enhver tæt mængde $M \subseteq G$ er $M^{\perp} = \{0\}$, og altså er $\hat{\varphi}$ injektiv, hvis $\operatorname{Im}\varphi$ er tæt.

Hvis $\hat{\varphi}$ er injektiv er $(\operatorname{Im}\varphi)^{\perp} = \{0\}$ og så er $(\operatorname{Im}\varphi)^{\perp\perp} = G_2$. Af sætning 9.1 følger, at undergruppen $\operatorname{Im}\varphi$ er tæt i G_2. ▮

<u>Sætning 9.4.</u> Lad H være en afsluttet undergruppe af G, og lad $\pi: G \to G/H$ være den kanoniske afbildning. Den duale afbildning $\hat{\pi}: \widehat{G/H} \to \hat{G}$ er en topologisk isomorfi af $\widehat{G/H}$ på den til H ortogonale undergruppe $H^{\perp}$ af $\hat{G}$.

Bevis. For $\delta \in \widehat{G/H}$ er $\hat{\pi}(\delta) = \delta \circ \pi$ en karakter på G der er 1 på H, altså $\hat{\pi}(\delta) \in H^{\perp}$. For $\gamma \in H^{\perp}$ gælder, at γ er periodisk med alle elementer i H som perioder. Funktionen $\dot{\gamma}$ er en karakter på G/H og der gælder $\hat{\pi}(\dot{\gamma}) = \dot{\gamma} \circ \pi = \gamma$, hvilket viser, at $\hat{\pi}(\widehat{G/H}) = H^{\perp}$. Ifølge sætning 9.3 er $\hat{\pi}$ injektiv, og dermed har vi at $\hat{\pi}$ er en kontinuert algebraisk isomorfi af $\widehat{G/H}$ på $H^{\perp}$.

Lad C være en kompakt delmængde af G/H. Ifølge

første del af beviset for lemma 8.2 findes en kompakt mængde $K \subseteq G$ så $\pi(K) = C$. Heraf fås
$$\hat{\pi}(\mathcal{U}_{G/H}(C,\varepsilon)) = H^{\perp} \cap \mathcal{U}_{G}(K,\varepsilon),$$
hvilket viser at $\hat{\pi}^{-1}$ er kontinuert i 0 som afbildning af $H^{\perp}$ på $\widehat{G/H}$. Da en homomorfi er kontinuert blot den er kontinuert i 0, er $\hat{\pi}^{-1}$ kontinuert. ▯

<u>Bemærkning</u>. På grund af sætning 9.4 identificerer vi $\widehat{G/H}$ og $H^{\perp}$, og tænker på $H^{\perp}$ som den duale gruppe til G/H. Et element $\gamma \in H^{\perp}$ er identificeret med karakteren $\dot{\gamma} = \hat{\pi}^{-1}(\gamma)$ på G/H givet ved
$$\xi \in G/H \longmapsto \langle \xi, \dot{\gamma} \rangle = \langle x, \gamma \rangle,$$
idet x er en vilkårlig repræsentant for sideklassen ξ, altså $\pi(x) = \xi$.

For et begrænset mål μ på G/H er den Fouriertransformerede $\mathcal{F}_{G/H}\mu$ en funktion på $H^{\perp}$ givet ved
$$\mathcal{F}_{G/H}\mu(\gamma) = \int_{G/H} \overline{\langle \xi, \dot{\gamma} \rangle}\, d\mu(\xi) \,. \tag{1}$$

Lad $i : H \to G$ være den kanoniske indlejring af H i G. Den duale afbildning $\hat{i} : \hat{G} \to \hat{H}$ afbilder $\gamma \in \hat{G}$ i restriktionen af γ til H. Dermed er $\ker \hat{i} = H^{\perp}$, og følgelig kan $\hat{i}$ faktoriseres i en kontinuert homomorfi $\tau\ (= \hat{i}^{\bullet}) : \hat{G}/H^{\perp} \to \hat{H}$ så diagrammet kommuterer:

$$
\begin{tikzcd}
\hat{G} \arrow[rr, "\hat{i}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \hat{H} \\
& \hat{G}/H^{\perp} \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}
$$

Her er π den kanoniske afbildning af $\hat{G}$ på $\hat{G}/H^{\perp}$. Et element $\xi \in \hat{G}/H^{\perp}$ er en ækvivalensklasse af karakterer på G der stemmer overens på H. Ved τ overføres ξ i disse karakterers restriktion til H, altså

$$\tau(\xi) = \gamma|_H \quad , \text{hvor } \pi(\gamma) = \xi .$$

<u>Sætning 9.5.</u> Afbildningen $\tau : \hat{G}/H^{\perp} \to \hat{H}$ er en topologisk isomorfi. Enhver karakter på H kan udvides til en karakter på G.

Bevis. Ifølge sætning 9.4 er den til π duale homomorfi $\hat{\pi}$ en topologisk isomorfi af $\widehat{\hat{G}/H^{\perp}}$ på $H^{\perp\perp} = H$. Den omvendte afbildning

$$\hat{\pi}^{-1} : H \to \widehat{\hat{G}/H^{\perp}}$$

er ifølge sætning 9.4 givet ved, at for $h \in H$ er $\hat{\pi}^{-1}(h)$ den karakter på $\hat{G}/H^{\perp}$, der til en ækvivalensklasse $\xi \in \hat{G}/H^{\perp}$ knytter tallet $\langle h, \gamma \rangle$, hvor γ er en repræsentant for ξ, altså

$$\langle \xi, \hat{\pi}^{-1}(h) \rangle = \langle h, \gamma \rangle \quad , \text{hvor } \pi(\gamma) = \xi .$$

Vi vil nu vise at afbildningerne

$$\tau : \hat{G}/H^{\perp} \to \hat{H}$$

og

$$\hat{\pi}^{-1} : H \to \widehat{\hat{G}/H^{\perp}}$$

er hinandens duale. Da $\hat{\pi}^{-1}$ er en topologisk isomorfi, kan vi heraf slutte, at τ er en topologisk isomorfi.

For $h \in H$, $\xi \in \widehat{G}/H^{\perp}$ har vi

$$<\xi, \hat{\tau}(h)> = <\tau(\xi), h> = <h, \gamma>,$$

hvor $\pi(\gamma) = \xi$, altså er $\hat{\tau} = \hat{\pi}^{-1}$.

Vi ved nu specielt, at $\hat{\iota} : \hat{G} \to \hat{H}$ er surjektiv, men dette vil netop sige, at enhver karakter på H er restriktion af en karakter på G. ∎

Bemærkning. På grund af sætning 9.5 identificerer vi $\hat{H}$ med $\widehat{G}/H^{\perp}$, og tænker på $\widehat{G}/H^{\perp}$ som den duale gruppe til H. Et element $\xi \in \widehat{G}/H^{\perp}$ er identificeret med karakteren $\tau(\xi)$ på H, der afbilder $h \in H$ i tallet $<h, \gamma>$, idet γ er en repræsentant for ξ.

For et begrænset mål μ på H er den Fouriertransformerede $\mathcal{F}_H\mu$ en funktion på $\widehat{G}/H^{\perp}$ givet ved

$$\mathcal{F}_H\mu(\xi) = \int_H <h, \gamma> d\mu(h) \quad , \text{ hvor } \pi(\gamma) = \xi. \qquad (2)$$

Sætning 9.6. Lad G være en LCA-gruppe. Hvis H er en åben resp. kompakt undergruppe af G er $H^{\perp}$ en kompakt resp. åben undergruppe af $\hat{G}$.

Bevis. Hvis H er åben er H også afsluttet og kvotientgruppen G/H er diskret. Dermed er den duale gruppe $\widehat{G/H}$ kompakt, men så er $H^{\perp}$ kompakt ifølge sætning 9.4.

Hvis H er kompakt er $\hat{H}$ diskret, altså er $\hat{G}/H^{\perp}$ diskret ifølge sætning 9.5, men så må $H^{\perp}$ være åben i $\hat{G}$. ▯

<u>Øvelse 9.1.</u> Lad γ være en karakter på G. Dermed er γ en kontinuert homomorfi af G ind i $\mathbb{T}$. Den duale afbildning $\hat{\gamma}$ af $\mathbb{Z}$ ind i $\hat{G}$ er givet ved $\hat{\gamma}(n) = n\gamma$.

<u>Øvelse 9.2.</u> Lad M være en delmængde af G med ikke tomt indre. Så er $M^{\perp}$ kompakt.

<u>Sætning 9.7.</u> Lad $\mu \in M(G)$ være et begrænset mål på G og lad H være den afsluttede undergruppe frembragt af $\mathrm{supp}(\mu)$.

Så er

$$P_{\mathcal{F}_G \mu} = (\mathrm{supp}\,\mu)^{\perp} = H^{\perp},$$

og der gælder

$$\mathcal{F}_H \mu = \dot{\mathcal{F}_G}\mu,$$

idet $\dot{\mathcal{F}_G}\mu$ er funktionen på $\hat{H} = \hat{G}/H^{\perp}$ der er opnået ved at faktorisere den periodiske funktion $\mathcal{F}_G\mu$ på $\hat{G}$ med periodegruppe $H^{\perp}$. Påstanden kan også udtrykkes ved det kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
\hat{G} \arrow[rr, "\mathcal{F}_G\mu"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{C} \\
& \hat{G}/H^{\perp} \arrow[ur, "\mathcal{F}_H\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Bevis. For $\gamma \in \hat{G}$ er

$$\varepsilon_\gamma * \mathcal{F}_G \mu = \mathcal{F}_G(\gamma\mu) ,$$

og derfor har vi på grund af injektiviteten af $\mathcal{F}_G$ at

$$\gamma \in P_{\mathcal{F}_G \mu} \Leftrightarrow \gamma\mu = \mu ,$$

men det sidste er ensbetydende med at $\gamma(x) = 1$ for alle $x \in \mathrm{supp}(\mu)$, altså at $\gamma \in \mathrm{supp}(\mu)^\perp$, jvfr. Bourbaki: Intégration, kap. III §2 p. 70.

Idet $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq H$ kan vi opfatte μ som et begrænset mål på H. Idet $\pi : \hat{G} \to \hat{G}/H^\perp$ er den kanoniske afbildning har vi ifølge (2)

$$\mathcal{F}_H \mu(\pi(\gamma)) = \int_H \overline{\langle h, \gamma \rangle}\, d\mu(h) ,$$

og desuden er

$$\dot{\mathcal{F}_G} \mu\, (\pi(\gamma)) = \mathcal{F}_G \mu(\gamma) = \int_G \overline{\langle x, \gamma \rangle}\, d\mu(x) = \int_H \overline{\langle h, \gamma \rangle}\, d\mu(h) ,$$

altså $\mathcal{F}_G \mu = \mathcal{F}_H \mu \circ \pi$ eller $\dot{\mathcal{F}_G} \mu = \mathcal{F}_H \mu$. ▮

<u>Øvelse 9.3.</u> For et begrænset mål $\mu \in M(G)$ er $P_\mu = (\mathrm{supp}(\hat{\mu}))^\perp$.

<u>Sætning 9.8.</u> For en kontinuert positiv definit funktion φ på G er

$$P_\varphi = \{ x \in G \mid \varphi(x) = \varphi(0) \}$$

og om det til φ associerede mål μ på $\hat{G}$ gælder, at

$\mathrm{supp}(\mu) \subseteq P_\varphi^{\perp}$ og $P_\varphi^{\perp}$ er den afsluttede undergruppe frembragt af $\mathrm{supp}(\mu)$.

Bevis. For $x \in P_\varphi$ gælder $\varphi(x+y) = \varphi(y)$ for alle $y \in G$, specielt har vi $\varphi(x) = \varphi(0)$.

Hvis omvendt $\varphi(x) = \varphi(0)$ følger af uligheden (d) p. 54 at

$$\frac{\varphi(x-y)}{\varphi(0)} = \frac{\overline{\varphi(y)}}{\varphi(0)} \quad \text{for alle } y \in G$$

altså

$$\varphi(x+y) = \varphi(y) \quad \text{for alle } y \in G,$$

hvilket netop vil at $x \in P_\varphi$.

Af sætning 9.7 følger at

$$P_\varphi = P_{\mathcal{F}_{\hat{G}}\check{\mu}} = \mathrm{supp}(\check{\mu})^{\perp} = [-\mathrm{supp}(\mu)]^{\perp} = \mathrm{supp}(\mu)^{\perp},$$

altså

$$P_\varphi^{\perp} = \mathrm{supp}(\mu)^{\perp\perp},$$

hvilket netop er den af $\mathrm{supp}(\mu)$ frembragte afsluttede undergruppe. ▯

<u>Sætning 9.9.</u> Lad G være en LCA-gruppe, H en afsluttet undergruppe og lad ω_G, ω_H og $\omega_{G/H}$ være Haarmål på G, H og G/H så $\omega_{G/H} = \frac{\omega_G}{\omega_H}$.

Haarmålet ω_H på H er et positiv definit mål på G og dets Fouriertransformerede mål $\widehat{\omega}_H$ er et Haarmål på $H^{\perp}$. Idet $H^{\perp}$ er den duale gruppe til G/H er $\omega_{G/H}$ og $\widehat{\omega}_H$ harmonerende Haarmål.

Bevis. For $f \in \mathcal{K}(G)$ har vi

$$\langle f^* * f, \omega_H \rangle = \langle f, \bar{f} * \omega_H \rangle = \langle f, \overline{f * \omega_H} \rangle = \langle f, \overline{f^\natural} \rangle .$$

Idet $(f \cdot \overline{f^\natural})^\natural = |f^\natural|^2$, følger af sætning 8.3 (1) at

$$\langle f, \overline{f^\natural} \rangle = \int_{G/H} |\dot{f}^\natural|^2 \, d\omega_{G/H} \quad ,$$

hvilket viser at $\langle f^* * f, \omega_H \rangle \geq 0$, altså at ω_H er positiv definit.

Den Fouriertransformerede $\mathcal{F}_{G/H} \dot{f}^\natural$ af $\dot{f}^\natural$ er ifølge (1) givet ved

$$\mathcal{F}_{G/H} \dot{f}^\natural(\gamma) = \int_{G/H} \overline{\langle \xi, \dot{\gamma} \rangle} \, \dot{f}^\natural(\xi) \, d\omega_{G/H}(\xi) \qquad , \quad \gamma \in H^\perp .$$

For $\gamma \in H^\perp$ er $\sigma(\bar{\gamma} f) = \bar{\dot{\gamma}} \, \dot{f}^\natural$, og af sætning 8.3 fås derfor

$$\mathcal{F}_{G/H} \dot{f}^\natural(\gamma) = \int_{G/H} \sigma(\bar{\gamma} f) \, d\omega_{G/H} = \int_G \overline{\langle x, \gamma \rangle} f(x) \, d\omega_G(x) = \mathcal{F}_G f(\gamma) . \quad (3)$$

Lad $\omega_{H^\perp}$ være det Haarmål på $H^\perp$ der harmonerer med Haarmålet $\omega_{G/H}$ på den duale gruppe G/H. Vi vil vise at $\widehat{\omega_H} = \omega_{H^\perp}$.

For $f \in \mathcal{K}(G)$, $x \in G$ har vi

$$\omega_H * f^* * f(x) = f^* * f^\natural(x) = \int \bar{f}(y) f^\natural(x+y) \, d\omega_G(y) .$$

Idet

$$\sigma(\bar{f}\cdot\tau_{-x}(f^{\natural})) = \overline{\sigma(f)}\cdot\tau_{-\pi(x)}\sigma(f) = \overline{\dot{f}^{\natural}}\cdot\tau_{-\pi(x)}\dot{f}^{\natural} ,$$

får vi af sætning 8.3 at

$$\omega_H * f^* * f(x) = \int_{G/H} \tau_{-\pi(x)}\dot{f}^{\natural}\cdot\overline{\dot{f}^{\natural}}\, d\omega_{G/H} .$$

Udnyttes Plancherels sætning for parret G/H og $H^\perp$ ses, at det sidste integral er lig med

$$\int_{H^\perp} \mathcal{F}_{G/H}(\tau_{-\pi(x)}\dot{f}^{\natural})\,\overline{\mathcal{F}_{G/H}\dot{f}^{\natural}}\, d\omega_{H^\perp} ,$$

men da ifølge e) p. 43

$$\mathcal{F}_{G/H}(\tau_{-\pi(x)}\dot{f}^{\natural})(\gamma) = \langle \pi(x),\dot{\gamma}\rangle\, \mathcal{F}_{G/H}\dot{f}^{\natural}(\gamma) = \langle x,\gamma\rangle\, \mathcal{F}_{G/H}\dot{f}^{\natural}(\gamma),$$

følger af (3) at

$$\omega_H * f^* * f(x) = \int_{H^\perp} \langle x,\gamma\rangle\, |\mathcal{F}_G f(\gamma)|^2\, d\omega_{H^\perp}(\gamma) \tag{4}$$

hvilket netop viser at $\omega_{H^\perp} = \widehat{\omega_H}$. □

Af (4) fås for $x=0$

$$\int_H f^* * f\, d\omega_H = \int_{H^\perp} |\hat{f}|^2\, d\omega_{H^\perp} \tag{5}$$

eller

$$\int_H g\, d\omega_H = \int_{H^\perp} \mathcal{F}_G g\, d\omega_{H^\perp} \tag{6}$$

hvor $g = f^* * f$, $f \in \mathcal{K}(G)$. Formel (6) gælder for en større klasse af funktioner g end vi har bevist her. Det er imidlertid vanskeligt at præcisere for hvilke g formel (6) er gyldig. Formel (6) kaldes <u>Poissons summationsformel</u>. Bemærk at (5) som et specialtilfælde, nemlig $H = \{0\}$, indeholder Plancherels sætning.

Lad H være en åben og dermed afsluttet undergruppe af G. For et Haarmål ω_G på G er restriktionen μ af ω_G til H et mål på H som opfylder

$$\tau_h \mu = \mu \quad \text{for alle } h \in H.$$

Da H er åben er $\mu(H) = \omega_G(H) > 0$, så $\mu \neq 0$, og altså er μ et Haarmål på H. Iøvrigt er $\mu = 1_H \omega_G$ og 1_H er en kontinuert funktion.

<u>Øvelse 9.4.</u> a) Lad $B \subseteq G$ være en Borelmængde så $0 < \omega_G(B) < \infty$, hvor ω_G er et Haarmål på G. Så er $B - B$ en omegn af 0. (Vink: Se på $f = 1_B * \check{1}_B$).

b) Lad H være en afsluttet undergruppe af G med egenskaben

$$\sup\{\omega_G(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subseteq H\} > 0 .$$

Så er H en åben undergruppe.

c) Lad G være en σ-kompakt LCA-gruppe og lad ω_G være et Haarmål på G. Om en afsluttet undergruppe $H \subseteq G$ gælder

$$H \text{ åben} \iff \omega_G(H) > 0 .$$

d) Der findes (ikke σ-kompakte) LCA-grupper G for hvilke der findes en afsluttet undergruppe H med egenskaberne: H ikke åben, $\omega_G(H) = \infty$.

<u>Sætning 9.10</u>. Lad K være en kompakt undergruppe af G og lad ω_K være det normaliserede Haarmål på K. Så er

$$\hat{\omega}_K = 1_{K^\perp} .$$

Bevis. Det er klart at $\hat{\omega}_K(\gamma) = 1$ for $\gamma \in K^\perp$. For $\gamma \in \hat{G} \setminus K^\perp$ findes $x_0 \in K$ så $\gamma(x_0) \neq 1$, og dermed har vi

$$\hat{\omega}_K(\gamma) = \int \overline{\gamma(x)}\, d\omega_K(x) = \int \overline{\gamma}(x + x_0)\, d\omega_K(x) = \overline{\gamma(x_0)}\ \hat{\omega}_K(\gamma) ,$$

hvoraf følger at $\hat{\omega}_K(\gamma) = 0$. ▯

Da den Fouriertransformerede af et begrænset mål er kontinuert må $K^\perp$ være åben, hvilket vi dog allerede vidste fra sætning 9.6. Af sætning 9.9 følger at $1_{K^\perp}\omega_{\hat{G}}$ er et Haarmål på $K^\perp$, hvilket harmonerer med bemærkningen ovenfor om at Haarmålet på en åben undergruppe er restriktionen af Haarmålet på hele gruppen.

<u>Eksempel</u>. Lad $\mathbb{R}$ være forsynet med Lebesguemålet $\omega_\mathbb{R}$ og den duale gruppe $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ med det harmonerende Haarmål $2\pi\omega_\mathbb{R}$. Den til $\mathbb{Z}$ ortogonale undergruppe er

$$\mathbb{Z}^\perp = \{ y \in \mathbb{R} \mid e^{ixy} = 1 \text{ for alle } x \in \mathbb{Z} \}$$

altså

$$\mathbb{Z}^{\perp} = 2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Vi udstyrer den diskrete gruppe $\mathbb{Z}$ med Haarmålet

$$\omega_{\mathbb{Z}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_n .$$

Kvotientgruppen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ identificeres med $\mathbb{T}$ og den kanoniske afbildning $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ er så $\pi(x) = e^{2\pi i x}$.

For funktionen $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{for } |x| \le 1 \\ 0 & \text{for } |x| > 1 \end{cases}$$

har vi

$$f^{\natural}(x) = 1 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R},$$

altså $\dot{f}^{\natural} \equiv 1$ på $\mathbb{T}$. Heraf følger at Haarmålet $\omega_{\mathbb{T}}$ på $\mathbb{T}$ så $\omega_{\mathbb{T}} = \frac{\omega_{\mathbb{R}}}{\omega_{\mathbb{Z}}}$ har totalmasse 1. Af sætning 9.9 følger at Haarmålet på $\mathbb{Z}^{\perp}$

$$\omega_{\mathbb{Z}^\perp} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{2\pi n}$$

er det Fouriertransformerede af $\omega_{\mathbb{Z}}$: $\mathcal{F}(\omega_{\mathbb{Z}}) = \omega_{\mathbb{Z}^\perp}$.

Poissons summationsformel bliver i dette tilfælde

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}g(2\pi n), \tag{7}$$

gyldig for $g = f^* * f$, $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$.

Funktionen $\varphi(x) = \cos(2\pi x)$ er en kontinuert positiv definit funktion på $\mathbb{R}$ med associeret mål $\mu = \frac{1}{2}(\varepsilon_{2\pi} + \varepsilon_{-2\pi})$ på $\mathbb{R}$. Periodegruppen P_{φ} for φ er lig med $\mathbb{Z}$.

Støtten for målet μ er $\{-2\pi, 2\pi\}$ som frembringer den til $\mathbb{Z}$ ortogonale undergruppe $\mathbb{Z}^{\perp} = 2\pi\mathbb{Z}$.

<u>Øvelse 9.5.</u> Ved hjælp af funktionen φ_a p. 90 skal man vise

$$a^3(2-3a)\frac{\pi^4}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(a\pi n)}{n^4} \quad , \; 0 < a \leq \frac{1}{2}$$

Prøv også at finde summen af rækken for $\frac{1}{2} < a \leq 1$.

KAPITEL III. FOLDNINGSSEMIGRUPPER.

Litteratur:

H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie (1968).

K.R. Parthasarathy, Probability measures on metric spaces (1967).

§1. Bernoulli konvergens.

Lad X være et lokalkompakt rum. Vi skal indføre topologier på forskellige rum af mål på X.

Den vage topologi på rummet $RM(X)$ af samtlige mål på X er den lokalkonvekse topologi på $RM(X)$ bestemt ved familien p_φ, $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, af seminormer

$$p_\varphi(\mu) = |\langle \varphi, \mu \rangle| = \left|\int \varphi \, d\mu\right| , \quad \mu \in RM(X).$$

Et net $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ på $RM(X)$ konvergerer vagt mod $\mu \in RM(X)$, hvis og kun hvis det for alle $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ gælder at

$$\lim_A \langle \varphi, \mu_\alpha \rangle = \langle \varphi, \mu \rangle .$$

Det er klart, at den vage topologi er en Hausdorff topologi og at mængden $RM_+(X)$ af positive mål er en vagt afsluttet delmængde af $RM(X)$.

Den vage topologi er imidlertid ofte for grov, da der ved vag grænseovergang kan forekomme "massetab", idet der forsvinder masse ud i det uendelige. I tilfældet $X = \mathbb{R}$ vil f.eks. $\varepsilon_n \to 0$ vagt for $n \to \infty$.

Topologien for <u>Bernoulli konvergens</u> (eller <u>Bernoulli topologien</u>, kort: $\mathcal{B}$-topologien) på rummet $M(X)$ af begrænsede mål på X er den lokalkonvekse topologi på $M(X)$ bestemt ved familien p_f af seminormer

$$p_f(\mu) = |\langle f, \mu \rangle| = \left| \int f \, d\mu \right| \quad , \ \mu \in M(X),$$

hvor f gennemløber rummet $C_b(X)$ af kontinuerte begrænsede funktioner på X.

Et net $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ på $M(X)$ konvergerer i Bernoulli-topologien mod $\mu \in M(X)$ netop hvis

$$\lim_A \langle f, \mu_\alpha \rangle = \langle f, \mu \rangle$$

for alle $f \in C_b(X)$.

Da $\mathcal{K}(X) \subseteq C_b(X)$ er Bernoulli topologien på $M(X)$ <u>finere</u> end delrumstopologien af den vage topologi på $M(X)$, og med mindre X er kompakt er de to topologier forskellige.

Keglen $M_+(X)$ af positive begrænsede mål på X er afsluttet i $\mathcal{B}$-topologien.

Lad $g : X \to [0, \infty]$ være en nedad halvkontinuert funktion. Afbildningen

$$RM_+(X) \ni \mu \mapsto \int g\,d\mu \quad \in [0,\infty]$$

er nedad halvkontinuert, når $RM_+(X)$ udstyres med den vage topologi, thi der gælder for $\mu \in RM_+(X)$ at

$$\int g\,d\mu = \sup\{\int f\,d\mu \mid f \in \mathcal{K}(X),\ 0 \le f \le g\}.$$

Så meget desmere er afbildningen

$$M_+(X) \ni \mu \mapsto \int g\,d\mu \quad \in [0,\infty]$$

nedad halvkontinuert, når $M_+(X)$ er forsynet med $\mathcal{B}$-topologien.

Specielt har vi for en åben mængde $O \subseteq X$, at

$$\mu \mapsto \mu(O)$$

er nedad halvkontinuert på $RM_+(X)$ med den vage topologi og på $M_+(X)$ med $\mathcal{B}$-topologien.

<u>Sætning 1.1</u>. Lad $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ være et net af <u>positive</u> begrænsede mål på X og lad $\mu \in M_+(X)$. Nettet $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ konvergerer mod μ i Bernoulli topologien hvis og kun hvis $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ konvergerer vagt mod μ og tillige

$$\lim_A \mu_\alpha(X) = \mu(X).$$

Bevis. Da $\mathcal{K}(X) \subseteq C_b(X)$ og da $1 \in C_b(X)$ er "kun hvis delen" klar.

Lad $f \in C_b(X)$ og $\varepsilon > 0$ være givet.

Der findes en kompakt mængde $K \subseteq X$ så

$$\mu(X \setminus K) < \varepsilon.$$

Derfor er $\grave{\mathcal{U}}(\varphi)$ konvergent med et grænsepunkt som betegnes $\lambda(\varphi)$. Man ser let at afbildningen

$$\mathcal{K}(X) \ni \varphi \mapsto \lambda(\varphi) \in \mathbb{C}$$

er en positiv linearform på $\mathcal{K}(X)$, altså et positivt mål λ på X. Det er klart at $\lim_{\mu \in \grave{\mathcal{U}}} \mu = \lambda$ i den vage topologi.

Da det for alle $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ med $0 \le \varphi \le 1$ og alle $\mu \in H_C$ gælder at $\mu(\varphi) \le C$, må også $\lambda(\varphi) \le C$, altså

$$\lambda(X) = \sup\{\lambda(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{K}(X), 0 \le \varphi \le 1\} \le C,$$

og så er $\lambda \in H_C$. $\square$

<u>Definition.</u> En delmængde $H \subseteq M_+(X)$ siges at tilfredsstille <u>Prohorov's betingelse</u> såfremt

i) $\exists\, C > 0 : \sup_{\mu \in H} \mu(X) \le C$

ii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, K_\varepsilon \subseteq X$ kompakt $\forall \mu \in H$:

$$\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

<u>Sætning 1.3.</u> En delmængde $H \subseteq M_+(X)$ er relativ kompakt i Bernoulli topologien hvis og kun hvis den tilfredsstiller Prohorov's betingelse.

Bevis. Antag først at H opfylder Prohorov's betingelse, og lad $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ være et net på H. Vi skal vise, at der

Lad $\psi \in \mathcal{K}(X)$ være valgt så $0 \le \psi \le 1$ og $\psi = 1$ på K. Idet ifølge forudsætningerne

$$\lim_{\alpha \in A} \int (1-\psi)\, d\mu_\alpha = \int (1-\psi)\, d\mu \leq \mu(X \setminus K) < \varepsilon$$

og

$$\lim_{\alpha \in A} \int f\psi\, d\mu_\alpha = \int f\psi\, d\mu ,$$

findes $\alpha_0 \in A$ så der for $\alpha \geq \alpha_0$ gælder

$$\int (1-\psi)\, d\mu_\alpha < \varepsilon \quad , \quad \left| \int f\psi\, d\mu - \int f\psi\, d\mu_\alpha \right| < \varepsilon ,$$

og derfor finder vi for $\alpha \geq \alpha_0$ at

$$\left| \int f d\mu - \int f\, d\mu_\alpha \right| \leq \left| \int f\psi\, d\mu - \int f\psi\, d\mu_\alpha \right| + \left| \int f(1-\psi)\, d\mu \right|$$
$$+ \left| \int f(1-\psi)\, d\mu_\alpha \right| \leq \varepsilon(1 + 2\|f\|_\infty),$$

hvilket viser, at $\lim_{\alpha \in A} \int f d\mu_\alpha = \int f d\mu$. $\square$

<u>Bemærkning</u>. På mængden af sandsynlighedsmål på X stemmer den vage topologi og Bernoulli topologien overens.

<u>Sætning 1.2</u>. For hvert $c > 0$ er mængden

$$H_c = \{ \mu \in M_+(X) \mid \mu(X) \leq c \}$$

vagt kompakt.

Bevis. Lad $\mathfrak{U}$ være et ultrafilter på H_c. For hvert $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ er

$$\mathfrak{U}(\varphi) = \{ \{ \mu(\varphi) \mid \mu \in F \} \mid F \in \mathfrak{U} \}$$

en ultrafilterbasis på den kompakte mængde

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|\varphi\|_\infty c \} .$$

findes et delnet $(\mu_\beta)_{\beta \in B}$ og et mål $\mu \in M_+(X)$ så

$$\lim_{B} \mu_\beta = \mu \qquad \text{i Bernoulli topologien.}$$

Idet specielt $\mu_\alpha(X) \le c$ for alle $\alpha \in A$, kan vi ifølge sætning 1.2 finde et delnet $(\mu_\beta)_{\beta \in B}$ af $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ og et mål $\mu \in M_+(X)$ så

$$\lim_{B} \mu_\beta = \mu \qquad \text{i den vage topologi.}$$

Vi vil vise, at der faktisk gælder

$$\lim_{B} \mu_\beta = \mu \qquad \text{i Bernoulli topologien,}$$

og dertil er det ifølge sætning 1.1 nok at vise at

$$\lim_{B} \mu_\beta(X) = \mu(X).$$

Da afbildningen $\lambda \mapsto \lambda(X)$ som bemærket er nedad halvkontinuert på $RM_+(X)$ udstyret med den vage topologi, har vi

$$\mu(X) \le \liminf_{B} \mu_\beta(X).$$

Til $\varepsilon > 0$ findes ifølge ii) en kompakt mængde $K_\varepsilon \subseteq X$ så

$$\lambda(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon \qquad \text{for alle } \lambda \in H.$$

Vi vælger $\psi \in \mathcal{K}(X)$ så $0 \le \psi \le 1$, $\psi = 1$ på K_ε. Altså er $1 - \psi \le 1_{X \setminus K_\varepsilon}$ og dermed har vi

$$\lambda(1-\psi) < \varepsilon \qquad \text{for alle } \lambda \in H,$$

specielt

$$\mu_\beta(X) < \varepsilon + \mu_\beta(\psi) \quad \text{for} \quad \beta \in \mathcal{B}.$$

Heraf følger

$$\limsup_{\mathcal{B}} \mu_\beta(X) \leq \varepsilon + \lim_{\mathcal{B}} \mu_\beta(\psi) = \varepsilon + \mu(\psi) \leq \varepsilon + \mu(X),$$

og da $\varepsilon > 0$ var vilkårlig, har vi

$$\limsup_{\mathcal{B}} \mu_\beta(X) \leq \mu(X).$$

Antag nu omvendt at H er relativ kompakt. Så er $\overline{H}$ kompakt og dermed er afbildningen

$$M_+(X) \ni \mu \longmapsto \mu(X)$$

begrænset på $H \subseteq \overline{H}$, hvoraf betingelse i).

Lad $\varepsilon > 0$. Til hvert $\mu \in \overline{H}$ findes en kompakt mængde $K_\mu \subseteq X$ så

$$\mu(X \setminus K_\mu) < \varepsilon.$$

Lad U_μ være en åben, relativ kompakt omegn af K_μ. Idet funktionen

$$M_+(X) \ni \lambda \longmapsto \lambda(X \setminus U_\mu)$$

for fast μ er opad halvkontinuert i $\mathcal{B}$-topologien på $M_+(X)$ er mængden

$$V_\mu = \{\lambda \in \overline{H} \mid \lambda(X \setminus U_\mu) < \varepsilon\}$$

en åben omegn af μ i den inducerede topologi på $\overline{H}$. Der findes derfor endelig mange punkter $\mu_1, \dots, \mu_n \in \overline{H}$ så

$$\overline{H} = V_{\mu_1} \cup \dots \cup V_{\mu_n}.$$

Dermed gælder for mængden

$$K_\varepsilon = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_{\mu_i}}$$

at K_ε er kompakt og videre at

$$\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{for } \mu \in H \subseteq \overline{H},$$

altså at betingelse ii) er opfyldt. ▯

<u>Øvelse 1.1.</u> Lad μ være vagt grænsepunkt for et net $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ af positive etpunktsmål på X. Da findes $x \in X$ og $k \geq 0$ så $\mu = k\,\varepsilon_x$.

<u>Øvelse 1.2.</u> Mængden af punktmål $\{\varepsilon_x \mid x \in X\}$ er en afsluttet delmængde af $M_+(X)$ i $\mathcal{B}$-topologien og afbildningen $x \mapsto \varepsilon_x$ af X på $\{\varepsilon_x \mid x \in X\}$ er en homeomorfi.

<u>Øvelse 1.3.</u> Lad G være en LCA-gruppe.

a) Foldningen $* : M_+(G) \times M_+(G) \to M_+(G)$ er kontinuert, når $M_+(G)$ er udstyret med Bernoulli topologien.

b) Foldningen $* : M_+(G) \times M_+(G) \to M_+(G)$ er <u>ikke</u> kontinuert, når $M_+(G)$ har den vage topologi, med mindre G er kompakt.

c) Foldningen $* : (M_+(G), \mathcal{B}) \times (M_+(G), v) \to (M_+(G), v)$ er <u>ikke</u> kontinuert med mindre G er kompakt. Her betyder $(M_+(G), \mathcal{B})$ resp. $(M_+(G), v)$ at $M_+(G)$ er udstyret med $\mathcal{B}$-topologien resp. den vage topologi.

Lad G være en LCA-gruppe og lad Γ være den til G duale gruppe med Haarmål $d\gamma$.

Sætning 1.4. Lad $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ være et net på $M_+(G)$ der konvergerer mod $\mu \in M_+(G)$ i Bernouilli topologien. Da gælder

$$\hat{\mu}_\alpha(\gamma) \to \hat{\mu}(\gamma)$$

ligeligt over kompakte delmængder af Γ.

Bevis. Det er klart at

$$\lim_A \hat{\mu}_\alpha(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma) \qquad \text{for alle } \gamma \in \Gamma.$$

Vi viser først, at der til $\varepsilon > 0$ findes $V \in \mathcal{U}_\Gamma(0)$ og $\alpha_0 \in A$ så det for alle $\alpha \in A$ med $\alpha \geq \alpha_0$ og alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ med $\gamma_1 - \gamma_2 \in V$ gælder

$$|\hat{\mu}_\alpha(\gamma_1) - \hat{\mu}_\alpha(\gamma_2)| \leq \varepsilon .$$

Lad $\delta > 0$ være valgt så $\delta(3 + \mu(G)) \leq \varepsilon$. Der findes α' så

$$\mu_\alpha(G) \leq \mu(G) + 1 \qquad \text{for } \alpha \geq \alpha'.$$

Videre findes $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ med $0 \leq \varphi \leq 1$ så $\int (1-\varphi)\, d\mu < \delta$. Vi sætter

$$V = \mathcal{U}_G(\operatorname{supp}\varphi, \delta) .$$

Der findes $\alpha'' \in A$ så

$$\int (1-\varphi)\, d\mu_\alpha < \delta \qquad \text{for } \alpha \geq \alpha''.$$

Hvis $\alpha_0 \in A$ er valgt så $\alpha_0 \geq \alpha'$ og $\alpha_0 \geq \alpha''$ gælder for alle

$\alpha \geq \alpha_0$ og alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ med $\gamma_1 - \gamma_2 \in V$ at

$$|\hat{\mu}_\alpha(\gamma_1) - \hat{\mu}_\alpha(\gamma_2)| \leq$$

$$\int |\overline{\gamma_1}(x) - \overline{\gamma_2}(x)| \varphi(x) d\mu_\alpha(x) \quad + \int |\overline{\gamma_1}(x) - \overline{\gamma_2}(x)| (1-\varphi(x)) d\mu_\alpha(x)$$

$$\leq \delta \mu_\alpha(\operatorname{supp}\varphi) + 2\int (1-\varphi(x)) d\mu_\alpha(x) \leq \delta(\mu(G)+1) + 2\delta \leq \varepsilon .$$

Vi kan nu vise selve påstanden. Lad $\varepsilon > 0$ og $K \subseteq \Gamma$ være kompakt. Vi vælger $V \in \mathcal{U}_\Gamma(0)$ og $\alpha_0 \in A$ så

$$|\hat{\mu}_\alpha(\gamma_1) - \hat{\mu}_\alpha(\gamma_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{for } \alpha \geq \alpha_0 \text{ og } \gamma_1 - \gamma_2 \in V.$$

Ved grænseovergang for $\alpha \in A$ finder vi at

$$|\hat{\mu}(\gamma_1) - \hat{\mu}(\gamma_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{for } \gamma_1 - \gamma_2 \in V .$$

Kompaktheden af K giver, at der findes $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in K$ så

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\gamma_i + V) .$$

Da $\hat{\mu}_\alpha \to \hat{\mu}$ punktvis findes $\alpha_i \in A$, $i = 1, \cdots, n$ så

$$|\hat{\mu}_\alpha(\gamma_i) - \hat{\mu}(\gamma_i)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{for } \alpha \geq \alpha_i \ , i=1,\cdots,n.$$

Vælges $\alpha^* \in A$ med $\alpha^* \geq \alpha_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$, gælder det for hvert $\gamma \in K$ at der findes $i \in \{1, \cdots, n\}$ så $\gamma \in \gamma_i + V$, og dermed har vi for $\alpha \geq \alpha^*$, at

$$|\hat{\mu}_\alpha(\gamma) - \hat{\mu}(\gamma)| \leq$$

$$|\hat{\mu}_\alpha(\gamma) - \hat{\mu}_\alpha(\gamma_i)| + |\hat{\mu}_\alpha(\gamma_i) - \hat{\mu}(\gamma_i)| + |\hat{\mu}(\gamma_i) - \hat{\mu}(\gamma)| \leq \varepsilon . \quad \square$$

Korollar 1.5. Fouriertransformationen $\mathcal{F}$ er en homeomorfi af keglen $M_+(G)$ af positive begrænsede mål på G forsynet med Bernoulli topologien på keglen $P(\Gamma)$ af kontinuerte positiv definite funktioner på Γ forsynet med topologien for ligelig konvergens over kompakte delmængder af Γ.

Bevis. Det følger af Bochners sætning og sætning 1.4 at $\mathcal{F} : M_+(G) \to P(\Gamma)$ er en bijektiv kontinuert afbildning. Lad $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ være et net på $P(\Gamma)$ der konvergerer mod $\psi \in P(\Gamma)$ ligeligt over kompakte delmængder af Γ. Lad μ_α og μ være de positive begrænsede mål på G så $\mathcal{F}\mu_\alpha = \psi_\alpha$, $\mathcal{F}\mu = \psi$. Vi skal vise, at $\lim_\alpha \mu_\alpha = \mu$ i B-topologien, og hertil er det ifølge sætning 1.1 nok at vise at

$$\lim_\alpha \mu_\alpha = \mu \quad \text{vagt},$$

idet vi har

$$\lim_\alpha \mu_\alpha(G) = \lim_\alpha \psi_\alpha(0) = \psi(0) = \mu(G).$$

Lad altså $\varphi \in \mathcal{K}(G)$. Til $\varepsilon > 0$ findes $f \in \mathcal{K}(\Gamma)$ så $\|\varphi - \hat{f}\|_\infty < \varepsilon$, og dermed har vi

$$|\mu_\alpha(\varphi) - \mu(\varphi)| \le |\mu_\alpha(\varphi - \hat{f})| + |\mu_\alpha(\hat{f}) - \mu(\hat{f})| + |\mu(\hat{f} - \varphi)|$$

$$\le \varepsilon(\mu_\alpha(G) + \mu(G)) + |\mu_\alpha(\hat{f}) - \mu(\hat{f})| .$$

Her kan andet led beregnes ved Fubinis sætning

$$|\mu_\alpha(\hat f) - \mu(\hat f)| = \left|\int \hat\mu_\alpha(\gamma) f(\gamma)\, d\gamma - \int \hat\mu(\gamma) f(\gamma)\, d\gamma\right| \le$$

$$\int |\psi_\alpha(\gamma) - \psi(\gamma)|\,|f(\gamma)|\, d\gamma ,$$

som går mod 0 da $\psi_\alpha \to \psi$ ligeligt over den kompakte mængde $\mathrm{supp}(f)$. $\square$

<u>Sætning 1.6 (Lévy's kontinuitetssætning).</u> Lad μ_n være en følge af positive begrænsede mål på G og lad $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ være en funktion på Γ, der er kontinuert i 0. Hvis

$$\lim_{n\to\infty} \hat\mu_n(\gamma) = \psi(\gamma) \qquad \text{for alle } \gamma \in \Gamma ,$$

så findes et positivt begrænset mål μ på G så $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ i B-topologien. (Dermed gælder endda $\hat\mu_n \to \hat\mu = \psi$ ligeligt over kompakte delmængder af Γ).

Bevis. Da ψ er punktvis grænsefunktion for positiv definite funktioner er ψ positiv definit, og da endvidere ψ er kontinuert i 0 er ψ kontinuert (lemma II.4.2), altså er $\psi \in P(\Gamma)$. Lad $\mu \in M_+(G)$ så $\hat\mu = \psi$. Der gælder

$$\mu_n(G) = \hat\mu_n(0) \to \psi(0) = \mu(G) ,$$

så for at vise sætningen, skal vi blot godtgøre at $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ vagt. Beviset forløber nu som for korollar 1.5. Lad $\varphi \in K(G)$ og $\varepsilon > 0$ være givet. Vi vælger $f \in \mathcal{K}(\Gamma)$ så $\|\varphi - \hat f\|_\infty < \varepsilon$ og får da

$$|\mu_n(\varphi) - \mu(\varphi)| \le \varepsilon(\mu_n(G) + \mu(G)) + |\mu_n(\hat f) - \mu(\hat f)| .$$

Der findes en konstant K så

$$\mu_n(G) + \mu(G) \leq K \qquad \text{for alle } n,$$

og dermed finder vi

$$|\mu_n(\varphi) - \mu(\varphi)| \leq \varepsilon K + \int |\hat{\mu}_n(\gamma) - \psi(\gamma)|\,|f(\gamma)|\,d\gamma .$$

Integranden

$$|\hat{\mu}_n(\gamma) - \psi(\gamma)|\,|f(\gamma)|$$

går punktvis mod 0, og har den integrable majorant $K|f(\gamma)|$, og af sætningen om majoriseret konvergens følger da, at

$$\lim_{n\to\infty} \int |\hat{\mu}_n(\gamma) - \psi(\gamma)|\,|f(\gamma)|\,d\gamma = 0.$$

Altså findes N så der for $n \geq N$ gælder

$$|\mu_n(\varphi) - \mu(\varphi)| \leq (K+1)\varepsilon . \qquad ▯$$

<u>Bemærkning</u>. Man kunne måske håbe, at sætning 1.6 kunne skærpes til net i stedet for følger, selv om beviset ikke fungerer, da sætningen om majoriseret konvergens er forkert for net. Dette er imidlertid ikke tilfældet som følgende eksempel viser.

<u>Eksempel</u>. Lad G betegne produktgruppen $G = \prod_{\mathbb{R}} \mathbb{T}$ af cirkelgruppen $\mathbb{T}$ med sig selv "$\mathbb{R}$-gange". Gruppen G er altså mængden af afbildninger af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{T}$ og kompositionen i G er punktvis multiplikation. Topologien på G er produkttopologien, altså initialtopologien for projek-

tionerne $\pi_t : G \to \mathbb{T}$, $t \in \mathbb{R}$. Herved er G en kompakt abelsk gruppe, og ved

$$\varphi(x) = (e^{-itx})_{t \in \mathbb{R}}$$

defineres en afbildning $\varphi : \mathbb{R} \to G$, som let ses at være en kontinuert og injektiv homomorfi.

Afbildningen φ er <u>ikke</u> en homeomorfi af $\mathbb{R}$ på $\varphi(\mathbb{R})$, thi i så fald er $\varphi(\mathbb{R})$ en lokalkompakt undergruppe i G og dermed afsluttet (lemma II, 7.4) og endelig kompakt, men så er $\mathbb{R}$ homeomorf med den kompakte undergruppe $\varphi(\mathbb{R})$, hvilket er umuligt.

Da φ således ikke er en homeomorfi af $\mathbb{R}$ på $\varphi(\mathbb{R})$ findes et net $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ i $\varphi(\mathbb{R})$ og et $y \in \varphi(\mathbb{R})$ så

$$\lim_A y_\alpha = y \qquad \text{i } \varphi(\mathbb{R}),$$

og således at nettet $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ på $\mathbb{R}$ hvor $x_\alpha = \varphi^{-1}(y_\alpha)$ <u>ikke</u> konvergerer mod $x = \varphi^{-1}(y)$.

Vi definerer nu et net $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ på $M_+(\mathbb{R})$ ved $\mu_\alpha = \varepsilon_{x_\alpha}$. Så gælder

$$\hat{\mu}_\alpha(t) = e^{-itx_\alpha} = \pi_t(\varphi(x_\alpha)) = \pi_t(y_\alpha) \to \pi_t(y) = \pi_t(\varphi(x))$$
$$= e^{-itx} = \hat{\varepsilon}_x(t).$$

Vi har dermed et net $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ på $M_+(\mathbb{R})$ så nettet $(\hat{\mu}_\alpha)_{\alpha \in A}$ konvergerer punktvis mod den kontinuerte funktion $\hat{\varepsilon}_x$, men nettet $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ konvergerer ikke i $M_+(\mathbb{R})$ med Bernoulli topologien, thi det eneste mulige grænsepunkt ville være $\mu = \varepsilon_x$, men så måtte også $x_\alpha \to x$, jvfr. Øvelse 1.2.

§ 2. Foldningssemigruppet

Lad G være en LCA-gruppe med dual gruppe Γ og indbyrdes harmonerende Haarmål dx og $d\gamma$ på G og Γ.

Definition. Et positivt begrænset mål $\mu \neq 0$ på G kaldes idempotent, såfremt

$$\mu * \mu = \mu .$$

Et idempotent mål μ har totalmasse 1 ($\mu(G) = 1$), og det er klart, at det normaliserede Haarmål ω_K for en kompakt undergruppe K af G (opfattet som mål på G) er idempotent.

Sætning 2.1. Lad μ være et idempotent mål på G. Der findes en kompakt undergruppe K af G så $\mu = \omega_K$, hvor ω_K er det Haarmål på K så $\omega_K(K) = 1$.

Bevis. Den Fouriertransformerede $\hat{\mu} : \Gamma \to \mathbb{C}$, af μ opfylder $(\hat{\mu})^2 = \hat{\mu}$, og $\hat{\mu}$ antager altså kun værdierne 0 og 1. Mængden

$$\Gamma_1 = \{ \gamma \in \Gamma \mid \hat{\mu}(\gamma) = 1 \}$$

er ikke tom ($0 \in \Gamma_1$) og da $\hat{\mu} = 1_{\Gamma_1}$ er en positiv definit funktion på Γ, ved vi at Γ_1 er en undergruppe af Γ (Øvelse II, 4.2), som er både åben og afsluttet fordi $\hat{\mu}$ er kontinuert.

Undergruppen $K = \Gamma_1^{\perp}$ af G er kompakt og det normaliserede Haarmål ω_K på K har $1_{\Gamma_1} = \hat{\mu}$ som Fouriertransformeret (Sætning II.9.10), altså $\mu = \omega_K$. $\square$

Vi skal nu studere familier $(\mu_t)_{t\geq 0}$ af positive, begrænsede mål μ_t på G der opfylder "foldningsligningen"

$$\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s} \quad \text{for alle} \quad t,s \geq 0 \tag{1}$$

For målet μ_0 giver (1), at

$$\mu_0 * \mu_0 = \mu_0 ,$$

og der findes derfor ifølge Sætning 2.1 en kompakt undergruppe K af G så $\mu_0 = \omega_K$. Vi har således for alle $t \geq 0$, at

$$\mu_t * \omega_K = \mu_t$$

og heraf følger, at μ_t er periodisk med alle $k \in K$ som perioder, thi

$$\varepsilon_k * \mu_t = \varepsilon_k * \omega_K * \mu_t = \omega_K * \mu_t = \mu_t .$$

Familien $(\mu_t)_{t\geq 0}$ kan derfor faktoriseres i en familie $(\dot{\mu}_t)_{t\geq 0}$ af positive begrænsede mål på G/K, og Lemma 2.2 nedenfor viser, at denne familie opfylder:

$$\dot{\mu}_t * \dot{\mu}_s = \dot{\mu}_{t+s} \quad \text{for alle } t,s \geq 0$$

og

$$\dot{\mu}_0 = \varepsilon_0 \qquad (\text{på } G/K).$$

Vi vil derfor i det følgende indskrænke os til at betragte familier $(\mu_t)_{t\geq 0}$ af positive begrænsede mål på G, der tilfredsstiller betingelse (1) og endvidere opfylder

$$\mu_0 = \varepsilon_0 \tag{2}$$

<u>Lemma 2.2.</u> Lad K være en kompakt undergruppe af G og lad $\mu, \nu \in M_+(G)$ opfylde $P_\mu \supseteq K$ og $P_\nu \supseteq K$. Da er $P_{\mu*\nu} \supseteq K$ og de faktoriserede mål $\dot{\mu}, \dot{\nu}$ og $(\mu*\nu)^{\cdot}$ på G/K opfylder

$$(\mu*\nu)^{\cdot} = \dot{\mu} * \dot{\nu}$$

Bevis. Vi bemærker først, at den kanoniske afbildning $\pi: G \to G/K$ er <u>egentlig</u>, d.v.s. at $\pi^{-1}(C)$ er kompakt i G for enhver kompakt delmængde $C \subseteq G/K$. Der findes nemlig en kompakt mængde $D \subseteq G$ så $\pi(D) = C$ (p. 110) og man ser let, at den afsluttede mængde $\pi^{-1}(C)$ er indeholdt i den kompakte mængde $D+K$.

For $h \in \mathcal{K}(G/K)$ er $f = h \circ \pi$ derfor en funktion i $\mathcal{K}(G)$ og $P_f \supseteq K$. Derfor er $f^{\natural} = f$ (dette forudsætter, at vi som Haarmål på K benytter det normaliserede Haarmål ω_K med $\omega_K(K) = 1$), og $\dot{f}^{\natural} = h$. Heraf følger, at hvis μ er et mål på G med $P_\mu \supseteq K$, så er

$\dot{\mu}$ lig med billedmålet $\pi(\mu)$, thi med betegnelserne ovenfor har vi

$$\int_{G/K} h \, d\pi(\mu) = \int_G h\circ\pi \, d\mu = \int_G f \, d\mu = \int_{G/K} \dot{f} \, d\dot{\mu} = \int_{G/K} h \, d\dot{\mu}.$$

Da $\pi : G \to G/K$ er en homomorfi, er det let at vise formlen i lemmaet. For $h \in \mathcal{K}(G/K)$ har vi nemlig:

$$\int_{G/K} h \, d\pi(\mu * \nu) = \int_G \int_G h(\pi(x) + \pi(y)) \, d\mu(x) \, d\nu(y)$$

$$= \int_G \left(\int_G \tau_{-\pi(y)} h(\pi(x)) \, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

$$= \int_G \left(\int_{G/K} h(\xi + \pi(y)) \, d\pi(\mu)(\xi) \right) d\nu(y)$$

$$= \int_{G/K} \left(\int_G \tau_{-\xi} h(\pi(y)) \, d\nu(y) \right) d\pi(\mu)(\xi)$$

$$= \int_{G/K} \left(\int_{G/K} \tau_{-\xi} h(\eta) \, d\pi(\nu)(\eta) \right) d\pi(\mu)(\xi)$$

$$= \int_{G/K} h \, d[\pi(\mu) * \pi(\nu)] . \ \square$$

<u>Definition</u>. En familie $(\mu_t)_{t>0}$ af positive mål på G med egenskaberne

i) $\int d\mu_t = \mu_t(G) \leq 1$ for $t > 0$

ii) $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$ for $t,s>0$

iii) $\lim_{t\to 0} \mu_t = \varepsilon_0$ i den vage topologi på $M_+(G)$.

kaldes en (vagt kontinuert) foldningssemigruppe på G.

Lad $(\mu_t)_{t>0}$ være en foldningssemigruppe på G. Vi kan (og vil) altid tænke os $(\mu_t)_{t>0}$ "fortsat" til en familie $(\tilde{\mu}_t)_{t\geq 0}$ hvor

$$\tilde{\mu}_t = \begin{cases} \mu_t & \text{for } t>0 \\ \varepsilon_0 & \text{for } t=0. \end{cases}$$

Dermed vil familien $(\tilde{\mu}_t)_{t\geq 0}$ opfylde (1) og (2) ovenfor.

Når man i praksis skal eftervise, at en forelagt familie $(\mu_t)_{t>0}$ udgør en foldningssemigruppe er Fouriertransformationen ofte et nyttigt hjælpemiddel.

Betingelse ii) er nemlig ensbetydende med at

$$\hat{\mu}_t \cdot \hat{\mu}_s = \hat{\mu}_{t+s} \qquad \text{for } t,s>0,$$

og for at vise iii) er det tilstrækkeligt at godtgøre, at der for enhver følge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af positive tal så $t_n \to 0$ og for alle $\gamma\in\Gamma$ gælder

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_{t_n}(\gamma) = 1$$

jvfr. Levy's kontinuitetssætning 1.6.

Eksempel. Lad $G=\mathbb{R}^n$. Ved den Brown'ske (eller

Gauss'ske) foldningssemigruppe på $\mathbb{R}^n$ forstås familien $(\mu_t)_{t>0}$ hvor μ_t for $t>0$ har tætheden

$$g_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right).$$

Den Fouriertransformerede af g_t udregnes ved at Fouriertransformere i hver koordinat for sig under udnyttelse af formlen p. 85:

$$\hat{g}_t(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,y\rangle} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) dx$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_k y_k} (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x_k^2}{4t}\right) dx_k$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \exp(-t y_k^2)$$

$$= \exp(-t\|y\|^2)$$

Da $\hat{g}_t(0) = 1$ er g_t tæthed for et sandsynlighedsmål. Af udregningen ovenfor følger klart, at

$$\hat{g}_t \cdot \hat{g}_s = \hat{g}_{t+s} \qquad \text{for } t,s>0$$

og

$$\lim_{t\to 0} \hat{g}_t(y) = 1 \qquad \text{for alle } y \in \mathbb{R}^n.$$

<u>Øvelse 2.1</u> $G = \mathbb{R}$. Familien $(\pi_t)_{t>0}$ af mål på $\mathbb{R}$, hvor

$$\Pi_t = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t} \frac{t^k}{k!} \varepsilon_k \qquad \text{for } t>0,$$

udgør en foldningssemigruppe, den Poisson'ske foldningssemigruppe på $\mathbb{R}$.

Øvelse 2.2. $G = \mathbb{R}$. Familien $(\nu_t)_{t>0}$ af mål på $\mathbb{R}$, hvor ν_t for $t>0$ har tætheden

$$h_t(x) = \frac{t}{\pi} \frac{1}{t^2+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

m.h.t. Lebesguemålet, udgør en foldningssemigruppe, den Cauchy'ske foldningssemigruppe på $\mathbb{R}$.

Øvelse 2.3 Lad $x : [0,\infty[\to G$ være en kontinuert afbildning, der tilfredsstiller ligningen

$$x(t+s) = x(t) + x(s) \qquad \text{for } t,s \geq 0.$$

Ved $\mu_t = \varepsilon_{x(t)}$ for $t>0$
defineres en foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$ af "translationer" på G.

Sætning 2.3. For en foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$ er afbildningen

$$[0,\infty[\ni t \longmapsto \mu_t \in M_+(G)$$

kontinuert, når $M_+(G)$ udstyres med B-topologien.

Bevis. Vi viser først at

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(G) = 1 \qquad (3).$$

Lad $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ med $0 \le \varphi \le 1$ og $\varphi(0) = 1$. Dermed er

$$1 = \varphi(0) = \lim_{t\to 0} \mu_t(\varphi) \le \liminf_{t\to 0} \mu_t(G) \le \limsup_{t\to 0} \mu_t(G) \le 1,$$

hvor den sidste vurdering fås af betingelse i), og dette viser (3).

Af sætning 1.1 får vi da, at

$$\lim_{t\to 0} \mu_t = \varepsilon_0 \qquad i\ B\text{-topologien}.$$

Dette medfører, at

$$\mu_t * \varphi \longrightarrow \varphi \quad \text{uniformt for } t \to 0 \qquad (4)$$

for hvert fast $\varphi \in \mathcal{K}(G)$. Lad nemlig $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ og $\varepsilon > 0$. Den ligelige kontinuitet af φ giver, at der findes $V \in \mathcal{U}(0)$ så

$$x - y \in V \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Lad $\psi \in \mathcal{K}(G)$ være valgt så $0 \le \psi \le 1$ og $\operatorname{supp}\psi \subseteq V$ og så $\psi(0) = 1$. For alle $x \in G$ gælder

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \mu_t * \varphi(x)| &\le |\varphi(x) - \varphi(x)\cdot\mu_t(G)| + \left|\int(\varphi(x) - \varphi(x-y))\,d\mu_t(y)\right| \\
&\le \|\varphi\|_\infty (1 - \mu_t(G)) + \int |\varphi(x) - \varphi(x-y)|\,\psi(y)\,d\mu_t(y) \\
&\qquad + \int |\varphi(x) - \varphi(x-y)|\,(1 - \psi(y))\,d\mu_t(y) \\
&\le \|\varphi\|_\infty (1 - \mu_t(G)) + \varepsilon + 2\|\varphi\|_\infty \int (1 - \psi(y))\,d\mu_t(y)
\end{aligned}$$

hvilket viser (4), da første og sidste led går mod 0 for $t \to 0$.

Vi kan nu vise, at afbildningen

$$t \longmapsto \mu_t \tag{5}$$

er vagt kontinuert. Lad $\varphi \in \mathcal{K}(G)$, $t_0 > 0$ og $\varepsilon > 0$ være givet. For $t > t_0$ finder vi

$$|\mu_t(\varphi) - \mu_{t_0}(\varphi)| = |\mu_{t_0} * (\mu_{t-t_0} - \varepsilon_0) * \check{\varphi}(0)|$$

$$\leq \| (\mu_{t-t_0} - \varepsilon_0) * \check{\varphi} \|_\infty$$

da $\mu_{t_0}(G) \leq 1$, og analogt for $t \in]0, t_0[$

$$|\mu_{t_0}(\varphi) - \mu_t(\varphi)| = |\mu_t * (\mu_{t_0-t} - \varepsilon_0) * \check{\varphi}(0)|$$

$$\leq \| (\mu_{t_0-t} - \varepsilon_0) * \check{\varphi} \|_\infty$$

hvilket viser, at $\mu_t(\varphi) \to \mu_{t_0}(\varphi)$ for $t \to t_0$, da højresiderne går mod 0 for $t \to t_0$ ifølge (4).

For $t, t_0 > 0$ viser vurderingerne

$$|\mu_{t_0}(G) - \mu_t(G)| = |(\mu_{t_0-t}(G) - 1)\mu_t(G)| \leq |\mu_{t_0-t}(G) - 1|$$

for $t < t_0$, og

$$|\mu_{t_0}(G) - \mu_t(G)| = |(\mu_{t-t_0}(G) - 1)\mu_{t_0}(G)| \leq |\mu_{t-t_0}(G) - 1|$$

for $t_0 < t$, ifølge (3), at afbildningen

$$t \longmapsto \mu_t(G)$$

er kontinuert, hvilket sammen med den vage kontinuitet af (5), ifølge Sætning 1.1 giver at (5) er B-kontinuert. ∎

<u>Korollar 2.4</u> Lad $f: G \to \mathbb{C}$ være en ligeligt kontinuert begrænset funktion. Da gælder at

$$\mu_t * f \longrightarrow f \quad \text{ligeligt på } G$$

for $t \to 0$.

