Københavns Universitet
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, januar 1991

Matematik 2MA 1

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

Lad (M, d) være et metrisk rum.

1° Vis, at der for en følge af delmængder $A_1, A_2, \cdots$ af M gælder

(a) $$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$$

(b) $$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{A}_n \subseteq \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)^{\circ}.$$

2° Lad (M, d) være $\mathbf{R}$ med den sædvanlige afstand. Vis, at hvis $A_n =]0, \frac{1}{n}[$, $n = 1, 2, \cdots$, så gælder der ikke lighedstegn i (a), og hvis $A_n = [n, n+1[$, $n = 1, 2, \cdots$, så gælder der ikke lighedstegn i (b).

3° Lad $f, g : (M, d) \to (M, d)$ være kontinuerte afbildninger. Vis, at mængden

$$F = \{x \in M \mid f(x) = g(x)\}$$

er afsluttet.

Opgave 2

Lad $C([0, 1])$ betegne vektorrummet af kontinuerte funktioner $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ forsynet med den uniforme norm

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\} ,$$

og lad $\mathcal{L}([0, 1])$ betegne vektorrummet af funktioner $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, der er integrable med hensyn til Lebesgue målet på $[0, 1]$.

1° Vis, at hvis $f \in \mathcal{L}([0, 1])$ så er

$$F(x) = \int_0^1 \sin(xy) f(y) dy , \; x \in \mathbf{R}$$

en kontinuert funktion på $\mathbf{R}$.

2° Vis, at der ved fastsættelsen

$$T(f)(x) = 1 + \int_0^1 \sin(xy) f(y) dy , \; x \in [0, 1]$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

defineres en afbildning $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ som opfylder

(a) $|T(f)(x) - T(g)(x)| \le \|f-g\|_u \int_0^1 \sin(xy)dy$, $x \in [0,1]$

(b) $\|T(f) - T(g)\|_u \le \frac{1}{2}\|f-g\|_u$

for $f, g \in C([0,1])$.

(Vink. Det kan benyttes at $1 - \cos x \le \frac{1}{2}x$ for $x \in [0,1]$).

3° Gør rede for, at integralligningen

$$f(x) = 1 + \int_0^1 \sin(xy)f(y)dy \ , \ x \in [0,1]$$

har en entydig løsning $f \in C([0,1])$.

Opgave 3

Lad $a, b, c > 0$ betegne positive reelle tal og betragt følgende delmængde af $\mathbf{R}^3$

$$K = \{(x,y,z) \mid 0 \le z \, , \, bz \le 3a|x| \, , \, c^2x^2 + a^2y^2 \le 1\} \, .$$

1° Vis, at K er kompakt.

2° Vis, at K er kurvesammenhængende.

3° Lad $p : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ betegne projektionen $p(x,y,z) = (x,y)$.
Find billedmængden $p(K)$ og snittet $K_{(x,y)}$ for $(x,y) \in p(K)$.

4° Find voluminet $m_3(K)$ af K.

Opgave 4

I det følgende betragtes endelige mål μ og ν på $(\mathbf{R}, \mathbf{B})$, altså $\mu(\mathbf{R}) < \infty$, $\nu(\mathbf{R}) < \infty$. Man siger, at μ har n'te moment $(n = 1, 2, \cdots)$ hvis $x^n \in \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{B}, \mu)$, og tallet

$$M_n(\mu) = \int x^n d\mu(x)$$

kaldes μ's n'te moment.

1° Vis, at hvis μ har n'te moment, så har μ også k'te moment for $k = 1, 2, \cdots, n$.

Opgave 4 fortsættes på side 3

2° Vis, at hvis μ er koncentreret på $]-1,1[$, altså hvis $\mu(\mathbf{R}\setminus]-1,1[) = 0$, så har μ n'te moment for ethvert $n = 1, 2, \cdots$ og

$$\lim_{n\to\infty} M_n(\mu) = 0 \, .$$

3° Vis, at hvis μ har n'te moment, og hvis α, β er naturlige tal opfyldende $1 \leq \alpha, \beta \leq \frac{n}{2}$, så gælder

$$|M_{\alpha+\beta}(\mu)| \leq \sqrt{M_{2\alpha}(\mu) M_{2\beta}(\mu)} \, .$$

4° Lad $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være givet ved $p(x, y) = xy$. Vis, at hvis μ og ν har n'te moment, så har billedmålet $\sigma = p(\mu \otimes \nu)$ også n'te moment og

$$M_n(\sigma) = M_n(\mu) M_n(\nu) \, .$$