Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1993-94

Matematik 2 MA 1

Opgave 1

1° Lad (X, d_X), (Y, d_Y) og (Z, d_Z) være metriske rum. Vis, at hvis $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ er uniformt kontinuerte afbildninger, da er $g \circ f : X \to Z$ uniformt kontinuert.

2° Vis, at hvis en Cauchyfølge $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i et metrisk rum (M, d) har en konvergent delfølge, da er $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergent.

3° Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være en differentiabel funktion. Vis, at den afledede $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er en Borelfunktion. (Vink: Betragt funktionsfølgen $g_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$.)

4° Lad (X, E) og (Y, F) være målbare rum, og lad $f : X \to Y$ være en afbildning. Vis, at hvis afbildningen $g \circ f : X \to \mathbf{R}$ er målelig for alle målelige afbildninger $g : Y \to \mathbf{R}$, da er f målelig. Her tænkes $\mathbf{R}$ udstyret med Borelalgebraen. (Vink: Benyt funktioner g af formen $g = 1_F$, hvor $F \in \mathsf{F}$.)

Opgave 2

1° Lad $f \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$. For hvert $n \in \mathbf{N}$ defineres funktionen f_n ved $f_n(x) = f(x)e^{-\frac{x^2}{n}}$. Gør rede for, at $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$ for alle $n \in \mathbf{N}$, og at

$$\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\,dx \to \int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

2° Lad (X, E, μ) være et målrum, og lad $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots$ være en voksende følge af målelige mængder, så $\cup_{n\in\mathbf{N}} E_n = X$. Idet f er en given funktion i $\mathcal{M}^+(X, \mathsf{E})$ defineres for hvert $n \in \mathbf{N}$ funktionen $f_n : X \to [0, +\infty[$ ved

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis} \quad x \in E_n \quad \text{og} \quad f(x) \le n \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Gør rede for, at f_n er målelig, og at

$$\int_X f_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu.$$

3° Lad a, b være reelle tal så $0 < a < b$, og sæt $E =]0, +\infty[\times [a, b]$. Udregn integralet

$$\int_E e^{-xy}\,dm_2(x, y)$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

på to forskellige måder, og udled herved formlen

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\, dx = \log \frac{b}{a}.$$

Opgave 3

Lad $K : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være en kontinuert, begrænset funktion.

1^o Vis, at hvis $f \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$, så defineres der ved

$$x \to \int_{\mathbf{R}} K(x,y) f(y)\, dy$$

en kontinuert, begrænset funktion på $\mathbf{R}$.

2^o Gør rede for, at der ved fastsættelsen

$$T(f)(x) = \int_{\mathbf{R}} K(x,y) f(y)\, dy$$

defineres en lineær afbildning $T : \mathcal{L}_1(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbf{R})$, og at der findes en konstant M, så

$$\|T(f)\|_u \leq M \|f\|_1$$

for alle $f \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$.

3^o Lad $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$. Gør rede for, at funktionen $(x,y) \to K(x,y) f(x) g(y)$ tilhører $\mathcal{L}_1(\mathbf{R}^2)$, samt at funktionen $x \to T(f)(x) g(x)$ tilhører $\mathcal{L}_1(\mathbf{R})$.

4^o Angiv en lineær afbildning $S : \mathcal{L}_1(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbf{R})$, så der for alle $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$ gælder, at

$$\int_{\mathbf{R}} T(f)(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}} f(x) S(g)(x)\, dx.$$

(Det er her underforstået, at højresiden skal være veldefineret; venstresiden er veldefineret ifølge 3^o.)

Opgave 4

Lad $A = [-1,1] \times [-1,1]$ og lad $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x+y| \leq 2 \ \wedge \ |x-y| \leq 2\}$.

1^o Idet $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ betegner den lineære afbildning, der er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

skal man gøre rede for, at $T(A) = B$.

2^o Beregn under anvendelse af 1^o integralet

$$\int_B (2x + y) \cos\left(\frac{x^2 - y^2}{4}\right) dm_2(x,y).$$