Bevis. Dette fås på samme måde som (4) i beviset for sætning 2.3. □

<u>Øvelse 2.4.</u> Forudsætningen om ligelig kontinuitet af f i Korollar 2.4 kan ikke undværes, hvilket ses ved eksempler på $G = \mathbb{R}$. Man kan benytte foldningssemigruppen $(\mu_t)_{t>0}$ hvor $\mu_t = \varepsilon_t$ for $t>0$. Sml. Øvelse 2.3.

<u>Sætning 2.5.</u> Lad $(\mu_t)_{t>0}$ være en foldningssemigruppe på G. Den mindste afsluttede undergruppe G_0 af G, der indeholder $\operatorname{supp}(\mu_t)$ for alle $t>0$, er σ-kompakt.

Vi viser først nogle hjælperesultater.

<u>Lemma 2.6.</u> Lad $A \subseteq G$ være en σ-kompakt delmængde af G. Da er $\bar{A}$ σ-kompakt.

Bevis. Lad $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af kompakte delmængder af G så

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

og vælg en kompakt, symmetrisk omegn K af 0. Da er

$$\bar{A} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (K_n + K),$$

thi for $x \in \bar{A}$ gælder $(x+K) \cap A \neq \emptyset$, og der findes derfor $n \in \mathbb{N}$ så

$$(x+K) \cap K_n \neq \emptyset$$

altså $x \in K_n + K$. Vi har dermed

$$\bar{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bar{A} \cap (K_n + K))$$

hvor $\bar{A} \cap (K_n + K)$ er kompakt for alle $n \in \mathbb{N}$. □

<u>Lemma 2.7.</u> Den mindste afsluttede undergruppe G_A af G, der indeholder en σ-kompakt delmængde $A \subseteq G$, er σ-kompakt.

Bevis. Lad $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en voksende følge af kompakte mængder så

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n .$$

Dermed er mængderne

$$L_n = K_n \cup \{0\} \cup (-K_n)$$

kompakte, og videre er

$$L_m^p = L_n + \cdots + L_n \qquad (p \text{ addender})$$

kompakt for alle $n, p \in \mathbb{N}$. Foreningsmængden

$$G_A' = \bigcup_{n,p=1}^{\infty} L_n^p$$

er en σ kompakt undergruppe af G, nemlig den mindste undergruppe af G, der indeholder A.

Afslutningen $G_A = \overline{G'_A}$ af G'_A er dermed den mindste afsluttede undergruppe af G der indeholder A, og ifølge 2.6 er G_A σ-kompakt. □

<u>Lemma 2.8</u> Lad μ være et positivt begrænset mål på G. Da er $\mathrm{supp}(\mu)$ σ-kompakt.

Bevis. For hvert $n \in \mathbb{N}$ findes en kompakt mængde $K_n \subseteq G$ så

$$\mu(G \setminus K_n) < \tfrac{1}{n}.$$

Mængden

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

er σ-kompakt, og der gælder

$$\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \bar{A}.$$

Om den åbne mængde $G \setminus \bar{A}$ gælder nemlig for alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(G \setminus \bar{A}) \leq \mu(G \setminus K_n) < \tfrac{1}{n}$$

altså $\mu(G \setminus \bar{A}) = 0$. Dermed er

$$\mathrm{supp}(\mu) = \mathrm{supp}(\mu) \cap \bar{A}$$

σ-kompakt, da $\bar{A}$ er σ-kompakt ifølge 2.6. □.

Bevis for sætning 2.5: For $t \in \mathbb{R}_+$ sætter vi

$$A_t = \mathrm{supp}(\mu_t).$$

Ifølge Lemma 2.8 er A_t σ-kompakt og endvidere gælder

$$\overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} A_t} = \overline{\bigcup_{q\in\mathbb{Q}_+} A_q} .$$

Lad nemlig $U \subseteq G$ være en åben mængde så

$$U \subseteq \complement \overline{\bigcup_{q\in\mathbb{Q}_+} A_q} .$$

Da er $U \cap A_t = \emptyset$ for alle $t\in\mathbb{R}_+$. For enhver funktion $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ med $\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq U$ gælder $\mu_t(\varphi)=0$ for $t\in\mathbb{R}_+$, idet funktionen $t \mapsto \mu_t(\varphi)$ er kontinuert og lig 0 for alle $t\in\mathbb{Q}_+$.

Dermed er mængden

$$\overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} A_t}$$

σ-kompakt, og Lemma 2.7 giver, at den mindste afsluttede undergruppe G_0 af G, der indeholder $\mathrm{supp}(\mu_t)$ for alle $t\in\mathbb{R}_+$, er σ-kompakt. ▯

§ 3. Negativ definite funktioner.

Lad Γ være en LCA-gruppe.

Definition En kontinuert funktion $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$, kaldes *negativ definit*, såfremt det for alle naturlige tal n og alle n-sæt af elementer $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$ gælder at matricen

$$\left(\psi(\gamma_i) + \overline{\psi(\gamma_j)} - \psi(\gamma_i - \gamma_j) \right)_{i,j=1,\cdots,n}$$

er positiv hermitesk, altså dersom

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(\psi(\gamma_i) + \overline{\psi(\gamma_j)} - \psi(\gamma_i - \gamma_j) \right) \rho_i \overline{\rho_j} \geq 0 \tag{*}$$

for alle n-sæt $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}$.

Øvelse 3.1 En kontinuert reel funktion $\psi : \Gamma \to \mathbb{R}$, der opfylder $\psi(\gamma) = \psi(-\gamma)$ for alle $\gamma \in \Gamma$, er negativ definit hvis blot (*) gælder for alle $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ og alle $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{R}$ (det er endda nok hvis (*) er opfyldt for alle $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{Z}$).

Lad ψ være negativ definit. Da 1×1 matricen

$$\left(\psi(0) + \overline{\psi(0)} - \psi(0-0) \right) = \left(\overline{\psi(0)} \right)$$

er positiv hermitesk, gælder

$$\psi(0) \geq 0 . \tag{1}$$

Endvidere er for hvert $\gamma \in \Gamma$, 2×2 matricen

$$\begin{pmatrix} \psi(\gamma) + \overline{\psi(\gamma)} - \psi(0) & \psi(\gamma) + \overline{\psi(0)} - \psi(\gamma) \\ \psi(0) + \overline{\psi(\gamma)} - \psi(-\gamma) & \psi(0) + \overline{\psi(0)} - \psi(0) \end{pmatrix}$$

positiv hermitesk, hvoraf

$$\psi(-\gamma) = \overline{\psi(\gamma)} \qquad (\supset: \ \psi = \psi^*) \tag{2}$$

og videre da denne matrix har ikke-negativ determinant, at

$$\operatorname{Re} \psi(\gamma) \geq \psi(0) . \tag{3}$$

Med $N(\Gamma)$ betegnes mængden af negativ definite funktioner på Γ.

Sætning 3.1 Mængden $N(\Gamma)$ er en konveks kegle. Hvis en kontinuert funktion ψ er grænsefunktion for et punktvis konvergent net af negativ definite funktioner, så er ψ negativ definit. Specielt er $N(\Gamma)$ afsluttet i rummet af kontinuerte funktioner på Γ forsynet med topologien for ligelig konvergens over kompakte delmængder. Endvidere er $N(\Gamma)$ stabil overfor kompleks konjugering. Specielt er realdelen af en negativ definit funktion på Γ, negativ definit. De ikke-negative konstante funktioner på Γ tilhører $N(\Gamma)$.

Beviset er umiddelbart.

Lemma 3.2 Lad $\psi \in N(\Gamma)$ være reel og antag at $\psi(0) = 0$. Da er funktionen $\sqrt{\psi}$ subadditiv, i.e.

$$\sqrt{\psi(\gamma+\delta)} \leq \sqrt{\psi(\gamma)} + \sqrt{\psi(\delta)} \qquad \text{for alle } \gamma, \delta \in \Gamma.$$

Bevis. Af (3) følger at $\psi \geq 0$. For $\gamma, \delta \in \Gamma$ har matricen

$$\begin{pmatrix} 2\psi(\gamma) & \psi(\delta)+\psi(\gamma)-\psi(\delta-\gamma) \\ \psi(\gamma)+\psi(\delta)-\psi(\gamma-\delta) & 2\psi(\delta) \end{pmatrix}$$

ikke-negativ determinant, hvoraf idet $\psi = \psi^*$

$$[\psi(\gamma)+\psi(\delta)-\psi(\gamma+\delta)]^2 \leq 4\,\psi(\gamma)\psi(\delta)$$

altså

$$\psi(\gamma+\delta) \leq \psi(\gamma) + 2\sqrt{\psi(\gamma)}\sqrt{\psi(\delta)} + \psi(\delta) = \left(\sqrt{\psi(\gamma)} + \sqrt{\psi(\delta)}\right)^2. \square$$

Bemærkning. Kontinuiteten af ψ blev ikke benyttet i beviset for 3.2.

Dette lemma sætter os i stand til at vurdere "væksten" af funktioner i $N(\Gamma)$.

Sætning 3.3. Lad $\psi \in N(\mathbb{R}^n)$ være reel og antag $\psi(0) = 0$. Da findes $C > 0$ så

$$\psi(x) \leq C \cdot \|x\|^2 \quad \text{for } \|x\| \geq 1,$$

altså $\psi \in \mathcal{O}(\|x\|^2)$.

Bevis. I følge Lemma 3.2 har vi for alle $n \in \mathbb{N}$ og $y \in \mathbb{R}^n$ at

$$\sqrt{\psi(n \cdot y)} \leq n\sqrt{\psi(y)}$$

altså

$$\psi(x) \leq n^2 \psi\left(\tfrac{x}{n}\right) \qquad \text{for } n \in \mathbb{N} \text{ og } x \in \mathbb{R}^n.$$

Lad $C = \sup_{\|z\| \leq 2} \psi(z)$. For $x \in \mathbb{R}^n$ med $\|x\| \geq 1$ vælges $n \in \mathbb{N}$ så $\|x\| \in [n, n+1[$, og dermed gælder

$$\psi(x) \leq n^2 \psi\left(\tfrac{x}{n}\right) \leq \|x\|^2 \cdot C. \quad \square$$

Lemma 3.4. Hvis $\psi \in N(\Gamma)$ så er $[\psi - \psi(0)] \in N(\Gamma)$.

Bevis. Lad $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ og $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}$. Vi betragter $(n+1)$-sættene $0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ og $\rho^*, \rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}$ hvor $\rho^* = -\sum_{i=1}^n \rho_i$ og finder

$$0 \le \psi(0)\,|\rho^*|^2 + \sum_{j=1}^n \left(\psi(0) + \overline{\psi(\gamma_j)} - \psi(-\gamma_j)\right)\rho^*\overline{\rho_j}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left(\psi(\gamma_i) + \overline{\psi(0)} - \psi(\gamma_i)\right)\rho_i\overline{\rho^*}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \left(\psi(\gamma_i) + \overline{\psi(\gamma_j)} - \psi(\gamma_i - \gamma_j)\right)\rho_i\overline{\rho_j}$$

$$= -\psi(0)\,|\rho^*|^2 + \sum_{i,j=1}^n \left(\psi(\gamma_i) + \overline{\psi(\gamma_j)} - \psi(\gamma_i - \gamma_j)\right)\rho_i\overline{\rho_j}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \left[\psi(\gamma_i) + \overline{\psi(\gamma_j)} - \psi(\gamma_i - \gamma_j) - \psi(0)\right]\rho_i\overline{\rho_j} \;. \qquad \square$$

<u>Lemma 3.5.</u> En kontinuert funktion $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ er negativ definit hvis og kun hvis følgende tre betingelser er opfyldt:

a) $\psi(0) \ge 0$

b) $\psi^* = \psi$

c) $\forall n \in \mathbb{N} . \forall \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma . \forall \rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i,j=1}^n \psi(\gamma_i - \gamma_j)\rho_i\overline{\rho_j} \le 0 .$$

Bevis. Antag først at $\psi \in N(\Gamma)$. Betingelserne a) og b) er da klart opfyldte og for $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ og $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}$ med $\sum_{i=1}^n \rho_i = 0$ finder vi

$$0 \le \sum_{i,j=1}^n \left(\psi(\gamma_i) + \overline{\psi(\gamma_j)} - \psi(\gamma_i - \gamma_j)\right)\rho_i\overline{\rho_j}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \psi(\gamma_i)\rho_i\overline{\rho_j} + \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\psi(\gamma_j)}\,\rho_i\overline{\rho_j} - \sum_{i,j=1}^{n} \psi(\gamma_i-\gamma_j)\rho_i\overline{\rho_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \overline{\rho_j} \sum_{i=1}^{n} \psi(\gamma_i)\rho_i + \sum_{i=1}^{n} \rho_i \sum_{j=1}^{n} \overline{\psi(\gamma_j)}\,\overline{\rho_j} - \sum_{i,j=1}^{n} \psi(\gamma_i-\gamma_j)\rho_i\overline{\rho_j}$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} \psi(\gamma_i-\gamma_j)\rho_i\overline{\rho_j} \, .$$

Lad nu omvendt $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ opfylde a), b) og c) og lad $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ og $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}$ være givet. Vi betragter $(n+1)$-sættene $0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ og $\rho^*, \rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}$ hvor $\rho^* = -\sum_{i=1}^{n} \rho_i$. Ifølge c) har vi da

$$\psi(0)|\rho^*|^2 + \sum_{i=1}^{n} \psi(\gamma_i)\rho_i\overline{\rho^*} + \sum_{j=1}^{n} \psi(-\gamma_j)\rho^*\overline{\rho_j} + \sum_{i,j=1}^{n} \psi(\gamma_i-\gamma_j)\rho_i\overline{\rho_j} \leq 0$$

hvoraf under udnyttelse af a) og b)

$$-\sum_{i=1}^{n} \psi(\gamma_i)\rho_i\overline{\left(-\sum_{j=1}^{n}\rho_j\right)} - \sum_{j=1}^{n} \overline{\psi(\gamma_j)}\left(-\sum_{i=1}^{n}\rho_i\right)\overline{\rho_j}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \psi(\gamma_i-\gamma_j)\rho_i\overline{\rho_j} \geq \psi(0)|\rho^*|^2 \geq 0$$

altså

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left[\psi(\gamma_i) + \overline{\psi(\gamma_j)} - \psi(\gamma_i-\gamma_j)\right]\rho_i\overline{\rho_j} \geq 0 \, . \quad \square$$

<u>Sætning 3.6</u>. Hvis φ er kontinuert og positiv definit på Γ, så er funktionen $\gamma \overset{\psi}{\mapsto} \varphi(0) - \varphi(\gamma)$ negativ definit.

Bevis. Lad $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ og $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}$ med $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0$. Da $\varphi \in P(\Gamma)$ finder vi

$$\sum_{i,j=1}^{n} [\varphi(0) - \varphi(\gamma_i - \gamma_j)] \rho_i \bar{\rho}_j = - \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(\gamma_i - \gamma_j) \rho_i \bar{\rho}_j \leq 0$$

og da ψ klart opfylder a) og b) fra Lemma 3.5, er ψ negativ definit. $\square$.

Vi kommer nu til den vigtigste sætning om negativ definite funktioner. Ved hjælp af denne sætning etableres forbindelsen til foldningssemigrupper.

<u>Sætning 3.7.</u> (Schoenberg) Lad $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$. Da er ψ negativ definit hvis og kun hvis $\psi(0) \geq 0$ og funktionen $e^{-t\psi}$ er kontinuert og positiv definit for alle $t > 0$.

Bevis. Lad først $\psi \in N(\Gamma)$. Det er klart at $\psi(0) \geq 0$ og at $\gamma \mapsto e^{-t\psi(\gamma)}$ er kontinuert. Det følger af Lemma II,4,1 (Sml. Øvelse II,4,3), at for en positiv hermitesk $n \times n$ matrix $(a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ så er

$$\left(\exp(a_{ij}) \right)_{i,j=1,\cdots,n}$$

en positiv hermitesk matrix. For $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$ er matricen

$$\left(\exp\left(\psi(\gamma_i) + \overline{\psi(\gamma_j)} - \psi(\gamma_i - \gamma_j)\right)\right)_{i,j=1,\cdots,n}$$

derfor positiv hermitesk. For $\rho_1, \cdots, \rho_n \in \mathbb{C}$ finder vi

$$\sum_{i,j=1}^{n} \exp(-\psi(\gamma_i - \gamma_j)) \rho_i \bar{\rho}_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \exp\left(-\psi(\gamma_i - \gamma_j) + \psi(\gamma_i) + \overline{\psi(\gamma_j)}\right) \exp(-\psi(\gamma_i)) \exp(-\overline{\psi(\gamma_j)}) \rho_i \bar{\rho}_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \exp\left[\psi(\gamma_i)+\overline{\psi(\gamma_j)} - \psi(\gamma_i-\gamma_j)\right] c_i \overline{c_j} \geq 0$$

hvor vi har sat $c_i = \rho_i \exp(-\psi(\gamma_i)) \in \mathbb{C}$. Heraf ses at $\exp(-\psi)$ er positiv definit, og dette giver det ønskede, da $t\psi$ er negativ definit for alle $t>0$.

Lad nu omvendt $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ opfylde

1) $\psi(0) \geq 0$

2) $\forall t>0$: $\gamma \longmapsto \exp(-t\psi(\gamma))$ er kontinuert og positiv definit.

Lemma 3.8 nedenfor giver at ψ er kontinuert, og idet $\psi(0) \geq 0$ har vi at $\exp(-\psi(0)) \leq 1$ for alle $t>0$. Dermed er funktionen (ifølge sætning 3.1 og sætning 3.6)

$$\gamma \longmapsto \frac{1-\exp(-t\psi(\gamma))}{t}$$

negativ definit for alle $t>0$. For $t \to 0$ gælder imidlertid

$$\frac{1-\exp(-t\psi(\gamma))}{t} \longrightarrow \psi(\gamma)$$

punktvis på Γ, og vi konkluderer via Sætning 3.1. $\square$.

<u>Lemma 3.8</u> Lad $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ være en funktion med egenskaben, at $\gamma \longmapsto \exp(-t\psi(\gamma))$ er kontinuert for alle $t>0$. Da er ψ kontinuert.

I beviset skal vi benytte nogle generelle resultater.

Lad G være en LCA-gruppe med dual gruppe $\hat{G}$ og lad $\hat{G}_d$ betegne $\hat{G}$ forsynet med den diskrete topologi. Det er klart at $\hat{G}_d$ er en LCA-gruppe, og den identiske afbildning

$$id : \hat{G}_d \longrightarrow \hat{G}$$

er en kontinuert, bijektiv homomorfi. Den til id duale homomorfi betegnes i og opfattes som en afbildning

$$i : G \longrightarrow (\hat{G}_d)^\wedge .$$

Herved bliver i en kontinuert, injektiv homomorfi med tæt billede, af G ind i den kompakte LCA-gruppe $(\hat{G}_d)^\wedge$ (Sætning II. 9.3). Denne kompakte gruppe $(\hat{G}_d)^\wedge$ betegnes også $\beta(G)$ og kaldes <u>Bohrgruppen</u> for G. "Delrumstopologien" af $\beta(G)$ på G (via "indlejringen" i) kaldes <u>Bohrtopologien</u> på G.

<u>Øvelse 3.2</u>. Bohrgruppen $\beta(G)$ for G har følgende "universelle egenskab". For hver kompakt LCA-gruppe K og enhver kontinuert homomorfi $\varphi : G \to K$ findes netop én kontinuert homomorfi $\varphi_\beta : \beta(G) \to K$ så diagrammet

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] & & K \\ & \beta(G) \arrow[ur, "\varphi_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

kommuterer (her betegner $i : G \to \beta(G) = (\hat{G}_d)^\wedge$ den ovenfor definerede indlejring).

Bohrgruppen for G kan beskrives på en anden måde:

Produktgruppen $H = \prod_{\hat{G}} \mathbb{T}$ af $\mathbb{T}$ med sig selv $\hat{G}$ "gange", er en kompakt LCA-gruppe, og vi har den kontinuerte, injektive homomorfi $j : G \to H$ givet ved

$$j(x) = (\gamma(x))_{\gamma \in \hat{G}} \in H \quad \text{for } x \in G.$$

Afslutningen $\overline{j(G)}$ af $j(G)$ i H er en afsluttet (altså kompakt) undergruppe i H

Grupperne $\beta(G)$ og $\overline{j(G)}$ er ens.

Begge grupper består af afbildninger $\hat{G} \to \mathbb{T}$, og for $x \in G$ er $i(x)$ og $j(x)$ samme afbildning $\hat{G} \to \mathbb{T}$, nemlig

$$\hat{G} \ni \gamma \longmapsto \gamma(x) \in \mathbb{T}.$$

Idet mængden

$$\bigcap_{\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}} \{ f \in H \mid f(\gamma_1 + \gamma_2) = f(\gamma_1) \cdot f(\gamma_2) \}$$

er en afsluttet delmængde af H, der omfatter $j(G)$, består $\overline{j(G)}$ af homomorfier $\hat{G} \to \mathbb{T}$, altså elementer af $\beta(G)$.

Dermed er

$$i(G) = j(G) \subseteq \overline{j(G)} \subseteq \beta(G)$$

hvoraf $\overline{j(G)} = \beta(G)$, da $i(G)$ er tæt i $\beta(G)$ og da topologien på $\beta(G)$ opfattet som delmængde af H netop er $\beta(G)$'s topologi, nemlig topologien for punktvis konvergens af funktioner $\hat{G} \to \mathbb{T}$.

Udstyres G med Bohrtopologien bliver j en homeomorfi af G på $j(G)$ og specielt gælder for $\gamma \in \hat{G}$, at

$$\gamma = \pi_\gamma \circ j : G \to \mathbb{T},$$

hvor $\pi_\gamma : H \to \mathbb{T}$ betegner projektionen af H på den "γ-te" koordinat i H. Heraf ses, at enhver karakter på G er kontinuert i Bohrtopologien på G.

<u>Sætning 3.9.</u> Lad G være en LCA-gruppe. En delmængde $A \subseteq G$ er kompakt i Bohrtopologien på G hvis og kun hvis A er kompakt.

Bevis. Da indlejringen $i: G \to \beta(G)$ er kontinuert er hvis delen klar. Beviset for kun-hvis delen gennemføres kun i tilfældet $G = \mathbb{R}$. For det generelle tilfælde henvises til I. Glicksberg: Canad. J. Math 14, 1962 p. 269-276. Idet $A = i^{-1}(i(A))$ er det klart, at A er afsluttet i $\mathbb{R}$, og vi skal derfor blot vise at A er begrænset. Hertil benyttes følgende lemma.

<u>Lemma 3.10.</u> Lad A være en ubegrænset delmængde af $\mathbb{R}$. Til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $t \in]0, \varepsilon]$ og en ubegrænset følge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ af punkter fra A med egenskaben

$$\operatorname{Re} e^{ita_n} \le 0 \qquad \text{for } n \in \mathbb{N} \qquad (**)$$

Bevis. Først vælges $a_1 \in A$ med $|a_1| \ge 1$ og således at $|a_1| \frac{\varepsilon}{2} > 2\pi$. Så er mængden $\{ t a_1 \in \mathbb{R} \mid t \in [\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon] \}$ et interval på $\mathbb{R}$ af længde $> 2\pi$, og der findes derfor et ikke tomt delinterval $[\alpha_1, \beta_1]$ af $[\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon]$ så

$$\mathrm{Re}\; e^{ita_1} \leq 0 \qquad \text{for} \quad t \in [\alpha_1, \beta_1].$$

Dernæst vælges $a_2 \in A$ med $|a_2| \geq 2$ og således at $|a_2|(\beta_1 - \alpha_1) > 2\pi$, og et ikke tomt delinterval $[\alpha_2, \beta_2]$ af $[\alpha_1, \beta_1]$ således at

$$\mathrm{Re}\; e^{ita_2} \leq 0 \qquad \text{for} \quad t \in [\alpha_2, \beta_2].$$

Således fortsættes; herved bestemmes (mindst) et $t \in \bigcap_{m=1}^{\infty} [\alpha_m, \beta_m]$ og en ubegrænset følge $(a_m)_{n \in \mathbb{N}}$ på A så betingelsen (**) er opfyldt. $\square$.

Bevis for sætning 3.9: Antag at A er ubegrænset. Til $\varepsilon = 1$ findes ifølge 3.10 et $t_1 \in]0, 1]$ og en ubegrænset punktfølge $(a_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ på A så

$$\mathrm{Re}\; e^{it_1 a_n^{(1)}} \leq 0 \qquad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Til $\varepsilon = \frac{1}{2}$ findes ifølge 3.10 et $t_2 \in]0, \frac{1}{2}]$ og en ubegrænset delfølge $(a_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ af $(a_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ så

$$\mathrm{Re}\; e^{it_2 a_n^{(2)}} \leq 0 \qquad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Således fortsættes og vi finder dermed en følge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ af tal $t_n \in]0, \frac{1}{n}]$ og sukcessive udtyndinger $(a_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ af $(a_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$, således at

$$\mathrm{Re}\; e^{it_p a_n^{(p)}} \leq 0 \qquad \text{for alle } n, p \in \mathbb{N}.$$

Vi betragter nu mængderne

$$O_n = \{ x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{Re} e^{it_n x} > 0 \}$$

som er åbne i Bohrtopologien på $\mathbb{R}$. Endvidere er

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n ,$$

idet vi til hvert $x \in \mathbb{R}$, kan finde $n \in \mathbb{N}$ så $|t_n x| < \frac{\pi}{2}$.

Da A er kompakt i Bohrtopologien findes $n_1 < \cdots < n_p$ så

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} O_{n_i} .$$

Følgen $(a_n^{(n_p)})_{n \in \mathbb{N}}$ ligger i A, men ikke i $O_{n_1} \cup \cdots \cup O_{n_p}$ hvilket er en modstrid. $\square$

<u>Lemma 3.11.</u> Lad $f : K \to \mathbb{R}$ være en funktion på et kompakt rum K, således at funktionen

$$f_t : K \longrightarrow \mathbb{T}$$

givet ved $f_t(x) = e^{itf(x)}$ for $x \in K$, er kontinuert for alle $t \in \mathbb{R}$. Så er f kontinuert.

Bevis. Lad j betegne indlejringen af $\mathbb{R}$ i Bohrgruppen $\subseteq \prod_{\mathbb{R}} \mathbb{T}$ for $\mathbb{R}$, altså afbildningen

$$j(x) = (\exp(itx))_{t \in \mathbb{R}} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}.$$

Ifølge forudsætning er $j \circ f : K \to \prod_{\mathbb{R}} \mathbb{T}$ kontinuert. Dermed er $j \circ f(K)$ en kompakt delmængde af Bohrgruppen for $\mathbb{R}$, og derfor er $f(K)$ ifølge sætning

3.9 en kompakt delmængde af $\mathbb{R}$. Der findes altså $n_0 \in \mathbb{N}$ så $f(K) \subseteq [-n_0, n_0]$ og for et passende lille $t_0 \in \mathbb{R}_+$ gælder at

$$(t_0 f)(K) \subseteq [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}]$$

Dermed har vi, idet log betegner en kontinuert gren af logaritmefunktionen (f.eks. defineret i den højre halvplan), at

$$it_0 f = \log(\exp(it_0 f))$$

er en kontinuert funktion. Altså er f kontinuert. $\square$

Bevis for Lemma 3.8. Lad $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ have egenskaben, at funktionen

$$\gamma \longmapsto \exp(-t\psi(\gamma))$$

er kontinuert for alle $t>0$. Så er den numeriske værdi

$$|\exp(-t\psi(\gamma))| = \exp(-t\operatorname{Re}\psi(\gamma))$$

en kontinuert funktion af γ for alle $t>0$. For $t=1$ har vi dermed, at

$$\operatorname{Re}\psi(\gamma) = -\log(\exp(-\operatorname{Re}\psi(\gamma)))$$

er en kontinuert funktion af γ. Endvidere gælder, at

$$\exp(-ti\operatorname{Im}\psi(\gamma)) = \exp(-t\psi(\gamma))\exp(t\operatorname{Re}\psi(\gamma))$$

er en kontinuert funktion af γ for alle $t>0$, og derfor for alle $t \in \mathbb{R}$. Ifølge Lemma 3.11 gælder så, at restriktionen af $\operatorname{Im}\psi$ til en vilkårlig kompakt delmængde $K \subseteq \Gamma$ er kontinuert. Men så er $\operatorname{Im}\psi : \Gamma \to \mathbb{R}$ kontinuert, og dermed er også

$$\psi = \operatorname{Re}\psi + i \operatorname{Im}\psi$$

kontinuert. $\square$.

<u>Bemærkning</u>. Der findes topologiske rum X og afbildninger $f : X \to \mathbb{R}$ således at e^{-itf} er kontinuert for alle $t > 0$ og så f ikke er kontinuert. Jvfr. eksemplet p. 147-49.

Vi kan nu etablere forbindelsen mellem foldningssemigrupper på LCA-gruppen G og negativ definite funktioner på den duale gruppe Γ.

<u>Sætning 3.12.</u> Der består en éentydig korrespondance mellem foldningssemigrupper $(\mu_t)_{t>0}$ på G og negativ definite funktioner ψ på Γ. Mere præcist: Til $(\mu_t)_{t>0}$ findes netop én funktion $\psi \in N(\Gamma)$ så

$$\hat{\mu}_t(\gamma) = \exp(-t\psi(\gamma)) \quad \text{for } \gamma \in \Gamma \text{ og } t > 0. \qquad (+)$$

Omvendt, vil der for $\psi \in N(\Gamma)$ ved (+) bestemmes en foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$ på G.

Bevis. Lad først $(\mu_t)_{t>0}$ være en foldningssemigruppe på G. For hvert fast $\gamma \in \Gamma$ betragter vi funktionen $t \xmapsto{\varphi_\gamma} \hat{\mu}_t(\gamma)$. Herved bestemmes en kontinuert funktion (Sætning 2.3) $\varphi_\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ med egenskaberne

$$\varphi_\gamma(s+t) = \varphi_\gamma(s)\cdot\varphi_\gamma(t)\,, \quad \lim_{t\to 0} \varphi_\gamma(t) = 1\,,$$

og der findes følgelig netop ét tal $\psi(\gamma) \in \mathbb{C}$ så

$$\varphi_\gamma(s) = \exp(-s\psi(\gamma)) \quad \text{for alle } s \in \mathbb{R}_+ .$$

Afbildningen

$$\Gamma \ni \gamma \longmapsto \psi(\gamma) \in \mathbb{C}$$

opfylder

1) $\psi(0) \geq 0$ idet $\mu_t(G) \in]0,1]$

og

2) $\gamma \longmapsto \exp(-t\psi(\gamma)) = \hat{\mu}_t(\gamma)$

er kontinuert og positiv definit for alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Ifølge Schoenberg's sætning er ψ altså negativ definit.

Endvidere er ψ entydigt bestemt ud fra $(\mu_t)_{t>0}$ ved ligningen (+), thi hvis $\psi_1, \psi_2 : \Gamma \to \mathbb{C}$ opfylder

$$\exp(-t\psi_1(\gamma)) = \exp(-t\psi_2(\gamma)) \quad \text{for } t>0 \text{ og } \gamma \in \Gamma,$$

så gælder $\psi_1 \equiv \psi_2$.

Lad nu omvendt $\psi \in N(\Gamma)$. For hvert $t>0$ er $\exp(-t\psi)$ en kontinuert, positiv definit funktion på Γ, og ifølge Bochner's sætning findes netop et positivt begrænset mål μ_t på G så: $\hat{\mu}_t = \exp(-t\psi)$.

Da $\psi(0) \geq 0$ har vi

$$\mu_t(G) = \hat{\mu}_t(0) = e^{-t\psi(0)} \leq 1,$$

og idet

$$\hat{\mu}_{t+s} = e^{-(t+s)\psi} = e^{-t\psi} \cdot e^{-s\psi} = \hat{\mu}_t \cdot \hat{\mu}_s = \widehat{\mu_t * \mu_s},$$

har vi på grund af Fouriertransformationens injektivitet, at

$$\mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s \quad \text{for alle } t,s>0.$$

Slutteligt er det klart, at

$$\hat{\mu}_t(\gamma) = e^{-t\psi(\gamma)} \to 1 \quad \text{for } t \to 0,$$

ligeligt over kompakte delmængder af Γ, hvoraf specielt

$$\lim_{t\to 0} \mu_t = \varepsilon_0 \quad \text{vagt}. \quad \square$$

Hvis foldningssemigruppen $(\mu_t)_{t>0}$ på G og den negativ definite funktion ψ på Γ svarer til hinanden via korrespondancen i 3.12, siges $(\mu_t)_{t>0}$ og ψ at være <u>associerede</u>.

<u>Korollar 3.13.</u> Lad $(\mu_t)_{t>0}$ være en foldningssemigruppe på G med associeret negativ definit funktion $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$. Med $\lambda_0 = \psi(0)$ gælder, at totalmasserne for målene μ_t er givet ved

$$\mu_t(G) = e^{-\lambda_0 t}.$$

Specielt er alle målene μ_t sandsynlighedsmål på G netop hvis $\psi(0) = 0$.

<u>Øvelse 3.3.</u> For hvert $a \geq 0$ er den konstante funktion

$\psi : \mathbb{R} \to \{a\}$ negativ definit. Find den til ψ associerede foldningssemigruppe på $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

<u>Sætning 3.14.</u> Lad $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ være en kontinuert homomorfi af LCA-gruppen Γ ind i LCA-gruppen $(\mathbb{R}, +)$. Da er funktionen $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ defineret ved $\psi(\gamma) = i f(\gamma)$, negativ definit.

Bevis. Lad $t > 0$. Afbildningen

$$\gamma \longmapsto \exp(-it f(\gamma))$$

er en karakter på Γ, altså specielt positiv definit. Da endvidere $\psi(0) = 0$, er ψ ifølge Schoenberg's sætning negativ definit. $\square$

<u>Øvelse 3.4.</u> For hvert $\lambda \in \mathbb{R}$ er funktionen $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ defineret ved $\psi(x) = i \cdot \lambda \cdot x$ en negativ definit funktion på $\mathbb{R}$. Find den til ψ associerede foldningssemigruppe på $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

<u>Sætning 3.15.</u> Lad $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ være en rent imaginær, negativ definit funktion på Γ. Da er ψ af formen if hvor $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ er en homomorfi af Γ ind i $\mathbb{R}$.

Bevis. Lad $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ være den kontinuerte funktion på Γ så $\psi = if$. Vi skal vise at $f(\delta + \eta) = f(\delta) + f(\eta)$ for alle $\delta, \eta \in \Gamma$. For alle $t > 0$ er funktionen

$$\gamma \longmapsto \exp(-t\psi(\gamma))$$

en kontinuert positiv definit funktion på Γ med numerisk værdi lig 1, altså en karakter på Γ (Øvelse II, 4.6). Heraf fås for alle $t>0$

$$\exp(-it\, f(\delta+\eta)) = \exp(-it(f(\delta)+f(\eta))),$$

hvilket medfører at: $f(\delta+\eta) = f(\delta)+f(\eta)$. $\square$

<u>Øvelse 3.5.</u> Lad $\psi_0, \psi_1 : \Gamma \to \mathbb{C}$ være negativ definite funktioner på Γ. For hvert $\alpha \in]0,1[$ er funktionen

$$\psi_\alpha = (1-\alpha)\psi_0 + \alpha\psi_1 : \Gamma \to \mathbb{C}$$

negativ definit. Den til ψ_α associerede foldningssemigruppe $(\mu_t^\alpha)_{t>0}$ kan udtrykkes på simpel måde ved foldningssemigrupperne $(\mu_t^0)_{t>0}$ og $(\mu_t^1)_{t>0}$ associeret med ψ_0 og ψ_1.

<u>Definition.</u> En kontinuert funktion $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ kaldes en <u>kvadratisk form</u>, dersom det for alle $x, y \in \Gamma$ gælder, at

$$2\varphi(x) + 2\varphi(y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y).$$

En kvadratisk form φ opfylder:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) = \varphi(-x) \quad \text{og} \quad \varphi(2x) = 4\varphi(x).$$

<u>Sætning 3.16</u> En ikke-negativ kvadratisk form φ på Γ er negativ definit.

Bevis. For $x, y \in \Gamma$ sætter vi

$$B(x,y) = \varphi(x) + \varphi(y) - \varphi(x-y),$$

og afbildningen $B : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$ er en "positiv symmetrisk bilinearform":

1) $\forall x, y, z \in \Gamma \quad : \quad B(x+y, z) = B(x,z) + B(y,z)$

2) $\forall x, y, z \in \Gamma \quad : \quad B(x, y+z) = B(x,y) + B(x,z)$

3) $\forall x, y \in \Gamma \quad : \quad B(x,y) = B(y,z)$

4) $\forall x \in \Gamma \quad : \quad B(x,x) \geq 0$.

For at indse 1) udregner vi

$$\varphi(x) + \varphi(z) - \varphi(x-z) + \varphi(y) + \varphi(z) - \varphi(y-z)$$
$$= \varphi(x) + \varphi(y) + 2\varphi(z) - \tfrac{1}{2}\left[\varphi(x-z+y-z) + \varphi(x-y)\right]$$
$$= \varphi(x) + \varphi(y) - \tfrac{1}{2}\varphi(x-y) + 2\varphi(z) - \tfrac{1}{2}\left[2\varphi(x+y-z) + 2\varphi(z) - \varphi(x+y)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\varphi(x+y) + 2\varphi(z) - \varphi(x+y-z) - \varphi(z) + \tfrac{1}{2}\varphi(x+y)$$
$$= \varphi(x+y) + \varphi(z) - \varphi(x+y-z)$$

Egenskaberne 3) og 4) er oplagte og 2) følger af 1) og 3). For $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \Gamma$ og $\rho_1, \dots, \rho_m \in \mathbb{Z}$ finder vi

$$\sum_{i,j=1}^{m} \left[\varphi(\gamma_i) + \varphi(\gamma_j) - \varphi(\gamma_i - \gamma_j)\right] \rho_i \rho_j = \sum_{i,j=1}^{m} B(\gamma_i, \gamma_j) \rho_i \rho_j$$

$$= B(\rho_1 \gamma_1 + \dots + \rho_m \gamma_m \,,\, \rho_1 \gamma_1 + \dots + \rho_m \gamma_m) \geq 0$$

ifølge 4). Af øvelse 3.1 fås da, at φ er negativ definit. $\square$

<u>Øvelse 3.6.</u> For $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$ og $c \geq 0$ er funktionen $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\psi(x) = ax^2 + ibx + c,$$

en negativ definit funktion. Find den til ψ associerede foldningssemigruppe på $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

Øvelse 3.7. Lad Γ_1, Γ_2 være LCA-grupper og lad $\psi_i : \Gamma_i \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, være negativ definite funktioner. Funktionen $\psi : \Gamma_1 \times \Gamma_2 \to \mathbb{C}$ defineret ved

$$\psi(\gamma_1, \gamma_2) = \psi_1(\gamma_1) + \psi_2(\gamma_2) \qquad \text{for } (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2,$$

er negativ definit på $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Den til ψ associerede foldningssemigruppe på $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)^\wedge$ kan udtrykkes på simpel måde ved foldningssemigrupperne på $(\Gamma_i)^\wedge$ associeret med ψ_i.

Sætning 3.17. Lad $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ være negativ definit og antag at $\psi(0) > 0$. Da er $\frac{1}{\psi}$ kontinuert og positiv definit.

Bevis. Ifølge Schoenberg's sætning er

$$\gamma \mapsto e^{-t\psi(\gamma)}$$

positiv definit for alle $t > 0$. Endvidere har vi

$$|e^{-t\psi(\gamma)}| = e^{-t\operatorname{Re}\psi(\gamma)} \leq e^{-t\psi(0)}$$

for alle $t > 0$ og alle $\gamma \in \Gamma$, og for fast $\gamma \in \Gamma$ er funktionen

$$t \mapsto e^{-t\psi(\gamma)}$$

derfor integrabel på $[0, \infty[$. Dermed er

$$\frac{1}{\psi(\gamma)} = \int_0^\infty e^{-t\psi(\gamma)}\, dt$$

positiv definit som funktion af γ. Endelig er $\frac{1}{\psi}$ kontineret, idet $\psi(\gamma) \neq 0$ for alle $\gamma \in \Gamma$. $\square$

Sætning 3.18. Lad $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ være negativ definit. Da er periodegruppen P_ψ for ψ givet ved

$$P_\psi = \{ \gamma \in \Gamma \mid \psi(\gamma) = \psi(0) \},$$

og $P_\psi^\perp$ er den mindste afsluttede undergruppe af $G = \hat{\Gamma}$, der indeholder $\text{supp}(\mu_t)$ for alle $t > 0$, hvor $(\mu_t)_{t>0}$ er den til ψ associerede foldningssemigruppe på G.

Bevis. For $t > 0$ sætter vi

$$A_t = \{ \gamma \in \Gamma \mid e^{-t\psi(\gamma)} = e^{-t\psi(0)} \}$$

og ifølge sætning II.9.7 og II, 9.8 gælder

$$A_t = P_{\hat{\mu}_t} = [\text{supp}(\mu_t)]^\perp .$$

Videre sættes

$$A = \{ \gamma \in \Gamma \mid \psi(\gamma) = \psi(0) \}.$$

Så er $\quad A = \bigcap_{t>0} A_t \quad$ og $\quad P_\psi = \bigcap_{t>0} P_{\hat{\mu}_t}$, hvoraf

$$A = P_\psi = \bigcap_{t>0} [\text{supp}(\mu_t)]^\perp = \Big[\bigcup_{t>0} \text{supp}(\mu_t) \Big]^\perp$$

og dermed er

$$P_\psi^\perp = \Big[\bigcup_{t>0} \text{supp}(\mu_t) \Big]^{\perp\perp},$$

hvilket netop er påstanden (jvfr. sætning II.9.1). $\square$

Det næste resultat kan opfattes som en almindeliggørelse af sætning 3.17.

Sætning 3.19. Lad $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ være negativ definit. Hvis der findes en omegn af 0 i Γ så $\frac{1}{\psi}$ er integrabel over denne omegn, så er $\frac{1}{\psi}$ lokalt integrabel på Γ, og målet $\frac{1}{\psi}d\gamma$ (hvor $d\gamma$ er et Haarmål på Γ) er et positiv definit mål på Γ.

Bevis. Hvis $\psi(0) > 0$ er $\frac{1}{\psi}$ en kontinuert, positiv definit funktion på Γ; specielt er $\frac{1}{\psi}$ lokalt integrabel og målet $\frac{1}{\psi}d\gamma$ er positiv definit (Sætning II, 4.4).

Lad $K \subseteq \Gamma$ være kompakt. Hvis $\psi(\gamma) \neq 0$ for alle $\gamma \in K$, har vi klart at

$$\int_K \left|\frac{1}{\psi(\gamma)}\right| d\gamma < +\infty .$$

Ellers betragtes mængden

$$K_0 = \{ \gamma \in K \mid \psi(\gamma) = 0 \}$$

som er en kompakt delmængde af Γ. Lad V være en åben omegn af 0 i Γ så

$$\int_V \left|\frac{1}{\psi(\gamma)}\right| d\gamma < +\infty$$

Der findes $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in K_0$ så

$$K_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\gamma_i + V) .$$

Dermed er

$$F = K \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{n} (\gamma_i + V) \right]$$

en kompakt delmængde af Γ så $\psi(\gamma) \neq 0$ for alle $\gamma \in F$.
Vi har derfor

$$\int_K \left| \frac{1}{\psi(\gamma)} \right| d\gamma \leq \int_F \left| \frac{1}{\psi(\gamma)} \right| d\gamma + \int_{\bigcup_{i=1}^{n}(\gamma_i + V)} \left| \frac{1}{\psi(\gamma)} \right| d\gamma$$

$$\leq \int_F \left| \frac{1}{\psi(\gamma)} \right| d\gamma + n \int_V \left| \frac{1}{\psi(\gamma)} \right| d\gamma < +\infty$$

hvor vi har benyttet, at ψ og derfor også $\left|\frac{1}{\psi}\right|$ er periodisk med $P_\psi \supseteq K_0$.

Lad nu $\varphi \in \mathcal{K}(\Gamma)$. For alle $n \in \mathbb{N}$ har vi

$$\int \varphi * \varphi^*(\gamma) \frac{1}{\psi(\gamma) + \frac{1}{n}} d\gamma \geq 0$$

fordi $(\psi(\gamma) + \frac{1}{n})^{-1}$ er kontinuert og positiv definit. Endvidere gælder

$$\varphi * \varphi^*(\gamma) \frac{1}{\psi(\gamma) + \frac{1}{n}} \longrightarrow \varphi * \varphi^*(\gamma) \frac{1}{\psi(\gamma)}$$

punktvis for $n \to \infty$, og for alle $n \in \mathbb{N}$ er funktionen

$$\left| \varphi * \varphi^*(\gamma) \frac{1}{\psi(\gamma)} \right|$$

en integrabel majorant for

$$\left| \varphi * \varphi^*(\gamma) \frac{1}{\psi(\gamma) + \frac{1}{n}} \right|$$

idet

$$\left|\psi + \tfrac{1}{n}\right| = \left[\left(\tfrac{1}{n} + \mathrm{Re}\,\psi\right)^2 + (\mathrm{Im}\,\psi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \geq \left[(\mathrm{Re}\,\psi)^2 + (\mathrm{Im}\,\psi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = |\psi|$$

fordi $\mathrm{Re}\,\psi \geq 0$.

Af sætningen om majoriseret konvergens af integraler, fås

$$\int \varphi * \varphi^*(\gamma) \frac{1}{\psi(\gamma)} d\gamma \geq 0 \quad . \square .$$

<u>Sætning 3.20.</u> Lad $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ være negativ definit. Da findes en følge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af negativ definite funktioner $\psi_n : \Gamma \to \mathbb{C}$ af formen

$$\psi_n = C + \varphi_n(0) - \varphi_n$$

hvor $C \geq 0$ og $\varphi_n : \Gamma \to \mathbb{C}$ er kontinuert og positiv definit, således at

$$\psi_n \longrightarrow \psi$$

ligeligt over kompakte delmængder af Γ.

Bevis. For $n \in \mathbb{N}$ sætter vi

$$\varphi_n(\gamma) = n \exp\left(-\tfrac{1}{n}(\psi(\gamma) - \psi(0))\right)$$

som ifølge Schoenberg's sætning er kontinuert og positiv definit. For funktionerne

$$\psi_n(\gamma) = \psi(0) + \varphi_n(0) - \varphi_n(\gamma)$$

$$= \psi(0) + n\left[1 - \exp\left(-\tfrac{1}{n}(\psi(\gamma) - \psi(0))\right)\right]$$

gælder at

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(\gamma) = \psi(\gamma) \qquad \text{punktvis på } \Gamma .$$

Indføjes rækkeudviklingen for exp har vi

$$\psi_n(\gamma) - \psi(\gamma) = -\frac{1}{n}\left(\frac{(\psi(\gamma)-\psi(0))^2}{2!} - \frac{(\psi(\gamma)-\psi(0))^3}{n\cdot 3!} + \frac{(\psi(\gamma)-\psi(0))^4}{n^2\cdot 4!}\cdots\right)$$

hvoraf følgende vurdering

$$|\psi_n(\gamma) - \psi(\gamma)| \leq \frac{1}{n}\exp(|\psi(\gamma)-\psi(0)|).$$

Da ψ er kontinuert er $\exp(|\psi(\gamma)-\psi(0)|)$ begrænset for γ tilhørende en kompakt mængde, og derfor vil $\psi_n \to \psi$ ligeligt over kompakte delmængder af Γ. $\square$

<u>Sætning 3.21.</u> Lad $\psi : \mathbb{R} \to [0,\infty[$ være en kontinuert funktion med egenskaberne:

1) ψ er lige ɔ: $\psi(x) = \psi(-x)$ for $x \in \mathbb{R}$.

2) ψ er voksende og konkav på $[0,\infty[$.

Da er ψ negativ definit.

Bevis. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er

$$\psi_n = \inf(\psi, n)$$

en kontinuert, lige funktion på $\mathbb{R}$, som er voksende og konkav på $[0,\infty[$. Men så er $n - \psi_n$, en kontinuert, lige, ikke-negativ funktion på $\mathbb{R}$, som er aftagende og konveks på $[0,\infty[$. Ifølge Polya's sætning (II, 6.5) er

$$x \longmapsto n - \psi_n(x)$$

en kontinuert, positiv definit funktion på $\mathbb{R}$, og sætning 3.6 giver så, at

$$x \longmapsto [n-\psi_n(0)] - [n-\psi_n(x)] = \psi_n(x) - \psi_n(0)$$

er negativ definit. Dermed er ψ_n negativ definit, og idet

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x) \qquad \text{punktvis på } \mathbb{R},$$

og ψ er kontinuert, er ψ altså negativ definit. $\square$

<u>Eksempel.</u> For hvert $\alpha \in [0,1]$ er funktionen

$$\mathbb{R} \ni x \to |x|^{\alpha}$$

negativ definit på $\mathbb{R}$, ifølge Sætning 3.21. Sammenlign med Sætning 3.22 nedenfor.

<u>Sætning 3.22.</u> Lad $\psi : \Gamma \to \mathbb{R}$ være en reel negativ definit funktion. For alle $\alpha \in]0,1[$ er funktionen

$$\Gamma \ni \gamma \longmapsto (\psi(\gamma))^{\alpha}$$

negativ definit på Γ.

Bevis. Vi tager vort udgangspunkt i definitionsformlen for Gamma-funktionen

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{\beta-1}\, dt \qquad \text{for } \beta > 0.$$

Substitueres $t = sx$ for fast $x > 0$, fås

$$\frac{1}{x^{\beta}} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} e^{-sx}\, s^{\beta-1}\, ds \qquad \text{for } x>0 \text{ og } \beta>0.$$

Med $\beta = 1-\alpha$ for $\alpha \in]0,1[$ fås heraf

$$x^{\alpha-1} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-sx}\, s^{-\alpha}\, ds \qquad \text{for } x>0 \text{ og } 0<\alpha<1.$$

og integreres begge sider efter x over intervallet $[\varepsilon, u]$ hvor $0 < \varepsilon < u$ finder vi

$$\frac{u^\alpha - \varepsilon^\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-s\varepsilon} - e^{-su}}{s} s^{-\alpha} ds .$$

Sætningen om monoton konvergens af integraler giver ved at lade $\varepsilon \searrow 0$, at

$$u^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-su}}{s} s^{-\alpha} ds \qquad (\square)$$

gældende for alle $u > 0$ og $\alpha \in]0,1[$.

Bemærk at funktionen

$$s \longmapsto \frac{1 - e^{-su}}{s} s^{-\alpha}$$

faktisk er integrabel over $]0,\infty[$, thi ved 0 er funktionen $\sim u \cdot s^{-\alpha}$ og i ∞ er funktionen $\sim \frac{1}{s^{\alpha+1}}$. Endvidere gælder $(\square)$ også for $u = 0$.

Hvis ψ er en reel, negativ definit funktion på Γ så er $\psi(\gamma) \geq 0$ for alle $\gamma \in \Gamma$ og ved at indsætte $u = \psi(\gamma)$ i $(\square)$ finder vi

$$[\psi(\gamma)]^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-s\psi(\gamma)}}{s} s^{-\alpha} ds .$$

Af Schoenberg's sætning (3.7) og sætningerne 3.1 og 3.6 følger imidlertid at funktionen

$$\gamma \longmapsto \frac{1 - e^{-s\psi(\gamma)}}{s} s^{-\alpha}$$

er negativ definit for alle $s>0$ og $\alpha \in]0,1[$, og dermed er ψ^α negativ definit. $\square$.

Lad $\psi : \Gamma \to \mathbb{R}$ være negativ definit og lad $(\mu_t)_{t>0}$ være den til ψ associerede foldningssemigruppe på G. For hvert $\alpha \in]0,1[$ findes en entydigt bestemt foldningssemigruppe $(\mu_t^{(\alpha)})_{t>0}$ på G, så

$$\widehat{\mu_t^{(\alpha)}} = e^{-t\psi^\alpha} \quad \text{for } t>0.$$

<u>Eksempel</u>. På $\mathbb{R}^n$ er funktionen $\psi(x) = \|x\|^2$ en reel, negativ definit funktion, og følgelig er

$$x \longmapsto \|x\|^\beta$$

negativ definit for alle $\beta \in]0,2]$. Men så er

$$x \longmapsto e^{-\|x\|^\beta}$$

positiv definit for $0<\beta\le 2$, og specielt er funktionen $e^{-|x|^\beta}$ positiv definit på $\mathbb{R}$ for $\beta \in]0,2]$, jvfr. p. 90.

Foldningssemigrupperne på $\mathbb{R}^n$, der er associeret med de negativ definite funktioner

$$x \longmapsto \|x\|^\alpha \qquad \text{for } \alpha \in]0,2]$$

kaldes de <u>stabile</u> <u>semi-grupper</u> <u>af</u> <u>orden</u> α.

Lad $n=1$. For $\alpha \in]0,2]$ betegner vi med $(\mu_t^\alpha)_{t>0}$

den stabile semigruppe af orden α på $\mathbb{R}$, altså den foldningssemigruppe $(\mu_t^\alpha)_{t>0}$, der tilfredsstiller

$$\widehat{\mu_t^\alpha}(x) = e^{-t|x|^\alpha} \qquad \text{for } t>0 \text{ og } x\in\mathbb{R}.$$

Idet disse Fouriertransformerede er integrable for $t>0$ og $\alpha\in]0,2]$ giver inversionssætningen, at

$$\mu_t^\alpha = g_t^\alpha(x)\,dx$$

hvor

$$g_t^\alpha(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ixy}\, e^{-t|y|^\alpha}\,dy$$

er en funktion tilhørende $C_0^+(\mathbb{R})$.

For $\alpha=1$ og 2 fås tæthederne for den Cauchy'ske og den Brown'ske semigruppe. For de øvrige $\alpha\in]0,2]$ kender man ikke eksplicitte formler for g_t^α; der findes dog rækkeudviklinger. Se f.eks. Feller: An introduction to probability theory and its applications. Vol II. p. 581.

<u>Øvelse 3.8.</u> Lad $\psi\in N(\Gamma)$. For alle $\alpha>0$ og $\beta\geq 0$ er funktionen

$$\gamma \longmapsto \frac{\psi(\gamma)}{\alpha+\beta\psi(\gamma)}$$

negativ definit.

<u>Øvelse 3.9.</u> Lad $\mu\in M^+(G)$ og lad $\alpha\in[\mu(G),\infty[$. For hvert $t>0$, defineres et mål μ_t på G ved

$$\mu_t = e^{-t\alpha}\exp(t\mu) = e^{-t\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mu^n$$

(her betegner μ^n målet $\mu * \mu * \cdots * \mu$ (n faktorer)) og $(\mu_t)_{t>0}$ er en foldningssemigruppe på G. Find den med $(\mu_t)_{t>0}$ associerede negativ definite funktion på Γ. (Sammenlign Øvelse 2.1).

Nedenfor er angivet en række foldningssemigrupper $(\mu_t)_{t>0}$ på $\mathbb{R}$ og de associerede negativ definite funktioner ψ på $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

Foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$		$y \mapsto \psi(y)$
Semigruppe af translationer med hastighed $a \in \mathbb{R}$	$\mu_t = \varepsilon_{ta}$	iay
Brown'ske semigruppe	$\mu_t = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx$	y^2
Poisson'ske semigruppe	$\mu_t = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t} \frac{t^k}{k!} \varepsilon_k$	$1 - e^{-iy}$
Cauchy'ske semigruppe	$\mu_t = \frac{t}{\pi} \frac{dx}{t^2 + x^2}$	$\lvert y \rvert$
Udartet semigruppe	$\mu_t = e^{-at} \cdot \varepsilon_0 \quad , a \geq 0$	a
Den stabile semigruppe af orden α, $\alpha \in]0,2]$		$\lvert y \rvert^{\alpha}$

§4. Levy-Khinchine's formel i det reelle tilfælde.

Lad G være en LCA-gruppe med dual gruppe Γ, og lad dx og dy være Haarmål på G og Γ.

Det er nærliggende at prøve at finde en integralfremstilling af samtlige negativ definite funktioner på Γ i analogi med Bochner's integralfremstilling af samtlige kontinuerte, positiv definite funktioner på Γ. En sådan integralfremstilling blev i tilfældet $\Gamma = \mathbb{R}$ fundet af P. Levy (1934) og uafhængigt heraf af A. J. Khinchine (1937). Denne integralfremstilling kaldes Levy-Khinchine's formel. En helt tilfredsstillende formel er endnu ikke fundet i det generelle tilfælde, selvom der er skrevet en lang række arbejder derom.

Hvis man indskrænker sig til at betragte reelle, negativ definite funktioner på Γ, har K. Harzallah givet en integralfremstilling, som vi vil behandle i denne paragraf. Harzallah's arbejde findes i Ann. Inst. Fourier 19^2 (1969) p. 527-532.

Vi skal senere, i tilfældet $G = \Gamma = \mathbb{R}^n$, give en mere eksplicit version af Levy-Khinchine's formel.

Sætning 4.1. Lad μ være et positivt mål på det lokalkompakte rum $G \setminus \{0\}$ som er "symmetrisk" på $G \setminus \{0\}$ d.v.s. $\mu(\varphi) = \mu(\check{\varphi})$ for alle $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ med $\operatorname{supp} \varphi \subseteq G \setminus \{0\}$. Antag at integralet

$$\int_{G \setminus \{0\}} (1 - \operatorname{Re} \gamma(x))\, d\mu(x)$$

er endeligt for alle $\gamma \in \Gamma$. Da er funktionen $\psi : \Gamma \to \mathbb{R}$

$$\psi(\gamma) = \int_{G \setminus \{0\}} (1 - \operatorname{Re} \gamma(x))\, d\mu(x) \qquad \text{for } \gamma \in \Gamma,$$

negativ definit på Γ.

Bevis. Det er klart at $\psi(0)=0$ og $\psi(-\gamma)=\overline{\psi(\gamma)}$. Idet $\gamma \mapsto \mathrm{Re}\,\gamma(x)$ er kontinuert og positiv definit for alle $x \in G$, er funktionen

$$\gamma \longmapsto (1-\mathrm{Re}\,\gamma(x))$$

negativ definit for alle $x \in G$ (Sætning 3.6). For $\gamma_1,\dots,\gamma_n \in \Gamma$ og $\rho_1,\dots,\rho_n \in \mathbb{C}$ så $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0$ finder vi

$$\sum_{i,j=1}^{n} \psi(\gamma_i-\gamma_j)\rho_i\overline{\rho_j} = \int_{G\setminus\{0\}} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} (1-\mathrm{Re}(\gamma_i-\gamma_j)(x))\,\rho_i\overline{\rho_j} \Big] d\mu(x) \leq 0,$$

og vi mangler nu blot at vise, at ψ er kontinuert. På sædvanlig måde ser man (jvfr. øvelse 4.1), at ψ er nedad halvkontinuert. Dermed er mængderne

$$A_n = \{\gamma \in \Gamma \mid \psi(\gamma) \leq n\}$$

afsluttede delmængder af Γ. Da ψ er endelig overalt på Γ har vi

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

og ifølge Baire's sætning findes et $n_0 \in \mathbb{N}$ og et $\gamma_0 \in A_{n_0}$ så γ_0 er indre punkt i A_{n_0}. Lad V være en omegn af γ_0 så $V \subseteq A_{n_0}$. Ifølge det allerede viste og lemma 3.2 er funktionen $\sqrt{\psi}$ subadditiv (jvfr. bemærkningen til 3.2), hvoraf for $\gamma \in V-\gamma_0$

$$\sqrt{\psi(\gamma)} = \sqrt{\psi(\gamma+\gamma_0+(-\gamma_0))} \leq \sqrt{\psi(\gamma+\gamma_0)} + \sqrt{\psi(\gamma_0)} \leq 2\sqrt{n_0}$$

hvor vi benytter at $\psi(\delta) = \psi(-\delta)$.

Dermed er ψ lokalt begrænset. Lad nemlig $K \subseteq \Gamma$ være en kompakt delmængde. Idet vi sætter $V_0 = V - \gamma_0$ findes $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$ så

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\gamma_i + V_0).$$

Lad $\gamma \in K$. Så findes $j \in \{1, \cdots, n\}$ så $\gamma \in \gamma_j + V_0$, og dermed

$$\sqrt{\psi(\gamma)} \leq \sqrt{\psi(\gamma - \gamma_j)} + \sqrt{\psi(\gamma_j)}$$

$$\leq 2\sqrt{n_0} + \max\{\sqrt{\psi(\gamma_1)}, \cdots, \sqrt{\psi(\gamma_n)}\} < +\infty$$

idet ψ er endelig.

