Københavns Universitet
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, vinteren 1989-90

Mat 2MA1

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

Lad a være et reelt tal > 0, lad k være et helt positivt tal, og betegn ved K den afsluttede enhedskugle i $\mathbf{R}^k$ (med euklidisk norm)

$$K = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \le 1 \,\}.$$

Betragt funktionen

$$f_a(x) = \|x\|^a$$

fra K ind i R.

1° Vis, at f_a er kontinuert.

2° Vis, at f_a er uniformt kontinuert.

3° Vis, at f_a er en Lipschitz afbildning, når $a \ge 1$. [Vink: Man kan eventuelt først vise, ved hjælp af middelværdisætningen, at $|t_1^a - t_2^a| \le a|t_1 - t_2|$, når $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $a \ge 1$.]

Opgave 2

Lad Q betegne følgende delmængde af $\mathbf{R}^3$:

$$Q = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid x_j \ge 0 \text{ for } j = 1, 2, 3,\ \ x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \}.$$

Sammen med Q betragtes rummet $\mathcal{C}(Q)$ af kontinuerte funktioner på Q samt rummet $\mathcal{L}_1(Q)$ af Lebesgue integrable funktioner på Q.

1° Gør rede for, at $\mathcal{C}(Q)$ er et Banach rum med den uniforme norm

$$\|f\|_u = \sup_{x \in Q} |f(x)|.$$

2° Beregn $m_3(Q)$.

3° Vis, at der findes en konstant C, så at for ethvert $f \in \mathcal{C}(Q)$ er

$$\|f\|_1 \le C\|f\|_u,$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

hvor $\|f\|_1$ er seminormen

$$\|f\|_1 = \int_Q |f(x)|\, dm_3$$

på $\mathcal{L}_1(Q)$; og vis, at $\mathcal{C}(Q) \subset \mathcal{L}_1(Q)$.

4° Findes der en følge af kontinuerte funktioner f_n på Q, som er konvergent i $\mathcal{C}(Q)$, men ikke i $\mathcal{L}_1(Q)$? (Begrundelse gives.)

5° Findes der en følge af kontinuerte funktioner g_n på Q, som er konvergent i $\mathcal{L}_1(Q)$, men ikke i $\mathcal{C}(Q)$? (Begrundelse gives.)

6° Er Q kompakt? Er $\mathcal{C}(Q)$ kompakt?

7° Vis, at afbildningen $T\colon f \mapsto f^2$ er kontinuert fra $\mathcal{C}(Q)$ til $\mathcal{L}_1(Q)$. Er T lineær? Er T afstandsformindskende?

Opgave 3

I det følgende betegner p et reelt tal med $1 \le p < \infty$.
For hvert α og $\beta \in \mathbf{R}$ defineres funktionen f_α på $\mathbf{R}_+$ og funktionen g_β på $\mathbf{R}^2$ ved:

$$f_\alpha(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^\alpha} \quad \text{for } x > 0;$$

$$g_\beta(x,y) = \frac{\operatorname{Arctan}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\beta} \quad \text{for } x^2+y^2 > 0\,, \quad g_\beta(0,0) = 0\,.$$

1° Bestem de α, for hvilke $f_\alpha|_{]0,1[}$ tilhører $\mathcal{L}_p(\,]0,1[\,)$, og de α, for hvilke $f_\alpha|_{]1,\infty[}$ tilhører $\mathcal{L}_p(\,]1,\infty[\,)$.

2° Idet $B = \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\,\}$, skal man bestemme de β, for hvilke $g_\beta|_B$ tilhører $\mathcal{L}_p(B)$, og de β, for hvilke $g_\beta|_{\mathbf{R}^2\setminus B}$ tilhører $\mathcal{L}_p(\mathbf{R}^2 \setminus B)$.