Københavns Universitet, Matematisk Institut
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, sommeren 1988

Matematik 2MA 1

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l.)

Opgave 1

For $\alpha \in \mathbb{R}_+$ betragtes følgende delmængde af $\mathbb{R}^3$

$$E_\alpha = \{(x,y,z) \mid z \geq 0\,, x^2 + y^2 \leq (1+z)^{-\alpha}\}\,.$$

1° Undersøg, om E_α er afsluttet, og om E_α er kompakt.

2° Vis, at det 3-dimensionale Lebesgue mål af E_α , $m_3(E_\alpha)$, er endeligt hvis og kun hvis $\alpha > 1$.

3° Bestem $m_3(E_\alpha)$ for $\alpha > 1$.

Opgave 2

Lad $f(z)$ være funktionen defineret for $z \in \mathbb{C}$ ved formlen

$$f(z) = \int_0^1 \cos(zt)\,dt\,.$$

1° Vis, at $f(z)$ er holomorf i $\mathbb{C}$.

2° Find potensrækkefremstillingen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ for $f(z)$.

3° Vis, at den meromorfe funktion $g(z)$, defineret for $z \neq 0$ ved formlen

$$g(z) = \frac{f(z)-1}{z}\,,$$

har en hævelig singularitet i 0.

Opgave 3

Lad $a, b \in \mathbb{R}$ med $a < b$, og betragt de to afbildninger T_1 og T_2 fra $C^0([a,b])$ til $C^1([a,b])$ defineret ved:

$$(T_1 f)(x) = \int_a^x f(y)dy\ .$$

$$(T_2 f)(x) = \int_a^x [f(y)]^2 dy\,,$$

Opgave 3 fortsættes på side 2

for $f \in C^0([a,b])$.

1° Vis, at T_1 er lineær og kontinuert.

2° Vis, at T_2 er kontinuert. [Vink: Man kan eventuelt først vise, at $f \mapsto f^2$ er en kontinuert afbildning i $C^0([a,b])$.]

Opgave 4

Lad f være en positiv kontinuert funktion på intervallet $[0,1]$.
Betragt følgerne af funktioner f_n og g_n på $\mathbb{R}$ defineret ved:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x-n) & \text{for } x \in [n, n+1], \\ 0 & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus [n, n+1]. \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x-\frac{1}{n}) & \text{for } x \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+1], \\ 0 & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+1]. \end{cases}$$

Find $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ og deres integraler over $\mathbb{R}$, samt $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$ og $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)dx$. Kan Lebesgues sætning anvendes i disse tilfælde? (Begrund svaret.)