Da funktionen ψ er nedad halvkontinuert og lokalt begrænset er den lokalt integrabel, og for alle $\varphi \in \mathcal{K}(\Gamma)^+$ med $\varphi = \check{\varphi}$ og $\int \varphi(\gamma)\, d\gamma = 1$ finder vi

$$\psi * \varphi(\gamma) = \int_\Gamma \varphi(\gamma - \eta) \Big[\int_{G \setminus \{0\}} (1 - \mathrm{Re}\, \eta(x))\, d\mu(x) \Big] d\eta$$

$$= \int_{G\setminus\{0\}} \Big(\int_\Gamma [\varphi(\gamma - \eta) - \varphi(\gamma - \eta) \mathrm{Re}\, \eta(x)]\, d\eta \Big) d\mu(x)$$

$$= \int_{G\setminus\{0\}} \Big(1 - \int_\Gamma \varphi(\gamma - \eta) \frac{\eta(x) + \overline{\eta(x)}}{2}\, d\eta \Big) d\mu(x)$$

$$= \int_{G\setminus\{0\}} \Big(1 - \tfrac{1}{2} \int_\Gamma (\eta(x)\, \tau_\gamma \varphi(\eta) + \overline{\eta(x)}\, \tau_\gamma \varphi(\eta))\, d\eta \Big) d\mu(x)$$

$$= \int_{G\setminus\{0\}} (1 - \mathrm{Re}\, \gamma(x) \cdot \hat{\varphi}(x))\, d\mu(x)$$

$$= \int_{G\setminus\{0\}} (1-\operatorname{Re}\gamma(x))\,d\mu(x) + \int_{G\setminus\{0\}} \operatorname{Re}\gamma(x)\,(1-\hat{\varphi}(x))\,d\mu(x)$$

$$= \psi(\gamma) + \int_{G\setminus\{0\}} \operatorname{Re}\gamma(x)\,(1-\hat{\varphi}(x))\,d\mu(x)\,,$$

specielt for $\gamma = 0$:

$$\psi * \varphi(0) \geq \int_{G\setminus\{0\}} (1-\hat{\varphi}(x))\,d\mu(x)$$

og $(1-\hat{\varphi}(x))\,d\mu(x)$ er altså et positivt, begrænset mål på $G\setminus\{0\}$, og kan dermed opfattes som et positivt begrænset mål τ på G defineret ved

$$\int_G f(x)\,d\tau(x) = \int_{G\setminus\{0\}} f(x)\,(1-\hat{\varphi}(x))\,d\mu(x) \qquad \text{for } f \in \mathcal{K}(G).$$

Denne formel gælder for alle kontinuerte, begrænsede funktioner på G. Dermed er funktionen

$$\gamma \longmapsto \int \operatorname{Re}\gamma(x)\,d\tau(x) = \int_{G\setminus\{0\}} \operatorname{Re}\gamma(x)\,(1-\hat{\varphi}(x))\,d\mu(x)$$

realdelen af den Fouriertransformerede af det positive, begrænsede mål τ, specielt kontinuert.

Da

$$\psi(\gamma) = \psi * \varphi(\gamma) - \int_{G\setminus\{0\}} \operatorname{Re}\gamma(x)\,(1-\hat{\varphi}(x))\,d\mu(x)$$

er ψ altså kontinuert, idet ψ er differens af to kontinuerte funktioner. Jvfr. II.2.4. II.

<u>Øvelse 4.1.</u> Lad X, Y være lokalkompakte rum og $G : X \times Y \longrightarrow [0,\infty]$ en nedad halvkontinuert funktion.

For ethvert positivt mål μ på Y er funktionen

$$X \ni x \longmapsto G\mu(x) = \int G(x,y)\, d\mu(y) \in [0,\infty]$$

nedad halvkontinuert. (Vink: For $G \in \mathcal{K}^+(X \times Y)$ er $x \mapsto G\mu(x)$ kontinuert)

Lemma 4.2. Lad $\mu \in M(G)$ og $\sigma \in M(\Gamma)$. Da er $\hat{\sigma} \cdot \mu \in M(G)$ og $\check{\sigma} * \hat{\mu}$ er en kontinuert begrænset funktion på Γ, og der gælder

$$(\hat{\sigma}\mu)^\wedge = \check{\sigma} * \hat{\mu} .$$

Bevis. For $\gamma \in \Gamma$ har vi

$$(\hat{\sigma}\mu)^\wedge(\gamma) = \int \overline{\gamma(x)}\, \hat{\sigma}(x)\, d\mu(x)$$

$$= \int \overline{\gamma(x)} \left[\int \overline{\delta(x)}\, d\sigma(\delta) \right] d\mu(x)$$

$$= \iint \overline{(\gamma+\delta)(x)}\, d\mu(x)\, d\sigma(\delta)$$

$$= \int \hat{\mu}(\gamma+\delta)\, d\sigma(\delta)$$

$$= \check{\sigma} * \hat{\mu}(\gamma) \quad . \quad \square$$

Hvis σ er symmetrisk gælder altså: $(\hat{\sigma}\mu)^\wedge = \sigma * \hat{\mu}$.

Lad $\mathcal{S}$ betegne mængden af positive, begrænsede, symmetriske mål på Γ, med totalmasse 1 og kompakt støtte.

Sætning 4.3. Følgende tre betingelser for en funktion $\psi : \Gamma \to \mathbb{R}$ er ensbetydende:

1) ψ er negativ definit.

2) $\psi * \sigma - \psi$ er kontinuert og positiv definit for alle $\sigma \in \mathcal{S}$.

3) der findes en konstant $a \geq 0$, en ikke-negativ kvadratisk form $\alpha : \Gamma \to \mathbb{R}$ og et positivt "symmetrisk" mål μ på $G \setminus \{0\}$ med egenskaben, at integralet

$$\int (1 - \operatorname{Re} \gamma(x))\, d\mu(x)$$

er endeligt for alle $\gamma \in \Gamma$, således at

$$\psi(\gamma) = a + \alpha(\gamma) + \int (1 - \operatorname{Re} \gamma(x))\, d\mu(x) \quad \text{for } \gamma \in \Gamma.$$

Bevis. 1) $\Rightarrow$ 2). Ifølge sætning 3.20 er det tilstrækkeligt at vise, at

$$g = (c - \varphi) * \sigma - (c - \varphi)$$

er positiv definit for alle $\sigma \in \mathcal{S}$, $\varphi \in P(\Gamma)$ og $c \geq \varphi(0)$. Lad μ være det positive begrænsede mål på G så $\hat{\mu} = \varphi$. Af Lemma 4.2 fås da

$$g = \varphi - \varphi * \sigma = \varphi * (\varepsilon_0 - \sigma)$$

$$= \hat{\mu} * (\varepsilon_0 - \sigma) = [(1 - \hat{\sigma})\mu]^{\wedge},$$

hvor målet $(1 - \hat{\sigma})\mu$ er positivt, da $\hat{\sigma}$ er reel og ≤ 1. Heraf følger, at g er positiv definit.

2) $\Rightarrow$ 3). Lad først $\psi(0) = 0$. For hvert $\sigma \in \mathcal{S}$ betegner vi med μ_σ det entydigt bestemte, positive, begrænsede mål på G så

$$\psi * \sigma - \psi = \widehat{\mu_\sigma}.$$

Bemærk at μ_σ er symmetrisk, og derfor gælder

$$\psi * \sigma(\gamma) - \psi(\gamma) = \int \mathrm{Re}\,\gamma(x)\, d\mu_\sigma(x)$$

Ifølge Lemma 3.2 har vi for alle $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}$, at

$$\psi * \sigma * \sigma' - \psi * \sigma' = [\hat{\sigma}' \mu_\sigma]^\wedge .$$

Endvidere gælder

$$(1-\hat{\sigma}')\mu_\sigma = (1-\hat{\sigma})\mu_{\sigma'} ,$$

thi begge mål har funktionen $\psi*\sigma + \psi*\sigma' - \psi*\sigma*\sigma' - \psi$ som Fouriertransformeret. Dette viser at kvotienten

$$\frac{1}{1-\hat{\sigma}} \mu_\sigma$$

er "uafhængig" af $\sigma \in \mathcal{S}$, eller mere præcist: For alle $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ med $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \{x \in G \mid \hat{\sigma}(x) \neq 1 \text{ og } \hat{\sigma}'(x) \neq 1\}$ gælder

$$\int \varphi(x) \frac{1}{1-\hat{\sigma}(x)}\, d\mu_\sigma(x) = \int \varphi(x) \frac{1}{1-\hat{\sigma}'(x)}\, d\mu_{\sigma'}(x) .$$

Dette skal benyttes til at definere et mål μ på $G \setminus \{0\}$, ved at "stykke" målene $(1-\hat{\sigma})^{-1}\mu_\sigma$ sammen (jvfr. beviset for sætning II.5.1). Hertil først en bemærkning.

Til hver kompakt delmængde K af $G\setminus\{0\}$ findes et mål $\sigma \in \mathcal{S}$ så $\hat{\sigma} \neq 1$ på K.

Ifølge II.7.2 findes nemlig til hvert $x \in K$ en karakter $\gamma_x \in \Gamma$ så $\gamma_x(x) \neq \gamma_x(0)\ (=1)$. Men så er $\gamma_x(y) \neq 1$ for y tilhørende en omegn V_x af x. Dermed findes $x_1, \dots, x_n \in K$ så

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

og målet

$$\sigma = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_{\gamma_i} + \varepsilon_{-\gamma_i})$$

tilhører $\mathcal{S}$ og opfylder

$$\hat{\sigma}(x) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} 2 \operatorname{Re} \gamma_i(x) < 1 \qquad \text{for alle } x \in K.$$

Vi kan nu definere et positivt mål μ på $G \setminus \{0\}$, på følgende måde. For $\varphi \in \mathcal{K}(G \setminus \{0\})$ vælges $\sigma \in \mathcal{S}$ så $\hat{\sigma} \neq 1$ på supp φ, og dernæst sætter vi

$$\mu(\varphi) = \int \frac{\varphi(x)}{1 - \hat{\sigma}(x)} \, d\mu_\sigma(x)$$

hvor $\frac{\varphi(x)}{1-\hat{\sigma}(x)}$ er en kort skrivemåde for funktionen

$$= \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{1 - \hat{\sigma}(x)} & \text{for } x \in \{x \in G \mid \hat{\sigma}(x) \neq 1\} \\[2ex] 0 & \text{for } x \in \{x \in G \mid \hat{\sigma}(x) = 1\} \end{cases}$$

Ifølge det ovenfor sagte er tallet $\mu(\varphi)$ uafhængigt af det benyttede σ, og det er klart at afbildningen $\varphi \mapsto \mu(\varphi)$ er en positiv linearform på $\mathcal{K}(G \setminus \{0\})$, altså et positivt mål på $G \setminus \{0\}$, som let ses at være "symmetrisk".

For $\sigma \in \mathcal{S}$ gælder klart, at

$$1_{G \setminus \{0\}} \mu_\sigma = (1 - \hat{\sigma}) \mu \qquad (\text{som mål på } G \setminus \{0\}), \quad (1)$$

specielt er $(1-\hat{\sigma})\mu$ et begrænset mål på $G \setminus \{0\}$, og dermed et begrænset mål på $\mathring{G}$ (Overvej dette!)

For $\sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon_\gamma + \varepsilon_{-\gamma})$ med $\gamma \in \Gamma$, finder vi heraf at

$$(1 - \mathrm{Re}\,\gamma(x))\, d\mu(x)$$

er et begrænset mål på $\mathring{G}$.

Ved anvendelse af (1) fås

$$\psi * \sigma(\gamma) - \psi(\gamma) = \int_G \mathrm{Re}\,\gamma(x)\, d\mu_\sigma(x) \tag{2}$$

$$= \mu_\sigma(\{0\}) + \int_{G\setminus\{0\}} \mathrm{Re}\,\gamma(x)\,(1 - \hat{\sigma}(x))\, d\mu(x)$$

hvoraf for $\gamma = 0$ (idet $\psi(0) = 0$)

$$\int \psi\, d\sigma = \int_G d\mu_\sigma = \mu_\sigma(\{0\}) + \int_{G\setminus\{0\}} (1 - \hat{\sigma}(x))\, d\mu(x) \tag{3}$$

Lad $\xi \in \Gamma$. Ved at benytte $\sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi + \varepsilon_{-\xi})$ i (3) fås

$$\psi(\xi) = \alpha(\xi) + \int_{G\setminus\{0\}} (1 - \mathrm{Re}\,\xi(x))\, d\mu(x) \tag{4}$$

hvor vi har sat

$$\alpha(\xi) = \mu_\sigma(\{0\}) = \mu_{\frac{1}{2}(\varepsilon_\xi + \varepsilon_{-\xi})}(\{0\});$$

af sætning 4.1 følger at $\xi \mapsto \alpha(\xi)$ er kontinuert, som differens mellem to kontinuerte funktioner. Desuden er $\alpha(\xi) \geq 0$.

Vi skal nu blot vise, at α er en kvadratisk form. Trækkes formel (2) fra formel (3) fås for $\sigma \in \mathcal{S}$

$$\int \psi\, d\sigma + \psi(\gamma) - \psi * \sigma(\gamma) = \int_{G\setminus\{0\}} (1 - \mathrm{Re}\,\gamma(x))(1 - \hat{\sigma}(x))\, d\mu(x). \tag{5}$$

Ved at vælge $\delta = \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi + \varepsilon_{-\xi})$ for $\xi \in \Gamma$ i (5) fås

$$\psi(\xi) + \psi(\gamma) - \tfrac{1}{2}\psi(\gamma - \xi) - \tfrac{1}{2}\psi(\gamma + \xi)$$

$$= \int_{G\setminus\{0\}} (1 - \operatorname{Re}\gamma(x))(1 - \operatorname{Re}\xi(x))\, d\mu(x)$$

Indsættes (4) (og de analoge formler) heri finder vi

$$\alpha(\xi) + \alpha(\gamma) - \tfrac{1}{2}\alpha(\gamma - \xi) - \tfrac{1}{2}\alpha(\gamma + \xi) = 0$$

fordi

$$(1 - \operatorname{Re}\xi(x)) + (1 - \operatorname{Re}\gamma(x)) - \tfrac{1}{2}(1 - \operatorname{Re}(\gamma - \xi)(x)) - \tfrac{1}{2}(1 - \operatorname{Re}(\gamma + \xi)(x))$$
$$= (1 - \operatorname{Re}\gamma(x))(1 - \operatorname{Re}\xi(x))$$

hvilket kommer ud på at

$$2 \operatorname{Re}\gamma(x) \operatorname{Re}\xi(x) = \operatorname{Re}(\gamma - \xi)(x) + \operatorname{Re}(\gamma + \xi)(x)$$

som er ækvivalent med formlen

$$2 \cos p \cdot \cos q = \cos(p - q) + \cos(p + q).$$

Lad nu $\psi(0)$ være vilkårlig. Da er $\psi'(\gamma) = \psi(\gamma) - \psi(0)$ en funktion med egenskaben 2). Altså findes en kvadratisk form α og et positivt, "symmetrisk" mål μ på $G\setminus\{0\}$ (så α er ikke-negativ og så $\int(1 - \operatorname{Re}\gamma(x))\,d\mu(x) < +\infty$ for alle $\gamma \in \Gamma$) således at

$$\psi'(\gamma) = \alpha(\gamma) + \int_{G\setminus\{0\}} (1 - \operatorname{Re}\gamma(x))\, d\mu(x) \quad \text{for } \gamma \in \Gamma,$$

hvoraf

$$\psi(\gamma) = \psi(0) + \alpha(\gamma) + \int_{G\setminus\{0\}} (1 - \operatorname{Re}\gamma(x))\, d\mu(x) \quad \text{for } \gamma \in \Gamma.$$

3) ⇒ 1): Dette følger af sætningerne 4.1, 3.13 og 3.1. □

Sætning 4.4. Lad $\psi : \Gamma \to \mathbb{R}$ være en reel, negativ definit funktion på Γ. Da findes netop ét sæt (a, α, μ), hvor $a \geq 0$, α er en ikke-negativ kvadratisk form på Γ og μ er et positivt, "symmetrisk" mål på $G \setminus \{0\}$ så

$$\int_{G\setminus\{0\}} (1 - \operatorname{Re}\gamma(x))\, d\mu(x) < +\infty \qquad \text{for alle } \gamma \in \Gamma,$$

og således at

$$\psi(\gamma) = a + \alpha(\gamma) + \int_{G\setminus\{0\}} (1 - \operatorname{Re}\gamma(x))\, d\mu(x) \quad \text{for } \gamma \in \Gamma. \qquad (*)$$

Den kvadratiske form α er bestemt ved

$$\alpha(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n\gamma)}{n^2} \qquad \text{for } \gamma \in \Gamma.$$

Bevis. Eksistensen følger af sætning 4.3. I opspaltningen $(*)$ er $a = \psi(0)$, og den kvadratiske form α er bestemt ved

$$\alpha(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n\gamma)}{n^2} \qquad (6)$$

For at indse (6) bemærkes, at for $\gamma \in \Gamma$ og $n \in \mathbb{N}$ gælder ifølge (4) at

$$\alpha(\gamma) = \alpha(n\cdot\gamma)\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{\psi(n\gamma)}{n^2} - \int \frac{(1 - \operatorname{Re}(n\gamma)(x))}{n^2}\, d\mu(x) \qquad (7)$$

Her konvergerer integranden punktvis mod 0 for $n \to \infty$, og der findes en integrabel, absolut majorant. For hvert fast $x \in G$ og $\gamma \in \Gamma$ gælder nemlig for et passende

$\theta \in [-\pi, \pi]$ at $\gamma(x) = e^{i\theta}$ og dermed $(n\cdot\gamma)(x) = e^{in\theta}$, altså (hvis $\theta \neq 0$)

$$\frac{1 - \operatorname{Re}(n\gamma)(x)}{n^2} = \frac{1-\cos n\theta}{n^2}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{n\theta}{2}}{n^2} \cdot \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{(\frac{\theta}{2})^2}{(\frac{\theta}{2})^2}$$

$$= \left(\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\frac{n\theta}{2}}\right)^2 \left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 (1-\cos\theta)$$

og idet der gælder $\left|\frac{\sin y}{y}\right| \leq 1$ for $y \neq 0$, samt $\left|\frac{\sin y}{y}\right| \geq \frac{1}{c}$ for $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ hvor $c > 0$, fås heraf at

$$\frac{1-\operatorname{Re}(n\gamma)(x)}{n^2} \leq c^2(1 - \operatorname{Re}\gamma(x))$$

Sætningen om majoriseret konvergens af integraler, giver, at integralet i (7) konvergerer mod 0 for $n \to \infty$, hvilket viser (6).

Vi mangler nu blot at vise at funktionen

$$\gamma \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_{G\setminus\{0\}} (1 - \operatorname{Re}\gamma(x))\, d\mu(x)$$

fastlægger målet μ på $G\setminus\{0\}$.

Lad $\sigma \in \mathcal{S}$. For $\gamma \in \Gamma$ gælder

$$\varphi * \sigma(\gamma) - \varphi(\gamma) = \int \left[\int_{G\setminus\{0\}} (1 - \operatorname{Re}(\gamma - \delta)(x)\, d\mu(x)\right] d\sigma(\delta)$$

$$- \int (1 - \operatorname{Re}\gamma(x))\, d\mu(x)$$

$$= \int \left(\int (1 - \operatorname{Re}(\gamma - \delta)(x)) \, d\sigma(\delta) - 1 + \operatorname{Re}\gamma(x) \right) d\mu(x)$$

$$= \int \operatorname{Re}\gamma(x) \, (1 - \hat{\sigma}(x)) \, d\mu(x) = \int \overline{\gamma(x)} \, (1 - \hat{\sigma}(x)) \, d\mu(x),$$

hvilket viser at målet $(1-\hat{\sigma})\mu$ har den positiv definite funktion $\varphi * \sigma - \varphi$ som Fouriertransformeret. Alle målene $(1-\hat{\sigma})\mu$, $\sigma \in \mathcal{S}$, er altså entydigt bestemt ved φ, hvoraf ses at μ er entydigt bestemt ved φ, (jvfr. bemærkningen p. 198 nederst). $\square$

<u>Øvelse 4.2.</u> Lad φ være en kontinuert reel positiv definit funktion på Γ og lad $k \geq \varphi(0)$. Find det entydigt bestemte tripel (a, α, μ) i Lévy-Khinchines formel for den reelle negativ definite funktion $\psi = k - \varphi$.

<u>Øvelse 4.3.</u> Lad ψ være en reel negativ definit funktion på Γ, $(\mu_t)_{t \geq 0}$ den associerede foldningssemigruppe på G og μ det repræsenterende mål på $G \setminus \{0\}$ i Lévy-Khinchines formel. For alle $\sigma \in \mathcal{S}$ gælder

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(1-\hat{\sigma})\mu_t = (1-\hat{\sigma})\mu \quad \text{i Bernoulli-topologien, og}$$

$$\lim 1_{G \setminus \{0\}} \frac{1}{t}\mu_t = \mu \quad \text{vagt som mål på } G \setminus \{0\}.$$

<u>Øvelse 4.4.</u> Find det entydigt bestemte tripel (a, α, μ) for den negativ definite funktion $x \mapsto \|x\|^2$ på $\mathbb{R}^n$.

Øvelse 4.5. I Lévy-Khinchine's formel for den negativ definite funktion $x \mapsto \|x\|^\alpha$, $0<\alpha<2$ på $\mathbb{R}^n$ er konstantleddet og den kvadratiske form 0, og det associerede mål μ har formen

$$d\mu(x) = c\,\frac{1}{\|x\|^{\alpha+n}}\,dx$$

for en passende konstant $c>0$. (Det kan vises, at c er givet ved

$$c = \frac{\alpha\, 2^{\alpha-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}\;\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \quad .)$$

§5. Kontraktionssemigrupper.

Vi vil i denne paragraf vise hvordan en foldningssemigruppe på en LCA-gruppe G giver anledning til en kontraktionssemigruppe på forskellige Banachrum af funktioner på G.

Vi starter med at resumere nogle resultater om kontraktionssemigrupper, og henviser til den mere detaljerede fremstilling i C. Berg: Udvalgte emner fra potentialteori I, forelæsningsnoter foråret 1971, i det følgende forkortet (UEP).

Lad E være et Banachrum over $\mathbb{C}$ og lad μ være et positivt Radonmål på et lokalkompakt rum X.

<u>Sætning 5.1</u> (UEP p. 43–47). En kontinuert funktion $f: X \to E$ for hvilken

$$\int_X \|f(x)\| \, d\mu(x) < \infty$$

er integrabel i den forstand, at der findes præcis et $a \in E$ med egenskaben

$$\langle a, \varphi \rangle = \int_X \langle f(x), \varphi \rangle \, d\mu(x) \qquad \forall \varphi \in E'.$$

Vi skriver

$$a = \int f \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu(x) ,$$

og der gælder

$$\left\| \int f(x) \, d\mu(x) \right\| \leq \int \|f(x)\| \, d\mu(x) .$$

Hvis F er et Banachrum og $T: E \to F$ en kontinuert lineær afbildning gælder

$$T\left(\int f(x) \, d\mu(x) \right) = \int T(f(x)) \, d\mu(x) .$$

<u>Definition</u>. Ved en <u>kontraktionssemigruppe</u> på E forstås en familie $(P_t)_{t \geq 0}$ af begrænsede operatorer på E opfyldende

(1) $\quad P_s P_t = P_{s+t} \quad , \; s, t \geq 0 \; , \; P_0 = I$ (identiteten)

(2) $\quad \|P_t\| \leq 1 \quad , \; t \geq 0$

Lad E_0 betegne mængden

$$\{ f \in E \mid P_t f \to f \text{ for } t \to 0 \} .$$

<u>Lemma 5.2.</u> E_0 er et afsluttet underrum af E og for $f \in E_0$ er afbildningen

$$[0,\infty[\ \ni t \mapsto P_t f \in E$$

kontinuert.

Bevis. Det er klart at E_0 er et underrum. Lad $f \in \overline{E_0}$, $\varepsilon > 0$ være givet. Så findes $g \in E_0$ så $\|f-g\| \le \varepsilon$ og dermed et $\delta > 0$ så

$$\|P_t g - g\| \le \varepsilon \quad \text{for } t \le \delta.$$

For $t \le \delta$ gælder så

$$\|P_t f - f\| \le \|P_t f - P_t g\| + \|P_t g - g\| + \|g - f\| \le 3\varepsilon,$$

fordi $\|P_t\| \le 1$ for alle $t \ge 0$, altså $f \in E_0$.

For $f \in E_0$ viser vurderingerne

$$\|P_{t+h} f - P_t f\| = \|P_t(P_h f - f)\| \le \|P_h f - f\| \quad , t \ge 0,\ h > 0,$$

$$\|P_t f - P_{t-h} f\| = \|P_{t-h}(P_h f - f)\| \le \|P_h f - f\|, \ t > 0,\ 0 < h < t,$$

at afbildningen $t \mapsto P_t f$ er (endda ligelig) kontinuert. $\square$

<u>Definition.</u> En kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\ge 0}$ kaldes <u>stærkt kontinuert</u> såfremt $E = E_0$.

Lemma 5.2 viser, at betingelsen kommer ud på at afbildningen $t \mapsto P_t f$ er kontinuert for hvert fast $f \in E$, altså at afbildningen $t \mapsto P_t$ af $[0,\infty[$ ind i $\mathcal{L}(E,E)$ er stærkt kontinuert.

For at vise at en kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ er stærkt kontinuert, er det nok at eftervise at

$$P_t f \to f \quad \text{for } t \to 0$$

for f tilhørende en <u>total</u> delmængde af E.

I det følgende betegner $(P_t)_{t\geq 0}$ en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E, og for en sådan defineres følgende operatorer:

<u>Den infinitesimale frembringer $(A, \mathcal{D}(A))$</u>

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in E \mid \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(P_t f - f) \text{ eksisterer}\}$$

$$Af = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(P_t f - f) \qquad \text{for } f \in \mathcal{D}(A).$$

<u>Potentialoperatoren $(N, \mathcal{D}(N))$</u>

$$\mathcal{D}(N) = \{f \in E \mid \lim_{t\to\infty} \int_0^t P_s f\, ds \text{ eksisterer}\}$$

$$Nf = \lim_{t\to\infty} \int_0^t P_s f\, ds \qquad \text{for } f \in \mathcal{D}(N)$$

Det er klart at $\mathcal{D}(A)$ og $\mathcal{D}(N)$ er underrum af E, og at afbildningerne $A : \mathcal{D}(A) \to E$, $N : \mathcal{D}(N) \to E$ er lineære

<u>Sætning 5.3.</u> Den infinitesimale frembringer $(A, \mathcal{D}(A))$ er en tæt defineret og afsluttet operator.

Bevis. UEP p. 50-51.

Derimod behøver $(N, \mathcal{D}(N))$ ikke være tæt defineret.

Vi vil give en nødvendig og tilstrækkelig betingelse herfor.

Som sædvanlig betegnes billedrummet for en operator $(S, D(S))$ med $R(S)$, altså $R(S) = S(D(S))$.

Sætning 5.4. Om potentialoperatoren gælder

a) $P_t(D(N)) \subseteq D(N)$ og $NP_tf = P_tNf$ for $f \in D(N)$, $t \geq 0$.

b) $P_t(Nf) - Nf = -\int_0^t P_s f\,ds$ for $f \in D(N)$, $t \geq 0$.

c) $\overline{R(N)} \supseteq D(N)$.

d) $\lim_{t\to\infty} P_t f = 0$ for alle $f \in \overline{R(N)}$.

e) N er injektiv og afbilder $D(N)$ ind i $D(A)$ og der gælder

$$A(Nf) = -f \quad , f \in D(N).$$

Bevis. a) For $f \in D(N)$ vil $\int_0^a P_s f\,ds \to Nf$ for $a \to \infty$. Heraf fås at

$$\int_0^a P_s(P_tf)\,ds = P_t\left(\int_0^a P_sf\,ds\right) \to P_t(Nf) \quad \text{for } a\to\infty,\ t\geq 0,$$

hvilket viser, at $P_tf \in D(N)$ og $N(P_tf) = P_t(Nf)$.

b) Fra a) har vi

$$P_t(Nf) = \lim_{a\to\infty} \int_0^a P_{s+t}f\,ds = \lim_{a\to\infty}\int_t^{a+t} P_sf\,ds = \lim_{a\to\infty}\left(\int_0^{a+t} P_sf\,ds - \int_0^t P_sf\,ds\right) = Nf - \int_0^t P_sf\,ds.$$

c) For $f \in D(N)$, $t > 0$, fås af a) og b) at

$$N\left(\tfrac{1}{t}(f - P_tf)\right) = \tfrac{1}{t}\int_0^t P_sf\,ds,$$

og heraf følger at

$$\lim_{t\to 0} N\left(\tfrac{1}{t}(f-P_t f)\right) = f ,$$

men dette viser at $f \in \mathcal{D}(N)$ er grænseværdi for elementer i $R(N)$, altså $\mathcal{D}(N) \subseteq \overline{R(N)}$.

d) Af b) følger umiddelbart at $\lim_{t\to\infty} P_t(Nf) = 0$, altså

$$R(N) \subseteq \{ f \in E \mid \lim_{t\to\infty} P_t f = 0 \} .$$

Man ser let at højresiden i denne inklusion er et afsluttet underrum (jfr. beviset for at E_0 er afsluttet p. 207), og dermed følger d).

e) Af b) følger at

$$\tfrac{1}{t}(P_t(Nf) - Nf) = -\tfrac{1}{t}\int_0^t P_s f\, ds \to -f \quad \text{for } t\to 0,$$

altså $Nf \in \mathcal{D}(A)$ og $A(Nf) = -f$. Denne formel viser at N er injektiv. $\square$

<u>Lemma 5.5</u> For $f \in \mathcal{D}(N)$ og $a>0$ gælder
$$\int_0^a P_s f\, ds \in \mathcal{D}(N) .$$

Bevis. Vi sætter $f^x = \int_0^x P_s f\, ds$ og skal vise, at $\int_0^t P_u f^a\, du$ har en grænseværdi for $t \to \infty$. Vi finder

$$\int_0^t P_u f^a\, du = \int_0^t \left(\int_0^a P_{u+s} f\, ds\right) du = \int_0^a \left(\int_0^t P_{u+s} f\, du\right) ds =$$

$$\int_0^a \left(\int_s^{s+t} P_u f\, du\right) ds = \int_0^a (f^{s+t} - f^s)\, ds = \int_0^a f^{s+t}\, ds - \int_0^a f^s\, ds .$$

Vi vil nu vise at

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^a f^{s+t}\,ds \quad = a\,Nf \; .$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes $K > 0$ så der for $t \geq K$ gælder

$$\|Nf - f^t\| \leq \frac{\varepsilon}{a} \; .$$

For $t \geq K$ har vi så

$$\| \int_0^a f^{s+t}\,ds \;-\; a\,Nf \| = \| \int_t^{a+t} (f^u - Nf)\,du \| \leq \int_t^{a+t} \frac{\varepsilon}{a}\,du = \varepsilon . \; \|$$

Sætning 5.6. Følgende betingelser er ensbetydende:

(i) $\mathcal{D}(N)$ er tæt.

(ii) $R(N)$ er tæt.

(iii) $\lim_{t\to\infty} P_t f = 0$ for alle $f \in E$.

Hvis (i) – (iii) er opfyldt er N tæt defineret og afsluttet. Frembringeren $(A, \mathcal{D}(A))$ er injektiv og $N = -A^{-1}$, $A = -N^{-1}$.

Bevis. Implikationerne (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) følger af sætning 5.4 c) og d). Antag nu at (iii) er opfyldt.

For $f \in \mathcal{D}(A)$ gælder

$$\int_0^t P_s(Af)\,ds \;=\; P_t f - f$$

(VEP corollar 3.8), og af (iii) følger så

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t P_s(Af)\,ds \quad = -f \tag{*}$$

altså $Af \in \mathcal{D}(N)$ og $N(Af) = -f$. Dette viser at A afbilder $\mathcal{D}(A)$ injektivt ind i $\mathcal{D}(N)$ og kombineres dette med 5.4 e) følger, at $A = -N^{-1}$, $N = -A^{-1}$. Da A er afsluttet bliver N

afsluttet. For at se at $\mathcal{D}(N)$ er tæt bemærkes at $(*)$ viser, at $-f$ er grænseværdi af vektorer, der ifølge lemma 5.5 ligger i $\mathcal{D}(N)$. Når (iii) er opfyldt gælder altså $\mathcal{D}(A) \subseteq \overline{\mathcal{D}(N)}$, hvilket viser at $\mathcal{D}(N)$ er tæt, jfr. sætning 5.3. $\square$

Lad $(P_t)_{t\geq 0}$ være en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe med frembringer $(A, \mathcal{D}(A))$ og potentialoperator $(N, \mathcal{D}(N))$. For hvert $\lambda > 0$ defineres en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t^\lambda)_{t\geq 0}$ ved

$$P_t^\lambda f = e^{-\lambda t} P_t f \quad , \; f \in E, \; t \geq 0 .$$

Dens frembringer betegnes A_λ og dens potentialoperator V_λ.

<u>Sætning 5.7</u> For alle $\lambda > 0$ gælder:

(a) $\mathcal{D}(A_\lambda) = \mathcal{D}(A)$, $A_\lambda = A - \lambda I$

(b) $\mathcal{D}(V_\lambda) = E$ og V_λ er en begrænset operator på E af norm $\|V_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$ givet ved

$$V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f \, dt .$$

(c) $P_t^\lambda f \to 0$ for $t \to \infty$ for alle $f \in E$.

Bevis. UEP lemma 3.12.

Egenskaben (c) viser at $V_\lambda = -A_\lambda^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}$. Resolventmængden $\rho(A)$ for operatoren A indeholder altså intervallet $]0,\infty[$ og V_λ er (restriktionen til $]0,\infty[$ af) A's resolvent med modsat fortegn. Derfor gælder følgende resolventligning

$$V_\lambda - V_\mu = (\mu-\lambda)V_\lambda V_\mu \quad , V_\lambda V_\mu = V_\mu V_\lambda \quad ; \lambda,\mu>0.$$

Familien $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ kaldes resolventen for semigruppen.

Lad X være et lokalkompakt rum, $E = C_0(X)$ Banachrummet af kontinuerte komplekse funktioner $f: X \to \mathbb{C}$ der går mod 0 i ∞, udstyret med den ligelige norm

$$\|f\| = \sup_X |f(x)| .$$

Definition. En stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ på $C_0(X)$ kaldes en Fellersemigruppe, såfremt alle operatorerne P_t er positive:

$$\forall f\in C_0(X)\ \forall t>0\ (f\geq 0 \Rightarrow P_t f\geq 0).$$

Lad G være en LCA-gruppe og lad $(\mu_t)_{t\geq 0}$ være en foldningssemigruppe på G. Ved fastsættelsen

$$P_t f = \mu_t * f \quad , f\in C_0(G),\ t\geq 0$$

defineres en Fellersemigruppe.

Kun den stærke kontinuitet kræver en kommentar. Af (4) p. 156 følger at

$$\lim_{t\to 0} P_t f = f \quad i \ C_0(G),$$

for alle $f \in \mathcal{K}(G)$, men da $\mathcal{K}(G)$ er tæt i $C_0(G)$ er kontraktionssemigruppen $(P_t)_{t\geq 0}$ stærkt kontinuert.

Operatorerne P_t kommuterer med translationerne, i.e.

$$\tau_x(P_t f) = P_t(\tau_x f) \quad \text{for alle } x \in G, f \in C_0(G),$$

thi

$$\tau_x(P_t f) = \varepsilon_x * (\mu_t * f) = \mu_t * (\varepsilon_x * f) = P_t(\tau_x f).$$

Vi siger at $(P_t)_{t\geq 0}$ er en <u>translationsinvariant</u> Feller semigruppe, og at $(P_t)_{t\geq 0}$ er induceret af foldningssemigruppen $(\mu_t)_{t\geq 0}$.

Den følgende sætning viser, at alle translationsinvariante Feller semigrupper fås på denne måde.

<u>Sætning 5.8.</u> Lad $(P_t)_{t\geq 0}$ være en translationsinvariant Fellersemigruppe på $C_0(G)$. Så findes præcis en foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ så

$$P_t f = \mu_t * f \quad \text{for } f \in C_0(G),\ t \geq 0. \qquad (**)$$

Bevis. Hvis $(**)$ skal være opfyldt har man

$$P_t(\check{f})(0) = \int f \, d\mu_t \quad \text{for } f \in C_0(G),\ t \geq 0,$$

hvilket fastlægger foldningssemigruppen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ entydigt.

Hvis $(P_t)_{t\geq 0}$ er en translationsinvariant Feller semigruppe, vil der for hvert $t \geq 0$ defineres en positiv linearform på $C_0(G)$ ved

$$f \mapsto P_t(\check{f})(0),$$

og da

$$|P_t(\check{f})(0)| \leq \|P_t(\check{f})\| \leq \|\check{f}\| = \|f\|$$

findes et positivt begrænset mål μ_t med $\mu_t(G) \le 1$ så

$$\int f \, d\mu_t = P_t(\check{f})(0) .$$

For $f \in C_0(G)$, $x \in G$ har vi da

$$P_t f(x) = \tau_{-x}(P_t f)(0) = P_t(\tau_{-x} f)(0) = \int (\tau_{-x} f)^{\vee} d\mu_t = \mu_t * f(x) .$$

Det er nu let at se at familien $(\mu_t)_{t \ge 0}$ er en vagt kontinuert foldningssemigruppe. $\blacksquare$

Ethvert positivt begrænset mål μ på G inducerer en begrænset operator F_μ på $L^p(G)$, $1 \le p \le \infty$, ved fastsættelsen

$$F_\mu f = \mu * f \quad , \quad f \in L^p(G)$$

jvfr. øvelse II 2.2. Operatoren F_μ har norm $\le \mu(G)$ og kaldes en <u>foldningsoperator</u>. I tilfældet $p=2$ er operatoren unitært ækvivalent med multiplikationsoperatoren $T_{\hat{\mu}}$ på $L^2(\Gamma)$ defineret ved

$$T_{\hat{\mu}} g = \hat{\mu} g \quad , \quad g \in L^2(\Gamma) .$$

Fouriertransformationen $\mathcal{F}_G$ er nemlig ifølge Plancherels sætning en isometri af $L^2(G)$ på $L^2(\Gamma)$ og der gælder

$$\mathcal{F}_G(F_\mu f) = T_{\hat{\mu}}(\mathcal{F}_G f) \quad , \quad f \in L^2(G),$$

hvilket viser at følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccc} L^2(G) & \xrightarrow{F_\mu} & L^2(G) \\ \downarrow \mathcal{F}_G & & \downarrow \mathcal{F}_G \\ L^2(\Gamma) & \xrightarrow{T_{\hat{\mu}}} & L^2(\Gamma) \end{array}$$

<u>Øvelse 5.1.</u> Lad μ være et positivt begrænset mål på G, F_μ den inducerede foldningsoperator på $L^2(G)$. Find F_μ^* og bestem de μ for hvilke F_μ er unitær. Vis at $\sigma(F_\mu) = \overline{\hat{\mu}(\Gamma)}$.

En foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ på G inducerer en kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ på $L^p(G)$, $1\leq p\leq\infty$, ved fastsættelsen

$$P_t f = \mu_t * f \quad , \ f\in L^p(G).$$

Semigruppen $(P_t)_{t\geq 0}$ er <u>stærkt kontinuert</u> for $1\leq p<\infty$.

Ved beviset herfor kan vi uden indskrænkning antage at alle målene μ_t har masse 1. (Overvej dette). For $f\in L^p(G)$ har vi så ifølge Hölders ulighed

$$\|P_t f - f\|_p^p = \int \Big| \int (\tau_y f(x) - f(x))\, d\mu_t(y) \Big|^p dx$$

$$\leq \int \Big(\int |\tau_y f(x) - f(x)|^p d\mu_t(y) \Big) dx = \int \|\tau_y f - f\|_p^p \, d\mu_t(y).$$

Ifølge sætning II.1.4 er $y \mapsto \|\tau_y f - f\|_p^p$ en kontinuert begrænset funktion, og af sætning 2.3 fås da

$$\lim_{t\to 0} \|P_t f - f\|_p^p = 0.$$

I det følgende vil vi indskrænke os til tilfældet $p=2$, hvor teorien simplificeres af at kontraktionssemigruppen "$P_t f = \mu_t * f$" på $L^2(G)$ er unitært ækvivalent med semigruppen "$T_t g = e^{-t\psi} g$" på $L^2(\Gamma)$. Her betegner ψ den til $(\mu_t)_{t\geq 0}$ associerede negativ definite funktion.

Vi vil i de næste sætninger undersøge frembringeren $(A, \mathcal{D}(A))$ og potentialoperatoren $(N, \mathcal{D}(N))$ for semigruppen $(P_t)_{t\geq 0}$ på $L^2(G)$.

Sætning 5.9. Frembringeren $(A, \mathcal{D}(A))$ er givet ved

$$\mathcal{D}(A) = \{ f \in L^2(G) \mid \psi \hat{f} \in L^2(\Gamma) \}$$

$$\widehat{Af} = -\psi \hat{f} \qquad \text{for } f \in \mathcal{D}(A).$$

Bevis. For $f \in \mathcal{D}(A)$ har vi

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(P_t f - f) = Af \qquad \text{i } L^2(G).$$

Af Plancherels sætning fås så

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{-t\psi} - 1)\hat{f} = \widehat{Af}.$$

Fra integralteori vides, at hvis $h_n \to h$ i L^2, så findes en delfølge h_{n_p} så $h_{n_p} \to h$ næsten overalt. Der findes altså en følge $t_n \to 0$ så

$$\frac{1}{t_n}(e^{-t_n\psi} - 1)\hat{f} \to \widehat{Af} \qquad d\gamma\text{-p.p.},$$

men for alle $\gamma \in \Gamma$ vil

$$\frac{1}{t_n}(e^{-t_n\psi(\gamma)} - 1) \to -\psi(\gamma),$$

altså er

$$-\psi \hat{f} = \widehat{Af} \qquad d\gamma\text{-p.p.},$$

hvoraf $\psi \hat{f} \in L^2(\Gamma)$ og $\widehat{Af} = -\psi \hat{f}$.

Antag dernæst at $f \in L^2(G)$ og $\psi \hat{f} \in L^2(\Gamma)$. Idet

$$\frac{1}{t}(e^{-t\psi} - 1)\hat{f} \to -\psi \hat{f} \qquad \text{punktvis},$$

sikrer sætningen om majoriseret konvergens at

$$\lim_{t\to 0} \mathcal{F}\left(\frac{P_t f - f}{t}\right) = -\psi \hat{f} \qquad i\ L^2(\Gamma)$$

såfremt vi har en vurdering af formen

$$\left|\tfrac{1}{t}\left(e^{-t\psi(\gamma)} - 1\right)\right| \le |\psi(\gamma)| \qquad , \gamma \in \Gamma,\ t > 0,$$

og Plancherels sætning giver da at

$$\lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(P_t f - f) \quad \text{eksisterer i } L^2(G),$$

altså $f \in \mathcal{D}(A)$.

Vurderingen ovenfor er en konsekvens af følgende ulighed:

$$\left|\tfrac{1}{t}\left(e^{-tz} - 1\right)\right| \le |z| \qquad , \qquad t > 0,\ z = a + ib \in \mathbb{C},\ \underline{a \ge 0}.$$

Der gælder nemlig

$$|e^{-tz} - 1|^2 = (e^{-ta}\cos(tb) - 1)^2 + (e^{-ta}\sin(tb))^2 =$$

$$e^{-2ta} + 1 - 2e^{-ta}\cos(tb) = e^{-ta}(2 - 2\cos(tb)) + (1 - e^{-ta})^2$$

$$= 4e^{-ta}\sin^2\left(\tfrac{tb}{2}\right) + (1 - e^{-ta})^2,$$

altså

$$\left|\tfrac{1}{t}(e^{-tz} - 1)\right|^2 = e^{-ta}\left(\frac{\sin(\frac{tb}{2})}{\frac{tb}{2}}\right)^2 b^2 + \left(\frac{1 - e^{-ta}}{t}\right)^2 \le b^2 + a^2 = |z|^2.$$

For at indse uligheden $\dfrac{1 - e^{-ta}}{t} \le a$ kan man f.eks. udnytte middelværdisætningen. $\square$

<u>Bemærkning</u>. Sætning 5.9 kan formuleres at $(A, \mathcal{D}(A))$ er unitært ækvivalent med multiplikationsoperatoren $T_{-\psi}$ på $L^2(\Gamma)$ via Fouriertransformationen:

$$\mathcal{D}(T_{-\psi}) = \{g \in L^2(\Gamma) \mid -\psi g \in L^2(\Gamma)\}$$

$$T_{-\psi}\, g = -\psi g \qquad , \quad g \in \mathcal{D}(T_{-\psi}).$$

Indskud om lokale nulmængder. Lad X være et lokalkompakt rum og μ et positivt Radonmål på X. Det ydre mål μ^* er defineret for en vilkårlig mængde $B \subseteq X$ ved

$$\mu^*(B) = \inf\{\mu(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \text{ åben}, \ \mathcal{O} \supseteq B\}.$$

En mængde $A \subseteq X$ kaldes en lokal μ-nulmængde såfremt $\mu^*(A \cap K) = 0$ for enhver kompakt mængde $K \subseteq X$, altså såfremt $A \cap K$ er en μ-nulmængde for alle sådanne K. Er μ et σ-endeligt mål er μ-nulmængder og lokale μ-nulmængder de samme. At et prædikat $P(x)$ er sandt lokalt μ-næsten overalt betyder, at mængden

$$\{x \in X \mid P(x) \text{ falsk}\}$$

er en lokal μ-nulmængde.

Øvelse 5.2. Frembringeren A er injektiv hvis og kun hvis $\psi \neq 0$ lokalt næsten overalt m.h.t. Haarmålet på Γ. Spektret for A er

$$\sigma(A) = -\overline{\psi(\Gamma)} \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}.$$

Sætning 5.10. Potentialoperatoren $(N, \mathcal{D}(N))$ er tæt defineret hvis og kun hvis $\operatorname{Re}\psi > 0$ lokalt næsten overalt m.h.t. Haarmålet på Γ. I bekræftende fald er $\frac{1}{\psi}$ defineret lokalt næsten overalt og $(N, \mathcal{D}(N))$ er givet ved

$$\mathcal{D}(N) = \{ f \in L^2(G) \mid \frac{\hat{f}}{\psi} \in L^2(\Gamma) \}$$

$$\widehat{Nf} = \frac{\hat{f}}{\psi} \quad , f \in \mathcal{D}(N) .$$

Bevis. For $f \in L^2(G)$ er $\frac{\hat{f}}{\psi}$ defineret lokalt næsten overalt og betingelsen $\frac{\hat{f}}{\psi} \in L^2(\Gamma)$ betyder pr. definition, at der findes $g \in L^2(\Gamma)$ så $\frac{\hat{f}}{\psi} = g$ lokalt næsten overalt. Et sådant g er entydigt bestemt, thi hvis $g \in L^2(\Gamma)$ er 0 lokalt næsten overalt, er $g\bar{\varphi}$ 0 næsten overalt for alle φ i $\mathcal{K}(\Gamma)$, altså $(g|\varphi) = 0$ for alle $\varphi \in \mathcal{K}(\Gamma)$, altså $g = 0$.

Lad Γ_0 betegne mængden

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \operatorname{Re} \psi(\gamma) = 0\}.$$

I beviset kan vi antage $\psi(0) = 0$, thi hvis $\psi(0) > 0$ er $\Gamma_0 = \emptyset$, og da $\|P_t\| \le \mu_t(G) = e^{-t\psi(0)}$ har vi for $f \in L^2(G)$

$$\int_0^\infty \|P_t f\| dt \le \|f\| \int_0^\infty e^{-t\psi(0)} dt = \frac{\|f\|}{\psi(0)} .$$

Dermed eksisterer vektorintegralet $\int_0^\infty P_t f dt$ for alle $f \in L^2(G)$, og man ser let at

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t P_s f ds = \int_0^\infty P_t f dt .$$

Dermed er N en overalt defineret og begrænset operator på $L^2(G)$.

Vi antager nu at $\psi(0) = 0$, og så er Γ_0 en afsluttet undergruppe af Γ. For $\varphi \in \mathcal{K}(\Gamma)$ har vi

$$\mathcal{F}_G(P_t(\overline{\mathcal{F}}_\Gamma \varphi)) = e^{-t\psi} \varphi .$$

Antages at Γ_0 er en lokal nulmængde, følger af Lebesgues sætning om majoriseret konvergens at

$$\lim_{t\to\infty} \| P_t(\overline{\mathcal{F}}_\Gamma \varphi)\|_2^2 = \lim_{t\to\infty} \int (e^{-t\,\mathrm{Re}\,\psi(\gamma)} |\varphi(\gamma)|)^2 d\gamma = 0 .$$

Dette viser, at $\lim_{t\to\infty} P_t f = 0$ for alle f tilhørende den tætte mængde

$$\{ \overline{\mathcal{F}}_\Gamma \varphi \mid \varphi \in \mathcal{K}(\Gamma)\}$$

af $L^2(G)$, og dermed er betingelse (iii) i sætning 5.6 opfyldt, så $\mathcal{D}(N)$ er tæt.

Hvis Γ_0 ikke er en lokalnulmængde, findes en kompakt mængde $K \subseteq \Gamma$ så $K \cap \Gamma_0$ har positivt Haarmål. Af øvelse II.9.4 følger da, at Γ_0 er åben.

Målene $\nu_t = \mu_t * \check{\mu}_t$ har den Fouriertransformerede

$$\hat{\nu}_t(\gamma) = e^{-2t\,\mathrm{Re}\,\psi(\gamma)} ,$$

så $\hat{\nu}_t(\gamma) = 1$ for alle $\gamma \in \Gamma_0$. Af sætning II.9.8 følger da at $\operatorname{supp} \nu_t \subseteq \Gamma_0^{\perp}$, som er en kompakt undergruppe af G. Lad $f \in \mathcal{K}_+(G)$ være valgt så $f * \check{f} \geq 1$ på $\Gamma_0^{\perp}$. For $t>0$ har vi da

$$1 \leq \langle \mu_t * \check{\mu}_t , f * \check{f} \rangle = \int (\mu_t * f)^2 dx = \| P_t f\|_2^2 ,$$

og dermed er betingelse (iii) i sætning 5.6 ikke opfyldt, men så er $\mathcal{D}(N)$ ikke tæt i $L^2(G)$.

Vi antager nu at $\mathcal{D}(N)$ er tæt, og ved så at $N = -A^{-1}$. For $f \in \mathcal{D}(N)$ vil $Nf \in \mathcal{D}(A)$, altså vil

$$(A(Nf))^\wedge = -\hat{f} = -\psi \widehat{Nf} ,$$

hvoraf

$$\widehat{Nf} = \frac{\hat{f}}{\psi} \quad \text{lokalt næsten overalt.}$$

Antag omvendt at $f \in L^2(G)$ opfylder, at der findes $g \in L^2(\Gamma)$ så $\frac{\hat{f}}{\psi} = g$ lokalt næsten overalt. Lad $h \in L^2(G)$ være valgt så $\hat{h} = g$. Så gælder $\hat{f} = \psi \hat{h}$ lokalt næsten overalt. Da ψ er kontinuert følger heraf, at $\psi \hat{h}$ faktisk er i $L^2(\Gamma)$, på grund af følgende ræsonnement:

$$\int |\psi|^2 |\hat{h}|^2 d\gamma = \sup_{\varphi} \int \varphi |\psi|^2 |\hat{h}|^2 d\gamma = \sup_{\varphi} \int \varphi |\hat{f}|^2 d\gamma \le \int |\hat{f}|^2 d\gamma < \infty,$$

hvor supremum tages over mængden af $\varphi \in \mathcal{K}_+(\Gamma)$ opfyldende $0 \le \varphi \le 1$.

Af sætning 5.9 følger så at $h \in \mathcal{D}(A)$ og

$$\widehat{Ah} = -\psi \hat{h} = -\hat{f},$$

altså

$$-Ah = f \in \mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(N). \qquad \square$$

<u>Bemærkning</u>. Sidste halvdel af sætning 5.10 kan formuleres at $(N, \mathcal{D}(N))$ er unitært ækvivalent med multiplikationsoperatoren $T_{\frac{1}{\psi}}$ på $L^2(\Gamma)$ via Fouriertransformationen.

<u>Korollar 5.11</u>. Lad $(\mu_t)_{t \ge 0}$ være en foldningssemigruppe på $\mathbb{R}^n$, $(P_t)_{t \ge 0}$ den inducerede kontraktionssemigruppe på $L^2(\mathbb{R}^n)$. Potentialoperatoren $(N, \mathcal{D}(N))$ er tæt defineret undtagen for translationssemigrupperne $\mu_t = \varepsilon_{at}$, hvor $a \in \mathbb{R}^n$.

Bevis. Lad ψ være den negativ definite funktion på $\mathbb{R}^n$ så

$$\hat{\mu}_t(x) = e^{-t\psi(x)}.$$

Det fremgår af beviset for sætning 5.10, at hvis

$$\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{Re} \psi(x) = 0\}$$

ikke er en lokal nulmængde m.h.t. Lebesguemålet, så er Γ_0 en åben undergruppe af $\mathbb{R}^n$. Da en åben undergruppe er afsluttet, og da $\mathbb{R}^n$ er sammenhængende, kan vi slutte at $\Gamma_0 = \mathbb{R}^n$. Dette viser at ψ er rent imaginær og dermed af formen $\psi = if$, hvor $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er en kontinuert homomorfi (sætning 3.15). Der findes altså et $a \in \mathbb{R}^n$ så $f(x) = \langle a, x \rangle$, og dermed er $\mu_t = \varepsilon_{at}$.

Lad dernæst $P_t f = \varepsilon_{at} * f$, $t \geq 0$, for et $a \in \mathbb{R}^n$. Så er

$$\|P_t f\|_2 = \|f\|_2 \quad \text{for } t \geq 0,\ f \in L^2(G),$$

og dermed er betingelse (iii) i sætning 5.6 ikke opfyldt. ∎

<u>Øvelse 5.3.</u> For translationssemigrupperne $P_t f = \varepsilon_{at} * f$ på $L^2(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, er $\mathcal{D}(N) = \{0\}$.

<u>Øvelse 5.4.</u> Lad $(\mu_t)_{t \geq 0}$ være en foldningssemigruppe på $\mathbb{R}^n$, $(P_t)_{t \geq 0}$ den inducerede kontraktionssemigruppe på $L^2(\mathbb{R}^n)$. Frembringeren er injektiv undtagen i det udartede tilfælde $\mu_t = \varepsilon_0$, $t \geq 0$. (Brug øvelse 5.2).

<u>§6. Potentialkernen for en foldningssemigruppe.</u>

Lad G være en LCA-gruppe. Ved en <u>kontinuert kerne</u> på G forstås en positiv lineær afbildning N af

$\mathcal{K}(G)$ ind i rummet $\mathcal{C}(G)$ af kontinuerte funktioner på G, jvf. UEP p. 30.

En kontinuert kerne N kaldes translationsinvariant, såfremt

$$\tau_x(Nf) = N(\tau_x f) \qquad \text{for alle } x \in G,\ f \in \mathcal{K}(G).$$

Sætning 6.1. Der er en entydig korrespondance mellem de translationsinvariante kontinuerte kerner N på G og de positive Radonmål μ på G etableret ved

$$Nf = \mu * f \quad , \ f \in \mathcal{K}(G).$$

Bevis. Hvis μ er et positivt Radonmål definerer

$$f \mapsto Nf = \mu * f$$

en translationsinvariant kontinuert kerne, jvf. sætning II 2.4, og der gælder

$$N\check{f}(0) = \int f \, d\mu .$$

Dette viser at tilordningen $\mu \mapsto N$ er injektiv. Hvis N er en translationsinvariant kontinuert kerne, er afbildningen $f \mapsto N\check{f}(0)$ en positiv linearform på $\mathcal{K}(G)$, altså et positivt Radonmål μ så

$$\int f \, d\mu = N\check{f}(0).$$

Heraf fås

$$Nf(x) = \tau_{-x}(Nf)(0) = N(\tau_{-x} f)(0) = \int (\tau_{-x} f)^{\vee} d\mu = \mu * f(x). \quad \|$$

Den til et positivt mål μ bestemte translationsinvariante kontinuerte kerne $Nf = \mu * f$ kaldes kort en foldningskerne.

<u>Lemma 6.2.</u> Lad μ være et positivt mål på G. Følgende betingelser er ensbetydende:

a) For enhver kompakt mængde $K \subseteq G$ vil funktionen $x \mapsto \mu(x+K)$ gå mod 0 i ∞ (resp. være begrænset).

b) For funktion $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ vil $\mu * \varphi$ gå mod 0 i ∞ (resp. være begrænset).

Bevis. Til enhver kompakt mængde $K \subseteq G$ findes $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ så $1_K \leq \check{\varphi}$, men så er

$$\mu * \varphi(x) \geq \mu(x+K),$$

og heraf følger "b) ⇒ a)".

Tilsvarende følger "a) ⇒ b)" af at for $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ vil $\varphi \leq \max\varphi \, 1_K$, hvor $K = \mathrm{supp}(\varphi)$, og dermed

$$\mu * \varphi(x) \leq \max\varphi \cdot \mu(\check{K} + x). \quad \square$$

<u>Definition.</u> Et positivt mål μ på G siges <u>at gå mod 0 i ∞</u> (resp. at være <u>translationsbegrænset</u>), hvis de ækvivalente betingelser a) og b) fra lemma 6.2 er opfyldt.

Målet μ går mod 0 i ∞ netop hvis den tilhørende foldningskerne går mod 0 i ∞ ifølge definitionen i UEP p.33.

Ethvert positivt begrænset mål μ på G går mod 0 i ∞ (sætning II 2.4).

<u>Advarsel</u>: Lad f være en positiv integrabel funktion på G. Det begrænsede mål $\mu_f = f\,dx$ går mod 0 i ∞,

men f behøver ikke gå mod 0 i ∞ som funktion.

Hvis et positivt mål μ går mod 0 i ∞ er det translationsbegrænset.

På en kompakt gruppe vil alle positive mål gå mod 0 i ∞.

Haarmålet ω_G på en vilkårlig LCA-gruppe er translationsbegrænset. Det går mod 0 i ∞ netop hvis G er kompakt.

Mere almindeligt gælder:

<u>Sætning 6.3.</u> Ethvert positivt, positiv definit mål μ på G er translationsbegrænset.

Bevis. Lad $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$. Vi skal vise at $\mu * \varphi$ er en begrænset funktion. Vi vælger $f \in \mathcal{K}_+(G)$ så $\varphi \le f^* * f$, og får da

$$\mu * \varphi \le \mu * f^* * f ,$$

men $\mu * f^* * f$ er en kontinuert positiv definit funktion og dermed begrænset. (Hvis $f \in \mathcal{K}_+(G)$ er >0 på $(K-K) \cup K$, hvor $K = \operatorname{supp} \varphi$ er $f^* * f > 0$ på K, og dermed er $\lambda (f^* * f) \ge \varphi$ blot $\lambda \inf_K f^* * f \ge \sup \varphi$.) ∎

<u>Øvelse 6.1.</u> Lad G være en LCA-gruppe, H en afsluttet ikke kompakt undergruppe. Et positivt mål μ så $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq H$ går mod 0 i ∞ opfattet som mål på H, hvis og kun hvis det går mod 0 i ∞ som mål på G. <u>Eksempel</u>: Haarmålet ω_H på H går ikke mod 0 i ∞ på G.

Vi vil studere den af en foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ inducerede Feller semigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ på $C_0(G)$.

For $\lambda > 0$ defineres et positivt mål ρ_λ på G ved

$$\rho_\lambda(f) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t(f)\,dt \quad , \quad f \in \mathcal{K}(G), \tag{1}$$

og denne ligning gælder for enhver positiv nedad halvkontinuert funktion (anvend UEP lemma 2.3), hvoraf specielt

$$\rho_\lambda(G) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t(G)\,dt = \int_0^\infty e^{-(\lambda+\psi(0))t}\,dt = \frac{1}{\lambda+\psi(0)} .$$

Heraf følger at $\lambda\rho_\lambda(G) \leq 1$, og at $\lambda\rho_\lambda$ er et sandsynlighedsmål netop når foldningssemigruppen består af sandsynlighedsmål. Da ρ_λ er et begrænset mål gælder (1) også for enhver kontinuert begrænset funktion, specielt for $\bar{\gamma}$, $\gamma \in \Gamma$, hvoraf fås

$$\hat{\rho}_\lambda(\gamma) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-t\psi(\gamma)}\,dt = \frac{1}{\psi(\gamma)+\lambda} \tag{2}$$

Resolventen $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ for Feller semigruppen $(P_t)_{t\geq 0}$ er givet ved

$$V_\lambda f = \rho_\lambda * f \quad , \qquad f \in C_0(G), \tag{3}$$

thi anvendes den kontinuerte linearform $\varepsilon_x \in C_0(G)'$, $x \in G$, på vektorintegralet

$$V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(\mu_t * f)\,dt \quad ,$$

fås under anvendelse af sætning 5.1 at

$$V_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t * f(x)\,dt \quad , \quad x \in G,$$

altså

$$V_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu_t(\tau_x(\check f))\,dt = \rho_\lambda(\tau_x(\check f)) = \rho_\lambda * f(x).$$

For hvert $f \in \mathcal{K}_+(G)$ følger af (1) at

$$\lambda \mapsto \rho_\lambda(f) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu_t(f)\,dt$$

er en aftagende funktion på $]0,\infty[$, og af sætningen om monoton konvergens af integraler fås

$$\lim_{\lambda\to 0}\rho_\lambda(f) = \int_0^\infty \mu_t(f)\,dt \quad \le \infty \qquad (4)$$

Hvis dette tal er endeligt for alle $f \in \mathcal{K}_+(G)$, gælder (4) endda for alle $f \in \mathcal{K}(G)$. Ved fastsættelsen

$$\kappa(f) = \lim_{\lambda\to 0}\rho_\lambda(f) = \int_0^\infty \mu_t(f)\,dt\,, \quad f \in \mathcal{K}(G), \qquad (5)$$

defineres et positivt Radonmål κ på G, og κ er altså vag grænseværdi for målene ρ_λ når $\lambda \to 0$.

