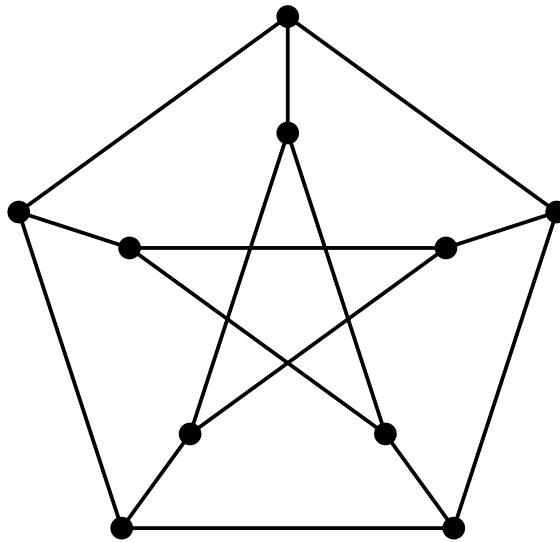


Noter til

kombinatorik og grafteori



ved Gunnar Forst

Københavns Universitet, Matematisk Afdeling, februar 2006

Tastet af forfatteren og sat af T_EX med
Adobe Times og Adobe Optima, samt Y&Y mathtime

© Matematisk Afdeling 2006

Matematisk Afdeling

Universitetsparken 5

2100 København Ø

Solche Werke sind Spiegel; wenn ein Affe hinein guckt, kann kein Apostel heraus sehen.
*Lichtenberg*¹

Forord

Disse noter er udarbejdet til brug ved undervisningen i kombinatorik- og grafteoridelen af kurset Dis1&Alg1, Matematisk Afdeling, Københavns Universitet. Emnevalget er baseret på erfaringer fra årelang undervisning i kurset MatXX men søgt tilpasset det ændrede format.

Jeg har ved arbejdet med første udgave af noterne (2005) fået god hjælp fra *Anders Thorup*, både i forbindelse med mange T_EX-»hacks«, og fra hans gennemlæsning, og mange, mange kommentarer/rettelser. Tak!

I denne anden udgave af noterne er kendte fejl forsøgt rettede, og jeg håber, at der derved ikke er produceret mange nye fejl. Noterne er utvivlsomt fortsat ikke fejlfrie.

København, februar 2006
Gunnar Forst

Sokrates: Man kan ikke nægte, at dette er en kedelig Egenskab, som klæber ved alt, hvad der er skrevet. Skribenten minder ganske om Maleren. Malerens Skikkelser staar der, som om de var levende; men spørger man dem om noget, iagttager de en meget fornem Tavshed. Det samme gælder de skrevne Ord; man kunne fristes til at tro, at de selv tænkte noget ved det, de sagde; men beder man om nærmere Besked om noget af det, der er sagt, fordi man gerne vil forstaa det, saa bærer de sig ad som en Trompeter, der ved enhver Lejlighed kun blæser eet og samme Signal. Hertil kommer, at hvad der engang er skrevet, cirkulerer i alle Kredse, ligesaa godt mellem dem, der forstaa det, som mellem dem, der ikke begriber et Muk; og ingen skriftlig Fremstilling magter selv at afgøre, hvem den skal henvende sig til, og hvem ikke. En Bog, som bliver ilde medhandlet og uretfærdigt kritiseret, vil altid behøve Hjælp af sit faderlige Ophav; ved egne Kræfter vil den hverken være i Stand til at slaa fra sig eller til at skaffe sig den fornødne Hjælp.²

¹Citeret som motto til »*In vino veritas*« af William Afham; se Søren Kierkegaards Skrifter, bind 6, side 16. København 1999. Lichtenberg henviste med Solche Werke til værker af Shakespeare og andre store ånder – hvad William Afham tænkte på vides ikke; desuden er tiden vist ikke til apostle!

²Fra *Platons Faidros*. Her citeret fra *Platons Skrifter*, bind VI, side 78. København 1954.

Indhold	
1	Til tælling 7
1.1	Indledning. 7
1.2	Hvad gør man når man tæller? 8
1.3	To tælleprincipper. 8
1.4	Bijektivitetsprincippet. 10
1.5	Skuffeprincippet. 11
1.6	To tællestrategier. 14
1.7	De små situationers princip, rekursion, og induktionsbeviser. 15
1.8	Grafmodeller. 17
	Opgaver 18
2	Nogle grundbegreber 19
2.1	Notation og terminologi for mængder. 19
2.2	Produktmængder og relationer. 20
2.3	Afbildninger. 21
2.4	Fakultetsfunktionen, og dalende og stigende faktorieller. 23
2.5	Ordmodeller. 24
2.6	Optælling af afbildninger. 26
2.7	Leksikografisk ordning. 27
2.8	Leksikografisk gennemgang af permutationer. 28
	Opgaver 30
3	Binomialkoefficienter: basale tællemodeller 31
3.1	Introduktion. 31
3.2	Binomialkoefficienter – definition og simple egenskaber. 32
3.3	Binomialformelen. 33
3.4	Rekursionsformelen og Pascals trekant. 34
3.5	Antal gitterveje. 35
3.6	Antal løsninger til visse heltalsligninger. 36
3.7	Multinomialkoefficienter. 37
3.8	Multinomialformelen. 40
3.9	Rekursionsformelen for multinomialkoefficienter. 40
3.10	Generaliserede binomialkoefficienter. 41
3.11	Vandermondes foldningsformel. 42
3.12	Leksikografisk gennemgang af r -delmængder. 42
	Opgaver 43
4	Grundlæggende om grafer 45
4.1	Basale definitioner. 45
4.2	Specifikation af graf – valens. 46
4.3	Grundbegreber: vandring, tur, vej, lukkethed og kreds. 47
4.4	Standardgrafer: Komplette grafer, kreds- og vejgrafer. 49
4.5	Delgraf, sammenhæng og komponenter. 50
4.6	Træer. 51
4.7	Bipartite, eller todelte, grafer. 53
4.8	Isomorfi og komplement. 55
	Opgaver 57
5	Træetælling 59
5.1	Træer med en fast knudemængde. 59
5.2	Træer med given valensvektor. 60
5.3	Cayleys formel. 63
5.4	Prüfer-kode for et træ. 64
	Opgaver 68

6 Euler-grafer og Hamilton-grafer	69
6.1 Euler-ture.	69
6.2 Karakterisering af Euler-grafer.	70
6.3 Karakterisering af grafer med ikke-lukket Euler-tur.	72
6.4 Hamilton-kredse.	72
6.5 En tilstrækkelig betingelse for eksistens af Hamilton-kreds	74
Opgaver	75
7 Rekursioner	77
7.1 Indledning til rekursioner.	77
7.2 Diverse terminologi.	78
7.3 Lineære 1. ordens rekursioner med konstante koefficienter.	79
7.4 Lineære rekursioner med konstante koefficienter.	81
7.5 Lineære 2. ordens rekursioner med konstante koefficienter.	82
7.6 Fortsættelse: det inhomogene tilfælde.	84
7.7 Eksempel på 3. ordens rekursion.	85
7.8 Antal permutationer uden fikspunkter.	86
Opgaver	87
8 Fibonacci-tallene	89
8.1 Fliselægninger.	89
8.2 Fibonacci-tallene – definition og simple egenskaber.	90
8.3 Delelighedsegenskaber.	92
Opgaver	94
9 Stirling-tal og partitionstal	95
9.1 Stirling-tal af anden art.	95
9.2 Rekursionen for Stirling-tal af anden art.	96
9.3 Stirling-tal af første art.	97
9.4 Rekursionen for Stirling-tal af første art.	98
9.5 Omsætning mellem potenser og faktorieller.	98
9.6 Partitionstal: Indledning og definition.	101
9.7 Rekursiv beregning af partitionstal.	102
9.8 Algoritme for gennemgang af partitioner.	104
Opgaver	105
10 Catalan-tal mm.	107
10.1 Veje, der forløber over diagonalen i kvadratisk gitter.	107
10.2 Følger med ikke-negative partialsummer.	108
10.3 En rekursion for antallet af øvre veje.	110
10.4 Gulv og loft af tal, med anvendelser.	112
Opgaver	114
11 Kantfarvning	115
11.1 Motivering og definitioner.	115
11.2 Eksempler på kantfarvning og kantkromatiske tal.	116
11.3 Kantfarvning af komplette grafer.	116
11.4 Farveombytning.	118
11.5 Kantfarvning af bipartite grafer – Königs sætning.	119
11.6 Farvelemma.	119
11.7 Vizings sætning.	122
11.8 Grafer af klasse 1 og klasse 2.	122
Opgaver	123

12 Mere om sammenhæng mm.	125
12.1 Knudesammenhæng.	125
12.2 Kantsammenhæng.	126
12.3 Blokke og blok/snitknode-grafen for en graf.	128
12.4 Regulære grafer.	129
Opgaver	130
13 Knudefarvning	131
13.1 Motivering – definitioner.	131
13.2 Eksempler på knudefarvning og kromatiske tal.	132
13.3 Brooks' sætning – opvarmning.	133
13.4 Brooks' sætning – bevis.	134
13.5 Antal knudefarvninger med k farver.	136
13.6 Kanttilføjelse og knudesammentrækning.	138
13.7 Kromatisk polynomium.	139
13.8 Algoritme for beregning af kromatisk polynomium.	140
Opgaver	142
14 Bryllupssætningen	143
14.1 Indledning.	143
14.2 Halls betingelse og opvarmningseksempler.	144
14.3 Bryllupssætningen.	145
14.4 Reformulering af bryllupssætningen.	147
14.5 Lidt om latinske rektangler.	148
Opgaver	150
15 Optælling ved inklusion og eksklusion	151
15.1 Indledende eksempel.	151
15.2 Formelen for optælling ved inklusion og eksklusion.	152
15.3 Anvendelser.	154
15.4 Antal løsninger til visse heltalsligninger (fortsat).	156
15.5 Forbedret optælling ved inklusion og eksklusion.	157
Opgaver	160
16 Tårnpolynomier	161
16.1 Brætter og tilladte parringer.	161
16.2 Tårnpolynomium for et bræt.	162
16.3 Produktformelen – deling af bræt i uafhængige delbrætter.	163
16.4 Rekursionsformlen.	165
16.5 Optælling via komplementbræt.	166
Opgaver	168
Svar og kommentarer til opgaver	169
Indeks	185

Kapitel 1

Til tælling

Formålet med dette kapitel er – introducerende, kredsende om den »varme grød« – at give en fornemmelse for, hvad *kombinatorik* »går ud på«.

Yderst kortfattet udtrykt er kombinatorik at *tælle* samlinger af objekter, altså *bestemme antallet* af objekter i forelagte objektsamlinger. Dette er – for små objektsamlinger – trivielt, men for de fleste objektsamlinger er det nødvendigt at benytte diverse struktureringsmetoder for at kunne bestemme elementantallene.

Kapitlet indeholder en omtale af flere sådanne *tællemetoder*, der af de fleste, der tæller, anvendes nærmest ubevidst. Desuden diskuteres kort diverse *principper* – det vigtigste af disse er nok *skuffeprikket* – der tit benyttes i argumenter, inden for kombinatorik og anden matematik, og i mange andre forbindelser.

1.1 Indledning. Emnet for *kombinatorik* er *optælling* og *studium* af »samlinger af objekter«, der kan være af utallige (!?) typer, men for det meste har form af *mønstre*, *arrangementer*, eller *konfigurationer* af matematiske, eller virkelige, objekter, og sådanne mønstre kan indgå som objekter på højere niveauer. Mange eksempler følger – og på en måde er alt det følgende eksempler!

Et mønster, eller en konfiguration, af objekter må tænkes *beskrevet*, *specificeret*, eller *fastlagt*, på en eller anden måde, og et fundamentalt spørgsmål kan være, *om der overhovedet findes ét eller flere mønstre – altså mindst ét – som specificeret?* Det er nok nyttigt at overveje, hvordan dette spørgsmål kan besvares!

