Matematik 2 MA1

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

1° Lad X være en mængde, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner $f_n : X \to \mathbb{R}$, så $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt mod funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Vis, at hvis $\varphi : Y \to X$ er en afbildning fra en mængde Y ind i X, da konvergerer funktionsfølgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hvor $g_n = f_n \circ \varphi : Y \to \mathbb{R}$, uniformt mod funktionen $g = f \circ \varphi : Y \to \mathbb{R}$. 2° Lad $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en uniformt kontinuert funktion. Vis med betegnelserne fra 1°, at funktionsfølgen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hvor $h_n = \psi \circ f_n : X \to \mathbb{R}$, konvergerer uniformt mod funktionen $h = \psi \circ f : X \to \mathbb{R}$. 3° Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) betegne metriske rum, og lad $\varphi : X \to Y$ være en bijektiv afbildning. For $x_1, x_2 \in X$ sættes

$$d'_X(x_1, x_2) = d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)).$$

Vis, at der herved er defineret en metrik d'_X på X. Idet $K_X(x,r)$, $K'_X(x,r)$ og $K_Y(y,r)$ betegner kugler i henholdsvis det metriske rum (X, d_X), (X, d'_X) og (Y, d_Y), skal man vise, at $K'_X(a,r) = \varphi^{-1}(K_Y(\varphi(a), r))$ for $a \in X$, $r > 0$. 4° Vis med betegnelserne fra 3°, at $\varphi : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ er en homeomorfi, hvis og kun hvis d_X og d'_X er ækvivalente metrikker på X.

Opgave 2

1° Lad $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ være en kontinuert, begrænset funktion. For hvert $n \in \mathbb{N}$ defineres funktionen $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ved

$$f_n(x) = f(\frac{x}{n})e^{-x}.$$

Gør rede for, at f_n for hvert $n \in \mathbb{N}$ er integrabel over $[0, +\infty[$ med hensyn til Lebesguemålet, og vis, at

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \to f(0) \text{ for } n \to \infty.$$

2° Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ sættes

$$E_n = \{x \in X \mid 0 \le f(x) \le n\}$$

og

$$F_n = \{x \in X \mid -n \le f(x) \le 0\},$$

og funktionen $h_n : X \to \mathbb{R}$ defineres ved $h_n = 1_{E_n} - 1_{F_n}$. Gør rede for, at $h_n f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ for hvert $n \in \mathbb{N}$, og vis, at

$$\int h_n f\,d\mu \to \int |f|\,d\mu \text{ for } n \to \infty.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

3° Lad funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = ye^{-xy}\sin x,$$

og lad $E =]0,+\infty[\times]0,1[$. Gør rede for, at f er integrabel over E med hensyn til Lebesguemålet, og find værdien af

$$\int_E f\,dm_2.$$

(Det kan uden bevis benyttes, at $\int_0^{+\infty} \sin x e^{-tx}\,dx = \frac{1}{1+t^2}$.)

Opgave 3

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum. 1°. Lad $g : X \to [0,+\infty[$ være en målelig funktion. For et givet reelt tal $a > 0$ betragtes mængden $E = \{x \in X \mid g(x) \geq a\}$. Vis, at

$$\mu(E) \leq \frac{1}{a}\int g d\mu\,.$$

2°. Vis under anvendelse af 1°, at hvis der findes en målelig funktion $f : X \to]0,+\infty[$, så $\int f d\mu < +\infty$, da er $(X,\mathbb{E},\mu)$ σ-endeligt.
(Vink: Se på mængderne $E_n = \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$.) 3°. Vis omvendt, at hvis $(X,\mathbb{E},\mu)$ er σ-endeligt, da findes en funktion f som i 2°.
(Vink: Skriv $X = \overset{\to}{\underset{n=1}{\overset{\infty}{\cup}}} A_n$, hvor $A_n \in \mathbb{E}$ med $\mu(A_n) < +\infty$, og hvor A_n'erne er parvis disjunkte; definer så f ved hjælp af en passende uendelig række, hvori indgår funktionerne 1_{A_n}.)

Opgave 4

Lad delmængden E af $\mathbb{R}^3$ være givet ved:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1\,, \quad |x| + |y| \leq z\}\,.$$

1°. Gør rede for, at E er kompakt og sammenhængende. 2°. Idet $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ betegner funktionen givet ved $f(x,y,z) = x^2$, skal man beregne

$$\int_E f dm_3\,.$$