<u>Definition</u>. Foldningssemigruppen $(\mu_t)_{t\ge 0}$ kaldes <u>transient</u> såfremt

$$\lim_{\lambda\to 0}\rho_\lambda(f) = \int_0^\infty \mu_t(f)\,dt \;<\infty \quad \text{for alle } f \in \mathcal{K}_+(G).$$

Målet κ defineret ved (5) kaldes <u>potentialkernen</u> for $(\mu_t)_{t\ge 0}$.

Hvis $(\mu_t)_{t\ge 0}$ ikke er transient kaldes den <u>rekurrent</u>.

Hvis $(\mu_t)_{t\ge 0}$ er transient gælder for alle positive nedad halvkontinuerte funktioner $f: G \to [0,\infty]$

$$\kappa(f) = \lim_{\lambda\to 0}\rho_\lambda(f) = \sup_{\lambda>0}\rho_\lambda(f) = \int_0^\infty \mu_t(f)\,dt\,. \qquad (5')$$

Da $\lambda \mapsto \rho_\lambda(f)$ er en aftagende funktion fås nemlig

$$\lim_{\lambda\to 0} \rho_\lambda(f) = \sup_{\lambda>0} \rho_\lambda(f),$$

og idet $A = \{\varphi \in \mathcal{K}_+(G) \mid \varphi \le f\}$, fås af lemma 2.3 UEP

$$\kappa(f) = \sup_{\varphi\in A} \kappa(\varphi) = \sup_{\varphi\in A}\left(\sup_{\lambda>0} \rho_\lambda(\varphi)\right) = \sup_{\lambda>0}\left(\sup_{\varphi\in A} \rho_\lambda(\varphi)\right) =$$

$\sup_{\lambda>0} \rho_\lambda(f)$, og

$$\kappa(f) = \sup_{\varphi\in A} \int_0^\infty \mu_t(\varphi)\,dt = \int_0^\infty \sup_{\varphi\in A} \mu_t(\varphi)\,dt = \int_0^\infty \mu_t(f)\,dt.$$

Hvis $\psi(0) > 0$ er $(\mu_t)_{t\ge 0}$ transient og κ er endda et begrænset mål af total masse $\frac{1}{\psi(0)}$.

For en kompakt gruppe G er $(\mu_t)_{t\ge 0}$ transient netop hvis $\psi(0) > 0$, thi hvis $(\mu_t)_{t\ge 0}$ er transient er

$$\int_0^\infty \mu_t(G)\,dt < \infty \quad , \text{ idet } \quad 1 \in \mathcal{K}_+(G),$$

men så må $\psi(0) > 0$.

Hvis $(\mu_t)_{t\ge 0}$ er transient og $\psi(0) = 0$, har potentialkernen κ uendelig masse, f. eks. ifølge (5').

<u>Eksempler</u>: a) Den Brown'ske semigruppe i $\mathbb{R}^n$ er <u>transient</u> for $n \ge 3$, og <u>rekurrent</u> for $n = 1, 2$.

Den Brown'ske semigruppe er givet ved tæthederne

$$g_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right).$$

En simpel regning viser, at der gælder følgende

$$\int_0^\infty g_t(x)\,dt = \begin{cases} k_n \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}} & , n \ge 3, \; x \ne 0 \\ \infty & , n \ge 3, \; x = 0 \\ \infty & , n = 1, 2, \text{ alle } x, \end{cases}$$

jvfr. UEP p. 63, hvor $k_n = \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-2)}$, og heraf følger påstanden via Fubini's sætning.

Potentialkernen i tilfældet $n \geq 3$ er målet

$$\kappa_n = k_n \frac{1}{\|x\|^{n-2}}\, dx$$

som kaldes <u>Newtonkernen</u>. Målet κ_n går mod 0 i ∞, idet

$$\lim_{x\to\infty} \int_{x+K} \|y\|^{2-n}\, dy = 0,$$

for enhver kompakt mængde $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

6) Den Poisson'ske semigruppe på $\mathbb{R}$ er <u>transient</u>. For $f \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R})$ har vi

$$\mu_t(f) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t}\frac{t^k}{k!} f(k) = \sum_{k=0}^{N} e^{-t}\frac{t^k}{k!} f(k)$$

hvor $N \geq \max \operatorname{supp}(f)$, og dermed finder vi

$$\int_0^\infty \mu_t(f)\,dt = \sum_{k=0}^{N} f(k)\int_0^\infty e^{-t}\frac{t^k}{k!}\,dt = \sum_{k=0}^{N} f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) < \infty.$$

Dette viser at semigruppen er transient, og potentialkernen er givet ved

$$\kappa = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k ,$$

som ikke går mod 0 i ∞, idet f.eks. $\kappa(x+[0,1]) \geq 1$ for alle $x \geq 0$.

<u>Øvelse 6.2</u>. Den Cauchy'ske semigruppe er rekurrent.

<u>Øvelse 6.3.</u> Translationssemigruppen $\mu_t = \varepsilon_{ta}$, $a \in \mathbb{R}^n$, er transient for $a \neq 0$, rekurrent for $a = 0$. For $a \neq 0$ er po-

tentialkernen det Lebesguemål på halvlinien $\{ta \mid t \geq 0\}$, der tillægger intervallet $[0,a]$ massen 1.

<u>Sætning 6.4.</u> Lad $(\mu_t)_{t\geq 0}$ være en transient foldningssemigruppe med potentialkerne κ. Så er $\frac{1}{2}(\kappa+\check{\kappa})$ et positiv definit mål og κ er translationsbegrænset.

Endvidere er $\psi \neq 0$ lokalt næsten overalt og $\operatorname{Re}\frac{1}{\psi} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Gamma)$.

Bevis. Vi sætter $\nu_\lambda = \frac{1}{2}(\rho_\lambda + \check{\rho}_\lambda)$ og får da ifølge (2)

$$\hat{\nu}_\lambda(\gamma) = \operatorname{Re}\frac{1}{\psi(\gamma)+\lambda} = \frac{\operatorname{Re}\psi(\gamma)+\lambda}{(\operatorname{Re}\psi(\gamma)+\lambda)^2+(\operatorname{Im}\psi(\gamma))^2} \qquad (6)$$

Da højresiden altid er ≥ 0 er målet ν_λ positiv definit, (II 5.6). Idet

$$\lim_{\lambda\to 0} \nu_\lambda = \frac{1}{2}(\kappa+\check{\kappa}) \qquad \text{vagt},$$

er også $\frac{1}{2}(\kappa+\check{\kappa})$ et positiv definit mål, og dermed translationsbegrænset ifølge sætning 6.3. Så må også κ være translationsbegrænset, idet der for $f \in \mathcal{K}_+(G)$ gælder

$$\kappa * f \leq (\kappa+\check{\kappa}) * f .$$

I resten af beviset vil vi antage $\psi(0)=0$. I tilfældet $\psi(0)>0$ er resten af sætningen nemlig triviel, idet $\operatorname{Re}\frac{1}{\psi}$ så er en kontinuert begrænset funktion.

Mængden $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma \mid \psi(\gamma)=0\}$ er en afsluttet undergruppe. Hvis Γ_0 ikke er en lokal nulmængde er Γ_0 åben (øvelse II 9.4), men så er $\Gamma_0^\perp$ kompakt og $\operatorname{supp}(\mu_t) \subseteq \Gamma_0^\perp$ for alle $t \geq 0$. For en funktion $f \in \mathcal{K}_+(G)$ så $f=1$ på $\Gamma_0^\perp$, har vi så $\mu_t(f)=1$ for alle $t\geq 0$ og altså

$$\int_0^\infty \mu_t(f)\,dt = \infty,$$

men det strider mod at $(\mu_t)_{t\ge 0}$ er transient.

Da Γ_0 er en lokal nulmængde er $\frac{1}{\psi}$ og $\mathrm{Re}\frac{1}{\psi}$ defineret lokalt næsten overalt, og ifølge (6) er det naturligt at tillægge $\mathrm{Re}\frac{1}{\psi}$ værdien ∞ i punkterne af Γ_0.

Af (6) fås for $f \in \mathcal{K}_+(G)$

$$\int_\Gamma |\mathcal{F}f(\gamma)|^2 \,\mathrm{Re}\frac{1}{\psi(\gamma)+\lambda}\,d\gamma = \nu_\lambda(f^* * f),$$

og af Fatou's lemma fås

$$\int_\Gamma \liminf_{\lambda\to 0}\left(|\mathcal{F}f(\gamma)|^2 \,\mathrm{Re}\frac{1}{\psi(\gamma)+\lambda}\right)d\gamma \le \liminf_{\lambda\to 0}\nu_\lambda(f^* * f) = \tfrac{1}{2}(\kappa+\check{\kappa})(f^* * f)$$

altså

$$\int_\Gamma \mathrm{Re}\frac{1}{\psi(\gamma)}|\mathcal{F}f(\gamma)|^2 d\gamma < \infty$$

for alle $f \in \mathcal{K}_+(G)$. For hvert $\gamma \in \Gamma$ findes $f \in \mathcal{K}_+(G)$ så $\mathcal{F}f(\gamma) \ne 0$, men så er $\mathcal{F}(f^* * f)(\gamma) = |\mathcal{F}f(\gamma)|^2 > 0$. Heraf ses, at der til enhver kompakt mængde $K \subseteq \Gamma$ findes $f \in \mathcal{K}_+(G)$ så $|\mathcal{F}f(\gamma)| \ge 1$ for alle $\gamma \in K$, men så fås

$$\int_K \mathrm{Re}\frac{1}{\psi(\gamma)}\,d\gamma < \infty$$

for enhver kompakt mængde $K \subseteq \Gamma$, altså $\mathrm{Re}\frac{1}{\psi} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Gamma)$. ∎

Det er nu nærliggende at forsøge at finde den Fouriertransformerede af det positiv definite mål $\frac{1}{2}(\kappa+\check{\kappa})$. Hertil vil vi få brug for et generelt resultat om Fouriertransformation af positiv definite mål.

Vi minder om at $\mathcal{E}(G)$ betegner keglen af positiv definite mål på G. Med $\mathcal{E}_+(G)$ betegner vi delkeglen af de positive, positiv definite mål på G.

Lemma 6.5. For $\mu \in \mathcal{E}(G)$ er det Fouriertransformerede mål $\mathcal{F}_G\mu$ et positivt mål på Γ, der er entydigt fastlagt ved ligningen

$$\int_G f^* * f \, d\mu = \int_\Gamma |\mathcal{F}_G f|^2 \, d\, \mathcal{F}_G\mu \quad , \quad \forall f \in \mathcal{K}(G).$$

Bevis. Vi ved at $\mathcal{F}_G\mu$ er fastlagt ved at der for $f \in \mathcal{K}(G)$, $x \in G$ gælder

$$\mu * f^* * f(x) = \int_\Gamma \gamma(x) |\mathcal{F}_G f(\gamma)|^2 \, d\, \mathcal{F}_G\mu(\gamma). \tag{7}$$

Erstattes f med $\check{f}$ og sættes $x = 0$ fås betingelsen i lemmaet.

Ved polarisering af identiteten i lemmaet fås på den anden side

$$\int f^* * g \, d\mu = \int \overline{\mathcal{F}_G f} \; \mathcal{F}_G g \, d\, \mathcal{F}_G\mu \qquad \forall f, g \in \mathcal{K}(G).$$

Erstattes f med $\check{f}$ og g med $\tau_x \check{f}$ fås (7). ▯

Lemma 6.6. For $\mu \in \mathcal{E}(G)$ og for $\varphi \in \mathcal{K}_+(\Gamma)$ er $|\mathcal{F}_\Gamma \varphi|^2 \mu$ i $\mathcal{E}(G)$ og

$$\mathcal{F}_G(|\mathcal{F}_\Gamma \varphi|^2 \mu) = \varphi^* * \varphi * \mathcal{F}_G\mu.$$

Bevis. For $f \in \mathcal{K}(G)$ har vi

$$\int_G f^* * f(x)\, |\mathcal{F}_\Gamma \varphi(x)|^2 d\mu(x) = \int_G \Big(f^* * f(x) \int_\Gamma \overline{\gamma(x)}\, \varphi^* * \varphi(\gamma)\, d\gamma \Big) d\mu(x)$$

$$= \int_\Gamma \Big(\varphi^* * \varphi(\gamma) \int_G f^* * f(x)\, \overline{\gamma(x)}\, d\mu(x) \Big) d\gamma .$$

Idet $f^* * f(x)\,\overline{\gamma(x)} = g^* * g(x)$, hvor $g(x) = \overline{\gamma(x)}\, f(x)$, får vi af lemma 6.5

$$\int_G f^* * f(x)\,\overline{\gamma(x)}\, d\mu(x) = \int_G g^* * g(x)\, d\mu(x) = \int_\Gamma |\overline{\mathcal{F}}_G g|^2 d\mathcal{F}_G \mu =$$

$$\int_\Gamma |\overline{\mathcal{F}}_G f(\delta - \gamma)|^2 d\mathcal{F}_G \mu(\delta) ,$$

og dermed alt i alt

$$\int_G f^* * f(x)\, |\mathcal{F}_\Gamma \varphi(x)|^2 d\mu(x) = \int_\Gamma \varphi^* * \varphi * |\overline{\mathcal{F}}_G f|^2(\delta)\, d\mathcal{F}_G \mu(\delta) .$$

Da højresiden er positiv, er $|\mathcal{F}_\Gamma \varphi|^2 \mu$ positiv definit, og

$$\mathcal{F}_G(|\mathcal{F}_\Gamma \varphi|^2 \mu) = \varphi^* * \varphi * \mathcal{F}_G \mu . \qquad \square$$

<u>Sætning 6.7.</u> Fouriertransformationen $\mathcal{F}_G$ er en bijektiv afbildning af $\mathcal{E}_+(G)$ på $\mathcal{E}_+(\Gamma)$, og den inverse afbildning er $\mathcal{F}_\Gamma$. Desuden er $\mathcal{F}_G$ en homeomorfi når $\mathcal{E}_+(G)$ og $\mathcal{E}_+(\Gamma)$ udstyres med de vage topologier.

Bevis. Vi bemærker at $\mathcal{F}_G$ og $\overline{\mathcal{F}}_G$ er ens på $\mathcal{E}_+(G)$, da målene i $\mathcal{E}_+(G)$ er symmetriske.

Lad φ være en positiv, kontinuert positiv definit funktion. Så er $\varphi = \check{\varphi}$ og om det associerede mål $\mu = \mathcal{F}_G \varphi$ gælder $\mathcal{F}_\Gamma \mu = \check{\varphi} = \varphi$. Af sætning II 5.6 følger så, at μ er et positiv definit mål på Γ.

Lad $(\varphi_V)_{V \in \mathcal{U}(0)}$ være en approximativ enhed på G. Så vil

$$\lim_{\mathcal{U}(0)} \mathcal{F}_G \varphi_V = 1 \quad , \text{ ligeligt over kompakte mængder af } \Gamma.$$

Lad der være givet $\varepsilon > 0$ og en kompakt mængde $K \subseteq \Gamma$. Så er $\mathcal{U}_\Gamma(K,\varepsilon)$ en omegn af 0 i G og for $V \subseteq \mathcal{U}_\Gamma(K,\varepsilon)$, $\gamma \in K$ har vi

$$1 - \mathcal{F}_G \varphi_V(\gamma) = \int (1 - \overline{\gamma(x)}) \varphi_V(x)\,dx \,,$$

altså

$$|1 - \mathcal{F}_G \varphi_V(\gamma)| \le \int |1 - \gamma(x)| \varphi_V(x)\,dx \le \varepsilon \int \varphi_V(x)\,dx = \varepsilon .$$

Lad $\mu \in \mathcal{E}_+(G)$. Vi vil vise at $\mathcal{F}_G \mu \in \mathcal{E}_+(\Gamma)$.

Vi har at

$$\mu_V = \mu * \varphi_V^* * \varphi_V$$

er en positiv, kontinuert positiv definit funktion, og den Fouriertransformerede

$$\mathcal{F}_G \mu_V = |\mathcal{F}_G \varphi_V|^2 \mathcal{F}_G \mu$$

tilhører altså $\mathcal{E}_+(\Gamma)$ ifølge første skridt i beviset.

Lad $g \in \mathcal{K}(\Gamma)$ være givet. Vi ønsker at vise at

$$\int g^* * g \, d\mathcal{F}_G \mu \ge 0.$$

Vi vælger $\varphi_0 \in \mathcal{K}_+(\Gamma)$ så $\varphi_0 = 1$ på $\operatorname{supp}(g^* * g)$. For vilkårligt $\varepsilon > 0$ gælder

$$|g^* * g| \, (1 - |\mathcal{F}_G \varphi_V|^2) \le 2 |g^* * g| \, (1 - |\mathcal{F}_G \varphi_V|) \le 2 |g^* * g| \, |1 - \mathcal{F}_G \varphi_V| \le \varepsilon \varphi_0 \,,$$

når blot V er en tilstrækkelig lille omegn af 0. Altså har vi

$$\left| \int g^* * g \, |\mathcal{F}_G \varphi_V|^2 \, d\mathcal{F}_G \mu - \int g^* * g \, d\mathcal{F}_G \mu \right| \leq \varepsilon \int \varphi_0 \, d\mathcal{F}_G \mu .$$

Da

$$\int g^* * g \, |\mathcal{F}_G \varphi_V|^2 \, d\mathcal{F}_G \mu \geq 0$$

for alle $V \in \mathcal{U}(0)$, må også

$$\int g^* * g \, d\mathcal{F}_G \mu \geq 0 ,$$

altså $\mathcal{F}_G \mu \in \mathcal{E}_+(\Gamma)$.

Af lemma 6.6 følger, at

$$\mathcal{F}_\Gamma(\mathcal{F}_G(\mu_V)) = \mathcal{F}_\Gamma(|\mathcal{F}_G \varphi_V|^2 \mathcal{F}_G \mu) = \varphi_V^* * \varphi_V * \mathcal{F}_\Gamma(\mathcal{F}_G \mu),$$

men da $\mu_V \in \mathcal{P}_+(G)$ er $\mathcal{F}_\Gamma(\mathcal{F}_G \mu_V) = \mu_V = \varphi_V^* * \varphi_V * \mu$,
altså

$$\mu * \varphi_V^* * \varphi_V = \mathcal{F}_\Gamma(\mathcal{F}_G \mu) * \varphi_V^* * \varphi_V \quad , \quad V \in \mathcal{U}(0).$$

Når "$V \to \{0\}$" kan vi heraf slutte at $\mu = \mathcal{F}_\Gamma(\mathcal{F}_G \mu)$, jvfr. lemma II 5.3, idet også $(\varphi_V^* * \varphi_V)_{V \in \mathcal{U}(0)}$ er en approximativ enhed: Til $U \in \mathcal{U}(0)$ vælges $V \in \mathcal{U}(0)$ så $V - V \subseteq U$ og med U associeres funktionen $\varphi_V^* * \varphi_V$, der har integral 1 og støtte indenfor U.

Hermed er vist, at $\mathcal{F}_G$ afbilder $\mathcal{E}_+(G)$ ind i $\mathcal{E}_+(\Gamma)$ og at $\mathcal{F}_\Gamma(\mathcal{F}_G \mu) = \mu$. Vi viser dernæst at $\mathcal{F}_G$ er kontinuert. Erstattes G med Γ fås heraf at $\mathcal{F}_\Gamma : \mathcal{E}_+(\Gamma) \to \mathcal{E}_+(G)$ er kontinuert og $\mathcal{F}_G(\mathcal{F}_\Gamma \mu) = \mu$ for $\mu \in \mathcal{E}_+(\Gamma)$, men så er $\mathcal{F}_G$ en homeomorfi og $\mathcal{F}_G^{-1} = \mathcal{F}_\Gamma$.

Lad $\mathscr{C}(G)$ være rummet af kontinuerte funktioner på G med topologien for ligelig konvergens over kompakte mængder. Lad $\mu \in \mathscr{E}_+(G)$ og lad $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ være et net på $\mathscr{E}_+(G)$ så $\lim_A \mu_\alpha = \mu$ vagt. Heraf følger, jfr. Øvelse 6.4, at der for alle $f \in \mathcal{K}(G)$ gælder

$$\mu_\alpha * f \to \mu * f \qquad i\ \mathscr{C}(G),$$

specielt for $f \in \mathcal{K}_+(G)$:

$$\mu_\alpha * f^* * f \to \mu * f^* * f \qquad i\ \mathscr{C}(G)$$

Af Korollar 1.5 følger, at

$$\mathcal{F}_G(\mu_\alpha * f^* * f) \to \mathcal{F}_G(\mu * f^* * f) \qquad i \text{ Bernoullitopologien}$$

altså

$$|\mathcal{F}_G f|^2 \mathcal{F}_G \mu_\alpha \to |\mathcal{F}_G f|^2 \mathcal{F}_G \mu \qquad i \text{ Bernoullitopologien.}$$

For $\varphi \in \mathcal{K}(\Gamma)$ vælges $f \in \mathcal{K}_+(G)$ så $|\mathcal{F}_G f| > 0$ på $\operatorname{supp}\varphi$. Funktionen

$$h(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(\gamma)}{|\mathcal{F}_G f(\gamma)|^2} & , \text{ når } \mathcal{F}_G f(\gamma) \neq 0 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

tilhører $\mathcal{K}(\Gamma)$ og derfor vil

$$\langle h, |\mathcal{F}_G f|^2 \mathcal{F}_G \mu_\alpha \rangle \to \langle h, |\mathcal{F}_G f|^2 \mathcal{F}_G \mu \rangle,$$

altså

$$\langle \varphi, \mathcal{F}_G \mu_\alpha \rangle \to \langle \varphi, \mathcal{F}_G \mu \rangle,$$

hvilket viser at $\mathcal{F}_G \mu_\alpha \to \mathcal{F}_G \mu$ vagt. $\blacksquare$

Øvelse 6.4. Afbildningen $(x,\mu) \mapsto \tau_x \mu$ af $G \times \mathcal{RM}_+(G)$ ind i $\mathcal{RM}_+(G)$ er kontinuert, når mængden $\mathcal{RM}_+(G)$ af positive Radonmål på G

er udstyret med den vage topologi.

Lad $f \in \mathcal{K}(G)$. Afbildningen $\mu \mapsto \mu * f$ af $RM_+(G)$ ind i $\mathcal{E}(G)$ er kontinuert, idet $\mathcal{E}(G)$ har topologien for ligelig konvergens over kompakte mængder.

<u>Sætning 6.8.</u> Lad $(\mu_t)_{t\geq 0}$ være en transient foldningssemigruppe med potentialkerne $\varkappa$. Den Fouriertransformerede af det positiv definite mål $\nu = \frac{1}{2}(\varkappa + \check{\varkappa})$ er givet ved

$$\mathcal{F}_G \nu = \omega + \operatorname{Re}\frac{1}{\psi}\, d\gamma ,$$

hvor ω er et translationsinvariant positivt mål på den afsluttede undergruppe $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma \mid \psi(\gamma) = 0\}$, eventuelt nulmålet.

Potentialkernen $\varkappa$ går mod 0 i ∞ hvis og kun hvis $\omega = 0$.

Bevis. Hvis $\psi(0) > 0$ er $\varkappa$ og ν begrænsede mål, og ~~man finder at~~

$$\hat{\varkappa}(\gamma) = \int_0^\infty \hat{\mu}_t(\gamma)\, dt = \int_0^\infty e^{-t\psi(\gamma)} dt = \frac{1}{\psi(\gamma)} ,$$

altså $\hat{\nu}(\gamma) = \operatorname{Re}\frac{1}{\psi(\gamma)}$. Dermed er formlen vist $(\omega = 0)$, og da $\varkappa$ er et begrænset mål går det mod 0 i ∞.

Vi antager nu at $\psi(0) = 0$, og sætter $\nu_\lambda = \frac{1}{2}(\rho_\lambda + \check{\rho}_\lambda)$.

Idet $\lim_{\lambda\to 0} \nu_\lambda = \nu$ vagt, får vi af sætning 6.7 at $\lim_{\lambda \to 0} \mathcal{F}_G \nu_\lambda = \mathcal{F}_G \nu$ vagt, altså ifølge (6)

$$\lim \operatorname{Re}\frac{1}{\psi(\gamma)+\lambda}\, d\gamma = \mathcal{F}_G \nu \quad \text{vagt}. \tag{8}$$

Den mindste afsluttede undergruppe G_0 af G som indeholder $\bigcup_{t>0} \mathrm{supp}(\mu_t)$ er σ-kompakt (sætning 2.5), og dermed er den duale gruppe $\hat{G}_0$ metriserbar. Nu er $\hat{G}_0$ isomorf med Γ/Γ_0, hvor

$$\Gamma_0 = G_0^{\perp} = \{ \gamma \in \Gamma \mid \psi(\gamma) = 0 \},$$

så Γ/Γ_0 er metriserbar. Lad $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en dalende følge af åbne relativt kompakte omegne af 0 i Γ/Γ_0 som udgør en basis for omegnssystemet af 0, og lad $\pi : \Gamma \to \Gamma/\Gamma_0$ være den kanoniske afbildning.

For $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ og $f \in \mathcal{K}(\Gamma)$ har vi

$$\int_\Gamma f \,\mathrm{Re}\frac{1}{\psi+\lambda}\,d\gamma = \int_{\pi^{-1}(U_n)} f \,\mathrm{Re}\frac{1}{\psi+\lambda}\,d\gamma + \int_{\Gamma\setminus\pi^{-1}(U_n)} f\,\mathrm{Re}\frac{1}{\psi+\lambda}\,d\gamma .$$

For $\lambda \to 0$ vil venstresiden gå mod $\mathcal{F}_G \nu(f)$ ifølge (8), og andet led på højre side går mod

$$\int_{\Gamma\setminus\pi^{-1}(U_n)} f\,\mathrm{Re}\frac{1}{\psi}\,d\gamma ,$$

idet $\Gamma\setminus\pi^{-1}(U_n)$ er en afsluttet delmængde af Γ disjunkt med Γ_0. Første led på højre side konvergerer altså også for $\lambda \to 0$, og idet grænseværdien betegnes $\omega_n(f)$, er det klart at ω_n er et positivt Radonmål på Γ. For $f \in \mathcal{K}_+(\Gamma)$ er $\omega_n(f)$ en aftagende følge af tal ≥ 0, og derfor eksisterer

$$\omega(f) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(f) \qquad \text{for alle } f \in \mathcal{K}_+(\Gamma).$$

Dermed eksisterer grænseværdien $\omega(f) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(f)$ faktisk for alle $f \in \mathcal{K}(\Gamma)$, og ω er et positivt Radonmål på Γ.

For $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{K}(\Gamma)$ har vi altså

$$\mathcal{F}_G \nu(f) = \omega_n(f) + \int_{\Gamma \setminus \pi^{-1}(U_n)} f \operatorname{Re} \frac{1}{\psi} \, d\gamma \, .$$

Ifølge sætning 6.4 er Γ_0 en lokal nulmængde og $\operatorname{Re} \frac{1}{\psi}$ er lokalt integrabel. Sætningen om monoton konvergens af integraler giver derfor for $f \in \mathcal{K}_+(\Gamma)$ at

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Gamma \setminus \pi^{-1}(U_n)} f \operatorname{Re} \frac{1}{\psi} \, d\gamma = \int_{\Gamma \setminus \Gamma_0} f \operatorname{Re} \frac{1}{\psi} \, d\gamma = \int_{\Gamma} f \operatorname{Re} \frac{1}{\psi} \, d\gamma \, ,$$

og dermed har vi for alle $f \in \mathcal{K}_+(\Gamma)$

$$\mathcal{F}_G \nu(f) = \omega(f) + \int_{\Gamma} f \operatorname{Re} \frac{1}{\psi} \, d\gamma \, , \tag{9}$$

hvilket er den ønskede formel.

Vi indser dernæst at $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq \Gamma_0$.

Hvis nemlig $f \in \mathcal{K}(\Gamma)$ har støtte, der er disjunkt med Γ_0, findes et $n_0 \in \mathbb{N}$ så

$$\pi^{-1}(U_n) \cap \operatorname{supp}(f) = \emptyset \qquad \text{for } n \geq n_0 \, ,$$

fordi $\bigcap_{n=1}^{\infty} \pi^{-1}(\overline{U}_n) = \Gamma_0$. Altså har vi for $n \geq n_0$, $\lambda > 0$, at

$$\int_{\pi^{-1}(U_n)} f \operatorname{Re} \frac{1}{\psi + \lambda} \, d\gamma = 0 \quad ,$$

men så er $\omega_n(f) = 0$ for $n \geq n_0$, og endelig er så $\omega(f) = 0$.

Da ψ er periodisk med alle $\gamma \in \Gamma_0$ som perioder har målene $\operatorname{Re} \frac{1}{\psi + \lambda} d\gamma$ og $\operatorname{Re} \frac{1}{\psi} d\gamma$ også alle $\gamma \in \Gamma_0$ som perioder. Af (8) følger, at også $\mathcal{F}_G \nu$ har alle $\gamma \in \Gamma_0$ som periode, men så må også ω have alle $\gamma \in \Gamma_0$ som periode (Følge (9)). Da ω er et positivt mål på Γ_0, som har alle $\gamma \in \Gamma_0$ som periode, er ω enten nulmålet eller et Haarmål på Γ_0. Da

$$\mathcal{F}_G \vartheta = \omega + \operatorname{Re} \frac{1}{\psi} d\gamma$$

har vi for alle $f \in \mathcal{K}(G)$ at

$$\mathcal{F}_G(\vartheta * f^* * f) = |\mathcal{F}_G f|^2 \mathcal{F}_G \vartheta = |\mathcal{F}_G f|^2 \omega + |\mathcal{F}_G f|^2 \operatorname{Re} \frac{1}{\psi} d\gamma ,$$

altså $|\mathcal{F}_G f|^2 \omega + |\mathcal{F}_G f|^2 \operatorname{Re} \frac{1}{\psi} d\gamma$ er det positive begrænsede mål på Γ, hvis (Co)-Fouriertransformerede er den positiv definite funktion $\vartheta * f^* * f$. Specielt er $|\mathcal{F}_G f|^2 \operatorname{Re} \frac{1}{\psi} d\gamma$ et begrænset mål, så funktionen

$$|\mathcal{F}_G f|^2 \operatorname{Re} \frac{1}{\psi}$$

er integrabel for alle $f \in \mathcal{K}(G)$.

Videre er

$$|\mathcal{F}_G f|^2 \omega = \mathcal{F}_G (\mathcal{F}_\Gamma \omega * f^* * f)$$

og $\mathcal{F}_\Gamma \omega$ er nulmålet eller et Haarmål på $G_0 = \Gamma_0^{\perp}$.

Vi har dermed for alle $f \in \mathcal{K}_+(G)$, $x \in G$, at

$$\vartheta * f^* * f(x) = \mathcal{F}_\Gamma \omega * f^* * f(x) + \int_\Gamma \gamma(x) \, |\mathcal{F}_G f|^2(\gamma) \operatorname{Re} \frac{1}{\psi(\gamma)} d\gamma . \quad (10)$$

Andet led på højre side går mod 0 for $x \to \infty$, fordi det er den Fouriertransformerede af en integrabel funktion. Hvis $\omega = 0$ følger heraf at

$$\lim_{x \to \infty} \vartheta * f^* * f(x) = 0 \qquad \text{for alle } f \in \mathcal{K}_+(G),$$

men da enhver funktion $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ er majoriseret af en funktion af formen $f^* * f$ for $f \in \mathcal{K}_+(G)$, jvf. beviset for sætning 6.3, følger, at ν går mod 0 i ∞.

Hvis omvendt ν går mod 0 i ∞, kan vi af (10) slutte at

$$\lim_{x \to \infty} \mathcal{F}_\Gamma \omega * f^* * f(x) = 0$$

for alle $f \in \mathcal{K}_+(G)$. Da G_0 ikke er kompakt (fordi $(\mu_t)_{t \geq 0}$ er transient) vil et Haarmål på G_0 ikke gå mod 0 i ∞, jvf. øvelse 6.1, men så må $\mathcal{F}_\Gamma \omega = 0$, altså $\omega = 0$. ∎

<u>Bemærkning</u>. Hvis κ går mod 0 i ∞ er $\mathcal{F}_G \nu = \mathrm{Re}\frac{1}{\psi} dy$, og så er $\mathrm{Re}\frac{1}{\psi} dy$ et positiv definit mål på Γ ifølge sætning 6.7.

<u>Eksempler</u>. a) For den Brown'ske semigruppe i $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, er

$$\nu = \kappa = k_n \frac{1}{\|x\|^{n-2}} dx$$

og ν går mod 0 i ∞. Idet den tilhørende negativ definite funktion er $\|y\|^2$, får vi

$$\mathcal{F}\left(k_n \frac{1}{\|x\|^{n-2}} dx\right) = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{\|y\|^2} dy ,$$

da det harmonerende Haarmål på $\widehat{\mathbb{R}^n} \approx \mathbb{R}^n$ er $\frac{1}{(2\pi)^n} dx$.

b) For den Poisson'ske semigruppe er

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n\right).$$

Af eksemplet p. 133 følger at

$$\mathcal{F}_G \nu = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_{2\pi n} + \frac{1}{2} dx .$$

Den negativ definite funktion er $\psi(y) = 1 - e^{-iy}$, og dermed er Γ_0 undergruppen $2\pi\mathbb{Z}$. For $y \notin \Gamma_0$ finder vi

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\psi(y)} = \frac{1-\cos y}{(1-\cos y)^2 + \sin^2 y} = \frac{1}{2} .$$

Målet ω er et Haarmål på $2\pi\mathbb{Z}$, nemlig $\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_{2\pi n}$. Den mindste undergruppe G_0, der er afsluttet og som indeholder $\operatorname{supp} \mu_t$, $t > 0$, er $\mathbb{Z}$.

Bemærk, at $\operatorname{Re} \frac{1}{\psi} dy$ er et positiv definit mål i dette tilfælde selv om $\omega \neq 0$.

<u>Øvelse 6.5.</u> Find ν, ω og $\operatorname{Re} \frac{1}{\psi}$ i tilfældet $\mu_t = \varepsilon_{ta}$ på $\mathbb{R}^n$, hvor $a \neq 0$.

<u>Sætning 6.9.</u> Lad $(\mu_t)_{t \geq 0}$ være en foldningssemigruppe på G med associeret negativ definit funktion $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$. Semigruppen er transient hvis og kun hvis $\operatorname{Re} \frac{1}{\psi} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Gamma)$.

<u>Bemærkning.</u> Det ses som i sætning 3.19, at $\operatorname{Re} \frac{1}{\psi}$ er lokalt integrabel blot $\operatorname{Re} \frac{1}{\psi}$ er integrabel over en omegn af 0.

Af sætning 6.9 mangler vi at vise, at hvis $\operatorname{Re} \frac{1}{\psi} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Gamma)$, så er $(\mu_t)_{t \geq 0}$ transient. Vi vil ikke give beviset her. Det skyldes S.C. PORT og C.J. STONE (Se Ann. Inst. Fourier XXI, 4 (1971) p. 179-265), og bygger på teorien for Markov kæder. For de specielle grupper $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}^n$ blev sætningen vist af F. SPITZER (1963) og D. ORNSTEIN (1969).

Lad $(\mu_t)_{t\geq 0}$ være en foldningssemigruppe på G, $(P_t)_{t\geq 0}$ den inducerede Feller semigruppe på $C_0(G)$. Vi vil vise en sætning om potentialoperatoren $(N, \mathcal{D}(N))$ for Feller-semigruppen $(P_t)_{t\geq 0}$, der er analog til sætning 5.10.

<u>Sætning 6.10.</u> Potentialoperatoren $(N, \mathcal{D}(N))$ er tæt defineret hvis og kun hvis $\operatorname{Re}\psi > 0$ lokalt næsten overalt m.h.t. Haarmålet på Γ.

Bevis. Vi kan antage at $\psi(0)=0$, thi hvis $\psi(0)>0$ er sætningen trivielt rigtig på grund af ulighederne

$$\|P_t\| \leq e^{-t\psi(0)} \quad , \quad \operatorname{Re}\psi(\gamma) \geq \psi(0).$$

Når $\psi(0)=0$ er $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma \mid \operatorname{Re}\psi(\gamma)=0\}$ en afsluttet undergruppe af Γ. Hvis Γ_0 er en lokal nulmængde, fås af sætningen om domineret konvergens, at der for $\varphi \in \mathcal{K}(\Gamma)$ gælder

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Gamma |\varphi(\gamma)\, e^{-t\psi(\gamma)}|\, d\gamma = 0 ,$$

altså $\lim_{t\to\infty} \varphi e^{-t\psi} = 0$ i $L^1(\Gamma)$, men så har vi

$$\lim_{t\to\infty} \overline{\mathcal{F}}_\Gamma (\varphi e^{-t\psi}) = \lim_{t\to\infty} \mu_t * \overline{\mathcal{F}}_\Gamma \varphi = 0 \quad i\ C_0(G).$$

Da $\{\overline{\mathcal{F}}_\Gamma \varphi \mid \varphi \in \mathcal{K}(\Gamma)\}$ er tæt i $C_0(G)$ er betingelse (iii) i sætning 5.6 opfyldt, så $\mathcal{D}(N)$ er tæt i $C_0(G)$.

Hvis Γ_0 ikke er en lokal nulmængde er Γ_0 åben, og målene $\nu_t = \mu_t * \check{\mu}_t$ har deres støtte indenfor den kompakte undergruppe $\Gamma_0^\perp$ af G. For $f \in \mathcal{K}_+(G)$, så $f=1$ på $\Gamma_0^\perp$, fås da

$$1 = \langle \mu_t * \check{\mu}_t, f \rangle = \langle \mu_t, \mu_t * f \rangle \le \|\mu_t * f\| = \|P_t f\|,$$

hvilket viser, at betingelse (iii) i sætning 5.6 ikke er opfyldt, og dermed er $\mathcal{D}(N)$ ikke tæt. $\square$

<u>Korollar 6.11.</u> Lad $G = \mathbb{R}^n$. Potentialoperatoren er tæt defineret undtagen for translationssemigrupperne $\mu_t = \varepsilon_{ta}$, $a \in \mathbb{R}^n$, hvor $\mathcal{D}(N) = \{0\}$.

Bevis. For $P_t f = \varepsilon_{ta} * f$ er

$$\|P_t f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x - ta)| = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)| = \|f\|.$$ For $f \in \mathcal{D}(N)$ gælder ifølge sætning 5.4 at

$$\lim_{t \to \infty} P_t(Nf) = 0 \quad ,$$

men da $\|P_t(Nf)\| = \|Nf\|$ for alle $t \ge 0$ må $Nf = 0$. Da N er injektiv må $f = 0$.

Hvis $(\mu_t)_{t \ge 0}$ er en foldningssemigruppe for hvilken N ikke er tæt defineret er $\Gamma_0 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{Re}\psi(y) = 0\}$ en åben undergruppe, altså $\Gamma_0 = \mathbb{R}^n$. Som i beviset for Korollar 5.11 ses, at $\mu_t = \varepsilon_{ta}$ for $a \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Lad X være et lokalkompakt rum. For en Feller semigruppe $(P_t)_{t \ge 0}$ på $C_0(X)$ indføres følgende begreb:

<u>Definition:</u> Fellersemigruppen kaldes <u>integrabel</u>, såfremt definitionsområdet $\mathcal{D}(N)$ for potentialoperatoren omfatter rummet $\mathcal{K}(X)$ af kontinuerte funktioner med kompakt støtte.

For en integrabel Feller semigruppe $(P_t)_{t \ge 0}$ er N specielt tæt defineret, og derfor vil $P_t f \to 0$ for $t \to \infty$ for alle $f \in C_0(X)$.

Sætning 6.12. Lad $(\mu_t)_{t \ge 0}$ være en foldningssemigruppe på G, $(P_t)_{t\ge 0}$ den inducerede Feller semigruppe på $C_0(G)$. Feller semigruppen er integrabel, hvis og kun hvis $(\mu_t)_{t\ge 0}$ er transient og potentialkernen κ går mod 0 i ∞.

I bekræftende fald gælder
$$Nf(x) = \kappa * f(x)$$
for alle $f \in \mathcal{K}(G)$, $x \in G$.

Bevis. Vi viser først, at der generelt gælder at $\tau_x(D(N)) \subseteq D(N)$ og $N(\tau_x f) = \tau_x(Nf)$ for $f \in D(N)$, $x \in G$. Da τ_x er en kontinuert lineær afbildning af $C_0(G)$ ind i $C_0(G)$ gælder nemlig for $f \in D(N)$ at
$$\int_0^t P_s(\tau_x f)\,ds = \int_0^t \tau_x(P_s f)\,ds = \tau_x\left(\int_0^t P_s f\,ds\right)$$
og sidste led konvergerer mod $\tau_x(Nf)$. Altså må $\tau_x f \in D(N)$ og $N(\tau_x f) = \tau_x(Nf)$. Antages nu at $\mathcal{K}(G) \subseteq D(N)$ vil N's restriktion til $\mathcal{K}(G)$ definere en translationsinvariant kontinuert kerne, der går mod 0 i ∞, og ifølge sætning 6.1 findes et positivt mål κ på G der går mod 0 i ∞ så
$$Nf(x) = \kappa * f \qquad \text{for } f \in \mathcal{K}(G),\ x \in G.$$

For $f \in \mathcal{K}_+(G)$, $x \in G$, følger af sætningen om monoton konvergens af integraler, at
$$Nf(x) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t P_s f(x)\,ds = \int_0^\infty P_s f(x)\,ds,$$

specielt

$$\varkappa(f) = N\check{f}(0) = \int_0^\infty P_s\check{f}(0)\,ds = \int_0^\infty \mu_s(f)\,ds .$$

Dette viser, at $(\mu_t)_{t\geq 0}$ er transient og at $\varkappa$ er potentialkernen.

Antag omvendt at $(\mu_t)_{t\geq 0}$ er transient og at potentialkernen $\varkappa$ går mod 0 i ∞.

For $f \in \mathcal{K}_+(G)$, $t>0$, vil funktionen

$$f^t = \int_0^t P_s f\,ds$$

tilhøre $C_0^+(G)$ og $f^{t_1} \leq f^{t_2}$ for $t_1 \leq t_2$. Af sætningen om monoton konvergens af integraler fås

$$\lim_{t\uparrow\infty} f^t(x) = \lim_{t\uparrow\infty} \int_0^t \mu_s(\tau_x \check{f})\,ds = \int_0^\infty \mu_s(\tau_x\check{f})\,ds = \varkappa * f(x).$$

Vi skal vise at f^t faktisk konvergerer uniformt mod $\varkappa * f$ når $t \to \infty$. Da $\varkappa * f \in C_0(G)$ findes til $\varepsilon>0$ en kompakt mængde L så $\varkappa * f(x) \leq \varepsilon$ for alle $x \in G\setminus L$. Ifølge Dini's sætning vil $f^t \to \varkappa * f$ uniformt over L, så derfor findes t_0 så

$$|\varkappa * f(x) - f^t(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for } x\in L,\ t \geq t_0,$$

men da

$$0 \leq f^t(x) \leq \varkappa * f(x) \leq \varepsilon \quad \text{for } x \in G\setminus L,\ t \text{ vilkårligt},$$

fås

$$\|\varkappa * f - f^t\| \leq \varepsilon \qquad \text{for } t \geq t_0 .$$

Dette viser at $f \in \mathcal{D}(N)$ og at $Nf = \varkappa * f$ for vilkårligt $f \in \mathcal{K}_+(G)$, men så vil $\mathcal{K}(G) \subseteq \mathcal{D}(N)$, og $(P_t)_{t\geq 0}$ er integrabel. ∎

Eksempler. a) Den Brownske semigruppe er integrabel for $n \geq 3$, fordi den er transient og potentialkernen går mod 0 i ∞.

b) Den Poissonske semigruppe er ikke integrabel. Semigruppen er transient, men potentialkernen går ikke mod 0 i ∞.

Vi vil nu vise et kriterium for integrabilitet af en Feller semigruppe. Det bygger på følgende generelle resultat:

Sætning 6.13. Lad Φ være en lokalt integrabel funktion på G, så det derved bestemte mål $\mu = \Phi dx$ er positiv definit. Det Fouriertransformerede mål $\mathcal{F}_G \mu$ er et positivt mål, der går mod 0 i ∞.

Bevis. Ifølge lemma 6.5 gælder for $f \in \mathcal{K}(G)$ at

$$\int_G f^* * f(x)\, \Phi(x)\, dx = \int_\Gamma |\overline{\mathcal{F}}_G f(\eta)|^2 \, d\mathcal{F}_G \mu(\eta).$$

Erstattes $f \in \mathcal{K}(G)$ for hvert $\gamma \in \Gamma$ af $f_\gamma \in \mathcal{K}(G)$ defineret ved $f_\gamma(x) = \overline{\gamma(x)} f(x)$, finder vi under benyttelse af formlerne

$$f_\gamma^* * f_\gamma(x) = \overline{\gamma(x)}\, f^* * f(x), \quad \overline{\mathcal{F}}_G f_\gamma(\eta) = \mathcal{F}_G f(\gamma - \eta),$$

at

$$\int \overline{\gamma(x)}\, f^* * f(x)\, \Phi(x)\, dx = \mathcal{F}_G \mu * |\mathcal{F}_G f|^2(\gamma).$$

Dette viser, at $\mathcal{F}_G \mu * |\mathcal{F}_G f|^2$ er den Fouriertransformerede af den integrable funktion $(f^* * f)\Phi$, og derfor vil $\mathcal{F}_G \mu * |\mathcal{F}_G f|^2$ gå mod 0 i ∞. For hvert $\varphi \in \mathcal{K}_+(\Gamma)$ findes $f \in \mathcal{K}(G)$ så

$$\varphi \le |\mathcal{F}_G f|^2 ,$$

men så må også $\mathcal{F}_G \mu * \varphi$ gå mod 0 i ∞. $\square$

Sætning 6.14 Hvis $\frac{1}{\psi}$ er lokalt integrabel er Feller-semigruppen integrabel. Potentialkernen κ er givet ved

$$\kappa = \mathcal{F}_\Gamma\left(\frac{1}{\psi} d\gamma\right).$$

Bevis. Fra sætning 3.19 vides at målene $\frac{1}{\psi} d\gamma$ og $\frac{1}{\overline{\psi}} d\gamma$ er positiv definite.

Den Fouriertransformerede $\tilde{\kappa} = \mathcal{F}_\Gamma\left(\frac{1}{\overline{\psi}} d\gamma\right)$ er ifølge sætning 6.13 et positivt mål på G, der går mod 0 i ∞. For alle $f \in \mathcal{K}(\Gamma)$ gælder

$$\int_G |\overline{\mathcal{F}}_\Gamma f|^2 \, d\tilde{\kappa} = \int_\Gamma f^* * f \, \frac{1}{\overline{\psi}} \, d\gamma ,$$

og

$$\int_G |\overline{\mathcal{F}}_\Gamma f|^2 \, d\rho_\lambda = \int_\Gamma f^* * f \, \frac{1}{\overline{\psi} + \lambda} \, d\gamma ,$$

og af sætningen om majoriseret konvergens, jfr. beviset for sætning 3.19, fås

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_\Gamma f^* * f \, \frac{1}{\overline{\psi} + \lambda} \, d\gamma = \int_\Gamma f^* * f \, \frac{1}{\overline{\psi}} \, d\gamma ,$$

altså

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_G |\overline{\mathcal{F}}_\Gamma f|^2 \, d\rho_\lambda = \int_G |\overline{\mathcal{F}}_\Gamma f|^2 \, d\tilde{\kappa} .$$

For hvert $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ findes $f \in \mathcal{K}(\Gamma)$ så $\varphi \le |\overline{\mathcal{F}}_\Gamma f|^2$, hvoraf

$$\lim_{\lambda\to 0} \rho_\lambda(\varphi) \le \lim_{\lambda\to 0} \int |\overline{\mathcal{F}}_\Gamma f|^2 d\rho_\lambda = \int |\overline{\mathcal{F}}_\Gamma f|^2 d\tilde{\kappa} < \infty.$$

Dette viser at semigruppen $(\mu_t)_{t\ge 0}$ er transient. Kaldes potentialkernen som sædvanlig for κ, har vi for alle $f \in \mathcal{K}(\Gamma)$ ifølge formel (5') at

$$\kappa(|\overline{\mathcal{F}}_\Gamma f|^2) = \lim_{\lambda\to 0} \rho_\lambda(|\overline{\mathcal{F}}_\Gamma f|^2) = \tilde{\kappa}(|\overline{\mathcal{F}}_\Gamma f|^2) = \int f^* * f \, \frac{1}{\psi}\, dy .$$

Dette viser at både κ og $\tilde{\kappa}$ opfylder de ligninger, der ifølge lemma 6.5 karakteriserer den Fouriertransformerede af det positiv definite mål $\frac{1}{\psi}dy$. Altså er $\kappa = \tilde{\kappa}$, og sætning 6.12 viser, at Feller semigruppen "$P_t = \mu_t *$" er integrabel. ▯

<u>Bemærkning.</u> Der findes integrable Feller semigrupper for hvilke $\frac{1}{\psi}$ ikke er lokalt integrabel.

<u>Definition.</u> En foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t\ge 0}$ kaldes <u>symmetrisk</u>, hvis alle målene μ_t er symmetriske.

Ensbetydende hermed er, at den associerede negativ definite funktion er reel. (Se p. 66).

For en symmetrisk semi-gruppe $(\mu_t)_{t\ge 0}$ er alle målene μ_t positiv definite. Det følger f. eks. af at

$$\hat{\mu}_t(y) = e^{-t\psi(y)} \ge 0 ,$$

da $\psi(y)$ er reel, men også af at $\mu_t = \mu_{\frac{t}{2}} * \mu_{\frac{t}{2}} = \mu_{\frac{t}{2}} * \check{\mu}_{\frac{t}{2}}$.

<u>Sætning 6.15</u>. Lad $(\mu_t)_{t\geq 0}$ være en symmetrisk foldningssemigruppe. Så er følgende betingelser ensbetydende:

a) $(\mu_t)_{t\geq 0}$ er transient.

b) Den inducerede Feller semigruppe er integrabel.

c) $\frac{1}{\psi}$ er lokalt integrabel på Γ.

Bevis. a) $\Rightarrow$ c) følger af sætning 6.4. c) $\Rightarrow$ b) følger af sætning 6.14. b) $\Rightarrow$ a) følger af sætning 6.12.

Bemærk, at vi i beviset ikke har benyttet den ubeviste del af sætning 6.9. $\square$

<u>Eksempel.</u> Den stabile semigruppe $(\mu_t^\alpha)_{t\geq 0}$ af orden α, $0<\alpha\leq 2$, på $\mathbb{R}^n$ er fastlagt ved at den associerede negativ definite funktion ψ er $\psi(y)=\|y\|^\alpha$.

Ved hjælp af sætning 6.15 kan vi afgøre, hvilke af de stabile semigrupper der er transiente.

Funktionen $\frac{1}{\|y\|^\alpha}$ er lokalt integrabel på $\mathbb{R}^n$ hvis og kun hvis

$$\int_{\|y\|\leq 1} \frac{1}{\|y\|^\alpha}\,dy < \infty .$$

<u>n=1.</u> Der gælder

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{|y|^\alpha}\,dy < \infty \quad \text{hvis og kun hvis} \quad \alpha < 1 .$$

<u>n=2</u>. Indføres polære koordinater $y = re^{i\theta}$ fås, idet $dy = r\,dr\,d\theta$, at

$$\int_{\|y\|\leq 1} \frac{1}{\|y\|^\alpha}\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{1}{r^\alpha}\,r\,dr\right)d\theta = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha-1}}\,dr < \infty$$

hvis og kun hvis $\alpha < 2$.

$\underline{n \geq 3.}$ Vi indfører polære koordinater $y = r\xi$, hvor $r = \|y\|$, $\|\xi\| = 1$. Hvis $d\xi$ betegner overflademålet på enhedssfæren $\Omega_n = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \|\xi\| = 1\}$ har vi $dy = r^{n-1}dr\,d\xi$. Den totale masse af Ω_n betegnes ω_n. Vi finder da

$$\int_{\|y\| \leq 1} \frac{1}{\|y\|^\alpha} dy = \int_{\Omega_n} \left(\int_0^1 \frac{1}{r^\alpha} r^{n-1} dr \right) d\xi = \omega_n \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1-n}} dr < \infty$$

hvis og kun hvis $\alpha + 1 - n < 1$, altså $\alpha < n$, men samtidig betragter vi jo kun α så $0 < \alpha \leq 2$. Dermed er alle de stabile semigrupper transiente for $n \geq 3$.

Vi anfører uden bevis potentialkernen i de transiente tilfælde, $0 < \alpha < \inf(n,2)$, $\alpha = 2$ for $n \geq 3$:

$$\kappa = \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{1}{\|y\|^{n-\alpha}} dy .$$

HARMONISK ANALYSE
og
POTENTIALTEORI

Forelæsninger foråret 1974
ved Christian Berg.

§7. Potentialteori for en foldningsemigruppe.

Vi har tidligere, p. 32-33, defineret foldning af begrænsede mål på en LCA-gruppe. Også visse ubegrænsede mål kan foldes, og det får vi brug for i det følgende.

<u>Indskud om produktmål</u>. Lad X og Y være lokalkompakte rum, og lad μ og ν være positive mål på henholdsvis X og Y. Det kan vises, at for en funktion $f \in \mathcal{K}(X \times Y)$ er funktionerne

$$x \mapsto \int f(x,y)\, d\nu(y)$$

og

$$y \mapsto \int f(x,y)\, d\mu(x)$$

kontinuerte med kompakt støtte, således at integralerne

$$\int \left(\int f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

og

$$\int \left(\int f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

eksisterer. Videre kan man vise:

$\forall f \in \mathcal{K}(X \times Y)$:

$$\int \left(\int f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int \left(\int f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) .$$

Afbildningen, der til $f \in \mathcal{K}(X \times Y)$ knytter den fælles værdi af dobbeltintegralerne, er åbenbart lineær og positiv, altså et positivt mål på $X \times Y$; det kaldes produktmålet af μ og ν og betegnes $\mu \otimes \nu$.

For net $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ og $(\nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ af positive mål, der konvergerer vagt mod positive mål μ og ν, gælder, at nettet $(\mu_\alpha \otimes \nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ konvergerer vagt mod $\mu \otimes \nu$.

Lad nu G være en LCA-gruppe.

<u>Lemma 7.1.</u> For vilkårlige positive mål μ og ν på G gælder for alle $f \in \mathcal{K}_+(G)$, at

$$\int f(x+y)\, d\mu \otimes \nu\, (x,y) =$$

$$\int \left(\int f(x+y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int \left(\int f(x+y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x),$$

og dette tal er ≥ 0, evt. $= +\infty$.

Bevis: Lad g være funktionen på $G \times G$ defineret ved

$$g(x,y) = f(x+y) \quad \text{for alle } x, y \in G$$

Da g er kontinuert og ≥ 0, gælder $g = \sup A$, hvor A er

$$\{\varphi \in \mathcal{K}_+(G \times G) \mid \varphi \leq g\},$$

jvfr. Mat 6, Top. opg. 36. Da A er opad filtrerende, gælder for hvert $y \in G$, at

$$\sup_{\varphi \in A} \int \varphi(x,y)\, d\mu(x) = \int \sup_{\varphi \in A} \varphi(x,y)\, d\mu(x) =$$

$$\int g(x,y)\, d\mu(x),$$

jvfr. Mat. 6, Mål. sætning 3.4, p. 11. Da mængden

$$\left\{ \int \varphi(x,y)\, d\mu(x) \mid \varphi \in A \right\}$$

tillige er opad filtrerende er, ifgl. samme sætning:

$$\sup_{\varphi \in A} \int \left(\int \varphi(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int \left(\sup_{\varphi \in A} \int \varphi(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Vi har da: $\int g\, d(\mu \otimes \nu) = \sup_{\varphi \in A} \int \varphi\, d(\mu \otimes \nu) =$

$$\sup_{\varphi \in A} \int \left(\int \varphi(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int \left(\sup_{\varphi \in A} \int \varphi(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) =$$

$$\int \left(\int g(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

På tilsvarende måde vises, at:

$$\int g \, d(\mu \otimes \nu) = \int \left(\int g(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x). \qquad \square$$

Definition Lad μ og ν være positive mål på G. Vi siger, at μ og ν kan foldes, eller at foldningen $\mu * \nu$ existerer, såfremt:

$$\forall f \in \mathcal{K}_+(G): \int_{G \times G} f(x+y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y) < +\infty$$

I bekræftende fald er afbildningen, der til $f \in \mathcal{K}_+(G)$ lader svare

$$\int_{G \times G} f(x+y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y)$$

additiv og positiv homogen, og har derfor en entydig udvidelse til en positiv, lineær funktional på $\mathcal{K}(G)$, altså et positivt mål på G. Dette mål kaldes foldningen af μ og ν og betegnes $\mu * \nu$. Bemærk, at der ifgl. lemma 7.1. gælder:

$$\int f(z) \, d\mu * \nu(z) = \int f(x+y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y) =$$

$$\int \left(\int f(x+y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int \left(\int f(x+y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x),$$

eller med en kortere skrivemåde:

$$\langle f, \mu * \nu \rangle = \langle f * \check{\mu}, \nu \rangle = \langle f * \check{\nu}, \mu \rangle$$

for alle $f \in \mathcal{K}_+(G)$ og dermed ved linearitet for alle $f \in \mathcal{K}(G)$. For begrænsede mål stemmer foldningen altså overens med den tidligere definerede foldning.

Bemærkninger. Af definitionen fremgår klart, at foldningen er kommutativ i den forstand, at $\mu * \nu$ eksisterer, hvis og kun hvis $\nu * \mu$ eksisterer, og i bekræftende fald har man

$$\mu * \nu = \nu * \mu .$$

Foldningen behøver derimod ikke at være associativ, se lemma 7.3. og det efterfølgende eksempel.

Lemma 7.2. Lad μ være et fra nulmålet forskelligt positivt mål på G. Der gælder da:

a) Til hver kompakt mængde $K \subseteq G$ findes en funktion $f \in \mathcal{K}_+(G)$, så $\mu * f \geq 1_K$.

b) Til hver funktion $f \in \mathcal{K}_+(G)$ findes en funktion $g \in \mathcal{K}_+(G)$, så $\mu * g \geq f$.

Bevis: Ad. a) Da $\mu \neq 0$ findes $g \in \mathcal{K}_+(G)$ så $\langle g, \mu \rangle > 0$. For hvert $x \in G$ gælder om funktionen $\mu * (\tau_x \check{g})$, at

$$\mu * (\tau_x \check{g})(x) = \int (\tau_x \check{g})(x-y)\, d\mu(y) =$$

$$\int \check{g}(-y)\, d\mu(y) = \langle g, \mu \rangle > 0 .$$

Da $\mu * (\tau_x \check{g})$ er kontinuert, sætning I 2.4. a. findes en omegn $\mathcal{O}_x$ af x, så:

$$\forall y \in \mathcal{O}_x : \mu * (\tau_x \check{g})(y) > 0 .$$

Da K er kompakt findes endelig mange punkter $x_1, x_2, \dots, x_p \in K$, så

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} \mathcal{O}_{x_j} .$$

Sættes nu $h = \sum_{j=1}^{p} \tau_{x_j} \check{g} \in \mathcal{K}_+(G)$ gælder derfor

$$\mu * h(y) = \sum_{j=1}^{p} \mu * (\tau_{x_j} \check{g})(y) > 0 ,$$

for alle $y \in K$. For et passende $\lambda > 0$ gælder derfor

$$\mu * (\lambda h)(y) > 1 \quad \text{for alle } y \in K .$$

Idet vi sætter $\lambda h = f$, har vi $\mu * f \geq 1_K$.

Ad. b). Iflg. a) findes $h \in \mathcal{K}_+(G)$ med $\mu * h \geq 1_K$ hvor $K = \operatorname{supp}(f)$. Da er

$$\mu * \left(\left(\sup_{x \in K} f(x) \right) \cdot h \right) \geq \left(\sup_{x \in K} f(x) \right) \cdot 1_K \geq f . \qquad \square$$

<u>Lemma 7.3.</u> Lad μ, ν og τ være positive mål på G og lad μ være forskelligt fra nulmålet. Hvis

foldningerne $\mu * \nu$ og $(\mu * \nu) * \tau$ eksisterer, så eksisterer også $\nu * \tau$ og $\mu * (\nu * \tau)$, og der gælder

$$(\mu * \nu) * \tau = \mu * (\nu * \tau).$$

Bevis: Vi viser først, at ν og τ kan foldes. Lad $f \in \mathcal{K}_+(G)$. Da $\check{\mu} \neq 0$ findes ifgl. lemma 7.2.6. en funktion $g \in \mathcal{K}_+(G)$ med $f \leq \check{\mu} * g$. Heraf får vi:

$$\int \left(\int f(x+y) \, d\nu(x) \right) d\tau(y) \leq \int \left(\int \check{\mu} * g(x+y) \, d\nu(x) \right) d\tau(y) =$$

$$\int \left(\int \left(\int g(x+y+z) \, d\mu(z) \right) d\nu(x) \right) d\tau(y) =$$

$$\int \left(\int g(v+y) \, d(\mu * \nu)(v) \right) d\tau(y) < \infty,$$

fordi $\mu * \nu$ og τ kan foldes. Altså eksisterer $\nu * \tau$. Videre eksisterer $\mu * (\nu * \tau)$, og der gælder

$$\mu * (\nu * \tau) = (\mu * \nu) * \tau,$$

thi for alle $f \in \mathcal{K}_+(G)$ er

$$\int \int f(x+y) \, d\mu(x) \, d(\nu * \tau)(y) =$$

$$\int \int \int f(x+(z+v)) \, d\mu(x) \, d\nu(z) \, d\tau(v) =$$

$$\int \int \int f((x+z)+v) \, d\mu(x) \, d\nu(z) \, d\tau(v) =$$

$$\int \int f(w+v) \, d(\mu * \nu)(w) \, d\tau(v) =$$

$$\int f \, d([\mu * \nu] * \tau) < \infty,$$

fordi foldningen $(\mu * \nu) * \tau$ eksisterer. $\square$

<u>Exempel</u>. Lad $G = \mathbb{R}$ og $\mu = 0$, $\nu = \tau =$ Lebesguemålet på $\mathbb{R}$. Foldningerne $\mu * \nu$ og $(\mu * \nu) * \tau$ existerer, og $\mu * \nu = 0$, $(\mu * \nu) * \tau = 0$; men som man let ser, kan ν og τ ikke foldes. Forudsætningen $\mu \neq 0$ i ovenstående sætning er altså <u>væsentlig</u>.

