

Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (Vægt 20%)

Lad funktionen $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x, y) = -xy^2 + x^2 + 2y^2.$$

- (a) Udregn de partielle afledede f'_x og f'_y samt Hesse matricen for f .
(b) Bestem samtlige stationære punkter for f , og afgør for hvert af dem om det er et lokalt minimum, et lokalt maksimum eller et saddepunkt.
(c) Lad området A være givet ved

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

og lad C være den del af randen af A som udgøres af en (afsluttet) kvartcirkel. Skitser A og C . Bestem værdimængden $f(C)$.

- (d) Bestem mindsteværdien og størsteværdien for f i A .

Opgave 2 (Vægt 10%)

Lad

$$g(x) = \int_0^1 e^{xt^2} dt$$

for $x \in \mathbf{R}$.

- (a) Beregn $g(0)$ samt, under henvisning til en relevant sætning i lærebogen, $g'(0)$ og $g''(0)$. Opstil dernæst Taylorpolynomiet $P_2(x)$ af 2. grad for g ud fra $x = 0$.
(b) Gør rede for at der gælder $0 \leq g'''(c) \leq \frac{1}{7}e^c$ for alle $c \geq 0$. Benyt dette samt vurderingen $\frac{1}{7}e^{0.1} < 0.2$ til at give en vurdering af størrelsen af restleddet

$$R_3(x) = g(x) - P_2(x)$$

for $x \in [0, 0.1]$.

Opgave 3 (Vægt 20%)

Lad

$$f(x, y) = x^2 - 8x - y^2 + 5y$$

og

$$g(x, y) = 2x^2 + y^2.$$

(a) Lad $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x, y) = 27\}$. Begrund at S er afsluttet og begrænset, og at funktionen $f(x, y)$ antager både en størsteværdi og en mindsteværdi på S .

I det følgende betragter vi problemet: At bestemme de ovennævnte ekstrema for f under bibetingelsen $g(x, y) = 27$.

(b) Opstil Lagrangefunktionen $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ der svarer til denne ekstremumsbestemmelse. Det oplyses, at der findes et punkt (x_1, y_1) med $x_1 = 1$, som giver anledning til et stationært punkt for \mathcal{L} . Bestem dette punkt og værdien λ_1 af den tilhørende Lagrangemultiplikator.

(c) Til værdien $\lambda_2 = -\frac{1}{6}$ af Lagrangemultiplikatoren svarer et andet stationært punkt (x_2, y_2) for \mathcal{L} . Bestem dette punkt og kontroller at det opfylder bibetingelsen.

(d) Udover de ovennævnte to punkter er der yderligere to stationære punkter for \mathcal{L} . Disse oplyses at være henholdsvis

$$(x_3, y_3, \lambda_3) = (2.239, 4.120, -0.3933)$$

og

$$(x_4, y_4, \lambda_4) = (-3.573, 1.214, 1.060)$$

med funktionsværdierne $f(x_3, y_3) = -9.273$ og $f(x_4, y_4) = -11.22$. Bestem ved hjælp af denne oplysning største- og mindsteværdien for $f(x, y)$ på S .

Opgave 4 (Vægt 15%)

Lad vektorerne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ i talrummet \mathbf{R}^4 være givet ved

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

og lad $U \subset \mathbf{R}^4$ være underrummet udspændt af de fire vektorer.

(a) Bestem en basis for U .

(b) Lad $\underline{\underline{B}}$ være den 4×4 matrix, hvis *rækker* udgøres af de fire vektorer, altså

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Løs det homogene ligningssystem $\underline{B}\underline{x} = \underline{0}$, $\underline{x} \in \mathbf{R}^4$. Benyt løsningen til at angive en basis for det ortogonale komplement U^\perp til U .

(c) Bestem orthogonalprojektionen af vektoren $\underline{b} = (2, 2, -2, 0)$ på U^\perp . Benyt resultatet til også at bestemme orthogonalprojektionen af \underline{b} på U .

Opgave 5 (Vægt 20%)

Lad \underline{S} være 4×4 matricen

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Udregn determinanten af \underline{S} , og vis derved at matricen er regulær.

(b) Lad

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & b \\ -1 & 1 & c & d \end{pmatrix}.$$

Udregn matrixproduktet $\underline{S}\underline{R}$, og bestem tallene $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ således at $\underline{R} = \underline{S}^{-1}$.

(c) Lad $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3, \underline{s}_4$ betegne søjlerne i \underline{S} , og lad den lineære afbildning $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ være givet ved

$$f(\underline{s}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{s}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{s}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{s}_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem vektorerne $f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3), f(\underline{e}_4)$, hvor $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4 \in \mathbf{R}^4$ betegner de naturlige basisvektorer.

(d) Lad $U \subset \mathbf{R}^4$ være underrummet

$$U = \{\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_2 = x_4 = 0\}.$$

Bestem en basis for underrummet $f(U)$ i \mathbf{R}^3 .

Opgave 6 (Vægt 15%)

For $\alpha \in \mathbf{R}$ betragtes 3×3 matricen

$$\underline{A} = \underline{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \alpha \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Udregn det karakteristiske polynomium for $\underline{A}(\alpha)$. Find dets rødder samt rodmultipliciteten af hver af disse.

(b) Bestem, for hvert α , en vektor $\underline{v} = \underline{v}(\alpha)$ som er egenvektor for $\underline{A}(\alpha)$ med egenværdien $\lambda = 4$.

(c) Begrund at $\underline{A}(\alpha)$ ikke er diagonaliserbar for $\alpha \neq 0$. Lad til sidst $\alpha = 0$ og bestem en basis for \mathbf{R}^3 bestående af egenvektorer for $\underline{A}(0)$.