- Én mulighed er, at det efter en *analyse* viser sig, at der *ikke findes* nogen konfiguration af objekter som specificeret. Typisk kan der så argumenteres for dette ved at pege på, at specifikationen indeholder krav, det er umuligt at opfylde.
- Eller det kan måske direkte anvises, hvordan en konfiguration, der følger specifikationen, kan *konstrueres*, eller, der kan argumenteres via et abstrakt eksistensbevis for eksistensen af mindst én af de omspurgte konfigurationer.

Et andet fundamentalt spørgsmål, der indeholder det første som en slags specialtilfælde, er: *Hvor mange konfigurationer af en given specifikation findes der?*, eller, formuleret som en opgave: *Find antallet af konfigurationer, der opfylder specifikationen.* Det kan sagtens forekomme, at dette andet spørgsmål kan besvares, uden at det er muligt, eller i det mindste nogenlunde overkommeligt, direkte at angive en konkret konfiguration; hvis umuligheden af en omspurgt konfiguration er påvist, er der naturligvis 0 sådanne konfigurationer, og omvendt, hvis det på anden måde vides, at der er 0 konfigurationer af en bestemt type, er det naturligvis umuligt at lave en sådan!

I tilfælde, hvor der findes flere konfigurationer af den specificerede art, kan der være behov for en detaljeret beskrivelse af disse, fx med henblik på at

- opstille konfigurationerne i en for et givet formål passende *struktureret orden*, eller
- udpege eventuelle konfigurationer, der er *optimale*, altså bedst mulige, i en for situationen passende forstand.

1.2 Hvad gør man når man tæller? Det er afgørende at have en nogenlunde klar, og i det mindste anvendelig *operativ* opfattelse af, hvad der ligger i at *tælle* en forelagt samling af objekter, med henblik på at besvare spørgsmålet: *Hvor mange objekter er der i en given forelagt samling af objekter?* Uden at »trampe« i filosofiske aspekter er det grundlæggende i at tælle at tilvejebringe en *bijektiv korrespondance* mellem enkeltobjekter i den givne objektsamling og et passende *afsnit*, eller *startsegment*, af den *naturlige talrække*.

For det meste benyttes glosen *mængde* som kort – og ikke-teknisk – betegnelse for en samling af objekter, og enkeltobjekterne i samlingen kaldes *elementer* i mængden. Nøglebegreberne ovenfor er naturligvis dels *bijektiv korrespondance*, dels *afsnit af den naturlige talrække*. Det første af disse tages her i en *intuitiv* betydning (kapitel 2 diskuterer mere uddybende): En *bijektiv korrespondance mellem mængder*, fx X og Y , er en *parring* af elementerne i X og Y , i den præcise betydning, at

- hvert element $x \in X$ danner par med et éntydigt bestemt element $y \in Y$, og
- hvert element $y \in Y$ danner par med et éntydigt bestemt element $x \in X$.

Hvordan en sådan parring etableres, og beskrives, er sagen delvis uvedkommende; det afgørende er, at hvis der består en bijektiv korrespondance mellem mængder X og Y (dvs. der findes en bijektiv afbildning af X på Y) så har de to mængder X og Y *lige mange elementer*.

Mængden $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ af *naturlige tal* udgør en slags modelobjekter, og *afsnit* i \mathbb{N} , der er delmængder af formen¹ $\{1, 2, \dots, n\}$, dvs. bestående af de naturlige tal, der er mindre end eller lig et bestemt naturligt tal n , fungerer som en slags modelsamlinger for tælleformål: En mængde X kaldes *endelig*, hvis der findes et afsnit $\{1, 2, \dots, n\}$ af rækken af naturlige tal, altså et naturligt tal n , og en bijektiv korrespondance mellem X og $\{1, 2, \dots, n\}$; i så fald siger man, at X har n elementer, eller, at *antallet af elementer i X er n* , eller, at *kardinaliteten af X er n* . Som betegnelse for antallet af objekter/elementer i en (endelig) samling/mængde X benyttes ofte: $|X|$, med en slags »numerisk«-tegn.

Det er nu så heldigt – ellers ville det at tælle nærmest kun have beskæftigelsesterapeutisk interesse – at *hvis der findes en bijektiv afbildning af en mængde X på afsnittet $\{1, 2, \dots, n\}$, og en bijektiv afbildning af X på afsnittet $\{1, 2, \dots, m\}$, så gælder, at $n = m$* . At dette faktisk er tilfældet beror på, hvad der overhovedet forstås ved mængden af naturlige tal og afsnit heri, især at induktionsprincippet forudsættes at gælde for de naturlige tal. Dette er ikke bare pjat: de *uendelige* mængder er netop de mængder, der tillader bijektive afbildninger af mængden ind i sig selv, hvis billedmængde er en *ægte delmængde* af mængden selv!

1.3 To tælleprincipper. Det at tælle opfattes normalt som en *triviel* operation, der kan udføres af næsten hvem-som-helst. Ganske vist er det nok en udbredt erfaring, at det kun er ganske små objektsamlinger, måske med op til 6 eller 7 objekter, som kan overskues og antalbestemmes uden en egentlig én-for-én-optælling, men denne begrænsning i det menneskelige opfatteapparat ændrer *ikke* ved den grundlæggende *princielle* simpelhed.

Det er nok også en fælles erfaring for mange, at optælling i praksis, og især af objektsamlinger med mange objekter, eller med objekter, hvis komplicerede struktur gør tælleopgaven uoverskuelig, på trods af den *princielle* enkelhed, ofte fører til ikke reproducerbare resultater. Optælling på én måde giver antallet n , men en efterfølgende optælling, enten med *samme metode*, eller på en måde, der anlægger et *andet struktureringskriterium* for tælleopgaven, giver resultatet m , hvor $n \neq m$. (Dette strider mod det *basale tælleprincip*, at en endelig mængde står i bijektiv korrespondance med et éntydigt bestemt afsnit af den naturlige talrække. Ofte er det ganske svært at finde

¹For små værdier af n skal notationen $\{1, 2, \dots, n\}$ fortolkes passende: når $n = 1$ betegnes derved singletonmængden $\{1\}$, for $n = 2$ mængden $\{1, 2\}$, for $n = 3$ mængden $\{1, 2, 3\}$, og først for $n \geq 4$ får udeladelsestegnet ... således den egentlige betydning!

det eller de steder, hvor bijektiviteten »mangler«, altså elementer som enten ikke er talt med, eller er talt med to eller flere gange! Og sådanne fejl kan have *ophævet hinanden* undervejs!)

Nu er det naturligvis især objektsamlinger, hvis elementantal *ikke* kan bestemmes ved *direkte inspektion*, som det er interessant at optælle, og på en reproducerbar måde, der endvidere kan kommunikeres til eventuelle andre interesserede parter: det er relevant at kunne argumentere, og på overbevisende måde, for et hævdet tællerresultat. To basale »tællemetoder« – det lyder næsten for fint – er følgende:

Optælling ved addition: Hvis en forelagt endelig samling X af objekter er **delt** i to delmængder X_1 og X_2 , så er antallet af objekter i X summen af objektantallene i X_1 og X_2 , altså i formel:

$$|X| = |X_1| + |X_2|.$$

At X er delt i X_1 og X_2 betyder, at hvert objekt fra X forekommer enten i X_1 eller i X_2 , men ikke begge steder, og videre, at hvert objekt fra X_1 , og hvert fra X_2 , forekommer i X . (I mængdeterminologi er $X = X_1 \cup X_2$, foreningsmængden af X_1 og X_2 , hvor X_1 og X_2 er *disjunkte*, dvs. deres *fællesmængde* er den tomme mængde \emptyset , altså $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.)

Dette tælleprincip gælder også i udvidet form, hvor X er delt (disjunkt) i flere end to delmængder; antallet af objekter i X er summen af delmængdernes objektantal.

Dette tælleprincip anvendes ofte »baglæns« – som en slags **optælling ved subtraktion**: kendes antallene af elementer i en endelig mængde X , og en delmængde $A \subseteq X$, er antallet af elementer i *komplementærmængden* $A^c = X \setminus A$, altså delmængden bestående af de elementer fra X , der *ikke* tilhører A , givet ved: $|A^c| = |X| - |A|$ (fordi $X = A \cup A^c$ er en deling af X).

Optælling ved multiplikation: For endelige objektsamlinger X og Y er antallet af måder at **kombinere** et objekt fra X med et objekt fra Y , altså antallet af **ordnede par** (x, y) af et element x fra X , og et element y fra Y , produktet af objektantallene $|X|$ og $|Y|$, hvor det er underforstået, at førstekoordinaten x og andenkoordinaten y er indbyrdes »uafhængige«.

Mængden af ordnede par (x, y) af et element x fra X , og et element y fra Y betegnes normalt $X \times Y$, og kaldes *mængdeproduktet*, eller *det kartesiske produkt* af X og Y ; med denne betegnelse udtrykkes tælleprincippet ved: $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

Forudsætningen, at andenkoordinaten y har samme variationsmuligheder for alle $x \in X$ er sagen delvis uvedkommende: det afgørende er, at der for hver mulig førstekoordinat x er *samme antal* mulige andenkoordinater, men de *behøver ikke* at være taget fra samme faste mængde Y , men kan komme fra en mængde Y_x , der varierer med x , og hvor $k = |Y_x|$ er samme tal for alle $x \in X$. I så fald er antallet af ordnede par $|X| \cdot k$.

Disse tælleprincipper er vel i brug – måske ofte ubevidst – ved mange dagligdags optællinger, hvor tælleprocessen befordres ved opdeling af objektmængden i let overskuelige dele, hvis antal adderes, eller ved at arrangere objekterne i simple mønstre, fx rektangulære formationer, hvis elementantal beregnes ved multiplikation af rektanglets *sidelængder*.

At optælling har disse egenskaber er indbygget i vores begreb om naturlige tal og deres addition og multiplikation, og princippet for optælling ved multiplikation er en konsekvens af princippet for optælling ved addition.

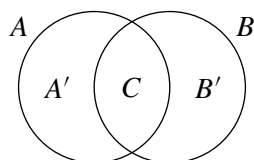
Eksempel: Optælling ved overlap. I mange situationer er den objektsamling, eller mængde, hvis elementantal ønskes bestemt, foreningsmængden $A \cup B$, bestående af elementer fra A , eller fra B , eller tilhørende begge, hvor A og B er givne (endelige) mængder.

Hvis ingen objekter tilhører både A og B (mængderne A og B er således *disjunkte*, uden fælles elementer, altså: $A \cap B = \emptyset$) giver *optælling ved addition* direkte: $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Hvis A og B *ikke vides* at være disjunkte, betragtes fællesmængden $C = A \cap B$, af elementer, der tilhører både A og B . Dermed er A delt i de disjunkte dele A' og C , hvor $A' = A \setminus B$, består

af de elementer fra A , der *ikke* også tilhører B , og B er tilsvarende delt i de disjunkte dele B' og C , hvor $B' = B \setminus A$, består af de elementer fra B , der *ikke* også tilhører A .

Dermed er $A \cup B$ delt i tre disjunkte dele, nemlig A' , C , og B' , som antydtes på figuren (lignende figurer, der kaldes *Venn-diagrammer*, er ofte nyttige til at give overblik i tællesituationer); den skal fortolkes på følgende måde: cirklen til venstre (området på papiret indenfor) står for elementerne i mængden A , cirklen til højre på tilsvarende måde elementerne i B , den »linseformede« mængde i midten for fællesmængden $C = A \cap B$, osv.:



Derfor gælder med brug af princippet for optælling ved addition, at

$$|A \cup B| = |A| + |B'| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Den anden identitet fås, da $|B| = |B'| + |C| = |B'| + |A \cap B|$ (optælling ved addition). \square

Formler, der på samme måde som i ovenstående eksempel udtrykker antallet af elementer i en foreningsmængde af $n > 2$ mængder som et *aritmetisk udtryk* i antal elementer i diverse fællesmængder, bevises i kapitel 15 (optælling ved inklusion/eksklusion).