Der gælder, at et positivt mål μ altid kan foldes med et positivt mål ν med kompakt støtte, thi for $f \in \mathcal{K}_+(G)$ er $\check{\nu} * f \in \mathcal{K}_+(G)$, idet

$$\operatorname{supp}(\check{\nu} * f) \subseteq \operatorname{supp} f - \operatorname{supp} \nu,$$

og dermed er $\langle \mu, \check{\nu} * f \rangle < \infty$.

<u>Sætning 7.4.</u> Lad μ være et positivt begrænset mål og ν et positivt translationsbegrænset mål. Da kan μ og ν foldes.

Bevis: Da ν er translationsbegrænset, se p. 225 er også $\check{\nu}$ translationsbegrænset; altså er $\check{\nu} * f$ en kontinuert begrænset funktion for hvert $f \in \mathcal{K}_+(G)$, og da en kontinuert begrænset funktion er integrabel m. h. t. et begrænset mål, fås:

$$< \mu, \check{\nu} * f > \; < \; \infty . \qquad \square$$

<u>Exempel</u>. Et positivt, positiv definit mål er translationsbegrænset, sætning 6.3. p 226, og kan derfor foldes med et begrænset positivt mål μ, og

$$\omega_G * \mu = \mu(G)\, \omega_G ,$$

thi for $f \in \mathcal{K}_+(G)$, har man

$$< f, \omega_G * \mu > \; = \; < f * \check{\omega}_G, \mu > \; = \int f * \check{\omega}_G(x)\, d\mu(x) =$$

$$\iint f(x+y)\, d\omega_G(y)\, d\mu(x) =$$

$$\int \left(\int f(y)\, d\omega_G(y) \right) d\mu(x) \; = \; \mu(G) \int f\, d\omega_G .$$

De efterfølgende sætninger udtaler sig om sammenhængen mellem foldning og vag grænseovergang. Betragt positive mål μ og ν, som kan foldes og net $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ og $(\nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ af positive mål, således at $\mu_\alpha * \nu_\alpha$ eksisterer for hvert $\alpha \in A$. Antag at

$$\mu_\alpha \to \mu \text{ vagt og } \nu_\alpha \to \nu \text{ vagt}.$$

Man bemærker, at der <u>ikke</u> behøver at gælde

$$\mu_\alpha * \nu_\alpha \to \mu * \nu \quad .$$

Se f. ex. på: $G = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $\mu_n = \varepsilon_n$ og $\nu_n = \varepsilon_{-n}$.

<u>Sætning 7.5.</u> Lad μ, ν og τ være positive mål, og lad $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(\nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ og $(\tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ være net af positive mål, som konvergerer vagt mod henholdsvis μ, ν og τ. Hvis det for hvert $\alpha \in A$ gælder, at μ_α og ν_α kan foldes, og at $\mu_\alpha * \nu_\alpha \leq \tau_\alpha$, så kan μ og ν foldes, og $\mu * \nu \leq \tau$.

Bevis: Lad $f \in \mathcal{K}_+(G)$. For en vilkårlig funktion $\varphi \in \mathcal{K}_+(G \times G)$, der opfylder $\varphi(x,y) \leq f(x+y)$, gælder:

$$\int \varphi(x,y)\, d(\mu_\alpha \otimes \nu_\alpha)(x,y) \leq$$

$$\int f(x+y)\, d(\mu_\alpha \otimes \nu_\alpha)(x,y) =$$

$$\int f\, d(\mu_\alpha * \nu_\alpha) \leq \int f\, d\tau_\alpha .$$

Idet $\mu_\alpha \otimes \nu_\alpha \to \mu \otimes \nu$, jvfr. indskud om produktmål p. 254, og $\tau_\alpha \to \tau$ vagt, sluttes heraf, at

$$\int \varphi(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) \leq \int f\, d\tau .$$

Da $f(x+y) =$

$$\sup\{\varphi(x,y) \mid \varphi \in \mathcal{K}_+(G\times G) \text{ og } \forall z,v \in G: \varphi(z,v) \le f(x,y)\}$$

fås

$$\int f(x+y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) =$$

$$\sup \int \varphi(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) \le \int f\, d\tau < \infty,$$

altså, at μ og ν kan foldes, og at $\mu * \nu \le \tau$. $\square$

<u>Sætning 7.6.</u> Lad μ og ν være positive mål, og lad $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ og $(\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ være monotont voksende net af positive mål, som konvergerer vagt mod henholdsvis μ og ν. Hvis det for hvert $\alpha \in A$ gælder at μ_α og ν_α kan foldes, og hvis der findes et positivt mål λ, så

$$\forall \alpha \in A: \mu_\alpha * \nu_\alpha \le \lambda,$$

da kan μ og ν foldes, og man har, at nettet $(\mu_\alpha * \nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ konvergerer vagt mod $\mu * \nu$.

Bevis: For hvert $f \in \mathcal{K}_+(G)$ er nettet

$$(\langle f, \mu_\alpha * \nu_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$$

voksende og begrænset af $\langle f, \lambda\rangle$; det har altså en grænseværdi $\lambda_0(f)$. Afbildningen

$$f \longmapsto \lambda_0(f)$$

udvides ved linearitet til en positiv linearform λ_0 på $\mathcal{K}(G)$. Der gælder

$$\mu_\alpha * \nu_\alpha \to \lambda_0 \quad \text{vagt}$$

ifgl. definitionen på λ_0. For hvert $\alpha \in A$ er åbenbart $\mu_\alpha * \nu_\alpha \leq \lambda_0$. Sætning 7.5. giver da, at μ og ν kan foldes, og at $\mu * \nu \leq \lambda_0$. Da $\mu_\alpha \leq \mu$ og $\nu_\alpha \leq \nu$ for alle $\alpha \in A$ er $\mu_\alpha * \nu_\alpha \leq \mu * \nu$ for alle $\alpha \in A$. Ved vag grænseovergang får vi da, at $\lambda_0 \leq \mu * \nu$, og vi har derfor $\lambda_0 = \mu * \nu$, og dermed som ønsket

$$\mu_\alpha * \nu_\alpha \to \mu * \nu \quad \text{vagt}. \qquad \square$$

<u>Øvelse 7.1.</u> Lad $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ og $(\nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ være monotont aftagende net af positive mål og antag, at $\mu_\alpha * \nu_\alpha$ eksisterer for alle $\alpha \in A$. Så eksisterer de vage grænseværdier

$$\mu = \lim_{\alpha \in A} \mu_\alpha \quad \text{og} \quad \nu = \lim_{\alpha \in A} \nu_\alpha,$$

og μ og ν kan foldes. Der gælder endvidere

$$\mu * \nu = \lim_{\alpha \in A} (\mu_\alpha * \nu_\alpha).$$

<u>Øvelse 7.2.</u> Lad $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ og $(\nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ være konvergente net af positive mål med grænse-

værdier μ og ν. Hvis der findes en kompakt mængde K, så

$$\forall \alpha \in A : \operatorname{supp} \nu_\alpha \subseteq K$$

kan μ_α og ν_α foldes for alle $\alpha \in A$, og man har den vage grænseværdi

$$\lim_{\alpha \in A} (\mu_\alpha * \nu_\alpha) = \mu * \nu .$$

<u>Sætning 7.7.</u> Lad λ og ν være positive mål og λ forskellig fra nul-målet. Lad $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ være et net af positive mål, der konvergerer vagt mod målet μ. Antag, at for ethvert $\alpha \in A$ kan μ_α foldes med λ og

$$\mu_\alpha * \lambda \leq \nu .$$

Lad endvidere ρ være et positivt mål, der kan foldes med ν. Så eksisterer foldningerne $\mu_\alpha * \rho$ og $\mu * \rho$, og man har den vage grænseværdi

$$\lim_{\alpha \in A} (\mu_\alpha * \rho) = \mu * \rho$$

Bevis: Da $\mu_\alpha * \lambda \leq \nu$, og da ν og ρ kan foldes, er det klart, at også $(\mu_\alpha * \lambda) * \rho$ eksisterer. Da $\lambda \neq 0$, følger af lemma 7.2., at $\mu_\alpha * \rho$ eksisterer. Af sætning 7.4. følger, at $\mu * \lambda$ eksisterer, og at $\mu * \lambda \leq \nu$. Heraf ses, at $\mu * \rho$ eksisterer. Lad nu $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$. For hvert $\psi \in \mathcal{K}_+(G)$, så $\psi \leq \check{\rho} * \varphi$ får man så:

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \lim_{\alpha \in A} \langle \mu_\alpha, \varphi \rangle$$
$$\leq \liminf_{\alpha \in A} \langle \mu_\alpha, \check{\rho} * \varphi \rangle$$
$$= \liminf_{\alpha \in A} \langle \mu_\alpha * \rho, \varphi \rangle,$$

og heraf fås

$$\langle \mu * \rho, \varphi \rangle \leq \liminf_{\alpha \in A} \langle \mu_\alpha * \rho, \varphi \rangle .$$

Vi skal nu indse uligheden

$$\limsup_{\alpha \in A} \langle \mu_\alpha * \rho, \varphi \rangle \leq \langle \mu * \rho, \varphi \rangle .$$

Af lemma 7.2. følger, at vi kan vælge $h \in \mathcal{K}_+(G)$, så $\varphi \leq \check{\lambda} * h$.

Lad nu K være en kompakt delmængde af G, og lad ρ_K betegne restriktionen af ρ til K. Vi betragter nu

$$\rho_K' = \rho - \rho_K .$$

Man ser, at når K vokser mod G, vil nettet $(\rho_K')_K$ aftage monotont, og det vil gå vagt mod 0.

Af øvelse 7.2. følger, at nettet $(\nu * \rho_K')_K$ går vagt mod 0.

Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes da en kompakt mængde $K \subseteq G$, så

$$< \nu * \rho_K' , h > \leq \varepsilon ,$$

og derfor er

$$\limsup_{\alpha \in A} < \mu_\alpha * \rho , \varphi > \leq$$

$$\limsup_{\alpha \in A} < \mu_\alpha * \rho_K , \varphi > + \limsup_{\alpha \in A} < \mu_\alpha * \rho_K' , \varphi > \leq$$

$$< \mu * \rho_K , \varphi > + \limsup_{\alpha \in A} < \mu_\alpha * \rho_K' , \check{\lambda} * h > \leq$$

$$< \mu * \rho_K , \varphi > + < \nu * \rho_K' , h > \leq$$

$$< \mu * \rho_K , \varphi > + \varepsilon \leq < \mu * \rho , \varphi > + \varepsilon ,$$

og da $\varepsilon > 0$ er vilkårligt valgt, får vi

$$\limsup_{\alpha \in A} < \mu_\alpha * \rho , \varphi > \leq < \mu * \rho , \varphi > . \qquad \square$$

<u>Lemma 7.8.</u> Lad A være en mængde af positive Radonmål på G. Da er følgende to betingelser ensbetydende:

i) A er vagt begrænset.

ii) A er relativ kompakt i den vage topologi.

Bevis: ii) $\Rightarrow$ i) klart.

i) $\Rightarrow$ ii). Den vage afslutning af A er også vagt begrænset. Vi har derfor

$$\forall f \in \mathcal{K}(G) : \sup_{\mu \in A} |\langle \mu, f \rangle| = a_f < \infty .$$

Lad nu $\grave{F}$ være et ultrafilter på $\bar{A}$, og lad afbildningen π_f være defineret ved

$$\pi_f : \mu \longmapsto \langle \mu, f \rangle .$$

Vi har da, at $\pi_f(\grave{F})$ er en ultrafilterbasis på den kompakte mængde

$$A_f = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq a_f \},$$

og da er $\pi_f(\grave{F})$ konvergent. Vi sætter

$$\lim \pi_f(\grave{F}) = \lambda_0(f),$$

og man ser, at λ_0 er en positiv linearform på $\mathcal{K}(G)$, altså et positivt Radonmål. Vi har da

$$\grave{F} \rightarrow \lambda_0 \quad \text{vagt},$$

og dermed er A relativ kompakt i den vage topologi. $\square$

<u>Sætning 7.9.</u> Lad $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ være en familie af positive mål på G, og antag, at der findes et positivt mål λ, med $\lambda\neq 0$, så $\lambda * \mu_\alpha$ eksisterer for alle $\alpha\in A$.

Hvis familien $(\lambda*\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ er vagt begrænset er også familien $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ vagt begrænset.

Bevis: Lad $f\in\mathcal{K}_+(G)$. Vi skal vise, at

$$\sup_{\alpha\in A} \langle \mu_\alpha, f\rangle < \infty.$$

Da $\lambda\neq 0$, findes $g\in\mathcal{K}_+(G)$, så $f\leq \check{\lambda}*g$, se lemma 7.2. b). Ifgl. forudsætningen er

$$\sup_{\alpha\in A} \langle \lambda*\mu_\alpha, g\rangle < \infty.$$

Vi har da: $\langle \mu_\alpha, f\rangle \leq \langle \mu_\alpha, \check{\lambda}*g\rangle = \langle \lambda*\mu_\alpha, g\rangle$

$$\leq \sup_{\alpha\in A}\langle \lambda*\mu_\alpha, g\rangle < \infty,$$

hvoraf ses

$$\sup_{\alpha\in A}\langle \mu_\alpha, f\rangle < \infty.$$

$\square$

For et positivt mål $\varkappa$ på G indføres betegnelsen

$$D^+(\varkappa) = \{\mu\in RM_+(G) \mid \varkappa*\mu \text{ eksisterer}\}.$$

Man ser, at $D^+(\varkappa)$ er en konveks kegle. Hvis $\mu \in D^+(\varkappa)$, og hvis ν er et positivt mål, så $\nu \leq \mu$, vil også $\nu \in D^+(\varkappa)$.

<u>Definition</u>. Lad $\varkappa$ være et positivt mål på G. Lad der være givet et $\mu \in D^+(\varkappa)$ og en åben mængde $\omega \subseteq G$.

Vi siger, at et positivt mål $\mu^\omega \in D^+(\varkappa)$ er et <u>$\varkappa$-fejet mål af μ på ω</u>, såfremt:

1° $\operatorname{supp} \mu^\omega \subseteq \overline{\omega}$

2° $\varkappa * \mu^\omega \leq \varkappa * \mu$

3° $\varkappa * \mu^\omega |_\omega = \varkappa * \mu |_\omega$.

Mængden af $\varkappa$-fejede mål af μ på ω betegnes $\mathcal{F}_\varkappa(\omega, \mu)$, eller undertiden blot $\mathcal{F}(\omega, \mu)$.

Man har, at $\mathcal{F}_\varkappa(\omega, \mu)$ er en konveks delmængde af $D^+(\varkappa)$. Det kan tænkes, at $\mathcal{F}_\varkappa(\omega, \mu) = \emptyset$ for visse ω og μ.

Lad $\mathcal{M}^+_\varkappa(G)$ betegne mængden af de positive mål med kompakt støtte på G.

Vi siger, at $\varkappa$ opfylder <u>fejningsprincippet</u>, hvis der for enhver åben relativ kompakt mængde $\omega \subseteq G$ og ethvert $\mu \in \mathcal{M}^+_{\mathcal{H}}(G)$ findes et $\mathcal{H}$-fejet mål af μ på ω, altså såfremt $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\omega,\mu) \neq \emptyset$.

Videre siges $\mathcal{H}$ at opfylde fejningsprincippet for enhver åben mængde, såfremt der for enhver åben mængde ω og ethvert $\mu \in D^+(\mathcal{H})$ findes et $\mathcal{H}$-fejet mål af μ på ω, altså såfremt $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\omega,\mu) \neq \emptyset$.

Man ser, at den sidste egenskab medfører den første.

Øvelse 7.3. Lad $\mathcal{H}$ være et positivt mål, som ikke er nulmålet. For enhver åben relativ kompakt mængde og for ethvert $\mu \in D^+(\mathcal{H})$ er $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\omega,\mu)$ en kompakt konveks mængde i den vage topologi.

Vi stiler mod at vise, at potentialkernen for en foldningssemigruppe opfylder fejningsprincippet for enhver åben mængde. For at vise dette, vil vi studere en speciel type foldningssemigrupper.

Lad μ være et positivt mål på LCA-gruppen G, med totalmasse $\mu(G) \leq 1$. Vi har tidligere defineret en foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$ ud fra μ ved:

$$(1) \qquad \mu_t = e^{-t}\exp(t\mu) = e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\mu^n}{n!}, \quad t>0,$$

se øvelse III 3.9. Den tilhørende negativ definite funktion er

$$\psi(\gamma) = 1 - \hat{\mu}(\gamma) \qquad , \gamma \in \Gamma,$$

thi

$$\hat{\mu}_t(\gamma) = e^{-t} \exp(t\,\hat{\mu}(\gamma)) = e^{-t(1-\hat{\mu}(\gamma))} = e^{-t\psi(\gamma)}.$$

Resolventmålene $(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$ er defineret ved

$$\rho_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t \, dt .$$

For $f \in \mathcal{K}_+(G)$ får vi:

$$\rho_\lambda(f) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t(f) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-t} \Big(\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} \mu^n(f) \Big) dt$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-(\lambda+1)t} \frac{t^n}{n!} dt \Big) \mu^n(f)$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{1}{\lambda+1} \Big)^{n+1} \mu^n(f),$$

og vi har derfor

$$\rho_\lambda = \frac{1}{1+\lambda} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(1+\lambda)^n} \mu^n .$$

For hvert $f \in \mathcal{K}_+(G)$ har vi:

$$\lim_{\lambda \to 0} \varrho_\lambda(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n(f),$$

og heraf ses, at semigruppen $(\mu_t)_{t>0}$ er <u>transient</u>, hvis og kun hvis den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$$

er vagt konvergent, og i bekræftende fald er den potentialkerne for semigruppen $(\mu_t)_{t>0}$.

<u>Definition</u>. Ved en <u>elementær kerne</u> forstås potentialkernen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$$

for en <u>transient</u> foldningssemigruppe af typen

$$\mu_t = e^{-t} \exp(t\mu),$$

hvor μ er et positivt mål, med totalmasse $\mu(G) \leq 1$.

Lad nu $(\mu_t)_{t>0}$ være en transient foldnings-semigruppe med potentialkerne

$$\varkappa = \int_0^\infty \mu_t \, dt.$$

Den tilhørende negativ definite funktion betegnes ψ, og resolventmålene kaldes $(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$.

Sætning 7.10. For hvert $\lambda > 0$ er

$$\lambda \varkappa + \varepsilon_0$$

en elementær kerne, idet der gælder

$$\lambda \varkappa + \varepsilon_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \rho_\lambda)^n .$$

Bevis: For hver $\lambda' \in]0, \lambda[$ har vi

$$(2) \qquad \rho_{\lambda'} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda')^n (\rho_\lambda)^{n+1} ,$$

thi ved Fouriertransformation opnår man:

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda')^n (\rho_\lambda)^{n+1} \right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda')^n \frac{1}{(\psi + \lambda)^{n+1}} = \frac{1}{\psi + \lambda} \frac{1}{1 - \frac{\lambda - \lambda'}{\psi + \lambda}} =$$

$$\frac{1}{\psi + \lambda'} = \mathcal{F} \rho_{\lambda'} .$$

Lader vi nu $\lambda' \downarrow 0$ i formel (2), får vi

$$\varkappa = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_\lambda^{\,n+1} ,$$

Indhold.

<u>Kapitel III.</u> Foldningssemigrupper.

§ 7. Potentialteori for en foldningssemigruppe. 253

§ 8. Associerede kerner. 335

§ 9. Fuldstandig monotone funktioner og Bernštein-funktioner. 394

Rettelser og tilføjelser. 434

§ 7. Potentialteori for en foldningssemigruppe.

Vi har tidligere (p. 32 - 33) defineret foldning af begrænsede mål på en LCA-gruppe. Også visse ubegrænsede mål kan foldes, og det får vi brug for i det følgende.

Indskud om produktmål. Lad X og Y være lokalkompakte rum, og lad μ og ν være positive mål på henholdsvis X og Y. Det kan vises, at for en funktion $f \in \mathcal{K}(X \times Y)$ er funktionerne

$$x \to \int f(x,y)\, d\nu(y)$$

og

$$y \to \int f(x,y)\, d\mu(x)$$

kontinuerte med kompakt støtte, således at integralerne

$$\int \left(\int f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

og

$$\int \left(\int f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

eksisterer. Videre kan vises:

$\forall f \in \mathcal{K}(X \times Y):$

$$\int \Big(\int f(x,y)\, d\mu(x) \Big) d\nu(y) = \int \Big(\int f(x,y)\, d\nu(y) \Big) d\mu(x).$$

Afbildningen, der til $f \in \mathcal{K}(X \times Y)$ knytter den fælles værdi af dobbeltintegralerne, er åbenbart lineær og positiv, altså et positivt mål på $X \times Y$; det kaldes produktmålet af μ og ν og betegnes $\mu \otimes \nu$.

For net $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ og $(\nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ af positive mål, der konvergerer vagt mod positive mål μ og ν, gælder, at nettet $(\mu_\alpha \otimes \nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ konvergerer vagt mod $\mu \otimes \nu$.

Lad nu G være en LCA-gruppe.

<u>Lemma 7.1</u> For vilkårlige positive mål μ og ν på G gælder for alle $f \in \mathcal{K}_+(G)$, at

$$\int f(x+y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) =$$

$$\int \Big(\int f(x+y)\, d\mu(x) \Big) d\nu(y) = \int \Big(\int f(x+y)\, d\nu(y) \Big) d\mu(x)$$

og dette tal ≥ 0, evt. $= +\infty$.

Bevis: Lad g være funktionen på $G \times G$ defineret ved

$$g(x,y) = f(x+y) \qquad \text{for alle } x, y \in G$$

Da g er kontinuert og ≥ 0, galder $g = \sup A$, hvor A er mangden

$$\{ \varphi \in \mathcal{K}_+(G \times G) \mid \varphi \leq g \}$$

(jvfr. Mat 6, Top. opg. 36). Da A er opad filtrerende, galder for hvert $y \in G$, at

$$\sup_{\varphi \in A} \int \varphi(x,y)\, d\mu(x) = \int \sup_{\varphi \in A} \varphi(x,y)\, d\mu(x) =$$

$$\int g(x,y)\, d\mu(x)$$

(jvfr. Mat 6, Mål. satn. 3.4, p. 11).
Da $\{ \int \varphi(x,y)\, d\mu(x) \mid \varphi \in A \}$ tillige er opad filtrerende, er (ifgl. samme satning):

$$\sup_{\varphi \in A} \int \left(\int \varphi(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) =$$

$$\int \left(\sup_{\varphi \in A} \int \varphi(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Ialt fås:

$$\int g\, d(\mu \otimes \nu) = \sup_{\varphi \in A} \int \varphi\, d(\mu \otimes \nu)$$

$$= \sup_{\varphi \in A} \int \left(\int \varphi(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

$$= \int \left(\sup_{\varphi \in A} \int \varphi(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

$$= \int \left(\int g(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

På tilsvarende måde vises

$$\int g \, d(\mu \otimes \nu) = \int \left(\int g(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x). \quad \square$$

<u>Definition</u>. Lad μ og ν være positive mål på G. Vi siger, at μ og ν kan foldes, eller at foldningen $\mu * \nu$ eksisterer, såfremt:

$$\forall f \in \mathcal{K}_+(G): \int_{G \times G} f(x+y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y) < \infty .$$

I bekræftende fald er afbildningen, der til $f \in \mathcal{K}_+(G)$ lader svare

$$\int_{G \times G} f(x+y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y)$$

additiv, positiv og homogen, og har derfor en entydig udvidelse til en positiv, lineær funktional på $\mathcal{K}(G)$, altså et positivt mål på G. Dette mål kaldes foldningen af μ og ν og betegnes $\mu * \nu$.

Bemærk, at der ifgl. lemma 7.1 gælder

$$\int f(z) \, d(\mu * \nu)(z) = \int f(x+y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y) =$$

$$\int \left(\int f(x+y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int \left(\int f(x+y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x),$$

eller med en kortere skrivemåde

$$\langle f, \mu * \nu \rangle = \langle f * \check{\mu}, \nu \rangle = \langle f * \check{\nu}, \mu \rangle$$

for alle $f \in \mathcal{K}_+(G)$ og dermed ved linearitet for alle $f \in \mathcal{K}(G)$. For begrænsede mål stemmer foldningen altså overens med den tidligere definerede foldning.

<u>Bemærkninger</u>. 1) Af definitionen fremgår umiddelbart, at foldningen er kommutativ i den forstand, at $\mu * \nu$ existerer, hvis og kun hvis $\nu * \mu$ existerer, og i bekræftende fald haves:

$$\mu * \nu = \nu * \mu .$$

2) Foldningen behøver derimod ikke at være associativ (se lemma 7.3. og det efterfølgende exempel).

<u>Lemma 7.2.</u> Lad μ være et fra nulmålet forskelligt positivt mål på G. Der gælder:

a) Til hver kompakt mængde $K \subseteq G$ findes en funktion $f \in \mathcal{K}_+(G)$ så $\mu * f \geq 1_K$.

b) Til hver funktion $f \in \mathcal{K}_+(G)$ findes en funktion $g \in \mathcal{K}_+(G)$ så $\mu * g \geq f$.

Bevis: Da $\mu \neq 0$ findes $g \in \mathcal{K}_+(G)$ så $\langle g, \mu \rangle > 0$. For hver $x \in G$ gælder om funktionen $\mu * (\tau_x \check{g})$, at

$$\mu * (\tau_x \check{g})(x) = \int (\tau_x \check{g})(x-y)\, d\mu(y) =$$

$$\int \check{g}(-y)\, d\mu(y) = \langle g, \mu \rangle > 0 .$$

Da $\mu * (\tau_x \check{g})$ er kontinuert (sæt. I 2.4 a) findes en omegn $\mathcal{O}_x$ om x så:

$$\forall y \in \mathcal{O}_x : \mu * (\tau_x \check{g})(y) > 0 .$$

Da K er kompakt findes endelig mange punkter $x_1, x_2, \ldots, x_p \in K$, så

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{O}_{x_i} .$$

Sættes nu $h = \sum_{i=1}^{p} \tau_{x_i} \check{g} \in \mathcal{K}_+(G)$ gælder derfor

$$\mu * h(y) = \sum_{i=1}^{p} \mu * (\tau_{x_i} \check{g})(y) > 0$$

for alle $y \in K$. For et passende $\lambda > 0$ gælder derfor

$$\mu * (\lambda h)(y) > 0 \qquad \text{for alle } y \in K.$$

Idet vi sætter $f = \lambda h$, har vi $\mu * f \geq 1_K$. Hermed er a) vist.

b) Ifgl. a) findes $h \in \mathcal{K}_+(G)$ med $\mu * h \geq 1_K$, hvor $K = \text{supp}(f)$. Da er

$$\mu * \left(\left(\sup_{x \in K} f(x) \right) \cdot h \right) \geq \left(\sup_{x \in K} f(x) \right) \cdot 1_K \geq f . \quad \square$$

<u>Lemma 7.3</u>. Lad μ, ν og τ være positive mål på G og lad μ være forskelligt fra nul-

målet. Hvis foldningerne $\mu * \vartheta$ og $(\mu * \vartheta) * \tau$ eksisterer, så eksisterer også $\vartheta * \tau$ og $\mu * (\vartheta * \tau)$, og der gælder

$$(\mu * \vartheta) * \tau = \mu * (\vartheta * \tau).$$

Bevis: Vi viser først at ϑ og τ kan foldes. Lad $f \in \mathcal{K}_+(G)$. Da $\check{\mu} \neq 0$ findes ifgl. lemma 7.2. b. en funktion $g \in \mathcal{K}_+(G)$ med $f \leq \check{\mu} * g$. Heraf får vi da:

$$\int \left(\int f(x+y)\, d\vartheta(x) \right) d\tau(y) \leq \int \left(\int \check{\mu} * g(x+y)\, d\vartheta(x) \right) d\tau(y)$$

$$= \int \left[\int \left(\int g(x+y+z)\, d\mu(z) \right) d\vartheta(x) \right] d\tau(y)$$

$$= \int \left[\int g(v+y)\, d(\mu * \vartheta)(v) \right] d\tau(y) < \infty,$$

fordi $\mu * \vartheta$ og τ kan foldes. Altså eksisterer $\vartheta * \tau$. Videre eksisterer $\mu * (\vartheta * \tau)$, og der gælder

$$\mu * (\vartheta * \tau) = (\mu * \vartheta) * \tau,$$

thi for alle $f \in \mathcal{K}_+(G)$ er

$$\iint f(x+y)\, d\mu(x)\, d(\vartheta * \tau)(y) =$$

$$\iiint f(x + [z+v])\, d\mu(x)\, d\vartheta(z)\, d\tau(v) =$$

$$\iiint f([x+z]+v)\, d\mu(x)\, d\vartheta(z)\, d\tau(v) =$$

$$\int\int f(w+v)\, d(\mu * \nu)(w)\, d\tau(v) =$$

$$\int f \; d([\mu * \nu] * \tau) \quad < \quad \infty,$$

fordi foldningen $(\mu * \nu) * \tau$ existerer. $\square$

Exempel. Lad $G = \mathbb{R}$ og $\mu = 0$, $\nu = \tau =$ Lebesgue-målet på $\mathbb{R}$. Foldningerne $\mu * \nu$ og $(\mu * \nu) * \tau$ existerer; $\mu * \nu = 0$ og $(\mu * \nu) * \tau = 0$, men som man let ser, kan ν og τ ikke foldes. Forudsætningen $\mu \neq 0$ i ovenstående sætning er altså væsentlig.

Der gælder, at et positivt mål μ altid kan foldes med et positivt mål ν med kompakt støtte, thi for $f \in \mathcal{K}_+(G)$ er $\check{\nu} * f \in \mathcal{K}_+(G)$, idet $\operatorname{supp}(\check{\nu} * f) \subseteq \operatorname{supp} f - \operatorname{supp} \nu$, og dermed er $\langle \mu, \check{\nu} * f \rangle < \infty$.

Sætning 7.4. Lad μ være et positivt begrænset mål og ν et positivt translationsbegrænset mål. Da kan μ og ν foldes.

Bevis: Da ν er translationsbegrænset (se p. 225) er også $\check{\nu}$ translationsbegrænset; altså er $\check{\nu} * f$ en kontinuert begrænset funktion for hvert $f \in \mathcal{K}_+(G)$, og da en kontinuert begrænset funktion er integrabel m. h. t. et begrænset mål fås

$$< \mu, \check{\nu} * f > \quad < \infty. \qquad \text{II}$$

<u>Exempel</u>. Et positivt, positiv definit mål er translationsbegrænset (sætn. 6.3, p. 226) og kan derfor foldes med et begrænset positivt mål. Specielt kan Haarmålet ω_G på G foldes med ethvert begrænset positivt mål μ, og $\omega_G * \mu = \mu(G)\,\omega_G$, fordi der for alle $f \in \mathcal{K}_+(G)$ gælder:

$$< f, \omega_G * \mu > = < f * \check{\omega}_G, \mu > =$$

$$\int f * \check{\omega}_G(x)\, d\mu(x) =$$

$$\iint f(x+y)\, d\omega_G(y)\, d\mu(x) =$$

$$\int \Big[\int f(y)\, d\omega_G(y) \Big]\, d\mu(x) = \mu(G) \int f\, d\omega_G .$$

De følgende sætninger udtaler sig om sammenhængen mellem foldning og vag grænseovergang. Betragt positive mål μ og ν, som kan foldes og net $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ og $(\nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ af positive mål, således at $\mu_\alpha * \nu_\alpha$ eksisterer for hvert $\alpha \in A$. Antag, at

$$\mu_\alpha \to \mu \text{ vagt og } \nu_\alpha \to \nu \text{ vagt}.$$

Bemærk, at der *ikke* behøver at gælde

$$\mu_\alpha * \nu_\alpha \to \mu * \nu.$$

Se f. ex. på : $G = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $\mu_n = \varepsilon_n$ og $\nu_n = \varepsilon_{-n}$.

Sætning 7.5. Lad μ, ν og τ være positive mål, og lad $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(\nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ og $(\tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ være net af positive mål, som konvergerer vagt mod henholdsvis μ, ν og τ. Hvis det for hvert $\alpha \in A$ gælder, at μ_α og ν_α kan foldes, og at $\mu_\alpha * \nu_\alpha \leq \tau_\alpha$, så kan μ og ν foldes og $\mu * \nu \leq \tau$.

Bevis: Lad $f \in \mathcal{K}_+(G)$. For en vilkårlig funktion $\varphi \in \mathcal{K}_+(G \times G)$ opfyldende $\varphi(x,y) \leq f(x+y)$, gælder:

$$\int \varphi(x,y)\, d(\mu_\alpha \otimes \nu_\alpha)(x,y) \leq$$

$$\int f(x+y)\, d(\mu_\alpha \otimes \nu_\alpha)(x,y) =$$

$$\int f\, d(\mu_\alpha * \nu_\alpha) \leq \int f\, d\tau_\alpha .$$

Idet $\mu_\alpha \otimes \nu_\alpha \to \mu \otimes \nu$ (jvfr. indskud om produktmål p. 254) og $\tau_\alpha \to \tau$ vagt sluttes heraf, at

$$\int \varphi(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) \leq \int f\, d\tau .$$

Da $f(x+y) =$

$$\sup\{\varphi(x,y) \mid \varphi \in \mathcal{K}_+(G\times G),\ \forall z,v\in G: \varphi(z,v) \leq f(z+v)\}$$

fås

$$\int f(x+y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) =$$

$$\sup \int \varphi(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) \leq$$

$$\int f\, d\tau \quad < \quad \infty,$$

altså, at μ og ν kan foldes, og at $\mu * \nu \leq \tau$. $\square$

<u>Sætning 7.6.</u> Lad μ og ν være positive mål, og lad $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ og $(\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ være monotont voksende net af positive mål, som konvergerer vagt mod henholdsvis μ og ν. Hvis det for hvert $\alpha \in A$ gælder, at μ_α og ν_α kan foldes, og hvis der findes et positivt mål λ, så $\mu_\alpha * \nu_\alpha \leq \lambda$ for alle $\alpha \in A$, da kan μ og ν foldes, og nettet $(\mu_\alpha * \nu_\alpha)$ konvergerer vagt mod $\mu * \nu$.

Bevis: For hvert $f \in \mathcal{K}_+(G)$ er nettet $(\langle f, \mu_\alpha * \nu_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$ voksende og begrænset af $\langle f, \lambda\rangle$; det har altså en grænseværdi $\lambda_0(f)$. Afbildningen

$$f \to \lambda_0(f)$$

udvides ved linearitet til en positiv linearform λ_0 på $\mathcal{K}(G)$. Der gælder

$$\mu_\alpha * \nu_\alpha \to \lambda_0 \quad \text{vagt}$$

ifgl. definitionen på λ_0. For hver $\alpha \in A$ er åbenbart $\mu_\alpha * \nu_\alpha \leq \lambda_0$. Sætning 7.5 giver da, at μ og ν kan foldes, og at $\mu * \nu \leq \lambda_0$. Da $\mu_\alpha \leq \mu$ og $\nu_\alpha \leq \nu$ for alle $\alpha \in A$ er $\mu_\alpha * \nu_\alpha \leq \mu * \nu$ for alle $\alpha \in A$. Heraf fås ved vag grænseovergang, at $\lambda_0 \leq \mu * \nu$. Ialt er opnået $\lambda_0 = \mu * \nu$, og dermed som ønsket

$$\mu_\alpha * \nu_\alpha \to \mu * \nu$$

$\square$.

Øvelse 7.1. Lad $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ og $(\nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ være monotont aftagende net af positive mål, og antag at $\mu_\alpha * \nu_\alpha$ eksisterer for alle $\alpha \in A$. Så eksisterer de vage grænseværdier

$$\mu = \lim_{\alpha \in A} \mu_\alpha \quad \text{og} \quad \nu = \lim_{\alpha \in A} \nu_\alpha ,$$

og μ og ν kan foldes. Der gælder videre

$$\mu * \nu = \lim_{\alpha \in A} (\mu_\alpha * \nu_\alpha) .$$

Øvelse 7.2. Lad $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ og $(\nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ være konvergente net af positive mål med grænseværdier μ og ν. Hvis der findes en kompakt mængde K, så

$$\operatorname{supp} \nu_\alpha \subseteq K \quad \text{for alle } \alpha \in A$$

kan μ_α og ν_α foldes for alle $\alpha \in A$ og

$$\lim_{\alpha \in A} (\mu_\alpha * \nu_\alpha) = \mu * \nu \quad \text{vagt}.$$

<u>Sætning 7.7</u> Lad λ og ν være positive mål, og λ forskellig fra nulmålet. Lad $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ være et net af positive mål, der konvergerer vagt mod målet μ. Antag, at for ethvert $\alpha \in A$ kan μ_α foldes med λ og

$$\mu_\alpha * \lambda \leq \nu .$$

Lad endvidere ρ være et positivt mål, der kan foldes med ν. Så eksisterer foldningerne $\mu_\alpha * \rho$ og $\mu * \rho$, og man har

$$\lim_{\alpha \in A} \mu_\alpha * \rho = \mu * \rho \quad \text{vagt}.$$

Bevis: Da $\mu_\alpha * \lambda \leq \nu$, og da ν og ρ kan foldes, er det klart, at også $(\mu_\alpha * \lambda) * \rho$ eksisterer. Da $\lambda \neq 0$, følger af lemma 7.2, at $\mu_\alpha * \rho$ eksisterer.

Af sætning 7.4 følger, at $\mu * \lambda$ eksisterer og $\mu * \lambda \leq \nu$. Heraf ses, at $\mu * \rho$ eksisterer.

Lad nu $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$. For hvert $\psi \in \mathcal{K}_+(G)$, så $\psi \leq \check{\rho} * \varphi$ fås:

$$\begin{aligned} \langle \mu, \psi \rangle &= \lim_{\alpha \in A} \langle \mu_\alpha, \psi \rangle \\ &\leq \liminf_{\alpha \in A} \langle \mu_\alpha, \check{\rho} * \varphi \rangle \\ &= \liminf_{\alpha \in A} \langle \mu_\alpha * \rho, \varphi \rangle , \end{aligned}$$

og heraf fås

$$\langle \mu * \rho, \varphi \rangle \leq \liminf_{\alpha \in A} \langle \mu_\alpha * \rho, \varphi \rangle .$$

Vi skal nu indse uligheden

$$\limsup_{\alpha \in A} \langle \mu_\alpha * \rho, \varphi \rangle \leq \langle \mu * \rho, \varphi \rangle .$$

Af lemma 7.2. følger, at vi kan vælge $h \in \mathcal{K}_+(G)$, så $\varphi \leq \check{\lambda} * h$.

Lad nu K være en kompakt delmængde af G, og lad ρ_K betegne restriktionen af ρ til K. Betragt nu $\rho_K' = \rho - \rho_K$. Man ser, at når K vokser mod G, vil nettet $(\rho_K')_K$ aftage monotont og gå vagt mod 0.

Af sætning 7.2 følger, at nettet $(\nu * \rho_K')_K$ går vagt mod 0.

Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes da en kompakt mængde $K \subseteq G$, så

$$< \nu * \rho_K' , h > \leq \varepsilon$$

og derfor er

$$\limsup_{\alpha \in A} < \mu_\alpha * \rho , \varphi > \leq$$

$$\limsup_{\alpha \in A} < \mu_\alpha * \rho_K , \varphi > + \limsup_{\alpha \in A} < \mu_\alpha * \rho_K' , \varphi > \leq$$

$$< \mu * \rho_K , \varphi > + \limsup_{\alpha \in A} < \mu_\alpha * \rho_K' , \check{\lambda} * h > \leq$$

$$< \mu * \rho_K , \varphi > + < \nu * \rho_K' , h > \leq$$

$$< \mu * \rho_K , \varphi > + \varepsilon \leq < \mu * \rho , \varphi > + \varepsilon ,$$

og da ε er vilkårlig, fås:

$$\limsup_{\alpha \in A} < \mu_\alpha * \rho , \varphi > \leq < \mu * \rho , \varphi > . \quad \square$$

<u>Lemma 7.8</u> Lad A være en mængde af positive Radonmål på G. Da er følgende betingelser ensbetydende

i) A er vagt begrænset.

ii) A er relativt kompakt i den vage topologi.

Bevis: ii) $\Rightarrow$ i) klart.

i) $\Rightarrow$ ii) Den vage afslutning af A er også vagt begrænset, altså

$$\forall f \in \mathcal{K}(G): \sup_{\mu \in A} |\langle \mu, f \rangle| = a_f < \infty.$$

Lad nu Φ være et ultrafilter på $\bar{A}$ og π_f afbildningen:

$$\pi_f : \mu \to \langle \mu, f \rangle,$$

da er $\pi_f(\Phi)$ en ultrafilterbasis på mængden

$$\mathfrak{A}_f = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \le a_f \}$$

og derfor konvergent. Vi sætter

$$\lambda_0(f) = \lim \pi_f(\Phi).$$

Man ser, at λ_0 er en positiv linearform på $\mathcal{K}(G)$, altså et positivt Radonmål. Vi har da

$$\Phi \to \lambda_0 \quad \text{vagt},$$

og dermed er A relativ kompakt i den vage topologi. $\blacksquare$

<u>Sætning 7.9</u> Lad $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ være en familie af positive mål på G, og antag, at der findes et positivt mål $\lambda \neq 0$, så $\lambda * \mu_\alpha$ eksisterer for alle $\alpha \in A$.

Hvis familien $(\lambda * \mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ er vagt begrænset er også familien $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ vagt begrænset.

Bevis: Lad $f \in \mathcal{K}_+(G)$. Vi skal vise, at

$$\sup_{\alpha \in A} \langle \mu_\alpha, f \rangle < \infty$$

Da $\lambda \neq 0$, findes $g \in \mathcal{K}_+(G)$, så $f \leq \check{\lambda} * g$ (se lemma 7.2. b). Ifgl. forudsætningen er

$$\sup_{\alpha \in A} \langle \lambda * \mu_\alpha, g \rangle < \infty .$$

Vi har da:

$$\langle \mu_\alpha, f \rangle \leq \langle \mu_\alpha, \check{\lambda} * g \rangle = \langle \lambda * \mu_\alpha, g \rangle \leq$$

$$\sup_{\alpha \in A} \langle \lambda * \mu_\alpha, g \rangle < \infty ,$$

hvoraf ses

$$\sup_{\alpha \in A} \langle \mu_\alpha, f \rangle < \infty . \qquad \square$$

For et positivt mål η på G indføres betegnelsen

$$D^+(\eta) = \{ \mu \in RM_+(G) \mid \eta * \mu \text{ eksisterer} \} .$$

Så er $D^+(\eta)$ en konveks kegle. Hvis $\mu \in D^+(\eta)$, og hvis ν er et positivt mål, så $\nu \leq \mu$, vil også $\nu \in D^+(\eta)$.

<u>Definition</u> Lad $\varkappa$ være et positivt mål på G. Lad der være givet et $\mu \in D^+(\varkappa)$ og en åben mængde $\omega \subseteq G$.

Vi siger, at et positivt mål $\mu^\omega \in D^+(\varkappa)$ er et <u>$\varkappa$-fejet mål af μ på</u> ω, såfremt:

1° $\operatorname{supp} \mu^\omega \subseteq \overline{\omega}$.

2° $\varkappa * \mu^\omega \leq \varkappa * \mu$.

3° Restriktionen af $\varkappa * \mu^\omega$ og $\varkappa * \mu$ til ω er ens.

Mængden af $\varkappa$-fejede mål af μ på ω betegnes $\mathcal{F}_\varkappa(\omega, \mu)$, eller undertiden blot $\mathcal{F}(\omega, \mu)$.

Mængden $\mathcal{F}_\varkappa(\omega, \mu)$ er en konveks delmængde af $D^+(\varkappa)$. Det kan tænkes, at $\mathcal{F}_\varkappa(\omega, \mu) = \emptyset$ for visse ω og μ.

Lad $\mathcal{M}^+_\mathcal{K}(G)$ betegne de positive mål med kompakt støtte på G.

Vi siger, at $\varkappa$ opfylder <u>fejningsprincippet</u>, hvis der for enhver åben relativ kompakt mængde $\omega \subseteq G$ og ethvert $\mu \in \mathcal{M}^+_\mathcal{K}(G)$ findes et $\varkappa$-fejet mål af μ på ω, altså såfremt $\mathcal{F}_\varkappa(\omega, \mu) \neq \emptyset$.

Videre siges $\varkappa$ at opfylde <u>fejningsprincippet for enhver åben mængde</u>, såfremt der for enhver åben mængde ω og ethvert $\mu \in D^+(\varkappa)$ findes et $\varkappa$-fejet mål af μ på ω, altså såfremt $\mathcal{F}_\varkappa(\omega,\mu) \neq \emptyset$.

Man ser, at den sidste egenskab medfører den første.

<u>Øvelse 7.3</u>. Lad $\varkappa$ være et positivt mål forskelligt fra nulmålet. For enhver åben relativ kompakt mængde og for ethvert $\mu \in D^+(\varkappa)$ er $\mathcal{F}_\varkappa(\omega,\mu)$ en kompakt konveks mængde i den vage topologi.

Vi stiler mod at vise, at potentialkernen for en foldningssemigruppe opfylder fejningsprincippet for enhver åben mængde.

For at vise dette, vil vi studere en speciel type foldningssemigrupper.

Lad μ være et positivt mål på LCA-gruppen G med totalmasse $\mu(G) \leq 1$. Vi har tidligere defineret en foldningssemigruppe ud fra μ ved:

$$\mu_t = e^{-t}\exp(t\mu) = e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\mu^n}{n!} =$$

$$e^{-t}\left(\varepsilon_0 + t\mu + \frac{t^2\mu^2}{2!} + \dots\right), \quad t > 0 \qquad (1)$$

(se øvelse III 3.9). Den tilhørende negative definite funktion er

$$\psi(\gamma) = 1 - \hat{\mu}(\gamma) \quad , \ \gamma \in \Gamma,$$

thi

$$\hat{\mu}(\gamma) = e^{-t} \exp(t\hat{\mu}(\gamma)) = e^{-t + t\hat{\mu}(\gamma)} =$$

$$e^{-t(1-\hat{\mu}(\gamma))} = e^{-t\psi(\gamma)}.$$

Resolventmålene $(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$ er defineret ved

$$\rho_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t \, dt.$$

For $f \in \mathcal{K}_+(G)$ får vi:

$$\rho_\lambda(f) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t(f)\, dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-t} \Big(\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} \mu^n(f) \Big) dt =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-(\lambda+1)t} \frac{t^n}{n!} \, dt \Big) \mu^n(f) =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{1}{\lambda+1} \Big)^{n+1} \mu^n(f),$$

og vi har derfor

$$\rho_\lambda = \frac{1}{1+\lambda} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(1+\lambda)^n} \mu^n.$$

For hvert $f \in \mathcal{K}_+(G)$ har vi:

$$\lim_{\lambda \to 0} \rho_\lambda(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n(f),$$

og heraf ses, at semigruppen $(\mu_t)_{t \geq 0}$ er <u>transient</u>, hvis og kun hvis den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$$

er vagt konvergent, og i bekræftende fald er den potentialkerne for semigruppen $(\mu_t)_{t \geq 0}$.

<u>Definition</u>. Ved en <u>elementær</u> <u>kerne</u> forstås potentialkernen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$$

for en <u>transient</u> semigruppe af typen

$$\mu_t = e^{-t} \exp(t\mu) \quad ,$$

hvor μ er et positivt mål, med $\mu(G) \leq 1$.

Lad nu $(\mu_t)_{t \geq 0}$ være en transient foldningssemigruppe med potentialkerne

$$\varkappa = \int_0^\infty \mu_t \, dt.$$

Den tilhørende negative definite funktion betegnes ψ og resolventmålene $(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$.

<u>Sætning 7.10.</u> For hvert $\lambda > 0$ er

$$\lambda \varkappa + \varepsilon_0$$

en elementær kerne. Mere præcist gælder

$$\lambda \varkappa + \varepsilon_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \rho_\lambda)^n .$$

Bevis: For hvert $\lambda' \in]0, \lambda[$ har vi

$$\rho_{\lambda'} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda')^n (\rho_\lambda)^{n+1} , \qquad (2)$$

thi ved Fouriertransformation har vi

$$\mathcal{F}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda')^n (\rho_\lambda)^{n+1}\Big) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda')^n \frac{1}{(\psi + \lambda)^{n+1}} = \frac{1}{\psi + \lambda} \, \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda - \lambda'}{\psi + \lambda}} =$$

$$\frac{1}{\psi + \lambda'} = \mathcal{F} \rho_{\lambda'} .$$

Lader vi nu $\lambda' \downarrow 0$ i formel (2) fås:

$$\varkappa = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_\lambda^{\,n+1} ,$$

hvoraf
$$\lambda\kappa + \varepsilon_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\rho_\lambda)^n . \qquad \square$$

<u>Definition</u>. Lad $(\mu_t)_{t>0}$ være en transient foldningssemigruppe. Et positivt mål ξ på G kaldes <u>excessivt</u> (resp. <u>invariant</u>) m. h. t. $(\mu_t)_{t>0}$, såfremt $\xi \in D^+(\mu_t)$ og $\mu_t * \xi \leq \xi$ (resp. $\mu_t * \xi = \xi$) for alle $t > 0$.

<u>Sætning 7.11</u>. 1) Mængden $\mathcal{E}$ af excessive mål udgør en konveks kegle, som er vagt afsluttet, infimumstabil og som indeholder Haarmålet ω_G.

2) For hvert $\xi \in \mathcal{E}$ er afbildningen
$$t \mapsto \mu_t * \xi$$
aftagende og
$$\lim_{t\to 0} \mu_t * \xi = \xi \qquad \text{vagt}.$$

3) For hvert $\sigma \in D^+(\kappa)$ er $\xi = \kappa * \sigma$ et excessivt mål, som kaldes κ-<u>potentialet</u> <u>frembragt</u> <u>af</u> σ.

Bevis: 1) Lad $(\xi_i)_{i\in J}$ være et net på $\mathcal{E}$, der konvergerer vagt mod det positive mål ξ.

Af sætning 7.5 følger, at $\xi \in \mathcal{E}$, så $\mathcal{E}$ er vagt afsluttet.

Hvis $(\xi_i)_{i\in J}$ er en familie af excessive mål og

$$\xi_0 = \inf_{i\in J} \xi_i$$

gælder $\xi_0 \leq \xi_i$ for alle $i \in J$, og derfor har vi

$$\xi_0 \in \mathcal{D}^+(\mu_t) \qquad \text{for } t > 0$$

og

$$\mu_t * \xi_0 \leq \mu_t * \xi_i \leq \xi_i .$$

Dette viser, at $\mu_t * \xi_0$ er en minorant for familien $(\xi_i)_{i\in J}$ og følgelig er

$$\mu_t * \xi_0 \leq \xi_0 ,$$

thi ξ_0 er den største minorant.

Af sætning 7.4 følger, at $\omega_G \in \mathcal{D}^+(\mu_t)$ og videre

$$\mu_t * \omega_G = \mu_t(G)\omega_G \leq \omega_G ,$$

da $\mu_t(G) \leq 1$ for alle $t > 0$.

Det er let at se, at $\mathcal{E}$ udgør en konveks kegle.

2) For $\xi \in \mathcal{E}$ og $s, t > 0$ gælder

$$\mu_{t+s} * \xi = \mu_t * \mu_s * \xi \leq \mu_t * \xi$$

så afbildningen $t \mapsto \mu_t * \xi$ er aftagende.

Lad $f \in \mathcal{K}_+(G)$ og A er mængden
$$A = \{\varphi \in \mathcal{K}_+(G) \mid \varphi \leq \check{\xi} * f\}.$$

For $\varphi \in A$ er
$$\langle \mu_t, \varphi \rangle \leq \langle \mu_t, \check{\xi} * f \rangle = \langle \mu_t * \xi, f \rangle,$$
så for $t \to 0$ har man
$$\varphi(0) = \langle \varepsilon_0, \varphi \rangle \leq \lim_{t \to 0} \langle \mu_t * \xi, f \rangle,$$
thi $\langle \mu_t * \xi, f \rangle$ vokser for $t \to 0$, så $\lim_{t \to 0} \langle \mu_t * \xi, f \rangle$ eksisterer, og ved at tage supremum over A fås
$$\langle \xi, f \rangle = \check{\xi} * f(0) = \sup_{\varphi \in A} \varphi(0) \leq \lim_{t \to 0} \langle \mu_t * \xi, f \rangle.$$

På den anden side er
$$\langle \mu_t * \xi, f \rangle \leq \langle \xi, f \rangle \quad \text{for alle } t > 0$$
så
$$\mu_t * \xi \to \xi \quad \text{vagt for } t \to 0.$$

3) Lad $\sigma \in \mathcal{D}^+(\varkappa)$ og sæt $\xi = \varkappa * \sigma$. Potentialkernen $\varkappa$ er translationsbegrænset ifgl. sætning 6.4, og derfor kan $\varkappa$ og μ_t foldes og
$$\mu_t * \varkappa = \int_t^\infty \mu_s \, ds \leq \int_0^\infty \mu_s \, ds = \varkappa$$
så $\varkappa$ er exessivt (udsagnet for $\sigma = \varepsilon_0$).

Af uligheden $\mu_t * \varkappa \le \varkappa$ følger at $(\mu_t * \varkappa) * \sigma$ eksisterer og

$$(\mu_t * \varkappa) * \sigma \le \varkappa * \sigma .$$

Nu er $\mu_t \neq 0$, så $(\mu_t * \varkappa) * \sigma = \mu_t * (\varkappa * \sigma)$ ifgl. lemma 7.3, specielt $\varkappa * \sigma \in \mathcal{D}^+(\mu_t)$ og dermed er $\varkappa * \sigma$ excessivt.

$\square$

<u>Indskud</u>. Vi skal huske at redegøre for formlen

$$\mu_t * \varkappa = \int_t^\infty \mu_s \, ds .$$

For $f \in \mathcal{K}_+(G)$ gælder

$$\check{\varkappa} * f(x) = \int_0^\infty \check{\mu}_s * f(x) \, ds ,$$

så vi har

$$\langle \mu_t , \check{\varkappa} * f \rangle = \int_G \Big(\int_0^\infty \check{\mu}_s * f(x) \, ds \Big) \, d\mu_t(x)$$

$$= \int_0^\infty \langle \mu_t , \check{\mu}_s * f \rangle \, ds ,$$

hvoraf

$$\langle \mu_t * \varkappa , f \rangle = \int_0^\infty \langle \mu_t * \mu_s , f \rangle \, ds$$

$$= \int_t^\infty \langle \mu_s , f \rangle \, ds$$

<u>Sætning 7.12</u>. Et positivt mål ξ er excessivt (resp. invariant) hvis og kun hvis

$$\xi \in \mathcal{D}^+(\rho_\lambda) \text{ og } \lambda\rho_\lambda * \xi \leq \xi$$

$$(\text{resp. } \lambda\rho_\lambda * \xi = \xi \,) \text{ for alle } \lambda > 0.$$

Bevis: Hvis $\xi \in \mathcal{D}^+(\mu_t)$ og $\mu_t * \xi \leq \xi$ (resp. $\mu_t * \xi = \xi$) for alle $t > 0$, har vi

$$\lambda\rho_\lambda * \xi = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \mu_t * \xi \, dt \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \xi \, dt = \xi$$

(resp. $\lambda\rho_\lambda * \xi = \xi$) for alle $\lambda > 0$.

For $t > 0$ og $\lambda > 0$ definerer vi

$$\mu_t^\lambda = e^{-\lambda t} \exp(t\lambda^2 \rho_\lambda)$$

og for fast $\lambda > 0$ er $(\mu_t^\lambda)_{t>0}$ en foldningssemigruppe (jvf. øvelse 3.9. p. 190). Der gælder

$$\widehat{\mu_t^\lambda}(\gamma) = e^{-\lambda t} \exp(t\lambda^2 \hat{\rho}_\lambda(\gamma))$$

$$= \exp\left(-\lambda t + \frac{t\lambda^2}{\psi(\gamma) + \lambda}\right)$$

$$= \exp\left(-t\frac{\lambda\psi(\gamma)}{\psi(\gamma)+\lambda}\right) \quad , \gamma \in \Gamma ,$$

så den tilhørende negativ definite funktion er

$$\psi^\lambda = \frac{\lambda\psi}{\psi + \lambda} ; \quad \widehat{\mu_t^\lambda}(\gamma) = e^{-t\psi^\lambda(\gamma)} ,$$

hvor ψ er den til $(\mu_t)_{t>0}$ hørende negativ definite funktion.

Idet $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \dfrac{\lambda\psi}{\psi+\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \dfrac{\psi}{1+\frac{\psi}{\lambda}} = \psi$

ligeligt over kompakte delmængder af Γ følger af sætning 1.4. p. 143, corollar 1.5. p. 145, at

$$\mu_t^\lambda \to \mu_t$$

i Bernoulli-topologien for $\lambda\to\infty$, for fast t. Semigruppen $(\mu_t^\lambda)_{t>0}$ approximerer altså semigruppen $(\mu_t)_{t>0}$.

Antag nu, at $\xi\in\mathcal{D}^+(\rho_\lambda)$, og at $\lambda\rho_\lambda*\xi\le\xi$ for $\lambda>0$. Heraf ses at

$$(\lambda\rho_\lambda)^n*\xi \le \xi \quad \text{for } n\in\mathbb{N},$$

altså

$$e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\lambda)^n}{n!}(\lambda\rho_\lambda)^n*\xi \le$$

$$e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\lambda)^n}{n!}\xi = \xi .$$

Dette viser, at $\xi\in\mathcal{D}^+(\mu_t^\lambda)$ for alle $t>0$ og $\lambda>0$, og at

$$\mu_t^\lambda*\xi\le\xi .$$

Af sætning 7.5 følger, at $\mu_t*\xi$ eksisterer og at $\mu_t*\xi\le\xi$, altså er ξ excessivt.

Antag dernæst at $\xi \in \mathcal{D}^+(\rho_\lambda)$ og at $\lambda\rho_\lambda * \xi = \xi$ for alle $\lambda > 0$. Af det lige viste følger, at ξ er excessivt, altså $\mu_t * \xi \le \xi$ for alle $t > 0$.

Hvis der findes $t_0 > 0$, så $\mu_{t_0} * \xi \neq \xi$ så findes $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ så

$$< \mu_{t_0} * \xi, \varphi > \;<\; < \xi, \varphi > .$$

Da afbildningen $t \mapsto \mu_t * \xi$ er aftagende ifgl. sætning 7.11. 2), har man

$$< \mu_t * \xi, \varphi > \;<\; < \xi, \varphi > \quad \text{for } t \geq t_0$$

hvoraf

$$< \rho_1 * \xi, \varphi > = \int_0^\infty e^{-t} < \mu_t * \xi, \varphi > dt$$

$$< \int_0^\infty e^{-t} < \xi, \varphi > dt$$

$$= < \xi, \varphi >$$

i modstrid med $\rho_1 * \xi = \xi$. Altså må der gælde

$$\mu_t * \xi = \xi$$

for alle $t > 0$, så ξ er invariant. II

<u>Øvelse 7.4.</u> Lad ξ være et excessivt mål. Der gælder da:

i) Afbildningen $\lambda \mapsto \lambda\rho_\lambda * \xi$ er voksende og $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \rho_\lambda * \xi = \xi$ vagt.

ii) Hvis der findes $t_0 > 0$, så $\mu_{t_0} * \xi = \xi$, eller der findes $\lambda_0 > 0$ så $\lambda_0 \rho_{\lambda_0} * \xi = \xi$, så er ξ invariant.

Lad μ være et positivt mål på G, så $\mu(G) \leq 1$.

<u>Definition</u>. Et positivt mål $\xi \in \mathcal{D}^+(\mu)$ kaldes μ-<u>superharmonisk</u> (resp. μ-<u>harmonisk</u>) såfremt $\mu * \xi \leq \xi$ (resp. $\mu * \xi = \xi$).

