Københavns Universitet
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, vinteren 1991-92

Matematik 2 MA1

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l.)

Opgave 1

Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum og lad $C = C(X, Y)$ betegne mængden af kontinuerte afbildninger af X ind i Y.

1° Vis, at for $f, g \in C$ er $\varphi(x) = d_Y(f(x), g(x))$ en kontinuert funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

I det følgende antages at (X, d_X) er et kompakt metrisk rum.

2° Vis, at der ved fastsættelsen

$$D(f,g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) \quad , \quad f, g \in C \, ,$$

defineres en metrik på C.

3° Lad A betegne mængden af afstandsformindskende afbildninger af X ind i Y. Vis, at A er en afsluttet delmængde af det metriske rum $(C(X,Y), D)$.

Opgave 2

Betragt funktionen

$$\varphi_\alpha(y) = \frac{1}{(1+y^2)^\alpha} \quad \text{for } y \in [0, \infty[$$

for parameter værdier $\alpha > 0$.

1° Vis, at φ_α er integrabel med hensyn til Lebesgue målet på $[0, \infty[$ netop når $\alpha > \frac{1}{2}$.

Sæt

$$c_\alpha = \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^\alpha} \quad \text{for } \alpha \in]\tfrac{1}{2}, \infty[\, .$$

2° Vis, at $\lim_{\alpha \to \infty} c_\alpha = 0$.

Betragt udtrykket

$$f_\alpha(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{(1+y^2)^\alpha} \, dy \quad \text{for } x \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \, .$$

3° Vis, at f_α er en veldefineret kontinuert funktion når $\alpha > \frac{1}{2}$.

4° Vis, at f_α er en C^1-funktion når $\alpha > 1$ og at

$$f'_\alpha(x) = \int_0^\infty \frac{y \cos(xy)}{(1+y^2)^\alpha} \, dy \quad , \; x \in \mathbb{R} \, .$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, vinteren 1991-92
Matematik 2 MA1

Opgave 3

Lad $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$\varphi(x) = \begin{cases} x(1-x) & \text{for } x \in]0,1[\\ 0 & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus]0,1[\,, \end{cases}$$

og sæt $\varphi_n(x) = \varphi(n^2(x-n))$ for $n = 1, 2, \cdots$ og $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$.

1° Skitser grafen for f og gør rede for, at f er en kontinuert begrænset funktion. Find den uniforme norm $\|f\|_u$.

2° Udregn $\|\varphi_n\|_2$, idet 2-normen refererer til Lebesgue målet på $\mathbb{R}$.

3° Vis, at $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$ og bestem $\|f\|_2$.

Opgave 4

På mængden

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2\,,\ \frac{1}{x} \le y \le x\}$$

betragtes funktionen $\varphi(x,y) = \frac{x}{y}$.

1° Udregn 2-normen af φ med hensyn til Lebesgue målet på G.

2° Vis, at $\varphi(G) = [1,4]$.

Lad σ betegne billedmålet under φ af Lebesgue målet på G.

3° Udregn $\sigma([1,4])$.

4° Vis, at der for en målelig funktion $f : [1,4] \to [0,\infty]$ gælder

$$\int f \, d\sigma = \int_1^4 f(t)\left(\frac{2}{t^2} - \frac{1}{2t}\right) dt\,.$$