1.4 Bijektivitetsprincippet. Dette udtrykker, at to (endelige) mængder X og Y , for hvilke der findes en *bijektiv korrespondance mellem X og Y* , har samme antal elementer, altså: $|X| = |Y|$.

I en hyppigt forekommende variant heraf er det i mindre grad *antallet* af elementer i mængderne, der er interessant, men den bijektive afbildnings parring af elementer i X og elementer i Y udnyttes til at konkludere, at der er *lige mange elementer* i X og i Y .

En typisk anvendelse er i *umulighedsargumenter*. En *tænkt konfiguration* kan analyseres nærmere, og det kan vise sig, at enhver sådan konfiguration har bestemte tilknyttede parametre af ens størrelse, hvorimod en analyse af de omgivelser i hvilke konfigurationen tænkes realiseret afslører, at de pågældende parametre *ikke* kan være ens. Se eksemplet nedenfor.

En anden typisk anvendelse er en slags *baglæns* optælling: To tilsyneladende forskellige størrelser, der vises at være antallet af elementer i samme mængde, men opnået ved forskellige tællemetoder, er samme (endda hele) tal. (Dette er kernen i et *kombinatorisk bevis* for en *identitet*; der er mange eksempler herpå i det følgende.)

Eksempel: Overdækning af skakbrætter. Et skakbræt består af 64 kvadratiske *felter* arrangeret i et 8×8 mønster. (Lav selv illustration efter behov!) Dette bræt tænkes forsøgt *overdækket* med *brikker*, der alle er rektangulære, af størrelse 2×1 skakbrætfelter; overdækning betyder præcis, at brikker, der både kan ligge »vandret« og »lodret«, ikke ligger ind over hinanden, og, at hvert skakbrætfelt er dækket af (den ene halvdel af) en brik. Der skal således benyttes 32 brikker til en overdækning, og det er let at angive massevis af dem.

Betragtes i stedet *brætter* af størrelse $n \times n$, hvor n er et naturligt tal, kan det tilsvarende spørges, om det er muligt at overdække brættet med et antal 2×1 brikker. Hvorvidt dette er muligt beror på, om n er lige eller ulige. For n lige kan man bare overdække brættet rækkevis, hver række med $n/2$ brikker, og der er naturligvis mange andre typer overdækninger. Hvis derimod n er ulige, fx $n = 2m + 1$, med m et helt tal, kan brættet *ikke* overdækkes; i denne situation er der nemlig ialt $n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$ små felter, altså et ulige antal, men *et bræt, der kan overdækkes*, har et *lige antal små felter*, da hver brik i overdækningen dækker præcis 2 af dem.

Nu betragtes igen et sædvanligt 8×8 skakbræt, men der spørges, om det er muligt delvist at overdække brættet med et antal 2×1 brikker, på en sådan måde, at samtlige felter på nær to modstående *hjørnefelter* er dækket, hver som ovenfor af præcis en brik. (En grovere version af eksemplet betragter et bræt, hvor to modstående hjørnefelter simpelthen er savet af, og der spørges om overdækning af det skamferede bræt.) I denne modificerede situation ønskes altså $64 - 1 - 1 = 62$ små felter overdækket, hvilket i princippet kan ske med 31 brikker. Man kan prøve at forestille sig en eventuel sådan overdækning, men det virker som om det altid er umuligt at lægge den sidste brik på plads! Grunden hertil er, at en overdækning som specificeret *ikke findes*. Med den sædvanlige skiftevis sort/hvid-farvning af skakbrættets felter er det nemlig klart, at hver 2×1 brik, uanset lodret/vandret placering, i en eventuel overdækning dækker netop ét hvidt og ét sort felt, og, at derfor *en delmængde af brættets felter, der kan overdækkes, har lige mange sorte og hvide felter*, og, at *en delmængde med et forskelligt antal sorte og hvide felter ikke kan overdækkes*. Men to modstående hjørnefelter har samme farve, så den delmængde, der søges overdækket, har 32 sorte og 30 hvide felter, eller 30 sorte og 32 hvide. \square

1.5 Skuffepri­ncippet. Det drejer sig om følgende velkendte forhold: *Fordeles et antal objekter i skuffer, med flere objekter end der er skuffer, må mindst én af skufferne rumme 2 eller flere objekter.* Denne observation anvendes ofte delvis i forklædning, og det er derfor nyttigt at formulere en række varianter. En *fordeling*, eller *kategorisering*, af elementerne i en given *endelig mængde*, eller objektsamling, kan præcist beskrives via en afbildning, som diskuteret nærmere i afsnit 2.3. I formuleringen nedenfor spiller *opdelingskategorierne* rollen af »skuffer«.

Observation. Lad k , m og n være naturlige tal. Så gælder:

I enhver opdeling af en samling på n objekter efter m opdelingskategorier, hvor $n > m$, er der mindst 1 kategori med 2 eller flere objekter.

I enhver opdeling af en samling på n objekter efter m opdelingskategorier, hvor $n < m$, er der mindst 1 kategori med 0 objekter.

I enhver opdeling af en samling på n objekter efter m opdelingskategorier, hvor $n > k \cdot m$, er der mindst én kategori med $k + 1$ eller flere objekter.

I enhver opdeling af en samling på n objekter efter m opdelingskategorier, hvor $n < k \cdot m$, er der mindst én kategori med $k - 1$ eller færre objekter.

Bevis. En kategorisering af objekter efter m kategorier, hvor der af hver kategori er højst 1 objekt (altså enten 0 eller 1 objekt) omfatter højst m objekter. Tilsvarende benytter en kategorisering af n objekter højst n kategorier, dvs. der er højst n af de mulige kategorier, hvorunder der falder objekter (1 eller flere).

Videre omfatter en kategorisering af objekter efter m kategorier, hvor der af hver kategori er højst k objekter, højst $k \cdot m$ objekter; og en kategorisering af objekter efter m kategorier, hvor der i hver kategori falder k eller flere objekter, omfatter mindst $k \cdot m$ objekter. \blacksquare

Denne nærmest banale observation, der kaldes *skuffepri­ncippet* (engelsk: *pigeonhole² principle*), er særdeles nyttig. Ved brug af skuffepri­ncippet som del af et argument er det ofte en hjælp at tænke på kategoriseringen som en slags fordeling af objekterne i »skuffer«, fx i en kommode, hvor hver skuffe bærer den tilhørende kategori »navn«. Skuffepri­ncippet dukker ofte op i varianter. Lad n være et naturligt tal:

- *Hvis n objekter inddeles efter n kategorier, og hver kategori indeholder mindst 1 objekt, så er der præcis 1 objekt af hver af de n kategorier.*

²Betydningen af dette ord er *hul i et dueslag*, dog mest i overført betydning, som et *rum* i et fordelingsapparat for *post*, fx i et sekretariat, eller til gæster på et hotel.

- Hvis n objekter inddeles efter n kategorier, og hver kategori indeholder højst 1 objekt, så er der præcis 1 objekt af hver af de n kategorier.

Ved anvendelse af skuffeprincippet i et argument er det ofte svært at *udpege* såvel objekter som inddelingskategorier; kun øvelse kan give rutine heri. Princippet giver *ikke* nogen-som-helst oplysning om (i den første formulering ovenfor) hvilken kategori, der har 2 eller flere objekter.

Eksempler: Simpel brug af skuffeprincippet. A. I en serie af 7 kast med en sædvanlig *rafletern* er der mindst 2 kast med samme antal *øjne*. (Hvilke objekter, og hvilken kategorisering, kan her benyttes i en anvendelse af skuffeprincippet?)

B. Blandt vilkårlige 101 af tallene $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$ er der to *primiske*. Benyt de 100 kategorier, hver bestående af et ulige tal n , og dets efterfølger $n + 1$; to tal i samme kategori har forskel 1 og er derfor primiske.

C. Enhver *pokerhånd*, dvs. 5 kort fra et sædvanligt sæt spillekort (med 52 kort) har to kort af samme *farve* (farverne er jo *spar, hjerter, ruder, klør*).

D. Enhver *bridgehånd*, dvs. 13 kort fra et sædvanligt sæt spillekort, har 4 eller flere kort i en af de fire *farver*. □

I de følgende eksempler på anvendelse af skuffeprincippet er de benyttede kategorier mindre direkte, eller fortolkes på særlig måde. Det følgende resultat skyldes *Erdős* og *Szekeres* (1935).

Sætning. Lad n være et naturligt tal. I enhver følge af $n^2 + 1$ forskellige tal $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ findes en monoton delfølge af længde $n + 1$ (eller mere).

Bevis. Påstanden er præcist, at der findes $n + 1$ indices $k_1 < k_2 < \dots < k_{n+1}$ blandt $1, 2, \dots, n^2 + 1$, således at delfølgen

$$a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots, a_{k_n}, a_{k_{n+1}},$$

er monoton, altså enten monotont voksende, eller monotont dalende (aftagende); det kan sagtens forekomme, at der er sådanne delfølger – naturligvis forskellige – af begge typer.

Ved forklaringen af den generelle fremgangsmåde i argumentet er det nok nyttigt at have et konkret talekseksempel til støtte. Hertil benyttes de 10 tal: 7, 4, 0, 8, 1, 5, 2, 9, 6, 3.

For hver af de $n^2 + 1$ pladser i den givne følge defineres to talstørrelser: v_j, d_j på denne snedige måde. For plads j sættes:

- v_j er længden af den længste *voksende delfølge*, hvis *sidste element* er a_j , og
- d_j er længden af den længste *dalende delfølge*, hvis *første element* er a_j .

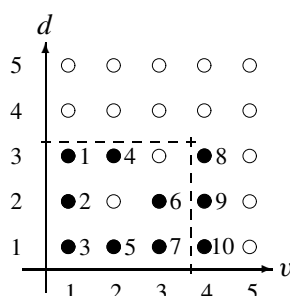
I det konkrete talekseksempel er tallene v_j, d_j givet i tabellen:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_j	7	4	0	8	1	5	2	9	6	3
v_j	1	1	1	2	2	3	3	4	4	4
d_j	3	2	1	3	1	2	1	3	2	1

Bestemmelsen af v_j 'erne sker nok lettest fra venstre mod højre, medens det for d_j 'erne nok er lettere at gå den anden vej. Det er underforstået, at det for fastlæggelsen af v_j er ligegyldigt, hvordan tallene med indices $> j$ er fordelt, og for d_j tilsvarende er ligegyldigt, hvordan tallene med indices $< j$ er fordelt. For eksempel er $v_1 = v_2 = v_3 = 1$, fordi de første tre elementer udgør en aftagende delfølge; $v_4 = 2$ fordi 7, 8 er en længste voksende delfølge, der ender i a_4 (der er to andre sådanne, nemlig 4, 8 og 0, 8). Det anbefales at gå tabellen nøje efter!

Den afgørende observation er nu, at de ialt $n^2 + 1$ på denne måde definerede par (v_j, d_j) er *forskellige*, altså *enten har forskellige førstekoordinater, eller forskellige andenkoordinater*, eller har begge koordinater forskellige. Betragt nemlig naturlige tal j og k mellem 1 og $n^2 + 1$, der opfylder $j < k$. Ifølge forudsætningen er $a_j \neq a_k$, og hvis $a_j < a_k$ gælder $v_j < v_k$, fordi tallet a_k kan benyttes i en mulig *forlængelse i slutningen* af en længste voksende delfølge, der ender i a_j ; tilsvarende, hvis $a_j > a_k$ så gælder $d_j > d_k$ fordi tallet a_j kan benyttes i en mulig *forlængelse i begyndelsen* af en længste dalende delfølge, der begynder i a_k .

