Mat 2MA 1

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l.)

Opgave 1

Lad (X, d) være et metrisk rum, og lad T være en afbildning af X ind i X. Når $x \in X$, skriver vi kort $T^n x$ for $T(T \cdots (Tx) \cdots)$ (med T anvendt n gange); dvs. T^n står for den sammensatte afbildning $T \circ T \circ \cdots \circ T$ med n "faktorer". Et punkt $x \in X$, for hvilket $Tx = x$, kaldes et fixpunkt.

Antag, at T er en Lipschitz afbildning med Lipschitz konstant $C < 1$, hvormed der altså gælder

$$d(Tx, Ty) \leq C d(x, y) \text{ for alle } x, y \in X.$$

1° Vis, at T ikke kan have to forskellige fixpunkter.

2° Lad $x \in X$. Vis, at følgen $x, Tx, T^2x, \cdots, T^n x, \cdots$ (dvs. følgen hvis $(n+1)$-te element er $T^n x$) er en Cauchy følge. [Vink: Man kan vurdere $d(T^n x, T^{n+p} x)$ ved at indskyde de mellemliggende punkter $T^{n+1}x, \cdots, T^{n+p-1}x$.]

3° Antag nu, at (X, d) er fuldstændigt. Vis, at der findes et fixpunkt x_0 for T. [Vink: Betragt grænsepunktet for en følge som under 2°.]

4° Formuler det hermed beviste som en sætning.

Opgave 2

1° Lad $[a, b]$ være et interval af $\mathbf{R}$. Lad $f(x) \in C([a, b])$ og lad $k(x, y) \in C([a, b] \times [a, b])$. Vis, at funktionen $g(x)$ defineret ved

$$g(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy \quad \text{for } x \in [a, b],$$

tilhører $C([a, b])$.

(Opgave 2 fortsættes på side 2)

2° Det antages nu, at $k \in C([a,b] \times [a,b])$ er en given funktion, der opfylder

$$\sup_{x \in [a,b]} \int_a^b |k(x,y)| dy \leq \frac{1}{2} \quad ;$$

og man betragter integralligningen

$$(*) \qquad f(x) = 1 + \int_a^b k(x,y) f(y) dy \quad ,$$

hvor $f \in C([a,b])$ betegner en ubekendt funktion. Gør rede for, hvorledes de i Opgave 1 viste resultater, ved passende valg af $(X,d), T$ og C,kan anvendes til at vise at ligningen $(*)$ har en (entydigt bestemt) løsning $f \in C([a,b])$.

(Denne opgave kan besvares uden at Opgave 1 er fuldstændigt løst.)

Opgave 3

For et målrum $(X, \mathbf{E}, \mu)$ og $p > 0$ betragtes vektorrummet $\mathcal{L}_p(X)$ af målelige funktioner $f : X \to \mathbf{R}$ opfyldende $\int |f|^p d\mu < \infty$, og vi sætter

$$\| f \|_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p} \text{ for } f \in \mathcal{L}_p(X).$$

1° Lad $p, q > 0$ og lad α være bestemt ved $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Vis, at hvis $f \in \mathcal{L}_p(X)$ og $g \in \mathcal{L}_q(X)$, så vil $fg \in \mathcal{L}_\alpha(X)$ og

$$\| fg \|_\alpha \quad \leq \quad \| f \|_p \| g \|_q \,.$$

I det følgende betragtes $X = [0, \infty[$ udstyret med σ-algebraen $\mathbf{E}$ af Borel delmængder af $[0, \infty[$ og μ lig med Lebesguemålets restriktion til $[0, \infty[$.

2° Vis, at $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_p([0, \infty[)$ hvis og kun hvis $p > \frac{1}{2}$.

3° Lad $f, g : [0, \infty[\to \mathbf{R}$ være defineret ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1+x^2}} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \text{ for } n \leq x < n+1, n = 1, 2, \cdots . \end{cases}$$

Vis, at $fg \in \mathcal{L}_2([0, \infty[)$.

(Opgavesættet fortsættes på side 3)

Opgave 4

1° For hvilke værdier af a og $b \in \mathbf{R}$ er funktionen

$$u(x,y) = x^2 + axy + by^2\,, (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

realdel af en holomorf funktion $f(z)$ på $\mathbf{C}$ (hvor $z = x + iy$)?
For disse værdier af a og b angives en sådan holomorf funktion $f(z)$, som tillige opfylder $f(0) = 0$; og dens imaginærdel $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ bestemmes.

2° Man betragter funktionen

$$h(z) = \frac{z^2+1}{(z-\alpha)(z+\alpha)} \quad ,$$

hvor α er et komplekst tal. Gør rede for, at $h(z)$ er meromorf i $\mathbf{C}$ og find for hvert $\alpha \in \mathbf{C}$ funktionens poler og nulpunkter (med angivelse af disses orden). Beregn integralet

$$\int_{\partial K(0,r)} h(z)dz \quad ,$$

over en cirkel $\partial K(0,r)$ (gennemløbet mod uret) med radius $r > |\alpha|$.