Lad os nu betragte foldningssemigruppen af den specielle type

$$\mu_t = e^{-t} \exp(t\mu) \quad , \qquad t > 0$$

associeret med μ. Hvis $(\mu_t)_{t>0}$ er transient er potentialkernen $\varkappa$ givet ved

$$\varkappa = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n .$$

<u>Sætning 7.13</u> Et positivt mål ξ er excessivt (resp. invariant) m.h.t. semigruppen

$$\mu_t = e^{-t} \exp(t\mu)$$

hvis og kun hvis ξ er μ-superharmonisk (resp. μ-harmonisk).

Bevis: Hvis $\xi \in D^+(\mu)$ og $\mu * \xi \le \mu$ får

$$\mu^n * \xi \le \xi \quad \text{for } n \in \mathbb{N}$$

så

$$e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mu^n * \xi \le$$

$$e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \xi = \xi ,$$

hvorfor $\mu_t * \xi$ eksisterer, og $\mu_t * \xi \le \xi$ for $t > 0$, og analogt får $\mu_t * \xi = \xi$, hvis $\mu * \xi = \xi$.

Antag nu, at ξ er excessivt. Da

$$\mu_1 = e^{-1}(\varepsilon_0 + \mu + \ldots + \frac{\mu^n}{n!} + \ldots) \ge$$

$$\frac{e^{-1}}{n!} \mu^n \quad \text{for } n \in \mathbb{N},$$

og da $\xi \in D^+(\mu_1)$, vil også $\xi \in D^+(\mu^n)$ for $n \in \mathbb{N}$, specielt er $\xi \in D^+(\mu)$. Videre har vi

$$e^t \mu_t * \xi = \xi + t\mu * \xi + \frac{t^2}{2!} \mu^2 * \xi + \ldots ,$$

altså

$$\sigma_t = \frac{e^t \mu_t * \xi - \xi}{t} = \mu * \xi + \frac{t}{2!} \mu^2 * \xi + \ldots ,$$

så $\sigma_t \ge 0$ og $\lim_{t \to 0} \sigma_t = \mu * \xi$ vagt.

Imidlertid har vi

$$\sigma_t = \frac{e^t \mu_t * \xi - \xi}{t} \le \frac{e^t \xi - \xi}{t} = \frac{e^t - 1}{t} \xi$$

hvoraf følger

$$\mu * \xi \leq \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} \xi = \xi .$$

Hvis ξ er invariant er $\sigma_t = \frac{e^t - 1}{t} \xi$, hvoraf for $t \to 0$

$$\mu * \xi = \xi . \qquad \blacksquare$$

Lad $(\mu_t)_{t>0}$ være en transient foldningssemigruppe med potentialkerne $\varkappa$. For hvert $\sigma \in D^+(\varkappa)$ og for hvert invariant mål η er

$$\varkappa * \sigma + \eta \qquad (3)$$

et excessivt mål på G. Vi ønsker nu at vise, at ethvert excessivt mål ξ kan fremstilles på formen (3). Dette resultat kaldes <u>Riesz' dekompositionssætning</u> efter F. Riesz.

Vi begynder med at vise (3) for de specielle semigrupper

$$\mu_t = e^{-t} \exp(t\mu) , \quad t > 0 .$$

<u>Sætning 7.14.</u> Lad $\mu_t = e^{-t} \exp(t\mu)$ være en transient foldningssemigruppe med elementarkerne $\varkappa$. Ethvert excessivt mål ξ kan fremstilles på formen

$$\xi = \varkappa * \sigma + \eta ,$$

hvor $\sigma \in D^+(\varkappa)$, og hvor η er invariant.
Fremstillingen er entydig, idet

$$\sigma = \xi - \mu * \xi \quad \text{og} \quad \eta = \lim_{n \to \infty} \mu^n * \xi. \qquad (4)$$

Bevis: Antag, at det excessive mål ξ har en fremstilling af den ønskede form. Hvis $\sigma = 0$, er $\eta = \xi$, og ξ er altså invariant og formlerne (4) passer.

Vi antager nu, at $\sigma \neq 0$. Da μ og ξ kan foldes, kan μ også foldes med $\varkappa * \sigma$ og η, og vi finder

$$\mu * \xi = \mu * (\varkappa * \sigma) + \mu * \eta .$$

Da $\sigma \neq 0$ er

$$\mu * (\varkappa * \sigma) = (\mu * \varkappa) * \sigma ,$$

men

$$\mu * \varkappa = \mu + \mu^2 + \dots = \varkappa - \varepsilon_0 ,$$

så

$$\mu * (\varkappa * \sigma) = (\varkappa - \varepsilon_0) * \sigma = \varkappa * \sigma - \sigma .$$

Hermed fås

$$\mu * \xi = \varkappa * \sigma - \sigma + \eta = \xi - \sigma ,$$

hvoraf

$$\sigma = \xi - \mu * \xi .$$

For $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\mu^n * \xi = \mu^n * (\varkappa * \sigma) + \mu^n * \eta$$
$$= (\mu^n * \varkappa) * \sigma + \eta$$
$$= (\mu^n + \mu^{n+1} + \dots) * \sigma + \eta .$$

Sættes $\vartheta_n = \mu^n + \mu^{n+1} + \dots$, er $(\vartheta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en aftagende følge, der går vagt mod 0. Dette fremgår af, at $(\mu_t)_{t>0}$ er transient. Ifgl. övelse 7.1 vil så

$$\vartheta_n * \sigma \to 0 \quad \text{vagt},$$

altså

$$\eta = \lim_{n \to \infty} \mu^n * \xi \quad \text{vagt}.$$

Vi har hermed vist fremstillingens entydighed.

Lad nu ξ være et excessivt mål og sæt

$$\sigma = \xi - \mu * \xi ,$$

som er et positivt mål. Da

$$\xi \geqslant \mu * \xi \geqslant \mu^2 * \xi \geqslant \dots ,$$

existerer den vage grænseværdi

$$\eta = \lim_{n \to \infty} \mu^n * \xi ,$$

og herved defineres et positivt mål, som er invariant, thi ifgl. sætn. 7.1. har vi

$$\mu * \eta = \lim_{n \to \infty} \mu^{n+1} * \xi = \eta .$$

Vi har

$$\mu^n * \sigma = \mu^n * \xi - \mu^{n+1} * \xi$$

for $n \in \mathbb{N}_0$, hvoraf

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \mu^n \right) * \sigma = \xi - \mu^{N+1} * \xi \leq \xi .$$

Vi sætter nu

$$\chi_N = \sum_{n=0}^{N} \mu^n ,$$

og følgen χ_N er en voksende følge. Vi har

$$\chi_N \to \varkappa \quad \text{vagt} .$$

Af sætning 7.6 fås da for $N \to \infty$

$$\varkappa * \sigma = \xi - \eta ,$$

[herunder fås, at $\sigma \in \mathcal{D}^+(\varkappa)$] eller

$$\xi = \varkappa * \sigma + \eta .$$

Vi har hermed vist fremstillingens eksistens. $\square$

Bemærkning. Ved beviset i sætning 7.14. for fremstillingens entydighed, nåede vi på p. 285 frem til følgende resultat:

$$\varkappa * \mu = \varkappa - \varepsilon_0 ,$$

hvoraf man finder:

$$\varepsilon_0 = \varkappa - \varkappa * \mu = \varkappa * (\varepsilon_0 - \mu) .$$

Vi har således fundet, at målet $(\varepsilon_0 - \mu)$ er det "reciprokke" til potentialkernen $\varkappa$, og man kunne fristes til at skrive

$$\varkappa = \frac{1}{\varepsilon_0 - \mu} .$$

Lemma 7.15. Lad $(\mu_t)_{t \geq 0}$ være en transient foldningssemigruppe med potentialkerne $\varkappa$. Der gælder da:

a) For ethvert mål ξ, der er excessivt m.h.t. $(\mu_t)_{t \geq 0}$ er afbildningen

$$t \mapsto \mu_t * \xi \ : [0, \infty[\ \mapsto RM(G)$$

vagt kontinuert fra højre i ethvert punkt $t_0 \in [0, \infty[$.

b) For ethvert mål $\sigma \in D^+(\varkappa)$ existerer $\mu_t * \sigma$ for alle $t \in [0, \infty[$, og afbildningen

$$t \mapsto \mu_t * \sigma \; : \; [0, \infty[\; \to RM(G)$$

er vagt kontinuert.

Bevis: a) Målet $\mu_{t_0} * \xi$ er excessivt, thi

$$\mu_s * (\mu_{t_0} * \xi) = \mu_{t_0} * (\mu_s * \xi) \leq \mu_{t_0} * \xi$$

for alle $s > 0$. Anvender man sætning 7.11. 2) p. 275 på målet $\mu_{t_0} * \xi$, får man:

$$\mu_s * (\mu_{t_0} * \xi) \to \mu_{t_0} * \xi \quad \text{vagt for} \quad s \to 0,$$

altså

$$\mu_t * \xi \to \mu_{t_0} * \xi \quad \text{vagt for} \quad t \to t_0 \text{ fra højre.}$$

b) I beviset for sætning 7.11. 3) viste vi på p. 277, at $\varkappa$ er excessivt, altså

$$\mu_t * \varkappa \leq \varkappa \quad \text{for alle} \quad t \geq 0,$$

for $t = 0$ står der blot $\varepsilon_0 * \varkappa \leq \varkappa$. Da $\varkappa \neq 0$, og da $\varkappa * \sigma$ existerer, giver sætning 7.7 p. 265, at $\mu_t * \sigma$ existerer for alle $t \geq 0$, og at

$$\mu_t * \sigma \to \mu_{t_0} * \sigma \quad \text{vagt for} \quad t \to t_0 .$$

$\square$

I det følgende vil vi ofte uden kommentar benytte følgende svækkelse af lemma 7.3. p. 258:

For positive mål μ, ν og λ for hvilke $\mu * \nu$ og $(\mu * \nu) * \lambda$ samt $\nu * \lambda$ eksisterer, vil også $\mu * (\nu * \lambda)$ eksistere, og der gælder:

$$(\mu * \nu) * \lambda = \mu * (\nu * \lambda).$$

For $\mu \neq 0$ følger dette af lemma 7.3, og for $\mu = 0$ er det klart, at $\mu * (\nu * \lambda) = 0 * (\nu * \lambda)$ eksisterer, og ligningen udsiger blot, at $0 = 0$.

<u>Sætning 7.16</u> Lad $(\mu_t)_{t>0}$ være en transient foldningssemigruppe med resolventmål $(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$ og potentialkerne κ. Lad ξ være et excessivt mål m.h.t. $(\mu_t)_{t>0}$. Så eksisterer for et fast valgt $\lambda_0 \in]0, \infty[$ de vage grænseværdier:

$$\eta_1 = \lim_{n \to \infty} (\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^n * \xi$$

$$\eta_2 = \lim_{t \to \infty} \mu_t * \xi$$

$$\eta_3 = \lim_{\lambda \to 0} (\lambda \rho_\lambda) * \xi ,$$

og der gælder: $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$. Målet $\eta = \eta_1 = \eta_2 = \eta_3$ er invariant og kaldes <u>den invariante del af</u> ξ.

Bevis: Vi viser først eksistensen af de vage grænseværdier η_1, η_2 og η_3. Derefter ser vi, at de er ens.

Existensen af η_1: Da ξ er excessivt, får vi ved gentagen anvendelse af sætning. 7.12. p. 278:

$$\xi \geq \lambda_0 \rho_{\lambda_0} * \xi \geq (\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^2 * \xi \geq \ldots$$

$$(\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^n * \xi \geq \ldots$$

Derfor existerer den vage grænseværdi

$$\eta_1 = \lim_{n \to \infty} (\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^n * \xi ,$$

altså gælder der

$$(\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^n * \xi \downarrow \eta_1 \quad \text{for } n \uparrow \infty .$$

Hvert af målene $(\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^n * \xi$ er excessivt, thi for alle $t > 0$ er:

$$\mu_t * [(\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^n * \xi] = (\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^n * (\mu_t * \xi)$$

$$\leq (\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^n * \xi .$$

Af sætning 7.11, 1) på p. 275 følger da, at også

$$\eta_1 = \inf_{n \in N} (\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^n * \xi$$

er excessivt. Det er endda invariant, ifgl. øvelse 7.4. ii) p. 282, thi

$$(\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^* \eta_1 = \lim_{n \to \infty} \left((\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^* (\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^n * \xi \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} (\lambda_0 \rho_{\lambda_0})^{n+1} * \xi = \eta_1 .$$

Existensen af η_2: Vi ved fra sætning 7.11 p. 275, at afbildningen

$$t \mapsto \mu_t * \xi$$

er aftagende, og derfor eksisterer den vage grænseværdi

$$\eta_2 = \lim_{t \to \infty} \mu_t * \xi ,$$

og vi har altså

$$\mu_t * \xi \downarrow \eta_2 \quad \text{for } t \uparrow \infty .$$

Da $\eta_2 \leq \xi$, kan η_2 foldes med μ_s for alle $s > 0$, og af øvelse 7.1. p. 264 får man

$$\mu_s * \eta_2 = \lim_{t \to \infty} \left(\mu_s * (\mu_t * \xi) \right)$$

$$= \lim_{t \to \infty} (\mu_{s+t} * \xi) = \eta_2$$

Målet η_2 er således invariant.

Existensen af η_3. Af øvelse 7.4. i) p. 281 fås, at afbildningen

$$\lambda \mapsto \lambda \rho_\lambda * \xi$$

er voksende. Vi har da, at den vage grænseværdi

$$\eta_3 = \lim_{\lambda \to 0} (\lambda \rho_\lambda * \xi)$$

existerer, og der gælder altså

$$\lambda \rho_\lambda * \xi \downarrow \eta_3 \quad \text{for} \quad \lambda \downarrow 0.$$

Vi viser nu, at målet η_3 er invariant. For $\lambda, \lambda' > 0$ har vi nemlig <u>resolventligningen</u>

$$\rho_{\lambda'} = \rho_\lambda + (\lambda - \lambda') \rho_{\lambda'} * \rho_\lambda ,$$

thi ved Fouriertransformation fås:

$$\mathcal{F}(\rho_\lambda + (\lambda - \lambda')\rho_{\lambda'} * \rho_\lambda) = \mathcal{F}\rho_\lambda + (\lambda - \lambda')\mathcal{F}\rho_{\lambda'} \mathcal{F}\rho_\lambda =$$

$$\frac{1}{\psi + \lambda} + \frac{\lambda - \lambda'}{(\psi + \lambda')(\psi + \lambda)} = \frac{1}{\psi + \lambda'} = \mathcal{F}\rho_{\lambda'} ,$$

idet ψ er den til $(\mu_t)_{t>0}$ hørende negative definite funktion. Ved brug af resolventligningen får vi nu:

$$\lambda'\rho_{\lambda'} * (\lambda\rho_\lambda * \xi) = (\lambda'\rho_{\lambda'} * \lambda\rho_\lambda) * \xi$$

$$= \frac{\lambda'\lambda}{\lambda - \lambda'} (\rho_{\lambda'} - \rho_\lambda) * \xi$$

$$= \frac{\lambda'\lambda}{\lambda - \lambda'} \rho_{\lambda'} * \xi - \frac{\lambda'}{\lambda - \lambda'} (\lambda\rho_\lambda * \xi),$$

for $\lambda' \neq \lambda$. For hvert $\lambda' > 0$ gælder altså, med brug af øvelse 7.1:

$$\lambda'\rho_{\lambda'} * \eta_3 = \lim_{\lambda \to 0} (\lambda'\rho_{\lambda'} * (\lambda\rho_\lambda * \xi))$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{\lambda'\lambda}{\lambda - \lambda'} \rho_{\lambda'} * \xi - \frac{\lambda'}{\lambda - \lambda'} (\lambda\rho_\lambda * \xi) \right)$$

$$= 0 - (-\eta_3) = \eta_3 ,$$

hvoraf man ser, at η_3 er invariant.

Vi skal nu indse, at $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$. Da η_1 er invariant, gælder for alle $t > 0$, at

$$\eta_1 = \mu_t * \eta_1 \leq \mu_t * \xi ,$$

hvoraf $\eta_1 \leq \lim_{t \to \infty} \mu_t * \xi = \eta_2$.

Da η_2 er invariant, fås ved gentagen brug af sætning 7.12, at

$$\eta_2 \leq \lim_{n \to \infty} ((\lambda_0\rho_{\lambda_0})^n * \xi) = \eta_1 ,$$

altså er $\eta_1 = \eta_2$.

Da η_2 er invariant, får af sætning 7.12, at

$$\eta_2 = (\lambda\rho_\lambda) * \eta_2 \leq (\lambda\rho_\lambda) * \xi$$

for alle $\lambda > 0$, hvoraf

$$\eta_2 \leq \lim_{\lambda \to 0} ((\lambda\rho_\lambda) * \xi) = \eta_3 .$$

Da η_3 er invariant, gælder for alle $t > 0$, at

$$\eta_3 = \mu_t * \eta_3 \leq \mu_t * \xi$$

hvoraf $\eta_3 \leq \lim_{t \to \infty} (\mu_t * \xi) = \eta_2$,

altså er $\eta_2 = \eta_3$. $\square$

<u>Sætning 7.17</u> (<u>Riesz' dekompositionssætning</u>).

Lad $(\mu_t)_{t>0}$ være en transient foldningssemigruppe med potentialkerne $\varkappa$. Ethvert mål ξ, der er ekscessivt m. h. t $(\mu_t)_{t>0}$ kan fremstilles på formen

$$\xi = \varkappa * \sigma + \eta ,$$

hvor $\sigma \in \mathcal{D}^+(\varkappa)$ og η er invariant. Fremstillingen er entydig, idet η er den invariante del af ξ, og

σ er bestemt ved

$$\sigma = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\xi - \mu_t * \xi).$$

Bevis: Antag først, at $\xi = \varkappa * \sigma + \eta$, hvor $\sigma \in D^+(\varkappa)$, og η er invariant. Vi skal vise, at

$$\sigma = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\xi - \mu_t * \xi),$$

og

$$\eta = \lim_{t \to \infty} \mu_t * \xi,$$

altså, at η er den invariante del af ξ.

For alle $t > 0$ gælder, idet

$$\mu_t * (\varkappa * \sigma) = (\mu_t * \varkappa) * \sigma$$

og

$$\mu_t * \eta = \eta,$$

at

$$\begin{aligned}
\xi - \mu_t * \xi &= (\varkappa * \sigma) + \eta - (\mu_t * (\varkappa * \sigma) + \mu_t * \eta) \\
&= (\varkappa - \mu_t * \varkappa) * \sigma \\
&= \left(\int_0^\infty \mu_s \, ds - \int_t^\infty \mu_s \, ds \right) * \sigma \\
&= \int_0^t \mu_s * \sigma \, ds,
\end{aligned}$$

hvoraf man nu får:

$$\frac{1}{t}(\xi - \mu_t * \xi) = \frac{1}{t}\int_0^t \mu_s * \sigma \, ds \rightarrow \varepsilon_0 * \sigma$$

for $t \to 0$, ifgl. lemma 7.15; altså er

$$\sigma = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\xi - \mu_t * \xi).$$

For alle $t > 0$ er

$$\begin{aligned}
\eta = \mu_t * \eta &= \mu_t * \xi - \mu_t * (\varkappa * \sigma) \\
&= \mu_t * \xi - (\mu_t * \varkappa) * \sigma \\
&= \mu_t * \xi - \int_t^\infty \mu_s * \sigma \, ds .
\end{aligned}$$

Idet

$$\int_t^\infty \mu_s * \sigma \, ds \rightarrow 0 \quad \text{for } t \to \infty$$

(sætningen om monoton grænseovergang for integraler), fås heraf:

$$\eta = \lim_{t \to \infty} (\mu_t * \xi),$$

og dermed er η den invariante del af ξ. Hermed er fremstillingens entydighed vist.

Lad nu ξ være et excessivt mål, og lad η betegne den invariante del af ξ (se sætning 7.16.). For hvert $t > 0$ indføres det positive mål

$$\sigma_t = \frac{1}{t}(\xi - \mu_t * \xi).$$

Videre indføres for hvert $n \in \mathbb{N}$:

$$\varkappa_n = \int_0^n \mu_s \, ds$$

Vi bemærker, at $\varkappa_n * \xi$ eksisterer for alle $n \in \mathbb{N}$, thi

$$\varkappa_n * \xi = \int_0^n \mu_s * \xi \, ds \le \int_0^n \xi \, ds = n \xi$$

og at $\varkappa_n \uparrow \varkappa$ for $n \uparrow \infty$.

Da $\varkappa_n \le \varkappa$ og $\sigma_t \le \frac{1}{t}\xi$, eksisterer for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $t > 0$ foldningen $\varkappa_n * \sigma_t$, og for $n > t$ er:

$$\begin{aligned}
\varkappa_n * \sigma_t &= \frac{1}{t}\left(\varkappa_n * \xi - \varkappa_n * (\mu_t * \xi) \right) \\
&= \frac{1}{t}\left(\int_0^n \mu_s * \xi \, ds - \int_0^n \mu_s * (\mu_t * \xi) \, ds \right) \\
&= \frac{1}{t}\left(\int_0^n \mu_s * \xi \, ds - \int_t^{n+t} \mu_s * \xi \, ds \right) \\
&= \frac{1}{t}\left(\int_0^t \mu_s * \xi \, ds - \int_n^{n+t} \mu_s * \xi \, ds \right).
\end{aligned}$$

Idet $\eta \leq \mu_s * \xi \leq \xi$ for alle $s > 0$, fås for $n > t$:

$$\varkappa_n * \sigma_t \leq \frac{1}{t}\int_0^t \xi \, ds - \frac{1}{t}\int_n^{n+t} \eta \, ds \leq \xi - \eta .$$

Af sætning 7.6 p. 263 får vi da, at $\varkappa * \sigma_t$ eksisterer for alle $t > 0$, og at

$$\varkappa * \sigma_t \leq \xi - \eta \quad \text{for alle } t > 0 .$$

Familien $(\varkappa * \sigma_t)_{t>0}$ er altså begrænset, men så er også familien $(\sigma_t)_{t>0}$ vagt begrænset ifgl. sætning 7.9. p. 268, og af lemma 7.8 p. 267 slutter vi da, at mængden

$$\{\sigma_t \mid t > 0\}$$

er relativt kompakt. Nettet $(\sigma_t)_{t>0}$ har da et konvergent delnet. Der findes altså et positivt mål σ og et net $(t_i)_{i \in I}$ af positive tal med $t_i \to 0$, således at

$$\sigma_{t_i} \to \sigma \quad \text{vagt} .$$

Vi vil nu vise, at det fundne σ kan bruges, altså at $\sigma \in \mathcal{D}^+(\varkappa)$, og $\xi = \varkappa * \sigma + \eta$. Lad os betragte et fast $n \in \mathbb{N}$. Da

$$\varkappa_n * \sigma_{t_i} \leq \xi - \eta \quad \text{for alle } i \in I ,$$

og da $\varkappa_n * (\xi - \eta)$ eksisterer, fordi $\varkappa_n * \xi$ eksisterer, følger det af sætning 7.7 p. 265, at $\varkappa_n * \sigma$ eksisterer og

$$\varkappa_n * \sigma_{t_i} \to \varkappa_n * \sigma \quad \text{vagt}.$$

På den anden side følger af udtrykket for $\varkappa_n * \sigma_t$ og af lemma 7.15, at

$$\varkappa_n * \sigma_{t_i} = \frac{1}{t_i}\int_0^{t_i} \mu_s * \xi \, ds - \frac{1}{t_i}\int_n^{n+t_i} \mu_s * \xi \, ds$$

$$\to \xi - \mu_n * \xi \quad \text{vagt}.$$

Ved at sammenligne de to udtryk for

$$\lim_{i \in I} \varkappa_n * \sigma_{t_i}$$

finder vi:

$$\varkappa_n * \sigma = \xi - \mu_n * \xi .$$

Dette gælder for ethvert $n \in \mathbb{N}$. Idet

$$\varkappa_n * \sigma = \xi - \mu_n * \xi \leq \xi - \eta \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}$$

sluttes af sætning 7.6, at $\varkappa * \sigma$ eksisterer, altså at $\sigma \in \mathcal{D}^+(\varkappa)$, og at

$$\varkappa_n * \sigma \to \varkappa * \sigma .$$

På den anden side gælder, at

$$\eta = \lim_{n\to\infty} \mu_n * \xi$$

(se sætning 7.16). Vi får altså

$$\varkappa * \sigma = \lim_{n\to\infty} \varkappa_n * \sigma = \lim_{n\to\infty} (\xi - \mu_n * \xi) =$$

$$\xi - \eta ,$$

hvorved fremstillingens existens er vist. $\square$

<u>Corollar 7.18</u>. Potentialkernen $\varkappa$ opfylder <u>princippet om massens entydighed</u>, hvilket betyder

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{D}^+(\varkappa) : \varkappa * \sigma_1 = \varkappa * \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 .$$

Bevis: Målet $\varkappa * \sigma_1 = \varkappa * \sigma_2$ er excessivt, se sætning 7.11.3) p. 275. Da nu

$$\varkappa * \sigma_1 - 0 = \varkappa * \sigma_2 - 0$$

sluttes af entydighedsdelen af Riesz' dekompositionssætning, at

$$\sigma_1 = \sigma_2 . \qquad \square$$

Corollar 7.19. Lad ξ være et excessivt mål, så

$$\xi \leq \varkappa * \sigma$$

for et mål $\sigma \in D^+(\varkappa)$. Da er ξ et $\varkappa$-potential, altså af formen

$$\xi = \varkappa * \tau,$$

hvor $\tau \in D^+(\varkappa)$.

Bevis: Af Riesz' dekompositionssætning fås, at ξ på entydig måde kan skrives som sum af et $\varkappa$-potential og et invariant mål η:

$$\xi = \varkappa * \tau + \eta,$$

hvor $\tau \in D^+(\varkappa)$. Endvidere gælder

$$0 \leq \eta = \lim_{t \to \infty} \mu_t * \xi \leq \lim_{t \to \infty} \mu_t * (\varkappa * \sigma) = \tilde{\eta},$$

hvor $\tilde{\eta}$ er den invariante del af $\varkappa * \sigma$. Da $\varkappa * \sigma$ er et $\varkappa$-potential, slutter vi at $\tilde{\eta}$ er nulmålet ud fra entydigheden af Riesz-dekompositionen. Men så er η nulmålet, og vi har

$$\xi = \varkappa * \tau. \qquad \square$$

Omskr 7.5 Lad ξ være et excessivt mål, og lad

$$\xi = \kappa * \sigma + \eta$$

være Riesz-dekompositionen af ξ. Vis at

$$\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \lambda (\xi - \lambda \rho_\lambda * \xi) .$$

<u>Øvelse 7.6</u> Lad $(\mu_t)_{t>0}$ være en foldningssemigruppe, og antag at der findes et excessivt mål ξ, der <u>ikke</u> er invariant. Vis at $(\mu_t)_{t>0}$ er transient.

<u>Sætning 7.20</u> Lad $(\mu_t)_{t>0}$ være en transient foldningssemigruppe med potentialkerne κ. Hvis $(\xi_i)_{i \in J}$ er et vagt konvergent net af κ-potentialer og ξ er et κ-potential, så

$$\xi_i \leq \xi \qquad \forall i \in J ,$$

da er

$$\xi = \lim_{i \in J} \xi_i$$

et κ-potential. Nettet $(\sigma_i)_{i \in J}$, hvor

$$\xi_i = \kappa * \sigma_i \quad , \quad i \in J$$

er konvergent, og ξ er netop κ-potentialet frembragt af

$$\sigma = \lim_{i \in J} \sigma_i$$

Bevis: Som grænsepunkt for et konvergent net af excessive mål, er ξ et excessivt mål, og da

$$\xi_i \leq \zeta \qquad \text{for alle } i \in I,$$

må også

$$\xi = \lim_{i \in I} \xi_i \leq \zeta .$$

Af corollar 7.19 slutter vi, at ξ er et potential; der findes altså netop et $\sigma \in D^+(\varkappa)$ så

$$\xi = \varkappa * \sigma .$$

For vilkårlige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ gælder resolventlig-ningen:

$$\rho_\lambda = \rho_\mu + (\mu - \lambda)\, \rho_\lambda * \rho_\mu ,$$

se p. 293. Lad nu $\mu > 0$ være fast. Da

$$\rho_\lambda \uparrow \varkappa \quad \text{for} \quad \lambda \downarrow 0 ,$$

gælder der (jvfr. sætning 7.7):

$$\varkappa = \lim_{\lambda \to 0} \rho_\lambda = \rho_\mu + \lim_{\lambda \to 0} (\mu - \lambda)\, \rho_\lambda * \rho_\mu$$

$$= \rho_\mu + \mu\, \varkappa * \rho_\mu .$$

Vi har hermed opnået følgende:

$$\xi_i = \varkappa * \sigma_i = \rho_\mu * \sigma_i + \mu(\varkappa * \rho_\mu) * \sigma_i$$

$$= \rho_\mu * \sigma_i + \mu(\varkappa * \sigma_i) * \rho_\mu$$

$$= \rho_\mu * \sigma_i + \mu\, \xi_i * \rho_\mu$$

for ethvert $i \in J$. Nu er imidlertid $\xi = \lim_{i \in J} \xi_i$, så

$$\xi * \rho_\mu = \lim_{i \in J} (\xi_i * \rho_\mu),$$

thi ξ er et excessivt mål, der kan foldes med ρ_μ, se sætning 7.12, og som majoriserer nettet $(\xi_i)_{i \in J}$. Da

$$\rho_\mu * \sigma_i = \xi_i - \mu\, \xi_i * \rho_\mu \qquad \forall i \in J$$

vil nettet $(\rho_\mu * \sigma_i)_{i \in J}$ være vagt konvergent med

$$\lim_{i \in J} (\rho_\mu * \sigma_i) =$$

$$\lim_{i \in J} \xi_i - \lim_{i \in J} \mu(\xi_i * \rho_\mu) =$$

$$\xi - \mu(\xi * \rho_\mu).$$

Vi ser da, at nettet $(\rho_\mu * \sigma_i)_{i \in I}$ er vagt begrænset, men ifgl. sætning 7.9 er også nettet $(\sigma_i)_{i\in J}$ vagt begrænset. Af lemma 7.8. får vi da, at mængden

$$\mathcal{S} = \{\sigma_i \mid i \in J\}$$

er relativ kompakt i den vage topologi. Til et vagt fortætningspunkt σ' for $\mathcal{S}$ findes et delnet $(\sigma_\alpha)_{\alpha\in A}$ af $(\sigma_i)_{i\in J}$ så

$$\sigma' = \lim_{\alpha\in A} \sigma_\alpha .$$

For hvert $\alpha \in A$ gælder nu:

$$\rho\mu * \sigma_\alpha \leq \varkappa * \sigma_\alpha = \xi_\alpha \leq \xi ,$$

og da ξ kan foldes med $\rho\mu$, har vi:

$$\rho\mu * \sigma_\alpha \underset{\alpha\in A}{\longrightarrow} \rho\mu * \sigma' .$$

Nettet $(\rho\mu * \sigma_\alpha)_{\alpha\in A}$ er som delnet af $(\rho\mu * \sigma_i)_{i\in J}$ konvergent med grænsepunktet $\rho\mu * \sigma$. Da den vage topologi er Hausdorff opnås hermed at

$$\rho\mu * \sigma = \rho\mu * \sigma' .$$

Denne identitet gælder for alle $\mu \in \mathbb{R}_+$. Vi har endvidere

$$\varkappa = \lim_{\mu \to 0} \rho_\mu ,$$

så

$$\rho_\mu * \sigma \leq \varkappa * \sigma ,$$

thi $\rho_\mu \uparrow \varkappa$ for $\mu \downarrow 0$, og der gælder

$$\rho_\mu * \sigma \to \varkappa * \sigma \quad \text{for } \mu \to 0 .$$

På samme måde indses:

$$\rho_\mu * \sigma' \to \varkappa * \sigma' \quad \text{for } \mu \to 0 .$$

Af princippet om massens entydighed, se corollar 7.18, får vi da:

$$\sigma' = \sigma .$$

Da σ var et vilkårligt vagt fortætningspunkt for den relative kompakte mængde $\mathcal{S}$, slutter vi

$$\sigma = \lim_{i \in I} \sigma_i . \qquad \square .$$

<u>Lemma 7.21</u> En elementær kerne

$$\varkappa = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$$

opfylder fejningsprincippet for enhver åben mængde.

Bevis: Lad $\sigma \in D^+(\varkappa)$, og lad ω være en åben delmængde af LCA-gruppen G. Med $\mathcal{A}$ betegnes mængden af de excessive mål ξ, for hvilke

$$\xi \geq \varkappa * \sigma \quad \text{i } \omega .$$

Målet $\xi_0 = \inf \mathcal{A}$ er excessivt ifgl. sætning 7.11. og

$$\xi_0 \geq \varkappa * \sigma \quad \text{i } \omega .$$

Da $\varkappa * \sigma \in \mathcal{A}$, må der også gælde

$$\xi_0 \leq \varkappa * \sigma ,$$

således at ξ_0 er et $\varkappa$-potential ifgl. corollar 7.19. Lad $\sigma^\omega \in D^+(\varkappa)$ være valgt så

$$\xi_0 = \varkappa * \sigma^\omega .$$

Dermed gælder, at

$$\varkappa * \sigma^\omega \leq \varkappa * \sigma$$

og

$$\varkappa * \sigma^\omega = \varkappa * \sigma \quad \text{i } \omega .$$

Målet σ^ω er således et $\varkappa$-fejet mål af σ på ω, hvis der blot gælder

$$\operatorname{supp} \sigma^\omega \subseteq \overline{\omega} .$$

For at eftervise dette, og derved godtgøre at $\varkappa$ opfylder fejningsprincippet for enhver åben mængde, skriver vi σ^ω på formen

$$\sigma^\omega = \sigma_1^\omega + \sigma_2^\omega ,$$

hvor σ_1^ω betegner restriktionen af σ^ω til ω og σ_2^ω er restriktionen til $G \setminus \omega$. Da

$$\mu * \varkappa \leq \varkappa ,$$

kan σ_2^ω foldes med $\mu * \varkappa$, thi σ_2^ω kan foldes med $\varkappa$, og da $\varkappa \neq 0$ vil

$$\sigma_2^\omega * (\mu * \varkappa) = (\sigma_2^\omega * \mu) * \varkappa$$

ifgl. lemma 7.3. Om målet

$$\alpha = \sigma_1^\omega + \mu * \sigma_2^\omega$$

gælder derfor at

$$\begin{aligned}
\varkappa * \alpha &= \varkappa * \sigma_1^\omega + \varkappa * (\mu * \sigma_2^\omega) \\
&= \varkappa * \sigma_1^\omega + (\varkappa * \mu) * \sigma_2^\omega \\
&= \varkappa * \sigma_1^\omega + (\varkappa - \varepsilon_0) * \sigma_2^\omega \\
&= \varkappa * \sigma_1^\omega + \varkappa * \sigma_2^\omega - \sigma_2^\omega \\
&= \varkappa * \sigma^\omega - \sigma_2^\omega .
\end{aligned}$$

Desuden har vi

$$\varkappa * \alpha = \varkappa * \sigma^{\omega} = \varkappa * \sigma \quad \text{i } \omega,$$

thi $\sigma_2^{\omega}(\omega) = 0$. Men så vil $\varkappa * \alpha \in \mathcal{A}$, så

$$\varkappa * \sigma^{\omega} = \inf \mathcal{A} \leq \varkappa * \alpha =$$
$$\varkappa * \sigma^{\omega} - \sigma_2^{\omega}.$$

Denne vurdering giver, at $\sigma_2^{\omega} \leq 0$, men da σ_2^{ω} er et positivt mål, har vi $\sigma_2 = 0$. Følgelig er

$$\operatorname{supp} \sigma^{\omega} = \operatorname{supp} \sigma_1^{\omega} \subseteq \overline{\omega}. \qquad \square$$

<u>Sætning 7.22</u>. Potentialkernen $\varkappa$ for en transient foldningssemigruppe opfylder fejningsprincippet for enhver åben mængde.

Bevis: Lad først ω være en åben relativ kompakt delmængde af G, og lad $\sigma \in D^+(\varkappa)$. For hver $\lambda > 0$ er ifgl. sætning 7.10

$$\lambda \varkappa + \varepsilon_0$$

en elementær kerne, så der findes et $(\lambda\varkappa + \varepsilon_0)$-fejet mål σ_λ^{ω} af σ på ω ifgl. lemma 7.21. Dette mål σ_λ^{ω} opfylder altså ulighederne

$$\sigma_\lambda^\omega * (\lambda \varkappa + \varepsilon_0) \leq \sigma * (\lambda \varkappa + \varepsilon_0) :$$

Ved multiplikation med $\frac{1}{\lambda}$ får vi:

$$\varkappa * \sigma_\lambda^\omega + \frac{1}{\lambda} \sigma_\lambda^\omega \leq \varkappa * \sigma + \frac{1}{\lambda} \sigma . \qquad (*)$$

For $\lambda > 1$ gælder videre, at

$$\begin{aligned} \varkappa * \sigma_\lambda^\omega &\leq \varkappa * \sigma_\lambda^\omega + \frac{1}{\lambda} \sigma_\lambda^\omega \\ &\leq \varkappa * \sigma + \frac{1}{\lambda} \sigma \end{aligned}$$

således at nettet $(\varkappa * \sigma_\lambda^\omega)_{\lambda > 1}$ er vagt begrænset. Da er

$$\{ \sigma_\lambda^\omega \mid \lambda > 1 \}$$

relativ kompakt i den vage topologi. Lad nu $(\lambda_i)_{i \in I}$ være et net bestående af reelle tal $\lambda_i > 1$, så

$$\lambda_i \underset{i \in I}{\to} +\infty ,$$

og lad σ^ω være et positivt mål, således at

$$\sigma_{\lambda_i}^\omega \to \sigma^\omega \quad \text{for} \quad \lambda_i \to +\infty .$$

Da er supp $\sigma^\omega \subseteq \overline{\omega}$, eftersom $\sigma_{\lambda_i}^\omega$ som

$(\lambda_i \varkappa + \varepsilon_0)$-fejet mål af σ på ω, har $\operatorname{supp} \sigma_{\lambda_i}^{\omega} \subseteq \overline{\omega}$.

Vi har forudsat, at $\overline{\omega}$ er kompakt. Af övelse 7.2. slutter vi, at

$$\varkappa * \sigma_{\lambda_i}^{\omega} + \frac{1}{\lambda_i} \sigma_{\lambda_i}^{\omega} \to \varkappa * \sigma^{\omega} + 0 \quad \text{for } \lambda_i \to \infty$$

og

$$\varkappa * \sigma + \frac{1}{\lambda_i} \sigma \to \varkappa * \sigma + 0 \quad \text{for } \lambda_i \to \infty$$

Uligheden (*) gælder for alle λ_i, $i \in I$, så ved grænseovergangen $\lambda_i \to \infty$ opnår man

$$\varkappa * \sigma^{\omega} \leq \varkappa * \sigma .$$

Imidlertid er lighedstegnet i (*) opfyldt i ω, thi $\sigma_{\lambda}^{\omega}$ er et $(\lambda \varkappa + \varepsilon_0)$-fejet mål af σ på ω. Derfor må vi have:

$$\varkappa * \sigma^{\omega} = \varkappa * \sigma \quad \text{i } \omega ,$$

og målet σ^{ω} er altså et $\varkappa$-fejet mål af σ på den relativ kompakte mængde ω.

Lad ω_0 være en vilkårlig åben delmængde af G, og lad $\sigma \in \mathcal{D}^+(\varkappa)$. Med Ω betegnes systemet af åbne relativ kompakte delmængder, hvor $\omega \subseteq \omega_0$. Til hvert $\omega \in \Omega$ findes ifgl. det foregående et $\varkappa$-fejet mål σ^{ω} af

σ på ω. Specielt er

$$\varkappa * \sigma^{\omega} \leq \varkappa * \sigma \quad \text{for alle } \omega \in \Omega,$$

og da Ω udstyret med inklusionsordningen er opad filtrerende, er nettet

$$(\varkappa * \sigma^{\omega})_{\omega \in \Omega}$$

altså vagt begrænset. Da er mængden

$$\{\varkappa * \sigma^{\omega} \mid \omega \in \Omega\}$$

relativ kompakt ifgl lemma 7.8. Lad

$$(\varkappa * \sigma^{\omega_i})_{i \in I}$$

være et konvergent delnet af $(\varkappa * \sigma^{\omega})_{\omega \in \Omega}$. Da dette net består af $\varkappa$-potentialer, der alle er majoriseret af potentialet $\varkappa * \sigma$, vil dets grænsepunkt, ifgl. sætning 7.20, selv være et $\varkappa$-potential og hvis

$$\varkappa * \sigma_0 = \lim_{i \in I} \varkappa * \sigma^{\omega_i}$$

vil

$$\sigma_0 = \lim_{i \in I} \sigma^{\omega_i}.$$

Vi vil vise, at σ^{ω_0} faktisk er et $\varkappa$-fejet mål af σ på ω_0. Dertil bemærkes, at da

$$\mathrm{supp}\, \sigma^{\omega_i} \subseteq \overline{\omega_i} \subseteq \overline{\omega_0} \quad \forall i \in J,$$

må

$$\mathrm{supp}\, \sigma^{\omega_0} \subseteq \overline{\omega_0}.$$

Da det er oplagt, at

$$\varkappa * \sigma^{\omega_0} \leq \varkappa * \sigma,$$

har vi blot tilbage at vise, at

$$\varkappa * \sigma^{\omega_0} = \varkappa * \sigma \quad i\ \omega_0.$$

Lad $f \in \mathcal{K}(G)$, således at $\mathrm{supp}\, f \subseteq \omega_0$. Mængden

$$\omega' = G \setminus f^{-1}(0)$$

er åben og relativ kompakt, altså $\omega' \in \Omega$. Vi vælger nu $i_0 \in J$, så

$$\omega' \subseteq \omega_i \quad \forall i \geq i_0.$$

Da gælder der for alle $i \geq i_0$:

$$\langle \varkappa * \sigma^{\omega_i}, f \rangle = \langle \varkappa * \sigma, f \rangle,$$

thi σ^{ω_i} er et $\varkappa$-fejet mål af σ på ω_i og $\omega_i \supseteq \omega'$. På den anden side vil delnettet

$$(\langle \varkappa * \sigma^{\omega_i}, f \rangle)_{i \geq i_0}$$

af nettet

$$(\langle \mathcal{K} * \sigma^{\omega_i}, f \rangle)_{i \in I}$$

konvergere mod $\langle \mathcal{K} * \sigma^{\omega_0}, f \rangle$, hvorfor

$$\langle \mathcal{K} * \sigma^{\omega_0}, f \rangle = \langle \mathcal{K} * \sigma, f \rangle .$$

$\square$

<u>Sætning 7.23.</u> Potentialkernen $\mathcal{K}$ for en transient foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$ opfylder <u>ligevægtsprincippet</u>, idet der til enhver åben relativ kompakt delmængde ω af G findes et positivt mål $\sigma \in \mathcal{D}^+(\mathcal{K})$ med egenskaberne:

i) $\operatorname{supp} \sigma \subseteq \overline{\omega}$

ii) $\mathcal{K} * \sigma \leq \omega_G$

iii) $\mathcal{K} * \sigma = \omega_G$ i ω ,

hvor ω_G er Haarmålet på G. Et sådant mål σ kaldes en $\mathcal{K}$-<u>ligevægtsfordeling</u> på ω

Bevis: Valg $f \in \mathcal{K}_+(G)$, så

$$\mathcal{K} * f \geq 1 \quad \text{på } \omega .$$

Dermed er $\mathcal{K} * f\omega_G \geq \omega_G$ på ω, så får det positive mål

$$\xi = \inf \{ \mathcal{K} * f\omega_G , \omega_G \}$$

vil $\xi \leq \omega_G$ og $\xi = \omega_G$ i ω. Som infimum af en mængde af excessive mål er ξ et excessivt mål, og da ξ domineres af potentialet $\varkappa * f\omega_G$, er ξ et potential, (se sætning 7.11 og 7.20). Lad $\tau \in \mathcal{D}^+(\varkappa)$, så

$$\xi = \varkappa * \tau .$$

Ifgl. sætning 7.22 eksisterer der et $\varkappa$-fejet mål σ af τ på ω. Et sådant mål opfylder klart betingelse i). Endvidere er

$$\sigma * \varkappa \leq \tau * \varkappa = \xi \leq \omega_G ,$$

så σ opfylder betingelse ii). Endelig gælder der

$$\sigma * \varkappa = \tau * \varkappa = \xi = \omega_G \text{ i } \omega ,$$

så σ opfylder også betingelse iii). $\square$

<u>Corollar 7.24</u> Lad ω være en åben relativ kompakt mængde. For enhver kompakt omegn V af 0 i G findes $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$, så

$$\operatorname{supp} \varphi \subseteq \overline{\omega} + V$$

og $\varkappa * \varphi \leq 1$, samt $\varkappa * \varphi = 1$ i ω.

Bevis: Lad $f \in \mathcal{K}_+(G)$, så $\operatorname{supp} f \subseteq V$ og

$$\int f(x)\,dx = 1.$$

Vi vælger nu en ligevægtsfordeling σ på den åbne, relativ kompakte mængde $\omega - V$ i henhold til sætning 7.23.

For ethvert $x \in G$ gælder

$$(\varkappa * \sigma) * f(x) \leq \omega_G * f(x) =$$

$$\int f(x-y)\,dy = 1.$$

For $x \in \omega$ er

$$(\varkappa * \sigma) * f(x) = \int f(x-y)\,d(\varkappa * \sigma)(y)$$

$$= \int_{\omega - V} f(x-y)\,d(\varkappa * \sigma)(y)$$

Da σ er en ligevægtsfordeling på $\omega - V$ udsiger betingelse iii) i sætning 7.23, at det sidst opskrevne integral er lig med

$$\int_{\omega - V} f(x-y)\,d\omega_G(y).$$

Dermed er:

$$(\varkappa * \sigma) * f(x) = \int_{\omega - V} f(x-y)\,d\omega_G(y) =$$

$$\int \varphi(x-y)\,d\omega_G(y) = 1.$$

Funktionen $\varphi = \sigma * f$ er kontinuert, og da

$$\operatorname{supp}\varphi = \operatorname{supp}(\sigma * f) \subseteq \operatorname{supp}\sigma + \operatorname{supp} f$$
$$\subseteq \overline{\omega} + V,$$

har φ de ønskede egenskaber. $\square$

<u>Definition</u>. Lad $\varkappa$ være et positivt mål. Vi siger, at <u>$\varkappa$-fejning formindsker den totale masse</u>, såfremt det for ethvert mål $\sigma \in \mathcal{D}^+(\varkappa)$, enhver åben mængde $\omega \subseteq G$ og ethvert $\varkappa$-fejet mål σ^ω af σ på ω gælder at

$$\sigma^\omega(G) \leq \sigma(G).$$

<u>Korollar 7.25</u> Om potentialkernen $\varkappa$ for en transient foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$ gælder, at $\varkappa$-fejning formindsker den totale masse.

Bevis: Det spejlede mål $\check{\varkappa}$ er potentialkerne for den transiente foldningssemigruppe $(\check{\mu}_t)_{t>0}$. Lad $\sigma \in \mathcal{D}^+(\varkappa)$, og lad ω være en åben delmængde af G, og σ^ω et $\varkappa$-fejet mål af σ på ω.

Til en vilkårlig åben, relativ kompakt delmængde ω' af G findes ifgl. corollar 7.24. en funktion $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ så

$$\check{\varkappa} * \varphi \leq 1$$

og

$$\check{\varkappa} * \varphi = 1 \quad i \ \omega.$$

Dermed gælder, at

$$\begin{aligned} \sigma^{\omega}(\omega') &\leq \langle \sigma^{\omega}, \check{\varkappa} * \varphi \rangle \\ &= \langle \sigma^{\omega} * \varkappa, \varphi \rangle \\ &= \langle \sigma * \varkappa, \varphi \rangle \\ &= \langle \sigma, \check{\varkappa} * \varphi \rangle \\ &\leq \sigma(G). \end{aligned}$$

Betegner nu H systemet af alle åbne, relative kompakte delmængder af G, følger endelig:

$$\sigma^{\omega}(G) = \sup_{\omega' \in H} \sigma^{\omega}(\omega') \leq \sigma(G).$$

$\square$

<u>Øvelse 7.7.</u> Lad μ og ν være positive mål på $\mathbb{R}$, og antag, at der findes tal $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, så

$$\operatorname{supp} \mu \subseteq [\alpha, \infty[$$

og

$$\operatorname{supp} \nu \subseteq [\beta, \infty[.$$

Vis, at μ og ν da kan foldes.

<u>Øvelse 7.8.</u> Lad $\varkappa$ være potentialkernen for en transient foldningsemigruppe. Så opfylder $\varkappa$ <u>princippet om massens positivitet</u>, hvilket betyder:

$$\forall \sigma, \tau \in \mathcal{D}^+(\varkappa) : \varkappa * \sigma \leq \varkappa * \tau \Rightarrow \sigma(G) \leq \tau(G).$$

Dette medfører, at $\varkappa$-fejning formindsker den totale masse.

<u>Øvelse 7.9.</u> Lad G være en <u>kompakt</u> gruppe, og lad $\varkappa$ være potentialkernen for en transient foldningsemigruppe på G. Vis, at da er nulmålet det eneste invariante mål.

<u>Sætning 7.26</u> Potentialkernen $\varkappa$ for en transient foldningsemigruppe opfylder <u>det fuldstændige maksimumsprincip</u>, hvilket betyder:

$$\forall a \geq 0 \ \forall f, g \in \mathcal{K}_+(G) : \ \varkappa * f(x) \leq \varkappa * g(x) + a$$
$$\text{for alle } x \in \operatorname{supp}(f) \Rightarrow \varkappa * f \leq \varkappa * g + a.$$

Bevis: Lad $f, g \in \mathcal{K}_+(G)$ og $a \geq 0$. Antag, at for alle $x \in \operatorname{supp}(f)$ gælder der:

$$\varkappa * f(x) \leq \varkappa * g(x) + a.$$

For vilkårligt $x \in G$ betegner ε_x^ω et $\check{\varkappa}$-fejet mål af ε_x på den åbne, relativ kompakte mængde

$$\omega = \{ f > 0 \}.$$

Da har vi:

$$\begin{aligned}
\varkappa * f(x) &= \langle \varkappa * f, \varepsilon_x \rangle \\
&= \langle \check{\varkappa} * \varepsilon_x, f \rangle \\
\text{A} \quad &= \langle \check{\varkappa} * \varepsilon_x^\omega, f \rangle \\
&= \langle \varepsilon_x^\omega, \varkappa * f \rangle \\
\text{B} \quad &\leq \langle \varepsilon_x^\omega, \varkappa * g + a \rangle \\
\text{C} \quad &\leq \langle \check{\varkappa} * \varepsilon_x^\omega, g \rangle + a \\
\text{D} \quad &\leq \langle \check{\varkappa} * \varepsilon_x, g \rangle + a \\
&= \varkappa * g(x) + a,
\end{aligned}$$

idet vi benyttede:

Ved A: $\check{\varkappa} * \varepsilon_x^\omega = \check{\varkappa} * \varepsilon_x$ i $\omega = \{ f > 0 \}$.

Ved B: Den givne ulighed på

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\omega} \supseteq \operatorname{supp} \varepsilon_x^\omega.$$

Ved C: $\varepsilon_x^{\omega}(G) \leq \varepsilon_x(G) = 1$.

Ved D: $\check{\kappa} * \varepsilon_x^{\omega} \leq \check{\kappa} * \varepsilon_x$. $\square$

<u>Bemærkning</u>. For potentialkernen κ for en transient foldningssemigruppe gælder desuden:

$$\forall f \in \mathcal{K}_+(G) : \sup_{x \in G} \kappa * f(x) = \sup_{x \in \operatorname{supp}(f)} \kappa * f(x) < \infty,$$

thi sæt

$$a = \sup_{x \in \operatorname{supp} f} \kappa * f(x) < \infty .$$

Vi har da $\kappa * f(x) \leq a$ for $x \in \operatorname{supp} f$, så specielt er κ translationsbegrænset.

Som anvendelse af den forgående teori vil vi for en vilkårlig foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$ der kan være transient eller rekurrent, betragte den inducerede <u>Feller semigruppe</u> $(P_t)_{t\geq 0}$ på $C_0(G)$:

$$P_t f = \mu_t * f \quad , \quad f \in C_0(G)$$

og vise, at definitionsområdet $D(A)$ for frembringeren $(A, D(A))$ indeholder mange funktioner fra $\mathcal{K}(G)$. Den samme metode kan anvendes til at vise tilsvarende resultater om den inducerede semigruppe på $L^p(G)$ for $1 \leq p < \infty$:

$$P_t f = \mu_t * f \quad ; \quad f \in L^p(G).$$

<u>Sætning 7.27.</u> <u>(Gunnar Forst)</u>.

i) $\forall \varphi \in \mathcal{K}_+(G) \forall \varepsilon > 0 \, \forall U \in \grave{U}(0) \exists \psi \in \mathcal{K}_+(G) \cap D(A)$:

$$\|\varphi - \psi\|_\infty \leq \varepsilon \quad \wedge \quad \operatorname{supp} \psi \subseteq \operatorname{supp} \varphi + U$$

Funktionen ψ har formen

$$\psi = \rho_1 * (f - g),$$

hvor $f \in \mathcal{K}_+(G)$ og $g \in C_0^+(G) \cap L^1(G)$.

ii) For ethvert par (K, θ) bestående af en kompakt mængde $K \subseteq G$ og en åben mængde $\theta \subseteq G$, så $K \subseteq \theta$ findes der en funktion

$$k \in \mathcal{K}(G) \cap D(A),$$

så

$$1_K \leq k \leq 1_\theta.$$

Bevis: i) Resolventmålet

$$\rho_1 = \int_0^\infty e^{-t} \mu_t \, dt$$

er potentialkerne for den transiente foldningssemigruppe $(e^{-t}\mu_t)_{t\geq 0}$, og derfor opfylder ρ_1 fejningsprincippet for enhver åben mængde. For enhver kompakt omegn V af 0 kan vi så finde et ρ_1-fejit mål σ_V af ε_0 på $\complement V$. Der gælder altså:

$$\rho_1 * \sigma_V \leq \rho_1$$

og

$$\rho_1 * \sigma_V = \rho_1 \quad i \ \complement V,$$

og derfor er

$$\rho_1 - \rho_1 * \sigma_V = \rho_1 * (\varepsilon_0 - \sigma_V)$$

et positivt mål med kompakt støtte; denne støtte er en delmængde af omegnen V. Da ρ_1 også opfylder princippet om massens entydighed, er

$$\rho_1 * (\varepsilon_0 - \sigma_V) \neq 0,$$

thi i modsat fald måtte vi have $\varepsilon_0 = \sigma_V$, hvilket strider mod, at

$$\operatorname{supp} \sigma_V \subseteq \overline{\complement V}.$$

Lad $a_V = (\rho_1 - \rho_1 * \sigma_V)(G) < \infty$, så er målet:

$$\alpha_V = \frac{1}{a_V}(\rho_1 - \rho_1 * \sigma_V) = \frac{1}{a_V}(\varepsilon_0 - \sigma_V) * \rho_1$$

et sandsynlighedsmål, og

$$\operatorname{supp} \alpha_\gamma \subseteq V.$$

Lad $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$, $\varepsilon > 0$ og $U \in \dot{U}(0)$ være givet. Da φ er ligelig kontinuert findes der en kompakt omegn V af 0, så $V \subseteq U$, og

$$|\varphi(x-y) - \varphi(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for } x \in G \text{ og } y \in V,$$

og dermed gælder for alle $x \in G$:

$$|\varphi * \alpha_\gamma(x) - \varphi(x)| \leq$$

$$\int |\varphi(x-y) - \varphi(x)| \, d\alpha_\gamma(y) \leq \varepsilon.$$

Funktionen $\psi = \varphi * \alpha_\gamma$ opfylder de ønskede betingelser. Hvad angår formen af ψ, har man:

$$\psi = \varphi * \alpha_\gamma = \frac{1}{a_\gamma} \rho_1 * (\varepsilon_0 - \sigma_\gamma) * \varphi = \rho_1 * (f - g),$$

hvoraf følger

$$f = \frac{1}{a_\gamma} \varphi \in \mathcal{K}_+(G)$$

og $\quad g = \dfrac{1}{a_\gamma} \sigma_\gamma * \varphi \in C_0^+(G) \cap L^1(G).$

For operatoren $\mathcal{V}_1$ givet ved:

$$\mathcal{V}_1 f = \rho_1 * f ,$$

har man

$$\mathcal{V}_1 : C_0(G) \longmapsto \mathcal{D}(A) \quad \text{bijektivt},$$

og da

$$\psi = \frac{1}{a_\gamma} \rho_1 * (\varphi - \varphi * \sigma_\gamma),$$

har vi $\psi \in \mathcal{D}(A)$, thi $\varphi - \varphi * \sigma_\gamma \in C_0(G)$. Dette sidste følger af, at $\sigma_\gamma(G) \leq 1$, fordi ρ_1-fejning formindsker den totale masse. Vi har hermed vist den første del af sætningen.

ii) Lad W være en kompakt omegn af 0, så $K + W \subseteq \theta$, og lad V være en kompakt symmetrisk omegn af 0, så

$$V + V + V + V \subseteq W.$$

Man har

$$K + V \subseteq K + V + \mathring{V},$$

og $K + V$ er kompakt, $K + V + \mathring{V}$ er åben. Iflg. Urysohns lemma findes $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ så

$$\varphi = 2 \text{ på } K + V, \text{ og } \operatorname{supp} \varphi \subseteq K + V + \mathring{V}.$$

Ifgl. sætningens første del findes en funktion

$$\psi \in \mathcal{K}_+(G) \cap D(A),$$

så $\psi = \rho_1 * (f - g)$, opfylder

$$\|\varphi - \psi\|_\infty \leq 1 \quad \text{og} \quad \operatorname{supp} \psi \subseteq K + V + V + V,$$

hvor $f \in \mathcal{K}_+(G)$ og $g \in C_0(G) \cap L^1(G)$.

Da $\psi \geq 1$ på $K + V$, er funktionen

$$h = \inf\{\psi, 1\} = \inf\{\rho_1 * f - \rho_1 * g, 1\} =$$

$$\inf\{\rho_1 * f, 1 + \rho_1 * g\} - \rho_1 * g$$

en funktion tilhørende $\mathcal{K}_+(G)$, og

$$h = 1 \text{ på } K + V \quad \text{og} \quad \operatorname{supp} h \subseteq K + V + V + V.$$

Funktionen $\inf\{\rho_1 * f, 1 + \rho_1 * g\}$ er tæthed for et excessivt mål m. h. t. $(e^{-t}\mu_t)_{t>0}$, og dette mål er domineret af potentialet

$$\rho_1 * (f \omega_G).$$

Dette fremgår f. ex. af følgende regninger:

$$[\inf\{\rho_1 + f, 1 + \rho_1 * g\}]\,\omega_G =$$

$$\inf\{(\rho_1 * f)\,\omega_G, \omega_G + (\rho_1 * g)\,\omega_G\} =$$

$$\inf\{\rho_1 * (f\omega_G), \omega_G + \rho_1 * (g\omega_G)\},$$

men dette mål er exessivt m. h. t $(e^{-t}\mu_t)_{t\geq 0}$, og er domineret ρ_1-potentialet $\rho_1 * (f\omega_G)$. Vi har da, at det selv er et potential. Altså findes der et positivt mål σ med

$$\sigma(G) \leq \int f(x)\,dx < \infty$$

så

$$\rho_1 * \sigma = \inf\{\rho_1 * f, 1 + \rho_1 * g\}.$$

Vi har altså, at

$$h = \rho_1 * (\sigma - (g\omega_G)).$$

Lad nu ϑ være en funktion fra $\mathcal{K}_+(G)$, så

$$\int \vartheta(x)\,dx = 1 \quad \text{og} \quad \operatorname{supp} \vartheta \subseteq V.$$

Da gælder, at funktionen

$$k = h * \vartheta = \rho_1 * (\sigma * \vartheta) - \rho_1 * (g * \vartheta)$$

er en funktion i $\mathcal{K}_+(G)$, og desuden har man

$$k(x) = 1 \qquad \forall x \in K \ ,$$

og

$$\operatorname{supp} k \subseteq \operatorname{supp} h + V \subseteq K + W \subseteq \mathcal{O},$$

og da σ og $(g\omega_G)$ er begrænsede mål, er funktionen

$$\ell = \sigma * \vartheta - (g\omega_G) * \vartheta$$

en funktion i $C_0(G)$. Vi har altså, at

$$k = \rho_1 * \ell$$

med ℓ i $C_0(G)$, men heraf følger, at $k \in D(A)$.

$\square$

<u>Bemærkning</u>. Af i) følger, at $\mathcal{K}(G) \cap D(A)$ er tæt i $\mathcal{K}(G)$, når $\mathcal{K}(G)$ er forsynet med den sædvanlige induktive limes topologi, og at $\mathcal{K}(G) \cap D(A)$ er tæt i $C_0(G)$.

<u>Øvelse 7.10</u>. Lad $(A_p, D(A_p))$ betegne frembringeren for den på $L^p(G)$ inducerede kontraktionssemigruppe, $1 \leq p < \infty$. Vis i) og ii) i sætning 7.27., idet $(A, D(A))$ erstattes af $(A_p, D(A_p))$.

<u>Definition.</u> Lad $(\mu_t)_{t\geq 0}$ være en transient foldningssemigruppe. En positiv kontinuert funktion på G kaldes <u>kontinuert excessiv</u> (resp. <u>kontinuert invariant</u>), hvis målet $f\omega_G$ er excessivt (resp. invariant).