Nu indrettes et »skuffedarium« til kategorisering af parrene (v_k, d_k) . De enkelte skuffer heri er *heltalsgitterpunkterne* i første kvadrant af et koordinatsystem (punkterne på koordinataksene *ikke* medregnet). Det k 'te par (v_k, d_k) placeres simpelthen i gitterpunktet med koordinaterne (v_k, d_k) , som antydtes på figuren for tallene fra eksemplet, med udfyldte nummererede cirkler.



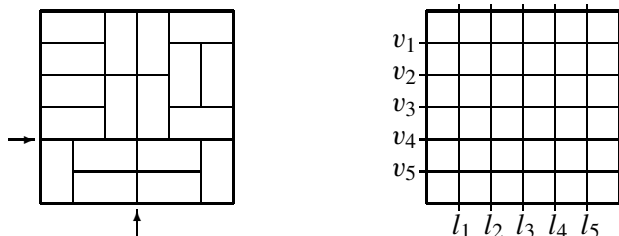
De ialt $n^2 + 1$ par (v_k, d_k) placeres i indbyrdes forskellige punkter, og derfor kan de *ikke alle* *befinde sig indenfor kvadratet* af par for hvilke begge koordinater er mellem 1 og n ; på tegningen er dette kvadrat antydtes med de stiplede linier. At et par (v_k, d_k) falder udenfor det nævnte kvadrat betyder imidlertid, at enten er $v_k > n$, i hvilket tilfælde, der findes en voksende delfølge af længde $> n$ som ender i k , eller $d_k > n$, i hvilket tilfælde, der findes en aftagende delfølge af længde $> n$ som begynder i k (eller begge dele), hvilket var påstanden. ■

Som en morsom (!?) – det er naturligvis en smagssag – anvendelse af sætningen gælder, at i en samling af $n^2 + 1$ personer, der er opstillet på en række, kan der udvælges $n + 1$ af dem – de kunne fx træde et skridt frem – så de udvalgte har monotont voksende/aftagende højde (eller vægt, eller alder, eller telefonnummer ...) når de tages i deres oprindelige rækkefølge. (Det er underforstået, at de til personerne knyttede talstørrelser er forskellige.)

Eksempel: Avanceret brug af skuffeprincippet. I en skakklub mødes (en bestemt dag) et vist antal personer (2 eller flere), og der spilles et vist antal skakpartier; hver person holder regnskab med, hvilke modstandere den pågældende har haft i dagens løb. *Der findes da 2 eller flere af disse personer, der har spillet med det samme antal (forskellige) modstandere i dagens løb.*

Lad n betegne antallet af skakklubbesøgende. De n personer kategoriseres efter antallet af forskellige modstandere; kategorierne er således på naturlig måde tallene $0, 1, 2, \dots, n - 1$. En person sættes i kategorien k , hvis personen har spillet med præcis k forskellige modspillere. Der er ialt n kategorier, og den eneste fordeling af antal modstandere, som strider mod påstanden, er præcis én person i hver kategori. Hm ... det ser umiddelbart *ikke* så godt ud, men en ekstra egenskab ved situationen kommer til hjælp: kategorierne 0 og $n - 1$ er indbyrdes udelukkende, i den forstand, at hvis der findes en eller flere personer, der slet ikke har spillet, så findes der med garanti ingen personer, der har spillet med $n - 1$ forskellige modstandere, og tilsvarende, hvis der findes en eller flere personer, der hver har spillet med $n - 1$ forskellige modstandere, så er der ingen, der slet ikke har spillet. Derfor er mindst én af kategorierne 0 og $n - 1$ *tomme*, og derfor er de n personer faktisk opdelt i $n - 1$ kategorier (de kunne kaldes $0 \cup (n - 1)$ og $1, 2, \dots, n - 2$), og følgelig er der mindst én kategori med 2 eller flere personer. □

Eksempel: Mere om overdækning af brætter. Her betragtes et 6×6 bræt. Som vist i eksemplet i afsnit 1.4 findes der overdækninger af et sådant bræt med 18 brikker af størrelse 2×1 . Illustrationen nedenfor til venstre giver et eksempel på en sådan overdækning.



For den viste overdækning gælder, at der findes en *snitlinie* (vandret eller lodret), der *ikke* gennemskærer nogen brikker (snitlinier er de linier, der inddeler brættet i småfelter). Dette er en *generel egenskab* for alle overdækninger af et 6×6 bræt. (I eksemplet findes faktisk både en vandret og en lodret sådan, antydnet ved pilene, men dette gælder *ikke* i almindelighed.)

Betragt nemlig en vilkårlig given overdækning af 6×6 brættet, og de 10 mulige *snitlinier*, vist på figuren til højre som $v_1, \dots, v_5, l_1, \dots, l_5$; disse snitlinier spiller rollen af *skuffer*: hver snitlinie tildeles de (eventuelle) af de 18 brikker, fra den givne overdækning, der gennemskæres af den pågældende linie; derved placeres hver brik naturligvis i præcis én af skufferne; i overdæknings-eksemplet til venstre er antallene af brikker i de 10 skuffer, som det let kontrolleres: $(2, 2, 2, 0, 2)$, for v_i 'erne, og $(4, 2, 0, 2, 2)$, for l_i 'erne. Det er planen at anvende skuffeprincippet til at godtgøre eksistensen af en snitlinie, der ikke skærer nogen 2×1 brik, altså for hvilken den tilhørende skuffe er tom; det er måske rigeligt optimistisk: 18 objekter i 10 skuffer! Objektantallene for den viste overdækning er imidlertid alle *lige*, og dette er ved nærmere eftersyn et *generelt forhold*.

For en vilkårlig overdækning gælder, at hver af de 10 snitlinier $v_1, \dots, v_5, l_1, \dots, l_5$ gennemskærer et lige antal brikker.

Dette beror på, at det givne bræt har *lige* sidelængder (målt med de små felters sidelængde). Hver af de 10 linier deler dermed brættet i to dele, der begge består af et lige antal små felter. På hver side af en linie er der et vist antal *hele* 2×1 brikker, samt et antal *halve* 2×1 brikker (skåret midt igennem af den pågældende linie), men antallet af således gennemskårne brikker er dermed lige, nemlig det samlede antal felter på den ene side af linien (dette er lige) minus antallet af felter på den pågældende del af brættet, der dækkes af ikke gennemskårne brikker (også dette antal er lige, da hver overdækkende brik dækker 2 felter).

Den ved den givne overdækning af brættet bestemte fordeling af de 18 brikker i de 10 skuffer har dermed egenskaben, at hver ikke tom skuffe indeholder et lige antal brikker, altså mindst 2. Derfor er mindst én af skufferne tom, og for mindst én af linierne $v_1, \dots, v_5, l_1, \dots, l_5$, gælder, at den *ikke* gennemskærer brikker; antagelsen, at alle skuffer er *ikke-tomme*, indebærer nemlig, at der er mindst $20 = 10 \cdot 2$ brikker i den givne overdækning. \square

1.6 To tællestrategier. Basalt set består optælling af en mængde i at tilvejebringe en bijektiv korrespondance – i det mindste via en principbeskrivelse – mellem mængden og et vist afsnit af den naturlige talrække; det største benyttede tal i afsnittet er så det søgte elementantal. Dette svarer til at *gennemgå* mængden på en sådan måde, at hvert element i mængden bliver *talt* præcis én gang, og dette kan kaldes

- *direkte*, eller *disjunkt optælling*.

Ofte er det imidlertid lettere at tænke, og lettere at forklare, optællingen ved med vilje – men på *struktureret*, eller *systematisk*, måde – at tælle visse elementer flere gange, men holde regnskab

med, hvor mange gange hvert element medtælles, og inden resultatet afleveres, kompensere for elementer, der er talt multipelt. Dette kan kaldes

- **optælling med gentagelser, og efterfølgende korrektion.**

Disse abstrakte overvejelser udmøntes i utallige eksempler i det følgende; også eksemplet om optælling med overlap, i afsnit 1.3, benytter basalt set optælling med gentagelser, og efterfølgende korrektion.

Eksempel. For en fodboldturnering med 12 hold ønskes antallet af kampe bestemt, når hvert hold skal spille præcis én kamp mod hvert af de andre hold. For at kunne tale om holdene tænkes de nummererede: 1, 2, . . . , 12.

A. En direkte – disjunkt – optælling baseres på, at hver kamp udspilles mellem to hold med forskellige numre, og optællingen – eller gennemgangen – af kampene struktureres efter, for hver kamp, det mindste af de to kæmpende holds numre:

Der er 11 kampe mellem hold 1 og hold $j > 1$ (nemlig 1 for hvert af holdene: 2, . . . , 12);

der er 10 kampe mellem hold 2 og hold $j > 2$ (nemlig 1 for hvert af holdene: 3, . . . , 12);

og således fortsættes . . .

der er 2 kampe mellem hold 10 og hold $j > 10$ (nemlig 1 for hvert af holdene: 11, 12); og

der er 1 kamp mellem hold 11 og hold 12.

Der er naturligvis ingen kampe mellem to hold, hvor det mindste holdnummer er 12. Ved brug af additionsprincippet er det søgte antal kampe derfor summen (se fx lemmaet i afsnit 1.7):

$$11 + 10 + 9 + \dots + 3 + 2 + 1 = 66.$$

B. En optælling med gentagelser, og efterfølgende korrektion, fås ved i stedet at tælle, hvor mange par af to (forskellige) hold der er, og dernæst bemærke, at hver kamp, fx mellem hold nummer i , og hold nummer j (med $j \neq i$), svarer til præcis to sådanne par, nemlig (i, j) og (j, i) (hvert tælleobjekt tælles altså to gange, svarende til, at hvert hold kæmper mod hvert andet hold både »hjemme« og »ude«; i den betragtede turnering foregår alle kampe på »neutral bane«), således, at antallet af kampe bestemmes herfra ved korrektionen, at dele med to, til:

$$\frac{1}{2}(12 \cdot 11) = 66;$$

antallet af par er jo $12 \cdot 11$ (ifølge multiplikationsprincippet), da der er 12 muligheder for det ene hold, og for hvert valg heraf, 11 muligheder for det andet hold. \square

(Det kan overvejes, om det er muligt at tilrettelægge en sådan turnering med en spilleplan, hvor hvert hold højst spiller én kamp pr. spilledag, og turneringen afvikles på præcis 11 spilledage; da hvert hold deltager i 11 kampe er en turnering på færre end 11 spilledage *ikke* mulig!)

1.7 De små situationers princip, rekursion, og induktionsbeviser. *De små situationers princip* (det er en noget barnlig betegnelse, men – det håber jeg – suggestiv) er et heuristisk princip for behandling af problemer, der på naturlig måde beskrives via en *størrelsesparameter*, fx et helt tal $n \geq 0$. *Begynd med at analysere situationen for små værdier af n* . Her er det ofte muligt at få et fuldstændigt overblik. Et gæt på en generel *formel* for et antal a_n , svarende til størrelse n , er *ikke* korrekt såfremt det ikke passer for små værdier af n . Dette udelukker dog ikke, at små værdier af n ofte formelmæssigt kræver særbehandling, eller særlige konventioner.

Ofte er et problem formuleret som at bestemme antallet af . . . , hvor et gyldigt svar er en formel for dette antal, typisk involverende én eller flere parametre, der beskriver tælleproblemet nærmere. Derfor er der særlig interesse for talfølger, fx $(a_n)_{n \geq 0}$, hvor a_n giver *svaret* på et bestemt konkret

tælleproblem af størrelse n . Et vigtigt eksempel er følgen af *fakultetstal* $n!$; måske endnu vigtigere er *binomialkoefficienterne* $\binom{n}{k}$ (nærmere om disse i kapitel 3).

Det er vigtigt at have gennemarbejdet mange konkrete tælleopgaver; med øvelse opbygges derved en vis »flair« for typen af svar på mønsterproblemer, og i mange situationer kan en ny tælleopgave løses ved simpelthen at blive oversat til en af de velkendte mønsteropgaver.

