Københavns Universitet
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, vinteren 1988/89

Matematik 2MA1

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l.)

Opgave 1

Lad M betegne mængden af komplekse funktioner $f(x)$ på $]0,1]$ med egenskaben

$$\sup_{x\in]0,1]} \sqrt{x}\,|f(x)| < \infty,$$

og lad M_0 betegne delmængden bestående af de funktioner i M, der er kontinuerte på $]0,1]$. M og M_0 er funktionsvektorrum.

1° Vis, at afbildningen $d : M \times M \to \mathbf{R}$ defineret ved

$$d(f,g) = \sup_{x\in]0,1]} \sqrt{x}\,|f(x)-g(x)|, \quad \text{for } f,g \in M,$$

er en metrik på M.

2° Findes der en norm $\|\cdot\|$ på M, så at

$$d(f,g) = \|f-g\|?$$

3° Er det metriske rum M fuldstændigt?

4° Er M_0 et afsluttet underrum af M?

5° Er mængden

$$\{\, f \in M_0 \mid d(f,0) \le 1 \,\}$$

kompakt i M?

6° For hvilke $p \in [1,\infty[$ er $M_0 \subset \mathcal{L}_p(\,]0,1])$?

De enkelte svar begrundes.

Opgave 2

Lad $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ være en lige funktion, dvs. en funktion, der opfylder

$$f(-x) = f(x) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

1° Vis, at den Fourier transformerede $\hat{f}$ af f opfylder

$$\hat{f}(\xi) = 2\int_0^\infty \cos(\xi x) f(x)\, dx, \quad \text{for alle } \xi \in \mathbf{R}.$$

2° Vis, at

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(\xi x)\hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

3° Find

$$\int_0^\infty \cos(\xi x) x^2 e^{-x^2}\, dx.$$

[Man kan benytte, at $\mathcal{F}[e^{-x^2}] = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4}$.]

Opgave 3

1° Vis, at hvis $v \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R})$ (dvs. v er kontinuert på $\mathbf{R}$ og har kompakt støtte), så vil funktionsfølgen v_n defineret ved

$$v_n(x) = v(x - \frac{1}{n}) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}$$

konvergere mod v i den uniforme norm for $n \to \infty$.

2° Lad f være funktionen på $\mathbf{R}$ defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{for } x \in]0,1[, \\ 0 & \text{for } x \in \mathbf{R}\setminus]0,1[; \end{cases}$$

og definer funktionerne f_n ved $f_n(x) = f(x - \frac{1}{n})$ for $n \in \mathbf{N}$.
Undersøg, om $f_n \to f$ i den uniforme norm for $n \to \infty$.
Undersøg, om $f_n \to f$ i $\mathcal{L}_1(\mathbf{R})$ for $n \to \infty$.

3° Lad g være en vilkårlig funktion i $\mathcal{L}_1(\mathbf{R})$, og definer funktionerne g_n ved $g_n(x) = g(x - \frac{1}{n})$ for $n \in \mathbf{N}$.
Kan man slutte, at $g_n \to g$ i $\mathcal{L}_1(\mathbf{R})$ for $n \to \infty$?
[Det kan være nyttigt at erindre, at $\mathcal{C}_c(\mathbf{R})$ er tæt i $\mathcal{L}_1(\mathbf{R})$.]

Opgave 4

Man betragter de to afbildninger af $\mathbf{R}^2$ på $\mathbf{R}^2$

$$\varphi\colon (x,y) \mapsto (x, y + x^2),$$
$$\psi\colon (x,y) \mapsto (x^3, y),$$

Opgave 4 fortsættes på side 3

og de herved definerede billedmål $\mu = \varphi(m_2)$ og $\nu = \psi(m_2)$ på $\mathbf{R}^2$, hvor m_2 er Lebesgue målet på $\mathbf{R}^2$.

1° Find $\mu(B)$ og $\nu(B)$, hvor B er rektanglet

$$B = [0, a] \times [0, b],$$

med $a > 0$, $b > 0$.

2° Undersøg, om $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{B}_2, \mu) = \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{B}_2, m_2)$, og om $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{B}_2, \nu) = \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{B}_2, m_2)$. ($\mathbf{B}_2$ betegner Borel algebraen for R^2.)