Københavns Universitet
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, sommeren 1991

Matematik 2MA 1

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

Lad (M, d) være et metrisk rum og lad $(a_n), (b_n), (c_n)$ være tre punktfølger fra M.

1° Vis, at hvis $d(a_n, b_n) \to 0$ og $d(b_n, c_n) \to 0$, så vil $d(a_n, c_n) \to 0$.

2° Lad A være en ikke tom delmængde af A og lad $x \in M$. Antag at (a_n) er en punktfølge fra $\overline{A}$ så $a_n \to x$.
Vis, at $x \in \overline{A}$.

3° Antag at $A, B \subseteq M$ er ikke tomme, afsluttede og disjunkte delmængder. Vis, at hvis A desuden er kompakt, så findes en konstant $\delta > 0$ således at

$$(*) \qquad d(a, b) \geq \delta \quad \text{for alle} \quad a \in A, b \in B.$$

(*Vink.* Antag at $(*)$ ikke gælder og slut, at der findes følger (a_n) fra A og (b_n) fra B så $d(a_n, b_n) \to 0$, og forsøg at udlede en modstrid.)

Opgave 2

For $\alpha \in \mathbb{R}$ defineres funktionen $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved

$$f_\alpha(x, y) = \frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha}.$$

1° Vis, at $f_\alpha \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2, m_2)$ når $\alpha > 2$, idet m_2 er Lebesgue målet på $\mathbb{R}^2$. (*Vink.* Benyt polære koordinater.)

2° Gør rede for, at snitfunktionen $f_2(x, \cdot)$ er integrabel med hensyn til Lebesgue målet på $\mathbb{R}$ for ethvert $x \in \mathbb{R}$, og at der ved formlen

$$F(x) = \int f_2(x, y) \sin y \, dy$$

defineres en kontinuert funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, sommeren 1991
Matematik 2MA 1

Opgave 3

Skitser følgende delmængde af $\mathbb{R}^3$

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le y \le \pi,\ x^2 + (z - \sin y)^2 \le y^2 \}.$$

1° Vis, at K er kompakt og sammenhængende.

2° Bestem snitmængden $K_y \subseteq \mathbb{R}^2$ for hvert $y \in [0, \pi]$.

3° Udregn voluminet $m_3(K)$.

Opgave 4

Lad $\mathbb{K}$ betegne systemet af alle afsluttede akseparallelle kvadrater i $\mathbb{R}^2$, altså

$$\mathbb{K} = \{ [a, a+h] \times [b, b+h] \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ h > 0 \}.$$

1° Vis, at $\sigma(\mathbb{K}) = \mathbb{B}_2$, altså at Borelalgebraen er den mindste σ–algebra på $\mathbb{R}^2$, der indeholder $\mathbb{K}$.

Ved hjørnet bestemt ved $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ forstås mængden

$$H(a, b) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le a,\ y \le b \},$$

og lad $\mathbb{H}$ være systemet af hjørner, dvs.

$$\mathbb{H} = \{ H(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

2° Vis, at $\mathbb{H}$ er et fællesmængde stabilt frembringersystem for Borelalgebraen.

3° Vis, at ethvert hjørne $H(a, b)$ er foreningsmængde af en stigende følge af mængder fra $\mathbb{K}$.

4° Lad μ, ν være endelige mål på $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$.
Vis, at hvis $\mu(K) = \nu(K)$ for alle $K \in \mathbb{K}$, så er $\mu(B) = \nu(B)$ for alle $B \in \mathbb{B}_2$.