Det er dog i mange situationer for optimistisk at søge en eksplicit formel, men en god erstatning kan være en *rekursion*, eller *rekursionsligning*, eller *differensligning*, der sammenknytter de søgte antal for forskellige værdier af størrelsesparameteren, og som suppleret af diverse *begyndelsesbetingelser* fastlægger de søgte antal. Mere herom i kapitel 7.

En i det følgende hyppigt benyttet bevismetode er *bevis ved induktion*; at sådanne beviser »fungerer« beror på egenskaber ved mængden af naturlige tal, som beskrevet i TAL2 (i Algebrabogen).

Kernen i et induktionsbevis er et argument for, at der fra forudsætningen, at en bestemt egenskab er tilstede for *alle situationer af størrelse n* , kan konkluderes, at den pågældende egenskab også er tilstede for *alle situationer af størrelse $n+1$* ; denne del af beviset kaldes *induktionsskridtet*, og forudsætningen, at egenskaben er tilstede, kaldes *induktionsantagelsen*.

Induktionsskridtet suppleres med et argument for, at den pågældende egenskab er tilstede for en *situation af startstørrelse n_0* ; denne del af beviset kaldes *induktionsstarten*. Herefter kan det konkluderes, at egenskaben er tilstede for *alle situationer af størrelse $\geq n_0$* .

Induktionsskridtet består i at reducere en situation af en størrelse, om hvilken der endnu ikke er viden, til en – eller måske flere – mindre situation(er), hvorom induktionsantagelsen giver viden. Mindre øvede induktionsbevisere kan fristes til en formulering, der i bedste fald er uklar, men ofte er direkte forkert: nemlig på basis af en situation af en størrelse, hvorom induktionsantagelsen giver viden, at *konstruere* en situation nummeret større, og om denne via induktionsantagelsen at konkludere, at egenskaben er tilstede. Dette sikrer *ikke*, at alle situationer af næste størrelse har den pågældende egenskab, medmindre det samtidig godtgøres, at *alle situationer af næste størrelse kan fås på den anviste måde!*

Det er en smagssag – og det afhænger iøvrigt af den tilsigtede modtager – hvor mange af *besværgelserne* i et induktionsbevis, der medtages i en skriftlig/mundtlig fremstilling.

Da mange tælleopgaver løses ved passende opdeling af den forelagte mængde X i disjunkte dele, der tælles hver-for-sig, og hvor derfor antallet af elementer i X er summen af delenes elementantal, er der ofte behov for kendskab til diverse *standardsummer*. Her følger et par simple sådanne, der nok er velkendte for de fleste; opgaverne giver diverse udvidede varianter.

Lemma. *Lad n betegne et naturligt tal. Så gælder:*

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2},$$

og

$$1 + 2 + \dots + 2^n = \sum_{j=0}^n 2^j = 2^{n+1} - 1.$$

Bevis. Dette følger ved induktion (udfør det! – det er næsten hovedregning). ■

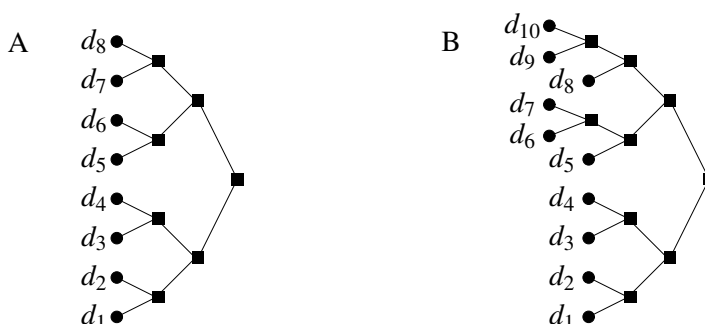
Bemærkning. Et induktionsbevis for en formel er i en række tilfælde kun delvis *informativt*, i den forstand, at man ikke føler sig »klogere« efter at have udført (udregningerne i) beviset, og det kan være vanskeligt at huske formelen *udenad*, hvilket er en afgjort ulempe! Et direkte *suggestivt bevis*, der giver en slags form på beviset, kan her være en hjælp. For eksempel kan den første formel i lemmaet udtrykkes, at summen er antallet af led gange gennemsnittet af første og sidste

led; beviset herfor følger ved at slå leddene sammen parvis fra hver ende af summen (det skal dog overvejes, hvad der sker, når n er ulige). \square

1.8 Grafmodeller. Mange af de konkrete tælleopgaver, der behandles i det følgende, har deres oprindelse i *grafer*, som er en særlig type *matematiske objekter*; kapitlerne 4–6, og 11–13 udgør et minikursus i grafteori. Desuden kan en illustrerende tegning ofte være en god støtte ved løsningen af en tælleopgave.

Eksempel. I mange sportsgrene, fx tennis, afholdes *slå-ud-turneringer*, eller *cupturneringer*: hver kamp har én *vinder*, og én *taber* – og kun vinderen fortsætter i turneringen (eller, efter *finalen*, er vinderen af turneringen).

Sådanne turneringer kan illustreres grafisk via en turneringsplan, som fx de to nedenstående:



De udfyldte cirkler i hver plans venstre side står for turneringens deltagere d_1, d_2, \dots, d_n , der parvis udkæmper kampe, hver markeret med et udfyldt kvadrat, der står til højre for, og er forbundet med linier til de to kampdeltagere. Vinderen af en kamp kæmper næste kamp med vinderen af en nabokamp, og således videre.

Det er lettest at arrangere turneringer med et deltagerantal af formen $n = 2^k$, som eksemplificeret på plan A, for $n = 2^3 = 8$. Antallet af *spillerunder* i en sådan turnering er k , og det samlede antal af kampe kan findes på følgende måde: i første runde er der ialt 2^k deltagere og 2^{k-1} kampe, i anden runde er der 2^{k-1} (rest)deltagere og 2^{k-2} kampe, og således videre, i finalerunden, den k 'te, er der 2 (rest)deltagere, finalisterne, og $2^0 = 1$ kamp, nemlig finalen, og det samlede antal kampe er summen af antal kampe i hver af de k runder, altså (se lemmaet i afsnit 1.7)

$$2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^1 + 2^0 = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1.$$

En turnering med n deltagere, hvor n ikke er en 2-potens, er lidt mindre overskuelig, men håndteres ved fx at »indsluse« deltagere, der »kvalificerer« sig hertil efter deltagelse i forberedende kampe, som antydnet på plan B, med $n = 10$; hvordan en sådan turnering lægges til rette er op til arrangørerne, og der er naturligvis mulighed for at lave en kvalifikationsturnering, der består af kampe i flere niveauer, eller indledende runder.

Det samlede antal kampe i en sådan turnering kan beregnes som ovenfor ved at tælle antallet af kampe i hver runde, inklusive eventuelle indledende runder, og lægge disse kampantal sammen. Men det er vel mere slående (!) at bemærke – dette argument forenkler også overvejselsen i tilfældet $n = 2^k$, at hver udkæmpet kamp reducerer antallet af turneringsdeltagere med præcis 1 (nemlig taberen), og turneringen fortsættes indtil kun én deltager er tilbage, nemlig vinderen af finalen.

Derfor: *det samlede antal kampe i en slå-ud-turnering med n deltagere er $n - 1$.* \square

Opgaver³

(1.1) Lad X betegne en endelig ikke-tom mængde med $n = |X|$ elementer. Find antallet af (ordnede) par $(x, x') \in X \times X$ for hvilke $x \neq x'$.

(1.2) Lad der være givet $n + 1$ forskellige positive hele tal, der alle er $\leq 2n$ (n er et naturligt tal). Vis, at:

- (a) der findes to af disse tal, hvis sum er $2n + 1$;
- (b) der findes to af disse tal, der er indbyrdes primiske;
- (c) der findes to af disse tal, så det ene er et multiplum af det andet.

(1.3) Vis, at summen af to *ulige* kvadrattal *ikke* selv er et kvadrat.

(1.4) Angiv en overdækning af et 6×8 »skakbræt« med 2×1 brikker, jf. eksemplet i afsnit 1.5, for hvilken *alle* vandrette og *alle* lodrette snitlinier gennemskærer mindst én 2×1 -brik.

(1.5) Vis ved et eksempel, at påstanden i sætningen i afsnit 1.5 (af Erdős og Szekeres) *ikke* kan skærpes til, at hver følge af n^2 forskellige tal har en monoton delfølge af længde $n + 1$ (når $n > 1$).

(1.6) Lad x være et komplekst tal og n et naturligt tal. Vis, at der gælder:

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \begin{cases} n + 1 & \text{for } x = 1, \\ \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} & \text{for } x \neq 1. \end{cases}$$

(1.7) Lad x være et komplekst tal og n et naturligt tal. Vis, at der gælder:

$$\sum_{k=1}^n kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & \text{for } x = 1, \\ \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(x-1)^2} & \text{for } x \neq 1. \end{cases}$$

(1.8) Lad $n \in \mathbb{N}$, og betragt mængden af talpar $T = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i = 1, 2, \dots, n, 1 \leq j \leq i\}$ (det er en slags trekant). Vis, at der for en familie $(a_{i,j})_{(i,j) \in T}$ af tal, som er indexeret ved mængden T , gælder, at

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}.$$

³Appendiks indeholder kommentarer/løsninger til de fleste opgaver.

Kapitel 2

Nogle grundbegreber

Efter den bløde introduktion i kapitel 1 er det nok på tide at »smøge ærmerne op« og komme i gang. Emnerne i dette kapitel er en blanding af matematiske grundbegreber, især vedrørende *afbildninger*, og *terminologi for mængder*, og simple hjælpemidler til løsning af tælleopgaver, fx *fakultetsfunktionen*, og de dermed beslægtede *dalende og stigende faktorieller*.

Desuden introduceres en familie af nyttige *modeller*, der kan illustrere mange tælleopgaver; disse modellers *objekter* er (endelige) *symbolstreng*e, som for det meste blot kaldes *ord*, bestående af *symboler* fra en *mængde af tegn*, der omtales som et *alfabet*.

2.1 Notation og terminologi for mængder. Den brug der i det følgende gøres af *mængder* er især af formuleringsmæssig art, hvor det er fuldt tilstrækkeligt at opfatte mængder som en bekvem sammenfatningsmekanisme for samlinger af *objekter* med en-eller-anden grad af indbyrdes slægtskab. Det er dog praktisk at benytte den præcise *notation* for mængder, og nedenstående er primært en oversigt over de vigtigste betegnelser.

Definitioner. En *mængde* er en samling af objekter, der også kaldes *mængdens elementer*; at x er element i mængden A , eller at x *tilhører* A , skrives $x \in A$, og læses » x er element i A «.

En mængde er bestemt ved sine elementer; to mængder A og B er *ens*, eller er *samme mængde*, hvilket skrives $A = B$, hvis A og B er samme samling af objekter; to mængder A og B er *forskellige*, hvilket skrives $A \neq B$, hvis de ikke er ens, altså hvis A har et element, der ikke er element i B , eller hvis B har et element, der ikke er element i A , eller begge dele.

En eneste mængde har *ingen elementer*; den kaldes *den tomme mængde*, og den betegnes \emptyset .

Gloserne *element* og *objekt* anvendes i flæng. En mængde kan *angives*, eller *beskrives*, ved en præcis bestemmelse af dens elementer, fx ved en *liste*, omgivet af *mængdeklammerne* $\{$ og $\}$, af (navne på) elementerne, eller ved en *egenskab*, der karakteriserer elementerne. Visse mængder benyttes så ofte, at det er nyttigt at have *standardnavne* for dem; dette gælder fx *mængden af naturlige tal*, der betegnes \mathbb{N} , og *mængden af hele tal*, der betegnes \mathbb{Z} . Som lister er disse mængder

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{og} \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Disse mængder er *uendelige* og derfor er der benyttet udeladelsestegnet \dots i listeangivelsen.