Funktionen f kaldes et <u>kontinuert potential</u>, hvis målet $f\omega_G$ er et potential.

Man ser umiddelbart, at f er kontinuert excessiv (resp. kontinuert invariant), hvis og kun hvis der gælder:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \mu_t * f \leq f .$$

resp.
$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \mu_t * f = f .$$

Der gælder endvidere: Hvis f og g er kontinuert excessive funktioner, så er funktionen

$$h = \inf\{f, g\}$$

en kontinuert excessiv funktion, thi for $x \in G$ og $t \in \mathbb{R}_+$ har vi:

$$\mu_t * h(x) = \int h(x-y)\, d\mu_t(y)$$

$$\leq \begin{cases} \int f(x-y)\, d\mu_t(y) = \mu_t * f(x) \leq f(x) \\ \int g(x-y)\, d\mu_t(y) = \mu_t * g(x) \leq g(x) , \end{cases}$$

hvoraf følger:

$$\mu_t * h(x) \leq \inf\{f(x), g(x)\} = h(x).$$

Sætning 7.28. Lad $(\mu_t)_{t>0}$ være en transient foldningssemigruppe. Til enhver kontinuert exessiv funktion

$$f : G \longmapsto [0, \infty[$$

findes et monotont voksende net $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ af kontinuerte potentialer, så der for ethvert $x \in G$ gælder:

$$f(x) = \lim_{\omega \in \Omega} f_\omega(x) = \sup_{\omega \in \Omega} f_\omega(x).$$

At f_ω er et kontinuert potential betyder altså, at

$$f_\omega \omega_G = \varkappa * \sigma,$$

hvor $\varkappa$ er potentialkernen for $(\mu_t)_{t>0}$ og $\sigma \in D^+(\varkappa)$.

Bevis: Vi antager først, at G er kompakt. Vi er straks færdige, idet Riesz' dekompositionssætning og øvelse 7.9. viser, at enhver kontinuert excessiv funktion er et kontinuert potential.

Vi antager nu, at G ikke er kompakt. Da

er $\omega_G(G) = \infty$. Lad nu Ω være systemet

$$\Omega = \{ \omega \subseteq G \mid \omega \text{ åben, ikke tom og relativ kompakt} \}.$$

Vi vælger $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$, $\varphi \neq 0$. For hvert $\omega \in \Omega$ danner vi funktionen

$$\varphi_\omega = \omega_G(\omega) [(\omega_G|_\omega) * \varphi].$$

Da er $\varphi_\omega \in \mathcal{K}_+(G)$, og nettet $(\varphi_\omega)_{\omega \in \Omega}$ er monotont voksende. Men så er nettet

$$(\varkappa * \varphi_\omega)_{\omega \in \Omega}$$

et monotont voksende net af kontinuerte potentialer, og for hvert $x \in G$ gælder der:

$$(*) \qquad \lim_{\omega \in \Omega} \varkappa * \varphi_\omega(x) = \infty.$$

Lad nemlig $x \in G$ og $N \in \mathbb{N}$ være givet. Da $\varkappa \neq 0$ og $\varphi \neq 0$ er funktionen

$$\check{\varkappa} * \check{\varphi} * \varepsilon_x \neq 0.$$

Der findes altså en kompakt mængde $K \subseteq G$ og $\alpha \in \mathbb{R}_+$, så

$$\check{\varkappa} * \check{\varphi} * \varepsilon_x(K) = \alpha .$$

Vælg $\omega_0 \in \Omega$ så

$$K \subseteq \omega_0 \quad \text{og} \quad \omega_G(\omega_0) \geq \frac{N}{\alpha} .$$

For $\omega \in \Omega$, så $\omega \supseteq \omega_0$, gælder da:

$$\begin{aligned} \varkappa * \varphi_\omega(x) &= \omega_G(\omega) < \varkappa * (\omega_G|_\omega * \varphi), \varepsilon_x > \\ &= \omega_G(\omega) < \omega_G|_\omega , \check{\varkappa} * \check{\varphi} * \varepsilon_x > \\ &\geq \frac{N}{\alpha} \cdot \alpha = N . \end{aligned}$$

Sæt nu for $\omega \in \Omega$

$$f_\omega = \inf \{ \varkappa * \varphi_\omega , f \} .$$

Da er f_ω kontinuert excessiv og domineret af $\varkappa * \varphi_\omega$, der er et kontinuert potential. Af corollar 7.19. følger da, at f_ω er et kontinuert potential, og ifgl. (*) gælder

$$f(x) = \lim_{\omega \in \Omega} f_\omega(x)$$

for ethvert $x \in G$.

Da nettet $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ er monotont voksende, har vi også for ethvert $x \in G$:

$$f(x) = \sup_{\omega \in \Omega} f_\omega(x) . \qquad \blacksquare$$

Sætning 7.29 Lad $\varkappa$ være et positivt mål på G. Der findes højst en transient foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$, der har $\varkappa$ som potentialkerne.

Bevis: Lad $(\mu_t)_{t>0}$ og $(\mu_t')_{t>0}$ være transiente foldningssemigrupper så

$$\varkappa = \int_0^\infty \mu_t \, dt = \int_0^\infty \mu_t' \, dt.$$

Idet $(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$ og $(\rho_\lambda')_{\lambda>0}$ betegner de tilhørende resolventmål, gælder ifgl. sætning 7.10

$$\varkappa + \varepsilon_0 = \sum_{n=0}^\infty (\rho_1)^n = \sum_{n=0}^\infty (\rho_1')^n,$$

hvoraf $$\varkappa = \rho_1 * (\varkappa + \varepsilon_0) = \rho_1' * (\varkappa + \varepsilon_0).$$

Da $\varkappa + \varepsilon_0$ er en elementær kerne, følger af princippet om massens entydighed, se corollar 7.18, at

$$\rho_1 = \rho_1'.$$

Betegner nu ψ og ψ' de til $(\mu_t)_{t>0}$ og $(\mu_t')_{t>0}$ hørende negativ definitte funktioner, har vi dermed, jvfr. p. 227:

$$\frac{1}{\psi+1} = \frac{1}{\psi'+1} = \hat{\rho}_1 = \hat{\rho}'_1 ,$$

hvoraf man får:

$$\psi = \psi' ,$$

og heraf sluttes endelig

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \mu_t = \mu'_t . \qquad \square$$

§ 8. Associerede kerner.

Lad G være en LCA-gruppe og lad ξ være et positivt mål på G.

<u>Definition</u>. Ved en <u>fundamental familie</u> for ξ forstås et net

$$(\sigma_V)_{V \in \dot{V}(0)}$$

af positive mål på G. Indexmængden $\dot{V}(0)$ er en basis for systemet af kompakte omegne af 0 i G, sådan at der for alle $V \in \dot{V}(0)$ gælder følgende betingelser:

i) $\sigma_\gamma \in D^+(\varkappa)$, $\sigma_\gamma * \varkappa \leq \varkappa$, $\sigma_\gamma * \varkappa \neq \varkappa$.

ii) Restriktionerne af $\sigma_\gamma * \varkappa$ og $\varkappa$ til $\complement V$ er ens.

iii) $\lim_{n\to\infty} \sigma_\gamma^n * \varkappa = 0$ vagt.

iv) $\sigma_\gamma(G) \leq 1$.

Hvis der findes en fundamental familie for $\varkappa$, kaldes $\varkappa$ en <u>associeret kerne</u>, og vi siger, at $\varkappa$ <u>er associeret med den fundamentale familie</u> $(\sigma_\gamma)_{\gamma\in \grave{V}(0)}$.

<u>Bemærkning</u>. Hvis $(\sigma_\gamma)_{\gamma\in \grave{V}(0)}$ er en fundamental familie for $\varkappa$, og

$$\grave{W}(0) \subseteq \grave{V}(0)$$

er en basis for systemet af kompakte omegne af 0 i G, så er delnettet

$$(\sigma_\gamma)_{\gamma\in \grave{W}(0)}$$

også en fundamental familie for $\varkappa$. En associeret kerne kan altså være associeret med forskellige fundamentale familier.

Vi viser nedenfor, at en associeret kerne faktisk har en fundamental familie, der er induceret af systemet $\grave{K}(0)$ af alle kompakte omegne af 0 i G.

<u>Exempel</u> Lad μ være et positivt mål med $\mu(G) \leq 1$. Antag, at

$$\varkappa = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$$

eksisterer. Så er det konstante net $(\mu)_{\grave{K}(0)}$ en fundamental familie for $\varkappa$:

Ad i) $\quad \mu * \varkappa = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n = \varkappa - \varepsilon_0 \neq \varkappa .$

Ad ii) $\quad \mu * \varkappa |_{CV} = \varkappa |_{CV}$, thi $\varepsilon_0 |_{CV} = 0$.

Ad iii) $\quad \mu^n * \varkappa = \sum_{k=n}^{\infty} \mu^k \to 0$ for $n \to \infty$.

Ad iv) klart.

<u>Sætning 8.1.</u> Potentialkernen $\varkappa$ for en transient foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$ er en associeret kerne, og idet σ_V for $V \in \grave{K}(0)$ betegner et $\varkappa$-fejet mål af ε_0 på CV er nettet $(\sigma_V)_{V \in \grave{K}(0)}$ en fundamental familie

for $\varkappa$.

Bevis: Lad $V \in \dot{K}(0)$. Da $\varkappa$ opfylder fejningsprincippet for enhver åben mængde, se sætning 7.22, findes $\sigma_V \in \mathcal{D}^+(\varkappa)$ så:

a) $\sigma_V * \varkappa \leq \varkappa$.

b) $\sigma_V * \varkappa|_{\complement V} = \varkappa|_{\complement V}$.

c) $\operatorname{supp} \sigma_V \subseteq \overline{\complement V}$.

Af c) følger, da V er en omegn af 0, at $\sigma_V \neq \varepsilon_0$, og af princippet om massens entydighed, corollar 7.18. slutter vi, at

$$\sigma_V * \varkappa \neq \varkappa = \varkappa * \varepsilon_0 ,$$

der sammenholdt med a) og b) giver egenskaberne i) og ii). Da $\varkappa$-fejning formindsker den totale masse, corollar 7.25, har vi:

$$\sigma_V(G) \leq \varepsilon_0(G) = 1 ,$$

så iv) er opfyldt. Vi mangler nu blot at godtgøre iii).

Ved gentagen anvendelse af a) finder man, at

$$\sigma_V^{\,n} * \varkappa$$

er en dalende følge af $\varkappa$-potentialer, altså existerer

$$\xi = \lim_{n \to \infty} \sigma_\gamma^{\,n} * \varkappa .$$

Målet ξ er excessivt, sætning 7.11., og er domineret af potentialet $\varkappa$, og er derfor selv et potential; der findes altså $\sigma \in D^+(\varkappa)$, så

$$\xi = \varkappa * \sigma ,$$

og da $\quad \xi \leq \sigma_\gamma^{\,n} * \varkappa \leq \varkappa \qquad \forall n \in \mathbb{N},$

finder vi

$$\begin{aligned} \xi * \sigma &= \lim_{n \to \infty} [(\sigma_\gamma^{\,n} * \varkappa) * \sigma] \\ &= \lim_{n \to \infty} [\sigma_\gamma^{\,n} * (\varkappa * \sigma)] \\ &= \lim_{n \to \infty} \sigma_\gamma^{\,n} * \xi \\ &= \xi . \end{aligned}$$

Altså er

$$\begin{aligned} (\varkappa - \xi) * \sigma &= \varkappa * \sigma - \xi * \sigma \\ &= \xi - \xi = 0 \end{aligned}$$

og da

$$(\varkappa - \xi) \geq \varkappa - \varkappa * \sigma_\gamma \underset{\neq}{\geq} 0$$

er $\varkappa - \xi$ et positivt mål, der ikke er 0, men så er $\sigma = 0$ og dermed også

$$\xi = \varkappa * \sigma = 0. \qquad \square$$

<u>Exempel</u>. Lad $G = \mathbb{R}^n$ og $n \geq 3$, og lad $\varkappa$ være potentialkernen for den Brownske semi-gruppe. Altså er $\varkappa$ Newtonkernen, se p. 229-230:

$$\varkappa = k_n \frac{1}{\|x\|^{n-2}}\, dx.$$

Lad os som basis for de kompakte omegne af 0 i $\mathbb{R}^n$ vælge de afsluttede kugler

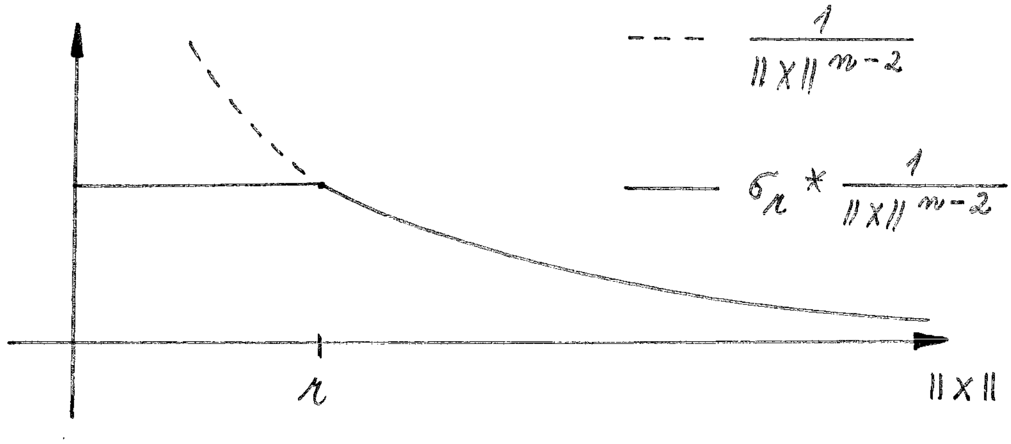
$$V_r = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r \} \quad , \quad r \in \mathbb{R}_+$$

og lad for hvert $r > 0$ σ_r betegne <u>den jævne fordeling på randen</u> ∂V_r af V_r med totalmasse 1, altså det <u>normaliserede overflade-mål</u> på sfæren

$$S_r = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r \}.$$

Da er σ_r et $\varkappa$-fejet mål af ε_0 på $\complement V_r$, thi ved udregning finder man (jvfr. C. Berg UEP 1971 p. 22-24):

$$\sigma_r * \frac{1}{\|x\|^{n-2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}} & \text{for } \|x\| > r \\[2ex] \dfrac{1}{r^{n-2}} & \text{for } \|x\| \leq r. \end{cases}$$



Bemærk, at målet σ_r ikke blot har sin støtte inden for $\overline{\complement V_r}$, men at σ_r endda har sin støtte på <u>randen</u> af $\complement V_r$.

Ifgl. sætning 8.1. er nettet $(\sigma_r)_{r\in\mathbb{R}_+}$ en fundamental familie for Newtonkernen.

<u>Exempel</u>. Lad $G=\mathbb{R}$ og lad $(\mu_t)_{t>0}$ være translationssemigruppen $(\varepsilon_t)_{t>0}$, som er transient med potentialkernen

$$\varkappa = 1_{]0,\infty[}\,dx.$$

Et positivt mål μ kan foldes med $\varkappa$ hvis og kun hvis

$$\forall a\in\mathbb{R}\ (\mu(]-\infty,a[)<\infty),$$

og i bekræftende fald er

$$\mu*\varkappa = \mu(]-\infty,x[)\,dx.$$

For $f \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R})$ gælder nemlig

$$\check{\varkappa} * f(x) = \int_0^\infty f(x+y)\,dy$$

$$= \int_x^\infty f(y)\,dy\,,$$

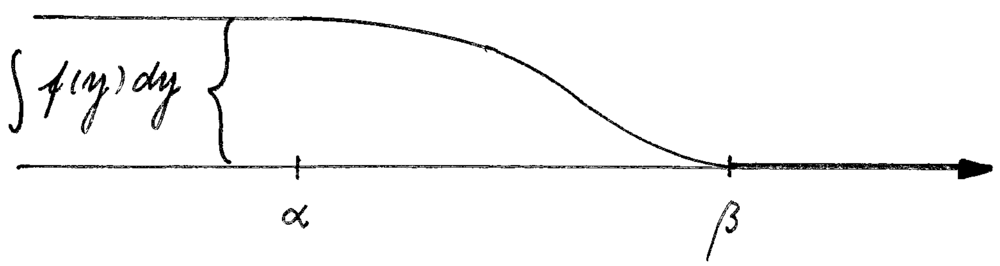
og hvis

$$\alpha = \inf \operatorname{supp} f$$

og

$$\beta = \sup \operatorname{supp} f$$

har $\check{\varkappa} * f$ følgende udseende:



Hvis μ kan foldes med $\varkappa$, finder vi:

$$\langle \varkappa * \mu, f \rangle = \langle \mu, \check{\varkappa} * f \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_x^\infty f(y)\,dy \right) d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) \cdot 1_{]x,\infty[}(y)\,dy \right) d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{]-\infty, y[}(x) \, d\mu(x) \right) dy$$

$$= \int f(y) \, \mu(]-\infty, y[) \, dy .$$

Altså har $\varkappa * \mu$ tætheden $x \mapsto \mu(]-\infty, x[)$ m. h. t. Lebesgue-målet dx på $\mathbb{R}$.

For $r > 0$ sætter vi

$$V_r = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq r \}$$

og

$$\sigma_r = \varepsilon_r .$$

Ved direkte udregning finder man, at

$$\varepsilon_r * \varkappa = 1_{]r, \infty[} \, dx \leq 1_{]0, \infty[} \, dx = \varkappa$$

og

$$(\varepsilon_r)^n * \varkappa = \varepsilon_{nr} * \varkappa = 1_{]nr, \infty[} \, dx ,$$

hvoraf man umiddelbart ser, at nettet $(\sigma_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$ er en fundamental familie for $\varkappa$.

Bemærk, at ε_r er et $\varkappa$-fejet mål af ε_0 på $\complement V_r$ og at ε_r har sin støtte på randen af $\complement V_r$.

<u>Øvelse 8.1.</u> Find et fejet mål af ε_1 på henholdsvis $]-\infty, 0[$ og $]2, \infty[$ m. h. t.

$$\varkappa = 1_{]0, \infty[} \, dx .$$

Efter at have godtgjort, at potentialkernen for en transient foldningssemigruppe er en associeret kerne, vil vi nu omvendt vise, at <u>enhver associeret kerne fremkommer som potentialkerne for en transient foldningssemigruppe</u>. Denne foldningssemigruppe vil ifgl. sætning 7.29. være entydigt bestemt.

Lad nu $\varkappa$ være et positivt mål, $\dot{\mathcal{V}}(0)$ en basis for de kompakte omegne af 0 i G og endvidere $(\sigma_V)_{V\in\dot{\mathcal{V}}(0)}$ et net af positive mål, således at betingelserne i) - iv) på p. 336 er opfyldt.

Af i) og ii) følger, at

$$\varkappa - \sigma_V * \varkappa$$

er et positivt mål, der ikke er nulmålet, og med støtte inden for V. Sættes derfor for $V \in \dot{\mathcal{V}}(0)$

$$\frac{1}{a_V} = (\varkappa - \sigma_V * \varkappa)(G) < \infty$$

og

$$\eta_V = a_V(\varkappa - \sigma_V * \varkappa) = a_V\, \varkappa * (\varepsilon_0 - \sigma_V)$$

bliver η_V et sandsynlighedsmål med

$$\operatorname{supp} \eta_V \subseteq V .$$

Der gælder

$$\Big(\sum_{n=0}^{N} \sigma_\gamma{}^n\Big) * (\varkappa - \sigma_\gamma * \varkappa) =$$

$$\sum_{n=0}^{N} (\sigma_\gamma{}^n * \varkappa - \sigma_\gamma{}^{n+1} * \varkappa) = \varkappa - \sigma_\gamma{}^{N+1} * \varkappa$$

hvoraf

$$\Big(\frac{1}{a_\gamma} \sum_{n=0}^{N} \sigma_\gamma{}^n\Big) * \eta_\gamma = \varkappa - \sigma_\gamma{}^{N+1} * \varkappa \leq \varkappa , \qquad (*)$$

Da $\eta_\gamma \neq 0$ følger heraf og af sætning 7.9, at følgen

$$\Big(\frac{1}{a_\gamma} \sum_{n=0}^{N} \sigma_\gamma{}^n\Big)_{N \in \mathbb{N}}$$

er vagt opad begrænset og dermed konvergent med grænseværdien

$$\varkappa_\gamma = \frac{1}{a_\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_\gamma{}^n .$$

Vi har $\sigma_\gamma(G) \leq 1$ så målet

$$a_\gamma \varkappa_\gamma$$

er en elementær kerne, og dermed potentialkerne for en transient foldningssemigruppe; specielt er denne kerne translationsbegrænset.

Benyttes nu sætning 7.6. (eller øvelse 7.2) på (*) fås ved grænseovergang, da

$$\sigma_V{}^{N+1} * \varkappa \underset{N\to\infty}{\to} 0$$

ifgl. iii), at

$$\varkappa_V * \eta_V = \varkappa .$$

<u>Lemma 8.2.</u> En associeret kerne $\varkappa$ er translationsbegrænset.

Bevis: Lad $f \in \mathcal{K}_+(G)$. Med betegnelserne fra ovenstående gælder

$$\eta_V * f \in \mathcal{K}_+(G),$$

da også η_V har kompakt støtte. Da $\varkappa_V$ er translationsbegrænset får vi:

$$\varkappa * f = \varkappa_V * (\eta_V * f) \in CB(G),$$

altså er $\varkappa$ translationsbegrænset. $\square$

<u>Sætning 8.3. (Deny)</u> Lad $\varkappa$ være en associeret kerne og

$$(\sigma_V)_{V\in \mathcal{V}(0)}$$

en fundamental familie. Der findes da en og kun en transient foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$, der har $\varkappa$ som potentialkerne.

Bevis: For V og $V' \in \grave{V}(0)$ gælder:

$$a_{V'}\,\eta_V * (\varepsilon_0 - \sigma_{V'}) = a_{V'}\,a_V\,\varkappa * (\varepsilon_0 - \sigma_V) * (\varepsilon_0 - \sigma_{V'})$$
$$= a_V\,\eta_{V'} * (\varepsilon_0 - \sigma_V).$$

Fouriertransformeres denne ligning får man:

$$a_{V'}\,\hat{\eta}_V (1 - \hat{\sigma}_{V'}) = a_V\,\hat{\eta}_{V'} (1 - \hat{\sigma}_V) \qquad (\S)$$

hvoraf

$$\frac{a_V\,(1 - \hat{\sigma}_V)}{\hat{\eta}_V} = \frac{a_{V'}(1 - \hat{\sigma}_{V'})}{\hat{\eta}_{V'}} \qquad (**)$$

for alle $\gamma \in \Gamma$ med $\hat{\eta}_V(\gamma) \neq 0$ og $\hat{\eta}_{V'}(\gamma) \neq 0$.

Det er imidlertid således, at for alle $\gamma \in \Gamma$ findes $V \in \grave{V}(0)$, så $\hat{\eta}(\gamma) \neq 0$, thi det verificeres let, at for $V \to \{0\}$ gælder

$$\lim_{V \in \grave{V}(0)} \eta_V = \varepsilon_0 \quad \text{i Bernoulli-topologien},$$

hvoraf ifølge sætning 1.4.

$$\hat{\eta} \to 1 \quad \text{ligeligt over kompakte delmængder af } \Gamma.$$

Specielt gælder:

$$\forall \omega \subseteq \Gamma, \omega \text{ åben relativ kompakt } \exists V \in \grave{V}(0)\, \forall \gamma \in \omega: \hat{\eta}_V(\gamma) \neq 0.$$

Altså $\dfrac{a_V(1-\hat{\sigma}_V)}{\hat{\eta}_V}$ er veldefineret på ω.

Vi kan nu definere en funktion $\psi: \Gamma \to \mathbb{C}$ ved for $\gamma \in \Gamma$

$$\psi(\gamma) = \frac{a_V(1-\hat{\sigma}_V(\gamma))}{\hat{\eta}_V(\gamma)}, \quad \text{hvor } \hat{\eta}_V(\gamma) \neq 0.$$

Af (**) fremgår, at ψ er veldefineret.

Da ψ på enhver åben, relativ kompakt mængde er kvotient af kontinuerte funktioner er ψ kontinuert.

Af definitionen på ψ følger

$$\forall \gamma \in \Gamma\, \forall V \in \grave{V}(0): \hat{\eta}_V(\gamma)\psi(\gamma) = a_V(1-\hat{\sigma}_V(\gamma)),$$

thi umiddelbart gælder dette for $\hat{\eta}_V(\gamma) \neq 0$, men for $\hat{\eta}_V(\gamma) = 0$ ses af (§) ved at vælge V' så $\hat{\eta}_{V'}(\gamma) \neq 0$, at $\hat{\sigma}_V(\gamma) = 1$.

Funktionen ψ er en kontinuert negativ definit funktion, thi $\hat{\sigma}_V$ er positiv definit, og ifgl. sætning 3.6 gælder da, at

$$a_\gamma\left((1-\hat{\sigma}_\gamma(0)) + (\hat{\sigma}_\gamma(0)-\hat{\sigma}_\gamma)\right) = \hat{\eta}_\gamma \psi$$

er negativ definit. Bemærk $\hat{\sigma}_\gamma(0) = \sigma_\gamma(G) \leq 1$.

Af ovenstående ses imidlertid, at

$\lim\limits_{V \in \dot{V}(0)} \hat{\eta}_V \psi = \psi$ ligeligt over kompakte mængder,

hvorfor ψ er negativ definit.

Til en kontinuert negativ definit funktion findes en foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$ så

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \hat{\mu}_t = e^{-t\psi}.$$

For de tilhørende resolventmål $(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$ gælder

$$\hat{\rho}_\lambda = \frac{1}{\psi+\lambda}.$$

Man har, at der gælder følgende formel

$$\forall V \in \dot{V}(0)\ \forall \lambda > 0 : \eta_V - a_V \rho_\lambda * (\varepsilon_0 - \sigma_V) = \lambda \rho_\lambda * \eta_V \qquad (*)$$

Denne formel verificeres ved Fouriertransformation:

$$\hat{\eta}_V - a_V \hat{\rho}_\lambda (1-\hat{\sigma}_V) = \hat{\eta}_V - a_V \frac{1}{\psi+\lambda}(1-\hat{\sigma}_V) =$$

$$\frac{\psi \hat{\eta}_V + \lambda \hat{\eta}_V - a_V(1-\hat{\sigma}_V)}{\psi + \lambda} = \frac{\lambda \hat{\eta}_V}{\psi + \lambda} = (\lambda \rho_\lambda * \eta_V)^\wedge$$

da $\psi \hat{\eta}_V - a_V(1-\hat{\sigma}_V) = 0$.

Da de i formlen indgående mål er begrænsede, kan man ifgl. sætning 7.4. folde med det translationsbegrænsede mål $\varkappa$, lemma 8.2, hvorved

$$\varkappa * \eta_V - \rho_\lambda * \eta_V = \lambda \rho_\lambda * \varkappa * \eta_V .$$

Vi ved fra tidligere, se p. 344, at

$$\forall V \in \grave{V}(0) : \operatorname{supp} \eta_V \subseteq V .$$

For et fast valgt $V_0 \in \grave{V}(0)$ gælder derfor

$$\forall V \in \grave{V}(0) : V \subseteq V_0 \Rightarrow \operatorname{supp} \eta_V \subseteq V_0 .$$

Vi har dermed, at når $V \to \{0\}$, vil målene η_V fra et vist trin have støtte i en fast kompakt mængde. Vi udnytter nu øvelse 7.2, og at

$$\eta_V \to \varepsilon_0 \quad \text{vagt}$$

og får da:

$$\varkappa * \eta_V \to \varkappa \quad \text{og} \quad \rho_\lambda * \eta_V \to \rho_\lambda \quad \text{vagt}$$

hvoraf man ser:

$$\varkappa - \rho_\lambda = \lambda \rho_\lambda * \varkappa \geqslant 0 .$$

Altså har vi

$$\forall \lambda > 0 : \rho_\lambda \leqslant \varkappa .$$

For $\lambda \downarrow 0$ er $(\rho_\lambda)_{\lambda > 0}$ et voksende net, som åbenbart er begrænset, hvorfor

$$\lim_{\lambda \to 0} \rho_\lambda \quad \text{eksisterer} ,$$

og dermed er foldningssemigruppen $(\mu_t)_{t \geq 0}$ transient. Sætter vi nu

$$\rho_0 = \lim_{\lambda \to 0} \rho_\lambda$$

er ρ_0 potentialkerne for foldningssemigruppen, og der gælder klart

$$\rho_0 \leqslant \varkappa .$$

Vi skal derfor til slut blot vise, at der må gælde $\rho_0 = \varkappa$, hvormed $\varkappa$ er potentialkerne for en transient foldningssemigruppe, nemlig den fundne $(\mu_t)_{t \geq 0}$. Lader vi nu $\lambda \downarrow 0$ i (※) fås

$$\eta_\nu - a_\nu \rho_0 + a_\nu \rho_0 * \sigma_\nu = 0 ,$$

idet sætning 7.6 tillader os at gå til grænsen, da ρ_λ er et monotont voksende net og

$$\rho_\lambda * \sigma_\gamma \leq \varkappa * \sigma_\gamma \leq \varkappa .$$

Indfører vi nu definitionen på η_V, får vi:

$$a_\gamma \varkappa * (\varepsilon_0 - \sigma_\gamma) - a_\gamma \rho_0 * (\varepsilon_0 - \sigma_\gamma) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\varkappa - \rho_0) * (\varepsilon_0 - \sigma_\gamma) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_\gamma * (\varkappa - \rho_0) = \varkappa - \rho_0 ,$$

hvoraf ved gentagen anvendelse:

$$0 \leq \varkappa - \rho_0 = (\varkappa - \rho_0) * \sigma_\gamma^{n} \leq$$

$$\varkappa * \sigma_\gamma^{n} \to 0 \quad \text{for } n \to \infty ,$$

således at

$$\varkappa = \rho_0 . \qquad \square$$

<u>Bemærkning</u>. Hvis $\varkappa$ er et mål associeret med den fundamentale familie $(\sigma_V)_{V \in \check{V}(0)}$, er $\varkappa$ altså potentialkerne for en transient foldnings-semigruppe $(\mu_t)_{t>0}$ og dermed associeret med den fundamentale familie

$$(\varepsilon_0^{CV})_{V \in \grave{K}(0)} \quad ,$$

hvor ε_0^{CV} er et $\varkappa$-fejet mål af ε_0 på CV, jvfr. sætning 8.1. Specielt er enhver associeret kerne associeret med et net indiceret ved mængden $\grave{K}(0)$ af alle kompakte omegne af 0 i G.

Vi minder om, at er der givet et positivt mål μ med $\mu(G) \leq 1$, kaldes et mål $\xi \in D^+(\varkappa)$ μ-<u>superharmonisk</u>, hvis

$$\mu * \xi \leq \xi \; ,$$

og analogt kaldes $\xi \in D^+(\varkappa)$ μ-<u>harmonisk</u> såfremt

$$\mu * \xi = \xi \, .$$

<u>Definition</u>. Lad $\varkappa$ være en associeret kerne, der er associeret med den fundamentale familie $(\sigma_V)_{V \in \grave{V}(0)}$. Et positivt mål ξ kaldes σ_V-<u>superharmonisk</u> (resp. σ_V-<u>harmonisk</u>), såfremt $\xi \in D^+(\sigma_V)$ for alle $V \in \grave{V}(0)$ og

$$\forall\, V \in \grave{V}(0) : \; \sigma_V * \xi \leq \xi$$

resp.

$$\forall\, V \in \grave{V}(0) : \; \sigma_V * \xi = \xi \, .$$

Sætning 8.4. Lad $\varkappa$ være en associeret kerne, og lad $(\sigma_\gamma)_{V \in \mathring{V}(0)}$ være en fundamental familie. Lad endvidere $(\mu_t)_{t>0}$ være den entydigt bestemte transiente foldningssemigruppe, der har $\varkappa$ som potentialkerne. Et positivt mål ξ på G er σ_γ-superharmonisk (resp. σ_γ-harmonisk) hvis og kun hvis ξ er excessivt (resp. invariant) m.h.t. $(\mu_t)_{t>0}$.

Bevis: Betegnelserne er som i foregående sætning. Vi går frem i en række skridt:

1° ξ σ_γ-superharmonisk $\Rightarrow$ ξ excessiv.

For hvert $V \in \mathring{V}(0)$ defineres en foldningssemigruppe ved

$$\mu_t^V = e^{-ta_V} \exp(t a_\gamma \sigma_\gamma) = e^{-ta_V} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t a_\gamma \sigma_\gamma)^n$$

jvfr. øvelse 3.9. Nu gælder

$$(t a_\gamma \sigma_\gamma)^n * \xi = t^n a_\gamma^n \sigma_\gamma^n * \xi \leq t^n a_\gamma^n \xi ,$$

hvoraf

$$e^{-ta_V} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (t a_\gamma \sigma_\gamma)^n * \xi \leq$$

$$e^{-ta_V} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (t a_\gamma)^n \xi \leq \xi ,$$

og dermed

$$\mu_t^V * \xi \leq \xi .$$

Altså er ξ excessivt m.h.t. foldningssemigruppen $(\mu_t^V)_{t>0}$. Endvidere har man:

$$\lim_{V \in \check{V}(0)} \mu_t^V = \mu_t \quad \text{i Bernoulli-topologien,}$$

thi ved Fouriertransformation fås:

$$\hat{\mu}_t^V = e^{-t a_V (1-\hat{\sigma}_V)} = e^{-t \hat{\eta}_V \psi} \to e^{-t\psi}$$

ligeligt over kompakte mængder. Specielt gælder

$$\mu_t^V \to \mu_t \quad \text{vagt},$$

og da vi har

$$\forall V \in \check{V}(0) : \mu_t^V * \xi \leq \xi$$

fås af sætning 7.5, at for alle $t>0$ gælder der:

$$\mu_t * \xi \leq \xi .$$

Vi har hermed vist, at ξ er excessivt m.h.t. foldningssemigruppen $(\mu_t)_{t>0}$.

2° <u>Hvis $\sigma \in \mathcal{D}^+(\mathcal{H})$ har man, at $\mathcal{H} * \sigma$ er σ_V-superharmonisk.</u>

Dette følger af i) p. 336, idet

$$\sigma_V * (\mathcal{H} * \sigma) = (\sigma_V * \mathcal{H}) * \sigma \leq \mathcal{H} * \sigma .$$

3° <u>ξ excessiv $\Rightarrow$ ξ σ_V-superharmonisk.</u>

Lad $V \in \grave{V}(0)$. Det skal vises, at $\sigma_V * \xi \leq \xi$. Vi betragter $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$. Da

$$\mu_t * (\xi * \check{\varphi}) = (\mu_t * \xi) * \check{\varphi} \leq \xi * \check{\varphi}$$

er $\xi * \check{\varphi}$ en kontinuert excessiv funktion, og ifgl. sætning 7.28 findes der da et voksende net af kontinuerte potentialer $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ så

$$\sup_{\omega \in \Omega} p_\omega = \xi * \check{\varphi}$$

Der gælder nu

$$< \sigma_V * \xi , \varphi > = < \check{\sigma}_V , \xi * \check{\varphi} > =$$

$$< \check{\sigma}_V , \sup_{\omega \in \Omega} p_\omega > = \sup_{\omega \in \Omega} < \check{\sigma}_V , p_\omega > =$$

$$\sup_{\omega \in \Omega} < \varepsilon_0 , \sigma_V * p_\omega > \leq \sup_{\omega \in \Omega} < \varepsilon_0 , p_\omega > =$$

$$< \varepsilon_0, \sup_{\omega \in \Omega} p_\omega > \; = \; < \varepsilon_0, \xi * \check{\varphi} > \; =$$

$$< \xi, \varphi > ,$$

hvor ulighedstegnet følger af, at de kontinuerte potentialer p_ω under 2° er vist at være σ_γ-superharmoniske.

4° ξ σ_γ-harmonisk $\Rightarrow$ ξ invariant.

Målet ξ er specielt σ_γ-superharmonisk, og ifgl. 1° derfor excessivt. Ifgl. Riesz' dekompositionssætning kan ξ skrives

$$\xi = \varkappa * \sigma + \eta ,$$

hvor $\sigma \in D^+(\varkappa)$ og η er den invariante del af ξ.

Folder vi nu med σ_γ fås, idet η specielt er excessivt og derfor σ_γ-superharmonisk:

$$\xi = \sigma_\gamma * \xi = \sigma_\gamma * \varkappa * \sigma + \sigma_\gamma * \eta \leq$$

$$\varkappa * \sigma + \eta = \xi .$$

Der må altså gælde lighedstegn overalt. Specielt gælder, at

$$\sigma_\gamma * \varkappa * \sigma = \varkappa * \sigma ,$$

eller $$\eta_V * \sigma = 0.$$

Da imidlertid

$$\eta_V \to \varepsilon_0 \quad \text{i Bernoulli-topologien},$$

må der gælde $\sigma = 0$. Altså har man

$$\xi = \eta,$$

og derfor er ξ invariant.

5° ξ invariant $\Rightarrow$ ξ σ_V-harmonisk.

Lad os betragte et fast $V \in \grave{V}(0)$. Målet ξ er specielt excessivt og derfor σ_V-superharmonisk, altså

$$\sigma_V * \xi \leq \xi$$

Ved gentagen anvendelse heraf fås, at

$$(\sigma_V^{\,n} * \xi)_{n \in \mathbb{N}}$$

er en aftagende følge, hvorfor

$$\xi_0 = \lim_{n \to \infty} \sigma_V^{\,n} * \xi$$

existerer. Om det positive mål ξ_0 gælder:

ξ_0 er σ_γ-harmonisk, thi

$$\sigma_\gamma * \xi_0 = \lim_{n\to\infty} \sigma^{n+1} * \xi = \xi_0 .$$

ξ_0 er invariant, thi

$$\forall t > 0 : \mu_t * \sigma_\gamma^{\,n} * \xi = \sigma_\gamma^{\,n} * \xi ,$$

og ved grænseovergang får man da

$$\forall t > 0 : \mu_t * \xi_0 = \xi_0$$

Da ξ er σ_γ-superharmonisk, ses som under 1°, at ξ excessivt m.h.t. den transiente foldningssemigruppe

$$(e^{-t} \exp(t\sigma_\gamma))_{t>0} ,$$

hvis potentialkerne er den elementære kerne

$$a_\gamma \varkappa_\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_\gamma^{\,n} .$$

Vi kan derfor betragte Riesz-dekompositionen af ξ m.h.t. denne foldningssemigruppe. Vi får

$$\xi = a_\gamma \varkappa_\gamma * \sigma + \xi_0 ,$$

hvor $\sigma \in D^+(\varkappa_\gamma)$, idet det af sætning 7.14 ses, at den invariante del af ξ netop er

$$\xi_0 = \lim_{n\to\infty} \sigma_\nu^{\,n} * \xi .$$

Nu skal det selvfølgelig blot vises, at $\sigma = 0$, så $\xi = \xi_0$, således at

$$\xi * \sigma_\nu = \xi .$$

Folder vi dekompositionen med η_ν, får vi:

$$\xi * \eta_\nu = a_\nu\, \varkappa_\nu * \sigma * \eta_\nu + \xi_0 * \eta_\nu$$

$$= a_\nu\, \varkappa * \sigma + \xi_0 * \eta_\nu ,$$

idet $\varkappa_\nu * \eta_\nu = \varkappa$. Folder vi dernæst med μ_t under benyttelse af, at $\varkappa$ er excessiv, og ξ og ξ_0 er invariante fås:

$$\xi * \eta_\nu = (\mu_t * \xi) * \eta_\nu =$$

$$a_\nu\, (\mu_t * \varkappa) * \sigma + (\mu_t * \xi_0) * \eta_\nu \leq$$

$$a_\nu\, \varkappa * \sigma + \xi_0 * \eta_\nu = \xi * \eta_\nu .$$

Der må derfor gælde lighedstegn, altså har vi:

$$\varkappa * \sigma = (\mu_t * \varkappa) * \sigma$$

eller

$$\left(\int_0^t \mu_s\, ds\right) * \sigma = (\varkappa - \mu_t * \varkappa) * \sigma = 0 ,$$

men da $\int_0^t \mu_s\, ds \neq 0$, har vi $\sigma = 0$. $\square$.

<u>Bemærkning</u>. På baggrund af sætning 8.4 ser man, at definitionen på, at et positivt mål ξ er σ_V-superharmonisk (resp. σ_V-harmonisk) <u>ikke</u> afhænger af den fundamentale familie $(\sigma_V)_{V \in \dot{\mathcal{V}}(0)}$ hvormed potentialkernen $\varkappa$ er associeret.

Lad nu $G = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ og $(\mu_t)_{t>0}$ den Brownske semigruppe på G. Denne er da transient med potentialkernen

$$\varkappa = k_n \frac{1}{\|x\|^{n-2}} dx,$$

hvor

$$k_n = \frac{1}{(n-2)\alpha_n} \quad \text{og} \quad \alpha_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Størrelsen α_n er "overfladearealet" af enhedssfæren i $\mathbb{R}^n$. Lad σ_r være den jævne fordeling på

$$S_r = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r \}.$$

I exemplet p. 340 er det vist, at $(\sigma_r)_{r>0}$ er en fundamental familie for potentialkernen $\varkappa$. På baggrund af sætning 8.4 og bemærkningen ovenfor, ser vi, at der for et positivt mål ξ gælder:

$$\xi \text{ excessivt} \iff \forall r>0: \sigma_r * \xi \le \xi$$

$$\iff \forall r \in \mathbb{Q}_+: \sigma_r * \xi \le \xi$$

$$\iff \sigma_{r_j} * \xi \le \xi, \text{ hvor } (r_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

er en følge af positive tal, der konvergerer mod 0.

<u>Sætning 8.5.</u> De eneste invariante mål m. h. t. den Brownske semigruppe på $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ er Lebesguemålet og de med dette proportionale mål.

Bevis: 1°. Vi vil først vise, at hvis

$$f: \mathbb{R}^n \longmapsto [0, \infty[$$

er en kontinuert funktion, og hvis man har

$$\forall r>0: \sigma_r * f = f,$$

da er f konstant. Lad

$$B(x, R) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| \le R \}.$$

vi indfører polare koordinater. For $y \in \mathbb{R}^n$ har vi så:

$$y = r\xi \quad , \quad r = \|y\| \quad \text{og} \quad \xi = \frac{y}{r}.$$

Der gælder følgende for Lebesguemålet dy:

$$dy = \alpha_n r^{n-1} dr \, d\sigma_1(\xi) ,$$

og derfor har vi for en funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int f(y)\,dy = \int_0^\infty [\alpha_n \int_{\|\xi\|=1} f(r\xi)\, d\sigma_1(\xi)]\, r^{n-1} dr$$

$$= \int_{\|\xi\|=1} \left(\int_0^\infty \alpha_n f(r\xi)\, r^{n-1} dr \right) d\sigma_1(\xi).$$

Lad nu f være en kontinuert funktion:

$$f : \mathbb{R}^n \longmapsto [0, \infty[,$$

vi har da følgende formel:

$$(*) \quad \int_{B(x,R)} f(y)\,dy = \int_0^R [\alpha_n \int_{\|\xi\|=1} f(x + r\xi)\, d\sigma_1(\xi)]\, r^{n-1} dr .$$

Angående integration i polare koordinater henviser vi til C. Berg UEP p. 11 - p. 16.

Vi har nu tillige:

$$\sigma_r * f(x) = \int f(x-y)\,d\sigma_r(y) =$$

$$\int f(x - r\xi)\,d\sigma_1(\xi) =$$

$$\int f(x + r\xi)\,d\sigma_1(\xi) = f(x).$$

Ved brug af (*) får vi:

$$\int_{B(x,R)} f(y)\,dy = \int_0^R \alpha_n r^{n-1} f(x)\,dr = \frac{\alpha_n R^n}{n} f(x)$$

$$= m\,(B(x,R))\,f(x),$$

hvor m er Lebesguemålet på $\mathbb{R}^n$. Lad nu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ være to vilkårlige punkter. Man har

$$B(x_1, R) \subseteq B(x_2, R + \|x_1 - x_2\|)$$

og vi får dermed:

$$\frac{\alpha_n R^n}{n} f(x_1) = \int_{B(x_1,R)} f(y)\,dy \leq$$

$$\int_{B(x_2,\, R+\|x_1-x_2\|)} f(y)\, dy = \frac{\alpha_n \left(R+\|x_1-x_2\|\right)^n}{n} f(x_2) ,$$

hvoraf vi får:

$$\forall R > 0 : \quad f(x_1) \leq \left(\frac{R+\|x_1-x_2\|}{R} \right)^n f(x_2) ,$$

og for $R \to \infty$ fås derfor:

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

Vi har dermed vist, at f er <u>konstant</u>.

2°. Lad ξ være et invariant mål og $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ en approximerende enhed. Vi husker

$$\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \subseteq \{ x \mid \|x\| \leq \varepsilon \}.$$

Funktionen $\xi * \varphi_\varepsilon$ er da en kontinuert positiv funktion, der er invariant. Vi har altså

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \; \forall \varepsilon > 0 : \quad \varepsilon_x * \xi * \varphi_\varepsilon = \xi * \varphi_\varepsilon$$

og hermed $(\varepsilon_x * \xi) * (\varphi_\varepsilon dx) = \xi * (\varphi_\varepsilon dx)$.

Vi har imidlertid : $\varphi_\varepsilon dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varepsilon_0$ vagt og heraf følger:

$$\varepsilon_x * \xi = \xi$$

og dermed er ξ et Haarmål på $\mathbb{R}^n$. $\square$

<u>Definition</u> En funktion

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto]-\infty, \infty]$$

kaldes <u>superharmonisk</u>, dersom

1) f er nedad halvkontinuert.
2) $\forall r > 0: \sigma_r * f \leq f$.
3) $f \not\equiv \infty$.

<u>Lemma 8.6.</u> En superharmonisk funktion er lokalt integrabel, og der gælder

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = f(x).$$

Bevis: Som i beviset for sætning 8.5 fås:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \; \forall r > 0 : \int_{B(x,r)} f(y)\, dy \leq m(B(x,r))\, f(x).$$

Ifgl. 3) findes $x_0 \in \mathbb{R}^n$, så $f(x_0) < \infty$, og vi har derfor

$$\forall r > 0 : \int_{B(x_0, r)} f(y)\,dy < \infty .$$

Lad nu K være en kompakt delmængde af $\mathbb{R}^n$. Der findes da et $r > 0$ så

$$K \subseteq B(x_0, r) ,$$

og der gælder derfor

$$\int_K f(y)\,dy < \infty .$$

Da endvidere f er nedad til begrænset, gælder der

$$\int_K f(y)\,dy > -\infty ,$$

og vi har dermed vist, at $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Da f er nedad halvkontinuert i $x \in \mathbb{R}^n$ har vi

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U \in \grave{U}(x)\ \forall y \in U : \ f(y) > f(x) - \varepsilon .$$

Vi vælger nu $r_0 > 0$ så lille, at $B(x, r_0) \subseteq U$, og får derfor for $r \leq r_0$:

$$f(x) = \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy$$

$$\geq \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} [f(x) - \varepsilon]\,dy = f(x) - \varepsilon,$$

hvoraf det ønskede fremgår. $\square$

<u>Corollar 8.7.</u> Hvis to superharmoniske funktioner er ens næsten overalt er de identiske.

Bevis: Klart. $\square$

<u>Sætning 8.8.</u> Ethvert excessivt mål m. h. t. den Brownske semigruppe på $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ har en og kun en superharmonisk tæthed m. h. t. Lebesguemålet dx på $\mathbb{R}^n$. Hvis f er en positiv superharmonisk funktion, så er målet $\xi = f\,dx$ et excessivt mål.

Bevis: Lad f være superharmonisk. Ved $\xi = f dx$ defineres et positivt, da f er lokalt integrabel. Målet ξ er excessivt, thi af 2) i definitionen fås

$$\sigma_r * (f\,dx) = (\sigma_r * f)\,dx \leq f\,dx.$$

Lad nu ξ være et excessivt mål. Ifgl. Riesz' dekompositionssætning findes der et mål $\sigma \in D^+(\mathcal{H})$ og et invariant mål η, så

$$\xi = \mathcal{H} * \sigma + \eta. \qquad (**)$$

Da η er invariant, har vi ifgl. sætning 8.5:

$$\exists\, k \geq 0 : \eta = k\,dx.$$

Vi definerer nu funktionen f ved

$$f(x) = k_n \int \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}}\, d\sigma(y) + k\,,$$

så er f en superharmonisk funktion, thi

Ad 1) f er nedad halvkontinuert, da $\dfrac{1}{\|x\|^{n-2}}$ er nedad halvkontinuert.

Ad 2) På p. 340 har vi vist

$$\sigma_r * \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \leq \frac{1}{\|x\|^{n-2}}.$$

Ad. 3) Af (**) følger

$$\forall \varphi \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R}^n): \langle \xi, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx ,$$

og da dette er endeligt, er $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Specielt gælder da, at $f \not\equiv \infty$.

Vi har nu, at f er superharmonisk, og at

$$\xi = f\,dx .$$

Lad f og g være superharmoniske funktioner så

$$\xi = f\,dx = g\,dx .$$

Da er $f = g$ for næsten alle x, og ifgl. corollar 8.7. har man da, at $f = g$. □

<u>Corollar 8.9. (Den klassiske Riesz' dekompositionssætning).</u> For enhver positiv superharmonisk funktion f findes $\sigma \in D^+(\mathcal{H})$ og en konstant $k \geq 0$ så

$$f(x) = k_n \int \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}}\, d\sigma(y) + k .$$

Enhver funktion f af denne form er superharmonisk.

<u>Sætning 8.10.</u> Lad $\varkappa$ være Newtonkernen, og lad funktionen h være defineret ved

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } \|x\| \leq 1 \\ \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}} & \text{for } \|x\| > 1 . \end{cases}$$

Man har da:

$$D^+(\varkappa) = \{ \sigma \geqslant 0 \mid \int h(y) d\sigma(y) < \infty \} .$$

Bevis: 1°. Lad $\sigma \in D^+(\varkappa)$. Så har $\varkappa * \sigma$ en tæthed m. h. t. Lebesguemålet, og denne tæthed er en lokalt integrabel funktion, nemlig:

$$f(x) = k_n \int \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \, d\sigma(y)$$

og ifgl. corollar 8.9. er f superharmonisk. Vi har da:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n : \quad k_n \int \frac{1}{\|x_0 - y\|^{n-2}} \, d\sigma(y) < \infty .$$

Endvidere gælder

$$\exists R > 1 \; \forall y : \|y\| \geqslant R \Rightarrow \frac{\|x_0 - y\|^{n-2}}{\|y\|^{n-2}} \leqslant 2 ,$$

og dermed opnår vi:

$$\forall y : \|y\| \geq R : \ h(y) \leq \frac{2}{\|x_0 - y\|^{n-2}} .$$

Vi definerer nu:

$$\alpha = \inf_{\|y\| \leq R} \frac{1}{\|x_0 - y\|^{n-2}} > 0 ,$$

og så gælder

$$h(y) \leq \frac{\max\{\frac{1}{\alpha}, 2\}}{\|x_0 - y\|^{n-2}} ,$$

og dermed er

$$\int h(y)\, d\sigma(y) < \infty .$$

2°. Vi antager nu, at $\int h(y)\, d\sigma(y) < \infty$ og indfører funktionen

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}} - 1 & \text{for } \|x\| \leq 1 \\ 0 \quad \text{for } \|x\| > 1 . \end{cases}$$

Man ser, at φ er lokalt integrabel, og at $\varphi\, dx$ har kompakt støtte. Idet

$$h(x) + \varphi(x) = \frac{1}{\|x\|^{n-2}},$$

har man

$$h\,dx + \varphi\,dx = \frac{1}{\|x\|^{n-2}}\,dx,$$

og dermed

$$\sigma \in \mathcal{D}^+(\varkappa) \Leftrightarrow \sigma \in \mathcal{D}^+(h\,dx).$$

Vi har

$$\frac{h(x-y)}{h(y)} \longrightarrow 1 \text{ for } \|y\| \to \infty$$

ligeligt over kompakte delmængder af $\mathbb{R}^n$.

Dette viser følgende udsagn:

$$\forall K \subseteq \mathbb{R}^n, K \text{ kompakt } \exists c_K > 0 \ \forall x \in K \ \forall y \in \mathbb{R}^n:$$
$$h(x-y) \leq c_K\, h(y).$$

Heraf følger

$$\forall x \in K : h * \sigma(x) \leq c_K \int h(y)\,d\sigma(y) < \infty,$$

og dermed er $h * \sigma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Vi har nu, at vælger vi $g \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R}^n)$, får vi følgende:

$$\int g(x)\, h*\sigma(x)\, dx =$$

$$\int g(x) \int h(x-y)\, d\sigma(y)\, dx =$$

$$\iint g(x)\, h(x-y)\, dx\, d\sigma(y) =$$

$$\iint g(x+y)\, h(x)\, dx\, d\sigma(y) =$$

$$\int g(x)\, d(h*\sigma)(x). < \infty,$$

så $\sigma \in D^+(h dx)$. $\square$

Vi vender nu tilbage til den generelle teori. Lad $(\mu_t)_{t>0}$ være en transient foldningssemigruppe på LCA-gruppen G med potentialkernen

$$\varkappa = \int_0^\infty \mu_t\, dt.$$

<u>Definition</u>. Lad $\omega \subseteq G$ være en åben mængde, og lad ξ være et excessivt mål. Ved det <u>reducerede mål af ξ på ω</u> forstås

$$\inf\{\tau \mid \tau \text{ excessivt og } \tau \geq \xi \text{ på } \omega\}.$$

Dette infimum betegner vi (udelukkende af historiske grunde) med R_ξ^ω.

Man ser, at R_ξ^ω er excessivt, og at

$$R_\xi^\omega \leq \xi \quad \text{og} \quad R_\xi^\omega = \xi \ \text{ i } \omega.$$

Vi har, at R_ξ^ω er voksende i ω, hvilket betyder:

$$\omega_1 \subseteq \omega_2 \Rightarrow R_\xi^{\omega_1} \leq R_\xi^{\omega_2},$$

thi $R_\xi^{\omega_2}$ er excessivt og $R_\xi^{\omega_2} = \xi$ i ω, og da specielt i ω_1. Det er let at se, at R_ξ^ω er voksende i ξ, altså at

$$\xi_1 \leq \xi_2 \Rightarrow R_{\xi_1}^\omega \leq R_{\xi_2}^\omega .$$

<u>Sætning 8.11</u> Lad ξ være et excessivt mål og lad $\omega \subseteq G$ være en åben mængde. Lad endvidere

$$R_\xi^\omega = \varkappa * \sigma + \eta$$

være Riesz-dekompositionen af det excessive mål R_ξ^ω.

Så vil $\operatorname{supp} \sigma \subseteq \overline{\omega}$.

Bevis: Antag at $a \notin \overline{\omega}$ og lad W være en åben relativ kompakt omegn af a, så

$$\overline{\omega} \cap \overline{W} = \emptyset.$$

Lad σ' være restriktionen af σ til W og sæt

$$\sigma'' = \sigma - \sigma'.$$

Mængden $\overline{\omega} - \overline{W}$ er differens mellem en afsluttet og en kompakt mængde, og er derfor afsluttet. Da

$$0 \notin \overline{\omega} - \overline{W},$$

findes en kompakt omegn V af 0, så

$$V \cap (\overline{\omega} - \overline{W}) = \emptyset.$$

Lad σ_V være et $\varkappa$-fejet mål af ε_0 på CV. Så har man

$$\varkappa * \sigma_V \leq \varkappa$$

og

$$\varkappa * \sigma_V = \varkappa \quad i \ CV$$

hvoraf

$$\varkappa * \sigma_V * \sigma' \leq \varkappa * \sigma'$$

og

$$\varkappa * \sigma_V * \sigma' = \varkappa * \sigma' \quad i\ \omega,$$

thi lad $f \in \mathcal{K}_+(G)$ så $\operatorname{supp} f \subseteq \omega$. Da har vi

$$< \varkappa * \sigma_V * \sigma', f > =$$
$$< \varkappa * \sigma_V, \check{\sigma}' * f > =$$
$$< \varkappa, \check{\sigma}' * f >,$$

idet $\operatorname{supp}(\check{\sigma}' * f) \subseteq \operatorname{supp} f - \operatorname{supp} \sigma' \subseteq$

$$\overline{\omega} - \overline{W} \subseteq \complement V.$$

Vi har altså

$$\varkappa * (\sigma_V * \sigma' + \sigma'') \leq \varkappa * \sigma$$

og

$$\varkappa * (\sigma_V * \sigma' + \sigma'') = \varkappa * \sigma \quad i\ \omega,$$

og dermed

$$\zeta = \varkappa * (\sigma_V * \sigma' + \sigma'') + \eta \leq R_\xi^\omega$$

og

$$\zeta = \varkappa * (\sigma_V * \sigma' + \sigma'') + \eta = R_\xi^\omega \quad i\ \omega.$$

Målet ζ er excessivt, og da $R_\xi^\omega = \xi$ i ω, har vi

$$\zeta \leq \xi$$

og

$$\zeta = \xi \quad \text{i } \omega,$$

men så er $$\zeta \geq R_\xi^\omega.$$

Vi har altså, at

$$\zeta = R_\xi^\omega$$

hvoraf

$$\varkappa * (\sigma_\nu - \sigma') = \varkappa * \sigma'$$

eller

$$[\varkappa * (\varepsilon_0 - \sigma_\nu)] * \sigma' = 0.$$

Da $\varkappa * (\varepsilon_0 - \sigma_\nu) \geq 0$ og $\neq 0$, slutter vi, at

$$\sigma' = 0.$$

Altså er restriktionen af σ til W nul-målet, og derfor vil

$$W \cap \operatorname{supp} \sigma = \emptyset,$$

specielt vil $$a \notin \operatorname{supp} \sigma.$$

Da $a \notin \overline{\omega}$ var vilkårligt valgt, slutter vi endelig, at

$$\operatorname{supp} \sigma \subseteq \overline{\omega}. \qquad \square$$

Corollar 8.12. Lad $\omega \subseteq G$ være åben og $\sigma \in D^+(\varkappa)$. For $\xi = \varkappa * \sigma$ er

$$R_\xi^\omega = \varkappa * \tilde{\sigma},$$

hvor $\tilde{\sigma}$ er det af de $\varkappa$-fejede mål af σ på ω, der har mindst potential.

Bevis: Da R_ξ^ω er excessivt og

$$R_\xi^\omega \leq \xi = \varkappa * \sigma,$$

har vi, at R_ξ^ω er et potential, se corollar 7.19. Der findes altså et $\tilde{\sigma} \in D^+(\varkappa)$, så

$$R_\xi^\omega = \varkappa * \tilde{\sigma},$$

og af sætning 8.11 fås, at $\operatorname{supp} \tilde{\sigma} \subseteq \overline{\omega}$. Det er derfor klart, at $\tilde{\sigma}$ er et $\varkappa$-fejet mål af σ på ω.

Betegner σ' et vilkårligt $\varkappa$-fejet mål af σ på ω, gælder der

$$\varkappa * \sigma' = \varkappa * \sigma = \xi \quad \text{i } \omega$$

og derfor er

$$\varkappa * \sigma' \geq R_\xi^\omega = \varkappa * \tilde{\sigma}. \qquad \square$$

<u>Bemærkning</u>. Af princippet om massens entydighed, corollar 7.18, følger, at der højst findes ét $\varkappa$-fejet mål af σ på ω med mindst potential. Altså er $\tilde{\sigma}$ entydigt bestemt.

<u>Definition</u>. Det af de $\varkappa$-fejede mål af σ på ω, der giver <u>det mindste potential</u>, betegnes

$$\sigma^\omega$$

og det kaldes <u>det kanoniske</u> $\varkappa$-<u>fejede mål af</u> σ <u>på</u> ω.

<u>Øvelse 8.2.</u> Vis, at for ethvert excessivt mål ξ og for enhver åben <u>relativ kompakt</u> mængde $\omega \subseteq G$ er R_ξ^ω et potential.

Vink: Vis først påstanden, når ξ er en kontinuert excessiv funktion.

<u>Corollar 8.13.</u> Lad ω være en åben relativ kompakt delmængde af G. Så er $R_{\omega_G}^{\omega}$ et potential og

$$R_{\omega_G}^{\omega} = \varkappa * \lambda ,$$

hvor λ er en $\varkappa$-<u>ligevægtsfordeling</u> på ω. For λ gælder altså:

$$\operatorname{supp} \lambda \subseteq \overline{\omega}$$

$$\varkappa * \lambda \leq \omega_G$$

$$\varkappa * \lambda = \omega_G \quad \text{i } \omega .$$

Bevis: Ifgl. sætning 7.23 findes der en $\varkappa$-ligevægtsfordeling σ på ω. Da har vi specielt:

$$\varkappa * \sigma \leq \omega_G$$

og

$$\varkappa * \sigma = \omega_G \quad \text{i } \omega .$$

Men så er $R_{\omega_G}^{\omega} \leq \varkappa * \sigma$, og dermed er $R_{\omega_G}^{\omega}$ et potential. Altså findes der et $\lambda \in D^+(\varkappa)$ så

$$R_{\omega_G}^{\omega} = \varkappa * \lambda ,$$

og dermed har man:

$$\varkappa * \lambda \leq \omega_G$$

og

$$\varkappa * \lambda = \omega_G \quad i \; \omega .$$

Af sætning 8.11. følger, at

$$\operatorname{supp} \lambda \subseteq \overline{\omega},$$

og vi har dermed vist, at λ er en $\varkappa$-ligevægtsfordeling på ω. $\square$

<u>Definition</u>. Ved <u>den kanoniske $\varkappa$-ligevægtsfordeling</u> λ_ω <u>for en åben relativ kompakt mængde</u> ω forstås det mål λ_ω, for hvilket

$$\varkappa * \lambda_\omega = R^{\omega}_{\omega_G} .$$

Ved <u>kapaciteten</u> $\operatorname{cap} \omega$ for ω forstås den totale masse af λ_ω, altså

$$\operatorname{cap} \omega = \lambda_\omega(G) = \lambda_\omega(\overline{\omega}).$$

<u>Bemærkning</u>. Af princippet om massens positivitet, øvelse 7.8., fremgår, at

cap ω =

min $\{\sigma(G) \mid \sigma$ er en $\varkappa$-ligevægtsfordeling på $\omega\}$.

