Københavns Universitet
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, vinteren 1992-93

Matematik 2 MA1

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

Afgør i hvert af følgende fire tilfælde, om den anførte påstand er rigtig eller forkert. Der ønskes givet et bevis henholdsvis et modeksempel.

Lad (M, d) være et metrisk rum.

1^o Mængden af fortætningspunkter for en følge i (M, d) er en afsluttet delmængde af M.

2^o Hvis $f, g : M \to \mathbb{C}$ er uniformt kontinuerte funktioner, da er funktionen $f + g : x \to f(x) + g(x)$ ligeledes uniformt kontinuert.

3^o Hvis $f, g : M \to \mathbb{C}$ er uniformt kontinuerte, begrænsede funktioner, da er funktionen $fg : x \to f(x)g(x)$ ligeledes uniformt kontinuert.

4^o Hvis $f, g : M \to \mathbb{C}$ er uniformt kontinuerte funktioner, da er funktionen $fg : x \to f(x)g(x)$ ligeledes uniformt kontinuert.

Opgave 2

1^o For hvert $n \in \mathbb{N}$ defineres funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$f_n(x) = \sin(n(1 + x^2))e^{-n|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Gør rede for, at f_n tilhører $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ for hvert $n \in \mathbb{N}$, og vis, at

$$\int f_n(x)dx \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

2^o Lad μ være målet på $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$, der har tætheden $(x, y) \to e^{-(x^2+y^2)}$ med hensyn til m_2. Gør rede for, at funktionen $u_n : (x, y) \to (x + iy)^n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ er μ-integrabel for hvert $n \in \mathbb{N}$, og vis, at

$$\int u_n(x, y)d\mu(x, y) = 0$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. (Vink: Anvend polære koordinater.)

Opgave 2 fortsættes på side 2

3^o Funktionsfølgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er givet ved

$$g_n(x) = ne^{-n|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vis, at der for hvert $\alpha > 0$ gælder, at

$$\int_{|x|\geq\alpha} g_n(x)dx \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

Opgave 3

Lad $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuert, begrænset funktion.

1^o Vis, at hvis $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, så defineres der ved

$$x \to \int k(xy)f(y)dy$$

en kontinuert, begrænset funktion på $\mathbb{R}$.

2^o Gør rede for, at der ved fastsættelsen

$$T(f)(x) = \int k(xy)f(y)dy$$

defineres en lineær afbildning $T : \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, og at der findes en konstant K, så

$$||T(f)||_u \leq K||f||_1$$

for alle $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

3^o Lad $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Vis, at

$$\int T(f)(x)g(x)dx = \int f(x)T(g)(x)dx,$$

idet der bl.a. gøres rede for de indgående integralers eksistens.

4^o For $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ og $t > 0$ defineres funktionen $g_t \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ ved

$$g_t(x) = g(tx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vis, at der gælder

$$T(g_t)(x) = \frac{1}{t}T(g)(\frac{1}{t}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Opgavesættet fortsættes på side 3

Københavns Universitet
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, vinteren 1992-93
Matematik 2 MA1

Opgave 4

Der er givet følgende delmængde af $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 1,\ x + y \leq \frac{1}{z}\}.$$

1^o Gør rede for, at E er afsluttet og sammenhængende, samt at E ikke er kompakt.

2^o Bestem $m_3(E)$.

3^o For $\alpha \in \mathbb{R}$ defineres funktionen $f_\alpha : E \to \mathbb{R}$ ved $f_\alpha(x, y, z) = xz^\alpha$. Find de værdier af α, for hvilke integralet

$$\int_E f_\alpha dm_3$$

er endeligt.