Definitioner. Lad A og B være mængder.

Hvis hvert element af A er element i B siges A at være en *delmængde af* B , hvilket skrives $A \subseteq B$ (eller $A \subset B$).¹ Det udelukkes ikke, at hvert element i B er element i A , altså at $A = B$. Med denne notation gælder, at $A = B$ hvis og kun hvis både $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$. Videre er $\emptyset \subseteq A$ for enhver mængde A (der er simpelthen ingen elementer i \emptyset , der skal verificeres at tilhøre A).

Hvis $A \subseteq B$ siges A at være en *ægte delmængde* af B såfremt $A \neq B$, altså hvis der findes et element i B , der ikke er element i A .

Mængden bestående af de objekter, der er elementer i *både* A og B kaldes *fællesmængden af* A og B , og den betegnes $A \cap B$, der læses »fællesmængden af A og B «, eller » A fælles med B «.

¹Nogle fremstillinger benytter symbolet \subset i betydningen »ægte delmængde«.

Det udelukkes ikke, at der slet ikke er sådanne objekter, altså, at $A \cap B = \emptyset$, i hvilket tilfælde A og B siges at være **disjunkte**.

Mængden af de objekter, der er **elementer af enten A , eller B , eller begge**, kaldes **foreningsmængden af A og B** , og den betegnes $A \cup B$, der læses »foreningsmængden af A og B «.

Mængden af de objekter, der er **elementer af A , men ikke af B** , kaldes **overskudsmængden af A over B** , og den betegnes $A \setminus B$. Hvis A og B er disjunkte, så er $A \setminus B = A$, og hvis $A \subseteq B$, så er $A \setminus B = \emptyset$. Overskudsmængden af A over B kaldes også **komplementærmængden til B relativt til A** ; i en situation, hvor det er underforstået, at alle de elementer der omtales tilhører A (hvor A fungerer som en slags »universalmængde«, eller »elementunivers«), kaldes den blot for **komplementærmængden til B** , og den betegnes så B^c .

Som nævnt i kapitel 1 er de *endelige mængder* præcis de mængder X for hvilke der findes en bijektiv korrespondance mellem mængden og et afsnit af de naturlige tal, altså en delmængde af \mathbb{N} af formen $\{1, 2, \dots, n\}$, for et naturligt tal n . Når dette er tilfældet kaldes dette naturlige tal n , der er entydigt bestemt ved X , for *antallet af elementer i X* , og det betegnes $|X|$.

Mængderne \mathbb{N} og \mathbb{Z} er *uendelige* (altså *ikke endelige*). Her er \mathbb{N} en delmængde af \mathbb{Z} , altså $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. De lige tal, og de ulige tal, er begge delmængder af \mathbb{Z} ; som mængder er de bestemt via en karakterisering af deres elementer ved egenskaber, og de kan fx skrives på følgende måde:

$$\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ er lige}\},$$

og

$$\{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ er ulige}\};$$

de to mængders foreningsmængde er \mathbb{Z} , og deres fællesmængde er \emptyset (de er altså disjunkte).

Begreberne fællesmængde og foreningsmængde anvendes ofte for *familier* $(A_i)_{i \in I}$ af mængder A_i , hvor der altså for hvert element i af en *indeksmængde* I er givet en mængde A_i .

Fællesmængden for familien $(A_i)_{i \in I}$, der betegnes $\bigcap_{i \in I} A_i$, består af de elementer, der tilhører hver eneste af mængderne A_i , altså de x , for hvilke $x \in A_i$, for alle $i \in I$; og **foreningsmængden for familien** $(A_i)_{i \in I}$, der betegnes $\bigcup_{i \in I} A_i$, består af de elementer, der tilhører en eller flere (mindst én) af mængderne A_i , altså de x , for hvilke der findes et $i \in I$, således at $x \in A_i$.

2.2 Produktmængder og relationer. Ofte består de objektsamlinger, der ønskes talt, af samlinger af *par*, eller *ordnede sæt*, dannet af elementer fra en eller flere mængder.

Definitioner. Lad X og Y være mængder. Samlingen af **ordnede par** (x, y) bestående af et element $x \in X$ og et element $y \in Y$ udgør en mængde, der kaldes **produktet af X og Y** , og betegnes $X \times Y$. Tilsvarende udgør, for endelig mange mængder X_1, X_2, \dots, X_n , med $n \in \mathbb{N}$, samlingen af **ordnede n -sæt**, eller **n -tupler**, (x_1, x_2, \dots, x_n) , hvor $x_i \in X_i$, for $i = 1, 2, \dots, n$, en mængde, der kaldes **produktet af disse mængder** og betegnes $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Produktet $X \times X$ af to ens mængder betegnes også X^2 , og tilsvarende betegner X^n produktmængden $X \times X \times \dots \times X$ (med n faktorer) af n eksemplarer af X .

En delmængde af $X \times Y$ kaldes en **relation fra X til Y** ; en delmængde af $X^2 = X \times X$ kaldes en **relation i mængden X** .

En relation bestemmer en »egenskab« ved *par* af elementer; således er » x er mindre end x' « en relation i \mathbb{Z} , dvs. en delmængde af $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (og flere andre talmængder). At parret (x, x') tilhører denne delmængde skrives naturligvis for det meste på den sædvanlige måde: $x < x'$.

Definitioner. Lad X være en mængde og $R \subseteq X \times X$ en relation i X . Relationen R kaldes **refleksiv**, hvis $(x, x) \in R$ for alle $x \in X$; videre kaldes R **symmetrisk**, såfremt det for alle $x, x' \in X$ gælder, at hvis $(x, x') \in R$ så gælder også $(x', x) \in R$ (med modsat rækkefølge af x

og x'), og R kaldes **asymmetrisk**, såfremt det for alle $x, x' \in X$ gælder, at hvis $(x, x') \in R$ og samtidig $(x', x) \in R$ så er $x = x'$; endelig kaldes R **transitiv**, såfremt det for alle $x, x', x'' \in X$ gælder, at hvis $(x, x') \in R$ og tillige $(x', x'') \in R$, så gælder også $(x, x'') \in R$.

En **ækvivalensrelation i en mængde X** er en reflektiv, symmetrisk, og transitiv relation i X .

En **ordensrelation i en mængde X** er en asymmetrisk og transitiv relation i X .

En ordensrelation R i en mængde X kaldes **total** såfremt det for alle par $(x, x') \in X^2$ gælder, at enten er $(x, x') \in R$, eller $x = x'$, eller $(x', x) \in R$ (ofte benyttes i stedet glosen **lineær ordning**). Denne egenskab kan også udtrykkes, at vilkårlige to forskellige elementer er »sammenlignelige«: enten er $(x, x') \in R$, eller $(x', x) \in R$.

For en relation R i en mængde X , hvor altså $R \subseteq X \times X$, siges $x \in X$ at *stå i relationen R til $x' \in X$* , hvilket også skrives xRx' , når parret (x, x') tilhører delmængden R , altså $(x, x') \in R$.

En ækvivalensrelation skrives ofte på en måde, der ligner *identitet*, fx $x \equiv x'$, som kort udtryk for, at x står i den pågældende relation til x' .

Det er nok velkendt – og ikke svært at indse – at enhver ækvivalensrelation i en mængde X giver anledning til en *klassedeling af X* , eller en *partition af X* , dvs. en opdeling af X i parvis disjunkte, ikke-tomme delmængder af X , med foreningsmængde X , og at omvendt hver sådan klassedeling af X bestemmer en ækvivalensrelation i X . (Klasserne i klassedelingen består af indbyrdes ækvivalente elementer, mere præcist, alle elementer, der er ækvivalente med et bestemt af klassens elementer.)

I kurset mødes mange ækvivalensrelationer/klassedelinger: sammenhængskomponenter i grafteori, restklasser i talteori, og sideklasser til undergruppe af gruppe, er vigtige eksempler.

Det sædvanlige begreb *mindre end* for tal definerer en ordensrelation, der er total. En ordensrelation skrives ofte på en måde, der ligner *uligheder*; således er *delmængde af*, der skrives $A \subseteq B$, for delmængder $A, B \in \mathcal{P}(X)$, når A er en delmængde af B , en ordningsrelation i $\mathcal{P}(X)$. Her betegner $\mathcal{P}(X)$ *mængden af alle delmængder* af et »univers« X ; denne relation kaldes også *mængdeinklusion*. (Den er ikke total, når X består af to eller flere elementer.)

2.3 Afbildninger. I utallige situationer er der brug for en *sammenknytning* af elementer mellem mængder X og Y , i den præcise forstand, at der til hvert element af X er knyttet et bestemt element af Y . De to mængder spiller her hver sin rolle, og *sammenknytningen* har en *retning*.

Definition. Lad X og Y være mængder. En **afbildning af X ind i Y** er en tilordning, der til hvert element $x \in X$ knytter et element $y \in Y$, der kaldes **billedet af x ved afbildningen**; som betegnelse for en afbildning benyttes et navn, fx f , og at f er en afbildning af X ind i Y skrives $f : X \rightarrow Y$; billedet ved afbildningen f af elementet $x \in X$ betegnes $f(x)$, hvor altså $y = f(x)$ er det til $x \in X$ knyttede element $y \in Y$. For en afbildning $f : X \rightarrow Y$ betegner $f(X)$ mængden af alle billeder, altså $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$, og den kaldes **billedmængden for f** .

Det afgørende ved en afbildning er den »mekanisme«, der til hvert element i X »producerer« et element af Y . Der er ikke taget stilling til hvordan en sådan tilordning er, kan være, eller skal være, fastlagt. Når $Y = \mathbb{R}$ eller $Y = \mathbb{C}$ bruges glosen *funktion* ofte i stedet for afbildning.

Hvis X er en *endelig mængde* med liste af elementer $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, hvor $n = |X|$, kan en afbildning $f : X \rightarrow Y$ beskrives (forklares, fastlægges, specificeres) simpelthen ved en *tabel* af formen:

$x \in X$	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
$f(x) \in Y$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	\dots	$f(x_n)$

I den egentlige del af tabellens øverste række står elementerne i X , i en eller anden rækkefølge, og for hvert $x \in X$ står billedet $y = f(x) \in Y$ af x i tabellens nederste række under x , altså i

samme søjle som x . Ofte er rækkefølgen af elementerne i X fast valgt, og i så fald kan den øverste række udelades; tabellen er da blot en *ordnet liste* af længde n bestående af elementer fra Y (med gentagelser tilladt), altså et ordnet n -tupel (element af Y^n). Se også afsnit 2.5 om *ordmodeller*.

Når mængden X er uendelig kan en tabel ikke (direkte) benyttes til fastlæggelse af en afbildning; i stedet bruges *formler*, eller verbale definitioner.

Definition. Lad X og Y være mængder. En afbildning $f : X \rightarrow Y$ kaldes **injektiv**, hvis vilkårlige forskellige elementer i X har forskellige billeder i Y . Kravet er altså, at det for alle $x, x' \in X$ gælder, at hvis $x \neq x'$, så er $f(x) \neq f(x')$.

Denne egenskab, der på engelsk kaldes *injective*, eller *one-to-one*, er meget vigtig! Den kan også udtrykkes, at der om f gælder, at hvis elementer $x, x' \in X$ har samme billede, altså hvis $f(x) = f(x')$, så følger deraf, at $x = x'$. Dette betyder, at *billedet fastlægger det det er billede af*, eller præcist, at for hvert element af billedmængden, $y \in f(X)$, findes et entydigt bestemt $x \in X$ så $y = f(x)$.

Definition. Lad $f : X \rightarrow Y$ være en injektiv afbildning af mængden X ind i mængden Y ; tilordningen, der til hvert $y \in f(X)$ knytter det entydigt bestemte $x \in X$, for hvilket $y = f(x)$, kaldes den **omvendte afbildning** til f , og den betegnes $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$.