Vi har i sætning 7.26. p. 320 vist, at potentialkernen $\varkappa$ for en transient foldningssemigruppe $(\mu_t)_{t>0}$ opfylder det fuldstændige maximumsprincip. Sætter vi her $a = 0$ opnås <u>dominationsprincippet</u>:

$\forall f, g \in \mathcal{K}_+(G) : \varkappa * f(x) \leq \varkappa * g(x)$ for alle $x \in \operatorname{supp}(f) \Rightarrow \varkappa * f \leq \varkappa * g$.

Vi skal i den næste sætning give en variant af dette princip.

<u>Sætning 8.14.</u> (<u>Dominationsprincippet for mål</u>). Lad σ være et positivt mål med kompakt støtte og lad ξ være et excessivt mål. Hvis der findes en åben mængde ω, så

$$\operatorname{supp} \sigma \subseteq \omega \quad \text{og} \quad \varkappa * \sigma \leq \xi \text{ i } \omega$$

gælder der

$$\varkappa * \sigma \leq \xi .$$

Bevis: Vi kan uden indskrænkning antage, at ω er relativ kompakt. Vi bemærker, at $\sigma \in \mathcal{D}^+(\varkappa)$, da supp σ er kompakt.

Vi sætter nu

$$\xi_0 = \inf\{\varkappa * \sigma, \xi\}.$$

Da er ξ_0 et potential, og af corollar 8.12 får man, at også $R^{\omega}_{\xi_0}$ er et potential. Der findes altså et $\tau \in \mathcal{D}^+(\varkappa)$, så

$$R^{\omega}_{\xi_0} = \varkappa * \tau$$

og

$$\operatorname{supp} \tau \subseteq \overline{\omega}.$$

Lad V_0 være en kompakt omegn af 0, så

$$\operatorname{supp} \sigma - V_0 \subseteq \omega,$$

og lad W_0 være en kompakt symmetrisk omegn af 0, så

$$W_0 + W_0 \subseteq V_0$$

Lad endvidere $(\varphi_V)_{V \in \mathcal{V}(0)}$ være en approximativ enhed.

Betragt nu $V \in \mathring{\mathcal{V}}(0)$, så $V \subseteq W_0$. Da har man:

$$\forall x \in \operatorname{supp}\sigma - W_0 : \quad \varkappa * \tau * \varphi_V(x) = \varkappa * \sigma * \varphi_V(x) ,$$

thi ifgl. forudsætningen har vi

$$\varkappa * \tau = \mathcal{R}^{\omega}_{\xi_0} = \xi_0 = \varkappa * \sigma \quad \text{i } \omega,$$

og for $x \in \operatorname{supp}\sigma - W_0$ er

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(\check{\varphi}_V * \varepsilon_x) &= \{x\} - \operatorname{supp}\varphi_V \\ &\subseteq (\operatorname{supp}\sigma - W_0) - W_0 \\ &\subseteq \operatorname{supp}\sigma - V_0 \\ &\subseteq \omega , \end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} \varkappa * \tau * \varphi_V(x) &= \langle \varkappa * \tau , \check{\varphi}_V * \varepsilon_x \rangle \\ &= \langle \varkappa * \sigma , \check{\varphi}_V * \varepsilon_x \rangle \\ &= \varkappa * \sigma * \varphi_V(x) \end{aligned}$$

Sæt nu $f = \sigma * \varphi_V$ og $g = \tau * \varphi_V$. Da $\overline{\omega}$ er kompakt er $\operatorname{supp}\sigma$ og $\operatorname{supp}\tau$ begge kompakte, og så har vi

$$f, g \in \mathcal{K}_+(G).$$

Endvidere har vi

$$\operatorname{supp} f \subseteq \operatorname{supp} \sigma + W_0$$
$$= \operatorname{supp} \sigma - W_0$$

og derfor gælder der:

$$\forall x \in \operatorname{supp} f : \quad \varkappa * f(x) = \varkappa * g(x).$$

Af det fuldstændige maksimumsprincip, sætning 7.26, slutter vi, at

$$\varkappa * f \leq \varkappa * g$$

eller

$$\varkappa * \sigma * \varphi_V \leq \varkappa * \tau * \varphi_V .$$

Bemærk, at det egentlig er dominationsprincippet, som det er omtalt på p. 383, vi har benyttet ovenfor.

For $V \to \{0\}$ får vi

$$\varkappa * \sigma \leq \varkappa * \tau ,$$

hvoraf

$$\varkappa * \sigma \leq \varkappa * \tau = R^{\omega}_{\xi_0} \leq \xi_0 \leq \xi . \qquad \square$$

Sætning 8.15. Om kapacitetsafbildningen

$$\omega \mapsto \operatorname{cap} \omega$$

fra de åbne relativ kompakte delmængder ω af G ind i $\mathbb{R}$ gælder følgende:

i) $\operatorname{cap} \omega \geq 0$ og $\operatorname{cap} \omega = 0$ hvis og kun hvis $\omega = \emptyset$.

ii) Hvis $\omega_1 \subseteq \omega_2$ gælder der $\operatorname{cap} \omega_1 \leq \operatorname{cap} \omega_2$.

iii) Lad $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ være et monotont voksende net af åbne relativ kompakte delmængder af G og antag, at

$$\omega = \bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$$

er relativ kompakt. Så har man

$$\operatorname{cap} \omega = \sup_{\alpha \in A} \operatorname{cap} \omega_\alpha = \lim_{\alpha \in A} \operatorname{cap} \omega_\alpha .$$

iv) Afbildningen $\omega \mapsto \operatorname{cap} \omega$ er <u>stærkt additiv</u>, hvilket betyder:

$$\operatorname{cap} (\omega_1 \cap \omega_2) + \operatorname{cap} (\omega_1 \cup \omega_2) \leq \operatorname{cap} \omega_1 + \operatorname{cap} \omega_2 .$$

Bevis: Ad i) Det er klart, at $\operatorname{cap} \omega \geq 0$. Da

$$\operatorname{supp} \lambda_\emptyset \subseteq \emptyset,$$

har vi, at $\operatorname{cap} \emptyset = 0$. Hvis nu $\operatorname{cap} \omega = 0$ er

$$\lambda_\omega(G) = 0,$$

altså er λ_ω nul-målet. Da

$$\omega_G = \varkappa * \lambda_\omega = 0 \quad i\ \omega$$

slutter vi, at $\omega_G(\omega) = 0$; men så er $\omega = \emptyset$, jvfr p. 18.

Ad ii) Hvis $\omega_1 \subseteq \omega_2$ er $R^{\omega_1}_{\omega_G} \leq R^{\omega_2}_{\omega_G}$, altså

$$\varkappa * \lambda_{\omega_1} \leq \varkappa * \lambda_{\omega_2}.$$

Af princippet om massens positivitet, øvelse 7.8., får man:

$$\operatorname{cap} \omega_1 = \lambda_{\omega_1}(G) \leq \lambda_{\omega_2}(G) = \operatorname{cap} \omega_2.$$

Ad iii) Nettet $(R^{\omega_\alpha}_{\omega_G})_{\alpha \in A}$ er et monotont voksende net af potentialer, majoriseret af $R^{\omega}_{\omega_G}$, så

$$\xi_0 = \lim_{\alpha \in A} R^{\omega_\alpha}_{\omega_G} = \sup_{\alpha \in A} R^{\omega_\alpha}_{\omega_G}$$

er et excessivt mål, og $\xi_0 \leq R^{\omega}_{\omega_G}$. Lad $f \in \mathcal{K}_+(G)$, så

$$\operatorname{supp} f \subseteq \omega .$$

Ved et simpelt kompakthedsræsonnement får vi

$$\exists \alpha_0 \in A : \operatorname{supp} f \subseteq \omega_{\alpha_0} ,$$

men så er

$$< \xi_0 , f > \;\geq\; < R^{\omega_{\alpha_0}}_{\omega_G} , f > = < \omega_G , f >$$

altså

$$\xi_0 \geq \omega_G \quad i \ \omega$$

hvoraf man får:

$$\xi_0 \geq R^{\omega}_{\omega_G} .$$

Vi har derfor $\xi_0 = R^{\omega}_{\omega_G}$, og dermed

$$\varkappa * \lambda_\omega = \lim_{\alpha \in A} \varkappa * \lambda_{\omega_\alpha} ,$$

hvoraf man ved hjælp af sætning 7.20 får, at nettet $(\lambda_{\omega_\alpha})_{\alpha \in A}$ er konvergent og

$$\lambda_\omega = \lim_{\alpha \in A} \lambda_{\omega_\alpha} .$$

Lad nu $g \in \mathcal{K}_+(G)$, så $g = 1$ på $\overline{\omega}$.

Da

$$\operatorname{supp} \lambda_\omega \subseteq \overline{\omega}$$

og

$$\forall \alpha \in A : \operatorname{supp} \lambda_{\omega_\alpha} \subseteq \overline{\omega} ,$$

har vi slutteligt:

$$\begin{aligned} \operatorname{cap} \omega &= \langle \lambda_\omega , g \rangle \\ &= \lim_{\alpha \in A} \langle \lambda_{\omega_\alpha} , g \rangle \\ &= \lim_{\alpha \in A} \operatorname{cap} \omega_\alpha \\ &= \sup_{\alpha \in A} \operatorname{cap} \omega_\alpha . \end{aligned}$$

Det sidste lighedstegn gælder, da $(\operatorname{cap} \omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ er et voksende net, jvfr. ii).

Ad iv). Lad ω_1' og ω_2' være åbne relativ kompakte mængder, så:

$$\overline{\omega_1'} \subseteq \omega_1 \quad \text{og} \quad \overline{\omega_2'} \subseteq \omega_2 .$$

Så gælder der følgende ulighed i $\omega_1 \cup \omega_2$:

$$\kappa * \lambda_{\omega_1' \cap \omega_2'} + \kappa * \lambda_{\omega_1' \cup \omega_2'} \leq \kappa * \lambda_{\omega_1} + \kappa * \lambda_{\omega_2} ,$$

thi i ω_1 har man:

$$\varkappa * \lambda_{\omega_1' \cup \omega_2'} \leq \omega_G = \varkappa * \lambda_{\omega_1}$$

og desuden

$$\varkappa * \lambda_{\omega_1' \cap \omega_2'} = R_{\omega_G}^{\omega_1' \cap \omega_2'}$$

$$\leq R_{\omega_G}^{\omega_2}$$

$$= \varkappa * \lambda_{\omega_2} .$$

og i ω_2 har man:

$$\varkappa * \lambda_{\omega_1' \cup \omega_2'} \leq \omega_G = \varkappa * \lambda_{\omega_2}$$

og

$$\varkappa * \lambda_{\omega_1' \cap \omega_2'} = R_{\omega_G}^{\omega_1' \cap \omega_2'}$$

$$\leq R_{\omega_G}^{\omega_1}$$

$$= \varkappa * \lambda_{\omega_1} .$$

Da

$$\operatorname{supp}(\lambda_{\omega_1' \cap \omega_2'} + \lambda_{\omega_1' \cup \omega_2'})$$

$$\subseteq \overline{\omega_1' \cup \omega_2'} \subseteq \omega_1 \cup \omega_2$$

følger det af sætning 8.14, at

$$\varkappa * (\lambda_{\omega_1' \cap \omega_2'} + \lambda_{\omega_1' \cup \omega_2'}) \leq \varkappa * (\lambda_{\omega_1} + \lambda_{\omega_2}).$$

Af princippet om massens positivitet, øvelse 7.8., får vi nu

$$\operatorname{cap}(\omega_1' \cap \omega_2') + \operatorname{cap}(\omega_1' \cup \omega_2') \leq \operatorname{cap}\omega_1 + \operatorname{cap}\omega_2 .$$

Vi lader nu ω_1' være fastholdt, og lader ω_2' gennemløbe et monotont voksende net af åbne relativ kompakte mængder, der har ω_2 som foreningsmængde, og hvis afslutning er indeholdt i ω_2. Af iii) får vi da:

$$\operatorname{cap}(\omega_1' \cap \omega_2) + \operatorname{cap}(\omega_1' \cup \omega_2) \leq \operatorname{cap}\omega_1 + \operatorname{cap}\omega_2 .$$

Vi lader nu ω_1' gennemløbe et monotont voksende net af åbne relativ kompakte mængder, der har ω_1 som foreningsmængde, og hvis afslutning er indeholdt i ω_1. Vi får derfor nu:

$$\operatorname{cap}(\omega_1 \cap \omega_2) + \operatorname{cap}(\omega_1 \cup \omega_2) \leq \operatorname{cap}\omega_1 + \operatorname{cap}\omega_2 .$$

$\square$

<u>Øvelse 8.3.</u>. Lad ξ være et excessivt mål og lad

$$\omega \subseteq \Omega \subseteq G$$

være åbne mængder. Vis, at der gælder

$$R^{\omega}_{R^{\Omega}_{\xi}} = R^{\Omega}_{R^{\omega}_{\xi}} = R^{\omega}_{\xi} ,$$

og at man for $\sigma \in \mathcal{D}^+(\mathcal{H})$ har

$$(\sigma^{\omega})^{\Omega} = (\sigma^{\Omega})^{\omega} = \sigma^{\omega} ,$$

hvor σ^{ω} betegner det kanoniske $\mathcal{H}$-fejede mål af σ på ω.

Øvelse 8.4. Lad $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ være et monotont voksende net af åbne mængder og lad

$$\omega = \bigcup_{\alpha \in A} \omega_\alpha .$$

Vis at der for hvert excessivt mål ξ gælder

$$R^{\omega}_{\xi} = \sup_{\alpha \in A} R^{\omega_\alpha}_{\xi} = \lim_{A} R^{\omega_\alpha}_{\xi} .$$

Specielt gælder

$$\xi = R^{G}_{\xi} = \sup \{ R^{\omega}_{\xi} \mid \omega \text{ åben, relativ kompakt} \} ,$$

for hvert excessivt mål ξ. Ifgl. øvelse 8.2 er R^{ω}_{ξ} et potential, og dermed har vi et bevis for den version af sætning 7.28, der mislykkedes i første forsøg.

Øvelse 8.5. Vis, at der for enhver åben mængde $\omega \subseteq G$ og for alle excessive mål ξ_1, ξ_2 gælder

$$R^{\omega}_{\xi_1+\xi_2} = R^{\omega}_{\xi_1} + R^{\omega}_{\xi_2}.$$

Vink: For at etablere uligheden $\geq$ anvendes øvelse 8.4 og "dominationsprincippet for mål", sætning 8.14.

§ 9. Fuldstændig monotone funktioner og Bernšteĭn-funktioner.

Definition. En funktion $f :]0, \infty[\mapsto \mathbb{R}$ kaldes fuldstændig monoton, såfremt f er en C^∞-funktion og

$$\forall p \geq 0 : \quad (-1)^p D^p f \geq 0.$$

Man ser, at en fuldstændig monoton funktion er positiv, aftagende og konveks, og at mængden af fuldstændig monotone funktioner udgør en konveks kegle, der omfatter funktionerne:

$$f(x) = k \; ; \; k \geq 0$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f(x) = e^{-xs} \; ; \; s \geq 0 .$$

Hvis funktionerne f og g er fuldstændig monotone er produktet fg en fuldstændig monoton funktion, thi ved hjælp af Leibniz' formel:

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 : D^p(fg) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$$

finder man; at for ethvert $p \in \mathbb{N}_0$ gælder der:

$$(-1)^p D^p(fg) =$$

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k f^{(k)} (-1)^{p-k} g^{(p-k)} \geq 0 .$$

Definition. En funktion $f :]0,\infty[\mapsto \mathbb{R}$ kaldes en Bernštein-funktion, såfremt f er en C^∞-funktion, og

$$f \geq 0 \; ; \; \forall p \geq 1 : (-1)^p D^p f \leq 0 .$$

En Bernštein-funktion er positiv, voksende

<u>og konkav</u>. Mængden af Bernšteĭn-funktioner udgør en konveks kegle, der omfatter funktionerne:

$$f(x) = k\,; \quad k \geq 0$$

$$f(x) = x^{\alpha}\,; \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$f(x) = \log(1+x)$$

Den afledede af en Bernšteĭn-funktion er fuldstændig monoton.

Lad f være en Bernšteĭn-funktion. Da eksisterer grænseværdien fra højre:

$$f(0+) = \lim_{x \to 0+} f(x) < \infty$$

og

$$f - f(0+)$$

er en Bernšteĭn-funktion.

Lad f være en fuldstændig monoton funktion. Der gælder da, at

$$f(0+) = \lim_{x \to 0+} f(x) \leq \infty,$$

og såfremt $f(0+) < \infty$ er funktionen

$$f(0+) - f$$

en Bernštein-funktion. Dermed er også

$$a + f(0+) - f\,,$$

hvor a er en positiv konstant funktion, en Bernštein-funktion.

<u>Sætning 9.1.</u> For en funktion $f :]0,\infty[\mapsto \mathbb{R}$ er følgende to betingelser ensbetydende:

i) f er en Bernštein-funktion.

ii) $f \geq 0$ og funktionen $\exp(-tf)$ er fuldstændig monoton for alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Bevis: i) $\Rightarrow$ ii). Antag at f er en Bernštein-funktion, og lad $t \in \mathbb{R}_+$ være givet. Vi definerer nu funktionen

$$\varphi :]-\infty, 0[\mapsto \mathbb{R}$$

ved

$$\varphi(x) = -t\, f(-x),$$

og vi ser, at φ er en C^∞-funktion og $\varphi \leq 0$.

Desuden gælder der:

$$\forall p \in \mathbb{N} : D^p \varphi(x) = -(-1)^p t\, D^p f(-x) \geq 0 .$$

Det er da let at se, at funktionen $g = \exp(\varphi)$ er en C^∞-funktion, og at

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 : D^p g \geq 0 .$$

Derved er funktionen

$$x \longmapsto g(-x) = \exp(-t f(x)) ,$$

der er defineret på den positive halvakse $]0, \infty[$, åbenbart fuldstændig monoton.

ii) $\Rightarrow$ i). Vi antager nu, at funktionen f opfylder betingelsen ii). Da $\exp(-f)$ er en C^∞-funktion, er også f en C^∞-funktion, og i rækkeudviklingen

$$\exp(-t f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} (f(x))^n ,$$

hvor $t > 0$ og $x \in]0, \infty[$, er det tilladt at diffunktion tidvis. For $p \in \mathbb{N}$, $t > 0$ og $x \in]0, \infty[$ gælder derfor:

$$D^p(e^{-tf(x)}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+p} \frac{t^n}{n!} D^p(f^n)(x) \geq 0$$

Ved division med $t > 0$ opnår vi:

$$(-1)^{1+p} D^p f(x) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+p} \frac{t^{n-1}}{n!} D^p(f^n)(x) \geq 0 .$$

Vi lader nu $t \to 0$, og da får vi:

$$\forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in]0, \infty[: (-1)^{1+p} D^p f(x) \geq 0,$$

hvilket viser, at f er en Bernštein-funktion. $\square$

<u>Lemma 9.2.</u> Lad μ være et positivt mål på $]0, \infty[$ så

$$\forall x \in]0, \infty[: \int_0^{\infty} e^{-xs} d\mu(s) < \infty .$$

Da er funktionen $f :]0, \infty[\mapsto \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xs} d\mu(s)$$

en fuldstændig monoton funktion.

Bevis: Lad $x > 0$ og $h > 0$ være givet. Der gælder, at

$$\frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right) = \int_0^\infty \frac{1}{h}\left(e^{-(x+h)s} - e^{-xs}\right) d\mu(s)$$

$$= \int_0^\infty e^{-xs}\,\frac{1}{h}\left(e^{-hs} - 1\right) d\mu(s).$$

Da

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1}{h}\left(e^{-hs} - 1\right) = -s ,$$

og da der for $x_0 \in]0, x[$ gælder, at

$$\left|e^{-xs}\,\frac{1}{h}\left(e^{-hs} - 1\right)\right| \le e^{-xs} s$$

$$= e^{-x_0 s} \cdot s\, e^{-(x-x_0)s}$$

$$\le k\, e^{-x_0 s} ,$$

hvor k er en konstant, så

$$\forall s \in]0, \infty[: \quad s\, e^{-(x-x_0)s} \le k ,$$

følger af Lebesgues sætning om majoriseret konvergens, at

$$\lim_{h \to 0+} \int_0^\infty e^{-xs} \frac{1}{h} (e^{-hs} - 1) \, d\mu(s) = - \int_0^\infty s e^{-xs} \, d\mu(s).$$

Et tilsvarende ræsonnement for $h < 0$ viser, at der faktisk gælder

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) = - \int_0^\infty s e^{-xs} \, d\mu(s),$$

eller at f er differentiabel i x med

$$D f(x) = - \int_0^\infty s e^{-xs} \, d\mu(s).$$

Specielt er e^{-xs} integrabel m. h. t. målet $s\mu$, og dermed er Df differentiabel med

$$D^2 f(x) = \int_0^\infty s^2 e^{-xs} \, d\mu(s).$$

Ved iteration får vi for ethvert $p \in \mathbb{N}_0$ udtrykket

$$D^p f(x) = (-1)^p \int_0^\infty s^p e^{-xs} \, d\mu(s),$$

hvilket viser, at funktionen f er fuldstændig monoton. $\square$

Laplacetransformationen. Lad μ være et mål på halvaxen $[0,\infty[$. Hvis alle funktionerne

$$f_x : [0,\infty[\mapsto \mathbb{R} \ , \quad x \in \mathbb{R}_+$$

defineret ved

$$f_x : s \mapsto e^{-xs} \ , \quad x \in \mathbb{R}_+$$

er integrable m.h.t. $|\mu|$, eksisterer integralet

$$\mathcal{L}\mu(x) = \int_0^\infty e^{-xs} d\mu(s)$$

for alle $x \in \mathbb{R}_+$. Vi kalder funktionen

$$\mathcal{L}\mu : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{C}$$

den Laplacetransformerede af μ, og operatoren $\mathcal{L}$, der til $\mu \in RM(\mathbb{R})$ med $\operatorname{supp}\mu \subseteq [0,\infty[$ knytter $\mathcal{L}\mu$ kaldes Laplacetransformationen.

For $z \in \mathbb{C}$ og $s \in \mathbb{R}_+$ har vi, at $|e^{-zs}| = e^{-\operatorname{Re} z \cdot s}$, og det er derfor klart, at den Laplacetransformerede kan udvides til en holomorf funktion i den åbne halvplan

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \}$$

ved formlen

$$\mathcal{L}\mu(z) = \int_0^\infty e^{-zs}\, d\mu(s). \qquad (1)$$

Hvis μ specielt er et begrænset mål, kan den Laplacetransformerede endda udvides til halvplanen

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \geq 0 \}$$

ved hjælp af (1). Denne udvidelse er kontinuert, ifgl. Lebesgues sætning om majoriseret konvergens, og begrænset.

For ethvert komplekst tal $z = x + iy$, hvor $x \in \mathbb{R}_+$ og $y \in \mathbb{R}$ er

$$\mathcal{L}\mu(x+iy) = \int_0^\infty e^{-iys} e^{-xs}\, d\mu(s) = \mathcal{F}(e^{-xs}\mu)(y),$$

hvorved vi har sammenknyttet Laplacetransformationen og Fouriertransformationen. Dermed er vi i stand til at vise, at Laplacetransformationen er injektiv.

<u>Sætning 9.3.</u> (<u>Entydighedssætningen for Laplacetransformationen</u>) Lad μ og ν være mål på $[0, \infty[$, så

$$\mathcal{L}\mu = \mathcal{L}\nu, \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}_+.$$

Så er $\mu = \nu$.

Bevis: De kanoniske udvidelser af de Laplace-transformerede $\mathcal{L}\mu$ og $\mathcal{L}\nu$ til halvplanen $\operatorname{Re} z > 0$ givet ved formlen (1), stemmer overens på hele $\mathbb{R}_+$. Da $\mathbb{R}_+$ har et fortætningspunkt, og da udvidelserne er holomorfe, må de stemme overens i hele den åbne halvplan $\operatorname{Re} z > 0$.

Specielt gælder for $y \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\mu\,(1+iy) = \mathcal{L}\nu\,(1+iy),$$

og derfor

$$\mathcal{F}(e^{-s}\mu)(y) = \mathcal{F}(e^{-s}\nu)(y),$$

og da Fouriertransformationen er injektiv, kan vi slutte, at

$$e^{-s}\mu = e^{-s}\nu,$$

hvoraf fås

$$\mu = \nu. \qquad \square$$

Hvis μ og ν er mål på $\mathbb{R}$ med $\operatorname{supp}\mu \subseteq [0,\infty[$ og $\operatorname{supp}\nu \subseteq [0,\infty[$ kan μ og ν ifgl. øvelse 7.7 foldes og $\operatorname{supp}(\mu * \nu) = \operatorname{supp}\mu + \operatorname{supp}\nu \subseteq [0,\infty[$.

Der gælder, at $\mathcal{L}(\mu * \nu) = \mathcal{L}\mu \cdot \mathcal{L}\nu$, thi

$$\mathcal{L}(\mu * \nu)(z) = \int_0^\infty e^{-zs}\, d(\mu * \nu)(s)$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-z(s+t)} d\mu(s) \right) d\nu(t)$$

$$= \mathcal{L}\mu(z) \cdot \mathcal{L}\nu(z),$$

for $\operatorname{Re} z > 0$.

Exempel. Vi betragter mængden

$$L^1([0,\infty[,\mathbb{C}) = \{ f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid \forall x < 0 : f(x) = 0 \}.$$

Da er $L^1([0,\infty[,\mathbb{C})$ en afsluttet delalgebra af $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. For $z \in \mathbb{C}$ med $\operatorname{Re} z > 0$ er funktionen

$$f \longmapsto \int_0^\infty e^{-zs} f(s)\, ds$$

en karakter, og hermed fås alle karakterer. Vi ser her, at Laplacetransformationen kan anskues ud fra den generelle Gelfandtransformationsteori.

Exempel. Vi betragter målet $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \varepsilon_{\log n}$.

For $z \in \mathbb{C}$ med $\mathrm{Re}\, z > 0$ er den Laplacetransformerede af μ derfor:

$$\mathcal{L}\mu(z) = \int_0^\infty e^{-zs} \, d\mu(s)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-z \log n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} .$$

Denne række er en Dirichletrække.

Lad nu $f :]0, \infty[\mapsto \mathbb{R}$ være en vilkårlig reel funktion. For hvert $h \in \mathbb{R}_+$ defineres funktionen

$$\Delta_h f :]0, \infty[\mapsto \mathbb{R}$$

ved

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}_+ .$$

Sætning 9.4. (Bernštein). Lad f være en reel funktion defineret på $]0, \infty[$. Da er følgende betingelser ensbetydende.

i) Funktionen f er fuldstændig monoton.

ii) $f \geq 0$, og der gælder

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall h_1, \ldots, h_p > 0 : (-1)^p \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_p} f \geq 0 .$$

iii) Der findes et positivt mål μ på $[0, \infty[$ så det for ethvert $x \in \mathbb{R}_+$ gælder, at

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xs}\, d\mu(s).$$

Målet μ er entydigt bestemt.

<u>Corollar 9.5.</u> Keglen af fuldstændig monotone funktion, og via sætning 9.1. også keglen af Bernštein-funktioner, er afsluttet i topologien for punktvis konvergens.

Bevis for sætning 9.4: iii) $\Rightarrow$ i) Dette følger af lemma 9.2.

i) $\Rightarrow$ ii). Lad f være en fuldstændig monoton funktion, og lad $h > 0$ være givet. Da er funktionen $-\Delta_h f$ fuldstændig monoton, thi for $p \in \mathbb{N}_0$ er

$$(-1)^p D^p(-\Delta_h f) = -(-1)^p \left(D^p f(x+h) - D^p f(x) \right) =$$

$$(-1)^{p+1} D^{p+1} f(x+\vartheta h) \cdot h \geq 0 \quad \text{for } \vartheta \in]0,1[$$

ifgl. differentialregningens middelværdisætning. Ved iteration fås, at for ethvert $p \in \mathbb{N}$ og ethvert p-sæt $(h_1, h_2, \dots h_p)$ af positive reelle tal er

$$(-1)^p \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_p} f$$

en fuldstændig monoton funktion. Specielt er

$$(-1)^p \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_p} f \geq 0.$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Vi sætter $C =$

$$\{ f :]0, \infty[\mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ begrænset}, f \text{ opfylder ii)} \}.$$

Lad $f \in C$ være givet. Da er $f \geq 0$, og der gælder

$$\forall x \in]0, \infty[\ \forall h > 0 : -\Delta_h f(x) = f(x) - f(x+h) \geq 0,$$

hvilket udtrykker, at f er <u>aftagende</u>. Endvidere gælder

$$\forall h_1, h_2 > 0 : \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} f(x) = \Delta_{h_2} f(x+h_1) - \Delta_{h_2} f(x) \geq 0,$$

hvorved $\Delta_{h_2} f$ er en voksende funktion. Det betyder, at for hvert fast $h > 0$ er funktionen

$$x \longmapsto f(x) - f(x+h)$$

aftagende. Vi vil vise, at f er kontinuert. Lad dertil $a \in \mathbb{R}_+$ være givet. Da f er aftagende, har f grænseværdier fra højre og venstre i a, og der gælder

$$\alpha = \lim_{x \to a-} f(x) \geq f(a) \geq \lim_{x \to a+} f(x) = \beta$$

Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes da et $\delta > 0$, således at

$$\forall x, y \in \,]a-\delta, a[\, : \; |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

og

$$\forall x, y \in \,]a, a+\delta[\, : \; |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Lad nu $a_1 \in \,]a-\delta, a[$ være valgt og valg $h > 0$, så $a_1 + h < a$. For $x \geq a_1$ gælder da

$$0 \leq f(x) - f(x+h) \leq f(a_1) - f(a_1 + h) \leq \varepsilon,$$

hvor vi har benyttet, at såvel f som funktionen

$$x \longmapsto f(x) - f(x-h)$$

er aftagende. For ethvert $x \in \,]a_1, a[\, \cap \,]a-h, \infty[$ får vi derfor

$$f(x) \geq \alpha \geq f(a) \geq \beta \geq f(x+h),$$

og dermed

$$0 \leq \alpha - \beta \leq f(x) - f(x+h) \leq \varepsilon,$$

så $\alpha = \beta$. Dette viser, at f er kontinuert i a.

For $f \in C$ eksisterer grænseværdien fra højre:

$$f(0+) = \lim_{x \to 0+} f(x),$$

thi f er aftagende og begrænset. Vi indfører nu mængden

$$C_1 = \{ f \in C \mid f(0+) \leq 1 \}.$$

Vi bemærker, at både C og C_1 er delmængder af

$\mathbb{R}^{]0,\infty[}$, der er forsynet med produkttopologien, som er topologien for punktvis konvergens. Mængden

$$[0,1]^{]0,\infty[}$$

er ifgl. Tychonoff's sætning kompakt, og da

$$C_1 \subseteq [0,1]^{]0,\infty[},$$

og egenskaben ii) bevares ved punktvis grænseovergang, er mængden C_1 kompakt. Endvidere er C_1 konveks.

Vi ønsker, at finde de extreme punkter for C_1. Lad f være extrem i C_1. For hvert $x_0 > 0$ betragter vi funktionen

$$u(x) = f(x+x_0) - f(x_0) f(x).$$

Der gælder, at $f \pm u \in C_1$, thi man har f. ex.:

$$(f+u)(x) = f(x+x_0) + f(x)(1-f(x_0)) \geq 0$$

og

$$(f+u)(0+) = f(x_0) + f(0+)(1-f(x_0)) \leq 1,$$

samt

$$(-1)^p \Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_p} (\varphi + u) =$$

$$(-1)^p \Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_p} \varphi(x+x_0) + (-1)^p \Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_p} \varphi(x) (1-\varphi(x_0)) \geq 0.$$

Endvidere har man $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi+u) + \frac{1}{2}(\varphi-u)$. Da φ er ekstrem, har vi, at $u \equiv 0$, så φ opfylder

$$\forall x, x_0 > 0 : \varphi(x+x_0) = \varphi(x)\varphi(x_0).$$

Da φ er kontinuert, gælder at enten er $\varphi \equiv 0$ eller

$$\varphi(x) = e^{-xs} \quad \text{for et } s \in \mathbb{R},$$

og da φ er begrænset, slutter vi, at $s \geq 0$.

Idet vi sætter

$$\mathfrak{A} = \{0\} \cup \{ e^{-xs} \mid s \geq 0 \},$$

har vi altså, at $\operatorname{Ext} C_1 \subseteq \mathfrak{A}$. Vi skriver nu $E = \mathbb{R}^{]0,\infty[}$ og betragter afbildningen:

$$L_h : E \mapsto E \quad \text{for } h > 0,$$

som er givet ved:

$$L_h f(x) = f(hx).$$

Man ser, at L_h er bijektiv, og at

$$L_{\frac{1}{h}} = L_{h^{-1}} = L_h^{-1},$$

så L_h er en topologisk vektorrumsisomorfi af E på E. Vi kan derfor slutte, at

$$L_h(C_1) = C_1,$$

og at L_h afbilder extremt punkt på extremt punkt, så

$$L_h(\mathcal{E}xt\, C_1) = \mathcal{E}xt\, C_1.$$

Da der ifgl. Krein-Milmans sætning er flere extreme punkter end blot $f \equiv 0$ og $f \equiv 1$, fremkommer ved passende valg af $h > 0$ alle funktionerne

$$e^{-xs}, \quad s > 0$$

som extreme punkter, thi $L_h e^{-xs} = e^{-xhs}$.

Vi har altså, at $\mathcal{E}xt\, C_1 = \mathfrak{A}$. Da C_1 er kompakt, giver Krein-Milmans sætning, at

$$C_1 = \overline{\text{conv}\ \mathfrak{A}}.$$

Vi indfører nu funktionen $\rho : [0, \infty[\mapsto \mathfrak{A}$ ved

$$\rho(s) = e^{-xs}.$$

Vi ser, at ρ er injektiv og kontinuert. Hvis vi nu definerer $\rho(\infty) = 0$, kan vi udvide ρ til

$$\rho : [0, \infty] \mapsto \mathfrak{A},$$

hvor $[0, \infty]$ er etpunktskompaktifikationen, Alexandroff-kompaktifikationen, af $[0, \infty[$. Da bliver ρ kontinuert og bijektiv og endda en homeomorfi af $[0, \infty]$ på $\mathfrak{A}$. Vi har da, at $\mathfrak{A}$ er kompakt og dermed afsluttet.

For givet $f \in C_1$ findes et net $(f_i)_{i \in J}$ med

$$f_i = \sum_{k=1}^{n(i)} \lambda_k^{(i)} a_k^{(i)},$$

hvor $\lambda_k^{(i)} \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n(i)} \lambda_k^{(i)} = 1$ og $a_k^{(i)} = \rho(s_k^{(i)}) \in \mathfrak{A}$, for passende $s_k^{(i)} \in [0, \infty[$, så

$$f_i \to f \quad \text{punktvis.}$$

For hvert $i \in I$ skal μ_i betegne det mål på $[0, \infty]$, der er givet ved

$$\mu_i = \sum_{k=1}^{n(i)} \lambda_k^{(i)} \varepsilon_{s_k^{(i)}} .$$

Man ser umiddelbart, at målene μ_i alle er sandsynlighedsmål, thi

$$\mu_i([0, \infty]) = \sum_{k=1}^{n(i)} \lambda_k^{(i)} = 1 .$$

Nettet $(\mu_i)_{i \in I}$ er altså vagt begrænset. Der findes derfor et mål μ på $[0, \infty]$, så $\mu([0, \infty]) \leq 1$, og et vagt konvergent delnet $(\mu_{i_j})_{j \in J}$, så

$$\mu_{i_j} \xrightarrow[j \in J]{} \mu \quad \text{vagt.}$$

For $x > 0$ betragter vi endvidere afbildningen

$$\pi_x : E \mapsto \mathbb{R} ,$$

givet ved

$$\pi_x(f) = f(x) .$$

Man ser, at π_x er en kontinuert linearform, og derfor er den sammensatte afbildning

$$\pi_x \circ \rho : [0,\infty] \mapsto \mathbb{R}$$

kontinuert. Der gælder nu:

$$\langle \mu, \pi_x \circ \rho \rangle = \lim_{j \in J} \langle \mu_{i_j}, \pi_x \circ \rho \rangle$$

$$= \lim_{j \in J} \int_{[0,\infty]} e^{-xs} d\mu_{i_j}(s)$$

$$= \int_{[0,\infty]} e^{-xs} d\mu(s) ,$$

og da

$$f_{i_j}(x) = \int_{[0,\infty]} e^{-xs} d\mu_{i_j}(s)$$

$$= \sum_{k=1}^{n(i_j)} \lambda_k^{(i_j)} e^{-x s_{i_j}} ,$$

ser vi, at

$$f(x) = \int_{[0,\infty]} e^{-xs} \, d\mu(s) .$$

Målet μ kan skrives på formen

$$\mu = \mu(\{\infty\})\, \varepsilon_\infty + \nu ,$$

hvor $\nu = \mu|_{[0,\infty[}$. Da $\pi_x \circ \rho(\infty) = 0$, får vi for $x > 0$, at

$$f(x) = \int_{[0,\infty[} e^{-xs} \, d\nu(s) .$$

Hermed er den ønskede fremstilling opnået for $f \in C_1$ og dermed for $f \in C$.

Lad nu f være en vilkårlig funktion, der opfylder ii). For hvert $h > 0$ ser vi på funktionen

$$x \mapsto \tau_{-h} f(x) = f(x+h) .$$

Vi har, at $\tau_{-h} f \in C$, og ifgl. det foregående findes der da et endeligt mål μ_h på $[0,\infty[$, så

$$\tau_{-h}\phi(x) = \int_{[0,\infty[} e^{-xs}\mu_h(s) .$$

For $k>0$ får man:

$$\phi(x+h+k) = \int_0^\infty e^{-xs}e^{-ks}d\mu_h(s)$$

$$= \int_0^\infty e^{-xs}\, d\mu_{h+k}(s) ,$$

hvoraf følger, at

$$e^{-ks}\mu_h = \mu_{k+h} ,$$

da Laplacetransformationen er injektiv.

Målet $\mu = e^{+hs}\mu_h$ er uafhængigt af $h>0$, thi for $h<k$, så $k=h+a$, har vi:

$$e^{hs}\mu_h = e^{ks}e^{-as}\mu_h = e^{ks}\mu_{h+a} = e^{ks}\mu_k .$$

For $x>0$ gælder da, idet $h>0$ vælges så $h<x$:

$$f(x) = f((x-h)+h) = \int_0^\infty e^{-(x-h)s}\, d\mu_h(s)$$

$$= \int_0^\infty e^{-xs} e^{hs}\, d\mu_h(s)$$

$$= \int_0^\infty e^{-xs}\, d\mu(s). \qquad \square$$

Bemarkning. Lad f være en fuldstændig monoton funktion og lad μ være det tilhørende positive mål på $[0,\infty[$. Da f er aftagende, har vi:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \mu([0,\infty[) \leq \infty .$$

Vi har derfor, at $\lim_{x\to 0+} f(x) < \infty$, hvis og kun hvis μ er et begrænset mål. Laplacetransformationen giver altså en bijektiv korrespondance mellem de begrænsede, positive mål på $[0,\infty[$ og de fuldstændig monotone funktioner med $f(0+) < \infty$.

Sætning 9.6. En funktion $f:]0,\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ er en Bernštein-funktion hvis og kun hvis der findes konstanter $a \geq 0$ og $b \geq 0$ samt et positivt mål μ på $]0,\infty[$ med

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+s}\,d\mu(s) < \infty, \qquad (*)$$

således at

$$f(x) = a + bx + \int_0^\infty (1-e^{-xs})\,d\mu(s). \qquad (**)$$

Triplet (a, b, μ) er entydigt bestemt.

Bevis: Betingelsen $(*)$ er klart ækvivalent med betingelserne

$$\int_0^1 s\,d\mu(s) < \infty \quad \text{og} \quad \int_1^\infty d\mu(s) < \infty \qquad (\circledast)$$

Vi antager først, at μ er et positivt mål på $]0,\infty[$, som tilfredsstiller $(*)$. For alle $x > 0$ og alle $s > 0$ har vi

$$1 - e^{-xs} \leq xs \quad \text{og} \quad 1 - e^{-xs} \leq 2.$$

Ifgl. $(\circledast)$ har vi derfor, at integralet

$$g(x) = \int_0^\infty (1-e^{-xs})\,d\mu(s)$$

er endeligt for $x > 0$. For $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ og $x > 0$ har vi:

$$\frac{1}{h}\left(g(x+h) - g(x)\right) = \int_0^\infty \frac{1}{h} e^{-xs}(1-e^{-hs})\,d\mu(s)$$

$$= \int_0^\infty s e^{-xs} \frac{e^{-hs}-1}{-hs}\,d\mu(s) ,$$

og ved hjælp af sætningen om monoton konvergens finder vi

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(g(x+h)-g(x)\right) = \int_0^\infty s e^{-xs}\,d\mu(s).$$

Hermed er g differentiabel med

$$Dg(x) = \int_0^\infty s e^{-xs}\,d\mu(s).$$

Af sætning 9.3. følger, at Dg er fuldstændig monoton, og dermed er g en Bernštein-funktion. Så er også funktionen

$$f(x) = a + bx + g(x) ,$$

hvor $a \geq 0$ og $b \geq 0$ en Bernštein-funktion.

Vi antager nu, at f er en Bernštein-funktion. Så er Df fuldstændig monoton og ifgl. sætning 9.3. findes der et positivt mål ν på $[0,\infty[$ således, at

$$Df(x) = \int_0^\infty e^{-xs}\,d\nu(s).$$

Målet ν kan skrives på formen

$$\nu = b\,\varepsilon_0 + \tau\ ,$$

hvor $b = \nu(\{0\}) \geq 0$ og τ er restriktionen af ν til $]0,\infty[$. Vi har da

$$Df(x) = b + \int_0^\infty e^{-xs}\,d\tau(s)\ ,$$

og idet vi sætter $a = \lim_{x\to 0+} f(x)$, finder vi

$$f(x) = a + \int_0^x Df(u)\,du$$

$$= a + bx + \int_0^\infty \frac{1-e^{-xs}}{s}\,d\tau(s).$$

Specielt har vi:

$$f(1) \geq \int_1^\infty \frac{1-e^{-s}}{s}\, d\tau(s) \geq \left(\int_1^\infty \frac{1}{s}\, d\tau(s)\right)(1-e^{-1}),$$

hvilket viser, at

$$\int_1^\infty \frac{1}{s}\, d\tau(s) < \infty .$$

Målet μ på $]0,\infty[$ defineret ved $\mu = \frac{1}{s}\tau$ tilfredsstiller klart betingelserne $(\divideontimes)$ og dermed $(*)$. Hermed har vi fundet den ønskede fremstilling.

I fremstillingen $(**)$ af en Bernštein-funktion er konstanterne a og b entydigt bestemt ved:

$$a = \lim_{x\to 0+} f(x) \quad \text{og} \quad b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right),$$

og da

$$D f(x) = b + \int_0^\infty s e^{-xs}\, d\mu(s)$$

er målet $b\varepsilon_0 + s\mu$ entydigt bestemt ifgl. sætning 9.3. Heraf følger, at μ er entydigt bestemt ved f.

$\square$

<u>Bemærkninger</u>. Da en fuldstændig monoton funktion er den Laplacetransformerede af et mål på $[0, \infty[$ kan den udvides holomorft til den åbne halvplan

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \}.$$

Den kan ved kontinuitet udvides til halvplanen

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0 \}$$

netop hvis $f(0+) < \infty$, jvf. p 402-403.

Lad f være en Bernštein-funktion. Så kan vi benytte integralfremstillingen for f til at definere en analytisk fortsættelse af f.

For $s > 0$ og $z \in \mathbb{C}$ med $\operatorname{Re} z \geq 0$ har vi ulighederne:

$$|1 - e^{-zs}| \leq s|z| \quad \text{og} \quad |1 - e^{-zs}| \leq 2,$$

som sammen med $(*)$ viser, at $\int_0^\infty (1 - e^{-zs})\, d\mu(s)$

er veldefineret for $\operatorname{Re} z \geq 0$. For $\operatorname{Re} z \geq 0$ ser man, at funktionen

$$z \longmapsto a + bz + \int_0^\infty (1 - e^{-zs})\, d\mu(s)$$

er kontinuert, og at den er holomorf for $\operatorname{Re} z > 0$. I begge ovennævnte tilfælde taler vi om de kanoniske udvidelser.

Sætning 9.7. Der er en bijektiv korrespondance mellem foldningssemigruppen $(\eta_t)_{t>0}$ på $\mathbb{R}$, hvor

$$\forall t > 0: \operatorname{supp} \eta_t \subseteq [0, \infty[,$$

og Bernštein-funktionerne $f:]0, \infty[\mapsto \mathbb{R}$. Denne korrespondance er givet ved

$$\mathcal{L}\eta_t(x) = e^{-tf(x)} \quad \text{for } x > 0 \text{ og } t > 0.$$

Bevis: Vi antager først, at $(\eta_t)_{t>0}$ er en foldsemigruppe, så

$$\forall t > 0: \operatorname{supp} \eta_t \subseteq [0, \infty[.$$

For hvert $x > 0$ betragter vi funktionen

$$\varphi_x :]0, \infty[\mapsto \mathbb{R}$$

defineret ved

$$\varphi_x(t) = \mathcal{L}\eta_t(x).$$

Så er $\varphi_x(t) > 0$ for alle $t > 0$. For $s, t > 0$ har vi:

$$\begin{aligned}\varphi_x(s+t) &= \mathcal{L}\eta_{s+t}(x) \\ &= \mathcal{L}(\eta_s * \eta_t)(x) \\ &= \mathcal{L}\eta_s(x) \cdot \mathcal{L}\eta_t(x) \\ &= \varphi_x(s) \cdot \varphi_x(t).\end{aligned}$$

Endvidere er φ_x en kontinuert funktion, thi

$$\eta_t \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \eta_{t_0} \quad \text{i Bernoulli-topologien,}$$

og dermed har vi

$$\mathcal{L}\eta_t(x) = \int_0^\infty e^{-xs}\, d\eta_t(s) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-xs}\, d\eta_{t_0}(s) = \mathcal{L}\eta_{t_0}(x),$$

altså $\varphi_x(t) \to \varphi_x(t_0)$ for $t \to t_0$.

For $x > 0$ findes der derfor et entydigt bestemt reelt tal $f(x)$, så

$$\varphi_x(t) = \mathcal{L}\eta_t(x) = e^{-tf(x)} \quad \text{for } t>0.$$

Da $\varphi_x(t) \leq 1$ for alle $x>0$ og alle $t>0$, har vi, at $f(x) \geq 0$ for alle $x>0$, og det følger af sætning 9.1., at f er en Bernštein-funktion.

Lad nu f være en Bernštein-funktion. Af sætning 9.1. fås, at funktionen

$$x \longmapsto e^{-tf(x)}$$

er fuldstændig monoton for alle $t>0$, og at

$$\lim_{x\to 0+}\left(e^{-tf(x)}\right) \leq 1,$$

thi $f(x) \geq 0$. Der findes derfor ifgl. sætning 9.3. et entydigt bestemt positivt mål η_t på $[0,\infty[$, så

$$\eta_t([0,\infty[) \leq 1$$

og

$$(\nabla) \qquad \mathcal{L}\eta_t(x) = e^{-tf(x)}, \quad \text{for } x>0,\ t>0.$$

På grund af entydigheden af de kanoniske holomorfe udvidelser gælder formlen (∇) i den åbne halvplan

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \}.$$

Ved udvidelse ved kontinuitet gælder formlen i hele halvplanen

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0 \}.$$

Fra p. 403 ved vi, at for $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$ og et begrænset mål μ på $[0, \infty[$, gælder der

$$\mathcal{L}\mu(x+iy) = \mathcal{F}(e^{-xs}\mu)(y),$$

og heraf finder man

$$\mathcal{F}\eta_t(y) = \mathcal{L}\eta_t(iy) = e^{-tf(iy)}.$$

Af sætning II 3.7. fås, at funktionen $y \mapsto f(iy)$ er kontinuert og negativ definit. Heraf slutter vi, at $(\eta_t)_{t>0}$ er en foldningssemigruppe, og at $y \mapsto f(iy)$ er den associerede negativ definite funktion.

$\square$

<u>Bemærkning</u>. Formlen (∇) gælder for $\operatorname{Re} z \geq 0$,

specielt får vi for alle $t > 0$:

$$\eta_t([0, \infty[) = \mathcal{L}\eta_t(0) = e^{-tf(0)}.$$

Målene η_t er sandsynlighedsmål, hvis og kun hvis $f(0) = 0$.

<u>Sætning 9.8.</u> Lad $(\eta_t)_{t>0}$ være en foldningssemigruppe på $\mathbb{R}$ med

$$\forall t > 0 : \operatorname{supp} \eta_t \subseteq [0, \infty[,$$

og lad f være den tilhørende Bernštein-funktion. Enten er $f \equiv 0$, og så gælder

$$\forall t > 0 : \eta_t = \varepsilon_0,$$

eller $f(x) > 0$ for alle $x > 0$; i dette tilfælde er foldningssemigruppen $(\eta_t)_{t>0}$ <u>transient</u>, og for potentialkernen ν gælder

$$\mathcal{L}\nu(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Bevis: En Bernštein-funktion er voksende og konkav, og derfor er $f \equiv 0$, hvis der findes et

$x > 0$ med $f(x) = 0$. Der gælder da klart, at $\eta_t = \varepsilon_0$ for alle $t > 0$.

Vi antager nu, at $f(x) > 0$ for alle $x > 0$. Så har man for $x > 0$:

$$\int_0^\infty \mathcal{L}\eta_t(x)\,dt = \int_0^\infty e^{-tf(x)}\,dt = \frac{1}{f(x)}.$$

For $\varphi \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R})$ findes en konstant $c > 0$ så

$$\forall s \geq 0 : \varphi(s) \leq c\,e^{-s}.$$

Heraf får man

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \langle \eta_t, \varphi \rangle\,dt &\leq \int_0^\infty \langle \eta_t, c e^{-s} \rangle\,dt \\ &= c\int_0^\infty \mathcal{L}\eta_t(1)\,dt \\ &= c\,\frac{1}{f(1)} < \infty,\end{aligned}$$

hvilket viser, at foldningssemigruppen $(\eta_t)_{t>0}$ er transient. Lad ν betegne potentialkernen for $(\eta_t)_{t>0}$. Vi har da

$$\mathcal{L}\nu(x) = \int_0^\infty \langle \eta_t, e^{-xs} \rangle\,dt = \int_0^\infty \mathcal{L}\eta_t(x)\,dt = \frac{1}{f(x)}. \qquad \square$$

Lad $(\mu_t)_{t>0}$ være en foldningssemigruppe på en LCA-gruppe G med tilhørende negativ definit funktion $\psi: \Gamma \mapsto \mathbb{C}$, og lad $(\eta_t)_{t>0}$ være en foldningssemigruppe på $\mathbb{R}$, så

$$\forall t > 0 : \operatorname{supp} \eta_t \subseteq [0, \infty[.$$

Den tilhørende Bernštein-funktion f har en kanonisk udvidelse til $\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \}$. Da

$$\forall \gamma \in \Gamma : \operatorname{Re} \psi(\gamma) \geq 0$$

kan funktionerne f og ψ sammensættes, og vi har

$$f(\psi(\gamma)) = a + b\psi(\gamma) + \int_0^\infty (1 - e^{-s\psi(\gamma)})\, d\mu(s).$$

Denne formel viser, at $f \circ \psi$ er en kontinuert, negativ definit funktion. Den tilhørende foldningssemigruppe på G betegner vi $(\mu_t^f)_{t>0}$. Den kan beskrives ved hjælp af foldningssemigrupperne $(\mu_t)_{t>0}$ og $(\eta_t)_{t>0}$ på følgende måde:

<u>Sætning 9.9.</u> Lad funktionerne f og ψ samt

foldningssemigrupperne $(\eta_t)_{t>0}$ og $(\mu_t)_{t>0}$ være som ovenfor. Foldningssemigruppen $(\mu_t^{\phi})_{t>0}$ med tilhørende kontinuert negativ definit funktion $\phi \circ \psi$ er givet ved det vage integral:

$$\mu_t^{\phi} = \int_0^{\infty} \mu_s \, d\eta_t(s).$$

Dette skal forstås således: Vælg $\varphi \in \mathcal{K}(G)$; for hvert $t > 0$ har man da

$$< \mu_t^{\phi}, \varphi > = \int_0^{\infty} < \mu_s, \varphi > d\eta_t(s).$$

Bevis: For $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ er afbildningen

$$\varphi \longmapsto \int_0^{\infty} < \mu_s, \varphi > d\eta_t(s)$$

en positiv linearform på $\mathcal{K}(G)$, og der findes derfor et positivt mål ν_t på G, så

$$< \nu_t, \varphi > = \int_0^{\infty} < \mu_s, \varphi > d\eta_t(s)$$

eller

$$\nu_t = \int_0^{\infty} \mu_s \, d\eta_t(s).$$

Dette mål er begrænset, og for den Fourier-transformerede gælder:

$$\mathcal{F}\nu_t(\gamma) = \int_G \overline{\gamma(x)}\, d\nu_t(x)$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_G \overline{\gamma(x)}\, d\mu_s(x) \right) d\eta_t(s)$$

$$= \int_0^\infty \mathcal{F}\mu_s(\gamma)\, d\eta_t(s)$$

$$= \int_0^\infty e^{-s\psi(\gamma)}\, d\eta_t(s)$$

$$= \mathcal{L}\eta_t(\psi(\gamma))$$

$$= e^{-t\phi(\psi(\gamma))} = \mathcal{F}\mu_t^\phi(\gamma).$$

Vi får heraf, at $\nu_t = \mu_t^\phi$ for alle $t > 0$.

$\square$

Nogle rettelser og tilføjelser.

p. 11, 6^n : "ψ" til "$-\psi$"

p. 55, 1 & 4 : "$|\cdots| \le$" til "$|\cdots|^2 \le$"

p. 67, 1 : "$x \mapsto \Gamma(ix)$" til "$x \mapsto \Gamma(a+ix)$ for $a>0$"

p. 71, 2^n: "er heraf" til "og heraf"

p. 76, nederst: Nemmere at sige : $\mathcal{F}f_n \to \mathcal{F}f$ ligeligt og $\mathcal{F}f_n \to \tilde{\mathcal{F}}f$ i L^2. Der findes en delfølge så $\mathcal{F}f_{n_p} \to \tilde{\mathcal{F}}f$ p.p., altså $\tilde{\mathcal{F}}f = \mathcal{F}f$ p.p.

p. 88, 8^n: tilføje "kontinuerte" efter d.v.s.

p. 90, 2 : Skal være: og dermed $\varphi = (\check{\mu})^\wedge = \hat{\mu} = 1$.

p. 90, 3^n: mangler brøkstreg

p. 96, 1^n: "og" til " hvor $a_i \in \mathbb{C}$ og"

p. 97, 2^n: "5.3" til "5.4"

p. 103, 6^n: "positivt begrænset mål" til "sandsynlighedsmål"

p. 121, 7 : "$\hat{G}_i$" til "$\hat{\hat{G}}_i$"

p. 125, 7^n: "$\langle h, \gamma \rangle$" til "$\overline{\langle h, \gamma \rangle}$"

p. 126, 6 : Med $n\gamma$ betegnes elementet $\gamma + \cdots + \gamma$ (n-addender) af $\hat{G}$, altså funktionen $G \to \mathbb{T}$ givet ved $(n\gamma)(x) = (\gamma + \cdots + \gamma)(x) = (\gamma(x))^n$.

p. 128, 6 : "p. 54" til "p. 55"

p. 139, 6^n: Tilføjelse: Da afbildningen

$$M_+(X) \ni \mu \mapsto \mu(X)$$

er kontinuert i B-topologien og da afbildningen

$$M_+(X) \ni \mu \mapsto \mu(X \setminus K) \quad , \; K \subseteq X \text{ kompakt}$$

er nedad halvkontinuert i B-topologien, vil en delmængde $H \subseteq M_+(X)$ tilfredsstille Prohorovs betingelse netop hvis afslutningen $\overline{H}$ (i B-topologien) af H opfylder Prohorovs betingelse.

p. 139, 2- : tilføj efter H: "er en B-afsluttet delmængde af $M_+(X)$, som"

p. 150, 1-2: tilføj efter Øvelse II, 4, 2: "eller Sætning II.9.8"

p. 150, 13-16: skal være: "og μ_0 er altså enten nulmålet i hvilket tilfælde alle målene μ_t er lig nul eller også findes (ifølge Sætning 2.1) en kompakt undergruppe K af G så $\mu_0 = \omega_K$. I sidstnævnte tilfælde har vi således for alle $t \geq 0$, at"

p. 163 : Lemma 3.2 kan skærpes til: For $\psi \in N(\Gamma)$ med $\psi(0) = 0$ er funktionen

$$\gamma \longmapsto \sqrt{|\psi(\gamma)|}$$

subadditiv. Beviset er analogt

p. 168, 10: "$\exp(-\psi(0))$" til "$\exp(-t\psi(0))$"

p. 180, 5: "$B(y,z)$" til "$B(y,x)$"

p. 185, 3-: tilføje: "$\psi_n \in N(\Gamma)$ og"

p. 190, 8: mangler brøkstreg

p. 197, 1: Betingelse 3) skal være:

3) ψ er kontinuert, symmetrisk og $\psi(0) \geq 0$, samt $\psi * \sigma - \psi$ er kontinuert og positiv definit for alle $\sigma \in \mathcal{S}$.

p. 198, 3: "3.2" til "4.2"

p. 202, 1: "3.13" til "3.16"

p. 202, 5^n: "(4)" til "(x)"

p. 202: ligning (7) skal være

$$\alpha(\gamma) = \frac{\alpha(n\gamma)}{n^2} = \frac{\psi(n\gamma)}{n^2} - \frac{a}{n^2} - \int \frac{(1 - \operatorname{Re} n\gamma(x))}{n^2} d\mu(x)$$

p. 203, 7^n: tilføj efter (6): da $\frac{a}{n^2} \to 0$ for $n \to \infty$

p. 204, 6^n: "$(1-\hat{\sigma})\mu$" til "μ_σ".

Kan suppleres!

Rettelser og tilföjelser.

283. 1. f. o.: $\mu * \xi \le \mu$ skal rettes til $\mu * \xi \le \xi$.

303. 4. f. o.: $\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \lambda(\xi - \lambda \rho_\lambda * \xi)$ skal rettes til

$$\sigma = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\xi - \lambda \rho_\lambda * \xi).$$

311. 6. f. o.: Der tilföjes: $\le \varkappa * \sigma + \sigma$.

313. 2 f. m. – 315. 4 f. o.: I beviset for sætning 7.22 er der opstået forvirring i betegnelserne. Alle steder, hvor der står σ^{ω_0}, skal der stå σ_0, og på p. 315. 4. f. o. tilföjes: Vi har nu vist, at σ_0 er et $\varkappa$-fejet mål af σ på ω_0, og man kan derfor skrive $\sigma_0 = \sigma^{\omega_0}$.

328. 5. f. m.: $h = \rho_1 * (\sigma - (g\omega_G))$ skal rettes til

$$h\omega_G = \rho_1 * (\sigma - (g\omega_G)).$$

347. 6. f. m.: $\hat{\eta}(\gamma) \neq 0$ skal rettes til $\hat{\eta}_\nu(\gamma) \neq 0$.

347. 2. f. m.: $\hat{\eta} \to 1$ skal rettes til $\hat{\eta}_\nu \to 1$.

368. 2 f.o.: $f(x) = \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy$ skal rettes til

$$f(x) \geqslant \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy.$$

368. 2. f.n.: positivt, skal rettes til: positivt mål.

378. 8. f.o.: $\varkappa * (\sigma_\gamma - \sigma') = \varkappa * \sigma'$ skal rettes til:
$\varkappa * (\sigma_\gamma * \sigma') = \varkappa * \sigma'$.

390. 3. f.n.: $\overline{\omega_1} \subseteq \omega_1$ og $\overline{\omega_2} \subseteq \omega_2$ rettes til
$\overline{\omega_1'} \subseteq \omega_1$ og $\overline{\omega_2'} \subseteq \omega_2$.

399. 3 f.o.: $D^p(e^{-tf(x)}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+p} \frac{t^n}{n!} D^p(f^n)(x) \geqslant 0$

skal rettes til:

$(-1)^p D^p(e^{-tf(x)}) =$
$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+p} \frac{t^n}{n!} D^p(f^n)(x) \geqslant 0.$