En afbildning f af en endelig mængde X , der er givet ved en tabel som ovenfor, er injektiv hvis og kun hvis den nederste tabelrække *ikke har gentagelser*. I så fald fås en tabel for den omvendte afbildning ved at ombytte de (egentlige dele af de) to rækker.

Definition. Lad X og Y være mængder. En afbildning $f : X \rightarrow Y$ kaldes **surjektiv** (af X på Y), hvis dens billedmængde $f(X)$ er Y , altså hvis hvert element $y \in Y$ er et billede ved afbildningen f , dvs. for hvert $y \in Y$ eksisterer (mindst) et element $x \in X$, så $f(x) = y$.

Hvis X er endelig, og afbildningen f er beskrevet via en tabel som ovenfor, så er f surjektiv hvis og kun hvis den nederste række rummer *samtlig* elementer af Y .

Definition. Lad X og Y være mængder. En afbildning $f : X \rightarrow Y$ kaldes **bijektiv**, hvis den er injektiv og surjektiv. At f er injektiv og surjektiv indebærer, at forskellige elementer af X har forskellige billeder i Y , og, at hvert element i Y er billedet af et (endda entydigt bestemt) element i X . I stedet for bijektiv afbildning tales om en **bijektiv korrespondance mellem X og Y** .

En bijektiv afbildning $f : X \rightarrow Y$ har en omvendt afbildning, af Y ind i X , der selv er en bijektiv afbildning, og de to mængder X og Y spiller således, for en bijektiv afbildning, *symmetriske* roller. En bijektiv afbildning af en mængde X ind i sig selv kaldes ofte (dog især for endelige mængder) en *permutation* af mængden X .

Ved diskussionen af skuffeprikket i kapitel 1 blev en *fordeling af objekter i skuffer* omtalt som en *kategorisering* af objekterne. Som præcisering af dette lidt diffuse begreb benyttes afbildninger.

Lad X og Y være endelige mængder, og betragt en afbildning $f : X \rightarrow Y$. Da fås en **kategorisering** af X i kategorierne Y på følgende måde: $x \in X$ falder i kategorien $y \in Y$, via kategoriseringen f , hvis $f(x) = y$. I denne ramme giver skuffeprikket:

- Hvis f er injektiv, så gælder $|X| \leq |Y|$.
- Hvis f er surjektiv, så gælder $|X| \geq |Y|$.
- Hvis f er surjektiv og $|X| = |Y|$, så er f bijektiv.
- Hvis f er injektiv og $|X| = |Y|$, så er f bijektiv.

2.4 Fakultetsfunktionen, og dalende og stigende faktorieller. Produktet af de første n naturlige tal dukker så hyppigt op i tællesituationer, at det er praktisk med en kort betegnelse.

Definition. For hvert naturligt tal n betegner $n!$ produktet af alle naturlige tal, der er mindre end eller lig n , altså $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, og dette antal læses » n udråbstegn«, eller » n fakultet«. Det er praktisk, og velbegrundet, at definere: $0! = 1$, svarende til »det tomme produkt«, eller »produktet uden faktorer«. Funktionen $n \mapsto n!$ kaldes **fakultetsfunktionen**.

Derved er $n!$ fastlagt for alle hele tal $n \geq 0$. Størrelsen $n!$ indgår ofte i formuleringen af et tællerresultat, vel især fordi $n!$, for $n \geq 1$, er antallet af måder n forskellige objekter kan opstilles i rækkefølge, eller *permuteres* (med den dagligdags betydning af permutere); antallet af sådanne er jo produktet af antal muligheder for objekt på første plads, altså n , med antallet af muligheder for objekt på den anden plads, altså $n - 1$ (objektet på første plads er ikke til rådighed på de følgende pladser), og således videre, gange antallet af muligheder for objekt på den sidste, den n 'te, plads, som er 1, idet de $n - 1$ objekter på de første $n - 1$ pladser ikke er til rådighed.

Nedenstående lille tabel indeholder $n!$ for de første små værdier af n ; det er faktisk en god investering at lære de fleste – og i det mindste de første – af disse værdier udenad.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800

Som det ses er $n!$ voksende, endda »meget stærkt«, som funktion af n . Et klassisk resultat, der kaldes *Stirlings² formel*, udtaler sig præcist om denne vækst:

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad \text{når } n \rightarrow \infty.$$

Indholdet heri er, at forholdet mellem de to sider af \sim konvergerer mod 1 for n gående mod ∞ .

En nærliggende generalisation af fakultetsfunktionen er de såkaldte *faktorieller*, dvs. produkter af tallene fra et segment af hele tal, eller, mere almindeligt, produkter, hvis faktorer er et sæt af reelle tal, hvor to på hinanden følgende afviger med 1. I den matematiske litteratur benyttes mange forskellige betegnelser for disse faktorieller; her er valgt betegnelser, der fremhæver analogien til *potenser*, dog med en supplerende streg under, eller over, *eksponenten*.

Definition. Lad $k \geq 0$ være et ikke-negativt helt tal og x et reelt (eller komplekst) tal. Den k 'te **dalende** (eller nedstigende) **faktoriel af x** , der betegnes $x^{\underline{k}}$, som fx kan læses: » x i k 'te dalende«, sættes til $x^{\underline{0}} = x^0 = 1$ for $k = 0$, og for $k > 0$ til produktet af k faktorer, den første x , den næste $x - 1$ og således videre, hvert skridt reducerer faktoren med 1, den sidste $x - (k - 1) = x - k + 1$, altså:

$$x^{\underline{k}} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } k = 0, \\ x(x - 1) \cdot \dots \cdot (x - k + 1) & \text{hvis } k > 0. \end{cases}$$

Den k 'te **stigende faktoriel af x** , der betegnes $x^{\overline{k}}$, som fx kan læses: » x i k 'te stigende«, er på tilsvarende måde produktet af k faktorer, der starter fra x og øges skridtvis med 1, altså:

$$x^{\overline{k}} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } k = 0, \\ x(x + 1) \cdot \dots \cdot (x + k - 1) & \text{hvis } k > 0. \end{cases}$$

Det er klart, at $x^{\underline{1}} = x^{\overline{1}} = x$ for alle x , og at både $x^{\underline{k}}$ og $x^{\overline{k}}$, opfattet som funktioner af *variablen x* , er *polynomier*, se også kapitel 9. Videre er $n! = n^{\underline{n}} = 1^{\overline{n}}$, for alle hele tal $n \geq 0$.

²James Stirling (1692–1770), skotsk matematiker, som også er ansvarlig for *Stirling-tallene*, se kapitel 9.

2.5 Ordmodeller. Mange tælleopgaver foregår, i det mindste efter nærmere eftersyn, indenfor *produktmængder*, altså mængder af formen Y^n , for en endelig mængde Y og $n \in \mathbb{N}$, og det er derfor nyttigt at forsyne sådanne mængder med en konkret og anskuelig fortolkning, som hjælpemiddel i abstrakte tælleovervejelser. Dette benyttes i afsnit 2.6 i forbindelse med optælling af diverse typer afbildninger.

Denne fortolkning består i at opfatte elementerne i Y som *bogstaver*, og dermed Y selv som en slags *alfabet*; elementerne af Y^n , der jo er (ordnede) n -tupler af elementer fra Y , svarer dermed på naturlig måde til *ord*, af længde n , skrevet i alfabetet Y . Når det ikke kan misforstås skrives et n -tupel (y_1, y_2, \dots, y_n) , med $y_i \in Y$, for $i = 1, 2, \dots, n$, der opfattes som et sådant ord, uden parenteser og skilletegn, og n -tuplet noteres blot som en rækkefølge, eller en *liste*, af elementer fra Y , fx $y_1 \dots y_n$; en liste er bestemt ved hvilket element, der står på hver plads – rækkefølgen af elementerne er vigtig – og gentagelser er tilladt!

Observation. For en endelig mængde Y med $m = |Y|$ elementer og et naturligt tal n er antallet af n -tupler Y^n endeligt, og det er givet ved: $|Y^n| = m^n$ (altså: $|Y^n| = |Y|^n$).

Bevis. Dette er vel klart! For alligevel at knytte en kommentar til påstanden kan det bemærkes, hvordan der på basis af en tabel over samtlige k -tupler, altså elementer af Y^k , for et-eller-andet naturligt tal k , kan fås en tabel over samtlige $(k+1)$ -tupler Y^{k+1} . Hvert k -tupel (y_1, y_2, \dots, y_k) giver nemlig anledning til de ialt m forskellige $(k+1)$ -tupler $(y_1, y_2, \dots, y_k, y)$, der fås at lade y gennemløbe Y . ■

Eksempel. For mængden $Y = \{a, b, c, d\}$ af »bogstaverne« a, b, c, d (det er de jo faktisk) er der nedenstående 4 ord af længde 1:

$a \quad b \quad c \quad d$

og der er de 16 ord af længde 2:

$aa \quad ab \quad ac \quad ad \quad ba \quad bb \quad bc \quad bd \quad ca \quad cb \quad cc \quad cd \quad da \quad db \quad dc \quad dd$

og der er de 64 ord af længde 3:

$aaa \quad aab \quad aac \quad aad \quad aba \quad abb \quad abc \quad abd \quad aca \quad acb \quad acc \quad acd \quad ada \quad adb \quad adc \quad add$
 $baa \quad bab \quad bac \quad bad \quad bba \quad bbb \quad bbc \quad bbd \quad bca \quad bcb \quad bcc \quad bcd \quad bda \quad bdb \quad bdc \quad bdd$
 $caa \quad cab \quad cac \quad cad \quad cba \quad cbb \quad cbc \quad cbd \quad cca \quad ccb \quad ccc \quad ccd \quad cda \quad cdb \quad cdc \quad cdd$
 $daa \quad dab \quad dac \quad dad \quad dba \quad dbb \quad dbc \quad dbd \quad dca \quad dcb \quad dcc \quad dcd \quad dda \quad ddb \quad ddc \quad ddd$

Læg mærke til den nogenlunde systematiske opskrivning. Læst rækkevis fra venstre mod højre, og rækkerne oppefra og nedefter, er ordene sat i rækkefølge *som i en ordbog* – det kaldes den *leksikografiske rækkefølge*, mere herom nedenfor – først alle ord, der begynder med a , og blandt dem først de ord, der begynder med aa , og blandt disse først ordet aaa , dernæst aab , og således videre; dernæst alle ord der begynder med b , i tilsvarende rækkefølge, og således videre. □

For mængden Y^n , opfattet som mængden af ord af længde n skrevet i alfabetet Y , kan der formuleres en række *naturlige* tælleopgaver, fx følgende:

- Hvor mange af ordene fra Y^n skrives med et enkelt bogstav?
- Hvor mange af ordene fra Y^n skrives med indbyrdes forskellige bogstaver?
- Hvor mange af ordene fra Y^n benytter alle alfabetets bogstaver?
- Hvor mange af ordene fra Y^n er »voksende«, dvs. benytter alfabetets bogstaver i »alfabetisk« rækkefølge? (Hvad kan dette betyde?)

Det første af disse spørgsmål er næsten ikke navnet værd: der er naturligvis præcis ét sådant ord for hvert bogstav i Y , altså ialt $|Y|$. Der er mere kød på det næste spørgsmål:

Sætning 1. For et naturligt tal n er der $|Y|^n$, altså $|Y|$ i n 'te dalende, ord fra Y^n , der består af n forskellige bogstaver.

Bevis. Lad $m = |Y|$. For et ord af længde n skrevet med indbyrdes forskellige bogstaver fra Y er der m muligheder for det første bogstav; for hver af disse er der $m - 1$ muligheder for bogstavet på den anden plads (da bogstavet på første plads ikke kan bruges), og dermed ialt $m(m - 1)$ mulige »forstavelse« af længde 2; for hver af disse $m(m - 1)$ muligheder er der $m - 2$ muligheder for bogstavet på den tredje plads, da \dots , og således videre. ■

Sætning 1 giver, anvendt for $n = |Y|$, at der er $n!$ ord, hvori alfabetets bogstaver forekommer præcis én gang hver, hvor altså ordet er en *permutation* af alfabetets bogstaver (med den dagligdags betydning af permutation). Læg også mærke til, at udregningen automatisk giver det korrekte antal 0, i tilfældet hvor $n > |Y|$.

Det tredje af spørgsmålene ovenfor kan vi *ikke* besvare nu – se eksemplet i afsnit 2.6 – og det fjerde spørgsmål forudsætter en afklaring af meningen med *alfabetisk rækkefølge*.

I de fleste tilfælde er mængden Y , der fungerer som alfabet, fra sin fødsel forsynet med en ordning, og elementerne har en *naturlig* rækkefølge, som typisk svarer til den måde elementerne indiceres på, når Y angives på listeform:

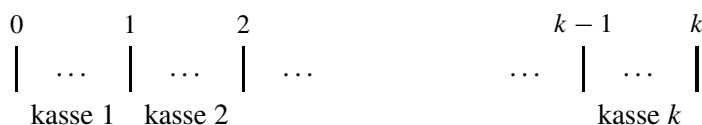
$$Y = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}. \quad (2.1)$$

Hvert *valg af en indicering* af elementerne i Y som i (2.1) definerer en *ordning* af elementerne i Y simpelthen ved: $y < y'$ hvis $y = \alpha_i$ og $y' = \alpha_j$, med $i < j$; denne ordning har på sædvanlig måde en *blød* variant, der skrives: $y \leq y'$, i betydningen: $y < y'$, eller $y = y'$.

Herefter kan det fastsættes, at et ord $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y^n$ *benytter bogstaverne i den alfabetiske rækkefølge* givet ved (2.1), såfremt rækken af uligheder: $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ er opfyldt³.

Inden antallet af *monotont voksende* ord kan bestemmes er der brug for en hjælpeovervejelse, der i øvrigt bliver meget klarere i lyset af tællerresultaterne i næste kapitel.

For naturlige tal n og k tænkes n (forskellige) objekter fordelt i k *nummererede* kasser, på en sådan måde, at objekterne i hver kasse har en rækkefølge; der er ingen krav til antal objekter i de enkelte kasser, og hvilke objekter, der puttes i hvilke kasser, kun, at alle n objekter fordeles, og, at objekterne i hver kasse har en rækkefølge. *Hver sådan fordeling kaldes en fordeling af n objekter i k nummerede kasser med ordnet indhold.* Det kan måske være til hjælp at forestille sig en sædvanlig permutation af n elementer inddelt i k »sektioner«, via $k + 1$ »skillevægge«, nummererede med $0, 1, \dots, k$, den 0'te før, den k 'te efter elementerne, og $k - 1$ placeret på passende måde mellem elementerne, hvor elementerne, taget i deres rækkefølge, mellem skillevæggene med numre $j - 1$ og j , udgør den j 'te kasse elementer. Se figuren nedenfor:



Lemma. Antal fordelinger af n objekter i k nummerede kasser med ordnet indhold er: k^n .

Bevis. Dette er klart for $n = 1$, da der jo er k mulige kasser, hvori det ene element kan placeres. Med $n = 2$ objekter, kan det andet objekt, for hver af de k mulige placeringer af det første objekt, placeres enten i en af de $k - 1$ tomme kasser, eller i samme kasse som det første objekt, og i så fald enten før eller efter dette, altså på ialt $k + 1$ måder; dermed kan 2 objekter placeres på $k(k + 1)$

³Der er ikke mange – naturligt forekommende – sådanne »voksende« ord, men de findes *afgjort*, og ikke kun slangord som fx *abeflot*, eller vrøvlord som *abbedfilmost*; det kan jeg skrive under på!

måder. Hvis T_{n-1} er en tabel over samtlige fordelinger af $n-1$ objekter i k nummerede kasser med ordnet indhold fås en tabel T_n svarende til fordeling af n objekter, ved for hver fordeling fra T_{n-1} successivt at indsætte det n 'te objekt på alle mulige pladser. Antallet af *mulige pladser* er $k+n-1$, og hver fordeling fra T_{n-1} giver således anledning til $k+n-1$ fordelinger i T_n . Dette ses nok lettest via billedet ovenfor. En fordeling af $n-1$ objekter i k nummerede kasser med ordnet indhold svarer til et *ord* af længde $n-1+k+1 = n+k$ skrevet med $n-1$ objekter og $k+1$ skillevægge, der starter og slutter med en skillevæg. Mellem start- og slutskillevæggen er de $n-1$ objekter og $k-1$ skillevægge i en-eller-anden konfiguration; der er således $n+k-1$ pladser, mellem objekter/skillevægge, hvor det n 'te objekt kan indsættes (nemlig før første, eller efter sidste, eller i et af de $n+k-3$ mellemrum, mellem de $n-1$ objekter og $k-1$ indre skillevægge). Derfor er antallet af elementer i T_n blot $n+k-1$ gange antallet af elementer i T_{n-1} , hvoraf påstanden følger (ved induktion). ■

Sætning 2. For naturlige tal n og m er der $m^{\overline{n}}/n!$ voksende ord af længde n skrevet i alfabetet $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$. (At et ord er voksende betyder som ovenfor, at listen bestående af indices (ved indiceringen af alfabetet) for ordets bogstaver er voksende.)

*Bevis.*⁴ Der benyttes en afbildning, der knytter et voksende ord til hver fordeling af n objekter i m nummerede kasser med ordnet indhold. Lad (k_1, k_2, \dots, k_m) betegne sættet af antal objekter i de enkelte kasser for en sådan fordeling; tallene k_i er dermed ikke-negative hele tal, og deres sum er n . Det tilknyttede voksende ord består simpelthen af først k_1 eksemplarer af α_1 , dernæst k_2 eksemplarer af α_2 , og således videre, sluttende med k_m eksemplarer af α_m . Dette giver oplagt et voksende ord, og ethvert voksende ord af længde n kan fås på denne måde. Der er imidlertid præcis $n!$ blandt de ialt $m^{\overline{n}}$ fordelinger af n objekter i m nummerede kasser med ordnet indhold, som giver antals-sættet (k_1, k_2, \dots, k_m) , og dermed samme voksende ord. (Fra én fordeling fås de øvrige ved at permutere de n objekter, men »lade skillevæggene stå«.) ■

Med voksende (!) besvær kan disse beregnede antal kontrolleres i eksemplet ovenfor.

2.6 Optælling af afbildninger. Tælleresultaterne i afsnit 2.5 har naturlige og vigtige fortolkninger som antal af diverse typer afbildninger. Lad X og Y være *endelige mængder* med $n = |X|$ og $m = |Y|$ elementer. Hver afbildning af X ind i Y kan som nævnt ovenfor specificeres fuldstændigt via en tabel, se afsnit 2.3, altså efter valg af en *rækkefølge* af elementerne i X , som et *ord* af længde n skrevet i alfabetet Y . Der er derfor en bijektiv korrespondance mellem mængden af afbildninger $f : X \rightarrow Y$ og mængden Y^n af ord af længde n skrevet i alfabetet Y , og specielt har de to mængder samme elementantal. Egenskaber for en afbildning $f : X \rightarrow Y$ svarer via den bijektive korrespondance til egenskaber ved det ord $U \in Y^n$, der benyttes som nederste række i en tabel fastlægger f ; således er f *injektiv* hvis og kun hvis det tilsvarende ord U består af indbyrdes forskellige bogstaver, og f er *surjektiv* hvis og kun hvis alle alfabetets bogstaver forekommer i U . Dermed fås umiddelbart følgende:

Sætning. For endelige mængder X og Y med $n = |X|$ og $m = |Y|$ som elementantal, er der ialt m^n afbildninger af X ind i Y , hvoraf m^n er *injektive*.

Blandt de ialt m^n afbildninger er der præcis m , der er *konstante*, nemlig én for hver af de m mulige værdier; videre findes der en *bijektiv* afbildning af X ind i Y , hvis og kun hvis $n = m$, og når dette er tilfældet, så er der $n!$ bijektive afbildninger af X ind i Y . Dette sidste har et *meget* vigtigt specialtilfælde, der fremhæves separat.

Korollar. For en endelig mængde X , med n elementer, er der $n!$ bijektive afbildninger af X ind i X .

⁴I afsnit 3.6 diskuteres denne problemstilling igen!

Mængden af bijektive afbildninger af X ind i sig selv er *permutationerne af* mængden X , se afsnit GRP2 (i Algebrabogen); med en fast valgt indicering $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ af X svarer fortolkningen af en sådan bijektiv afbildning, som et ord af længde n skrevet med indbyrdes forskellige bogstaver fra X , til specifikationen via den *direkte notation*, dog her benyttet for andre alfabeter end $\{1, 2, \dots, n\}$.

Observation. For en endelig mængde X med n elementer er der 2^n delmængder af X , altså: $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

Bevis. Der består en bijektiv korrespondance mellem delmængder af X og afbildninger af X ind en mængde med 2 elementer, fx mængden $\{0, 1\}$. En delmængde A definerer afbildningen 1_A (denne afbildning kaldes *indikatorfunktionen for* A) givet ved $1_A(x) = 1$ hvis $x \in A$, og $1_A(x) = 0$ hvis $x \notin A$; omvendt definerer en afbildning $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ en delmængde $A \subseteq X$ ved at sætte $A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$. Denne korrespondance er, som man let ser, bijektiv, og påstanden følger dermed af sætningen. ■

Det viser sig en del vanskeligere at beregne antallet af surjektive afbildninger, se afsnit 9.1. I små situationer kan dette antal dog findes direkte – med noget besvær.

Eksempel. Betragt igen mængden (*alfabetet*) $Y = \{a, b, c, d\}$; der er ialt $4^5 = 1024$ ord af længde 5. Et sådant ord af længde 5 svarer til en afbildning f af en mængde X med 5 elementer ind i Y . Denne afbildning er *surjektiv* hvis og kun hvis hvert af de 4 bogstaver fra Y forekommer i det tilsvarende ord (mindst én gang). (Dette betyder – det er vel nærmest en slags skuffepincip-situation – at præcis ét af de fire bogstaver forekommer 2 gange i ordet, og de øvrige tre bogstaver forekommer præcis én gang hver.)

Lad X være mængden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. En surjektiv afbildning $f : X \rightarrow Y$ bestemmer en opdeling af X i fire (ikke-tomme) delmængder, nemlig originalmængderne: $f^{-1}(\{a\})$, $f^{-1}(\{b\})$, $f^{-1}(\{c\})$, og $f^{-1}(\{d\})$, hvoraf én indeholder 2 elementer, og de tre øvrige hver indeholder et enkelt element. Til at fastlægge den surjektive afbildning f kræves ved siden af en beskrivelse af den tilhørende opdeling af X i 4 ikke-tomme delmængder en fastsættelse af, hvordan værdierne a, b, c, d er knyttede til delmængderne, der indgår i opdelingen. Dette kan foregå på $4! = 24$ måder, og da der er en opdeling af X af den beskrevne type præcis for hvert valg af hvilke 2 af de 5 elementer fra X , der skal danne delmængden med 2 elementer, altså ialt 10 sådanne opdelinger (kapitel 3 viser hvordan dette tælles), er der $10 \cdot 4! = 240$ surjektive afbildninger af X ind Y . (Det fremgår vist klart, at for større værdier af X og Y er det *ikke* nogen rar opgave at bestemme antallet af surjektive afbildninger af X ind i Y via sådanne ad-hoc overvejelser. Se videre i kapitel 9.) □

2.7 Leksikografisk ordning. I de foregående afsnit blev ord mest opfattet som enkelte objekter; her drejer det sig om sammenligning af ord. Den endelige mængde Y med $m = |Y|$ elementer opfattes fortsat som *alfabet*, bestående af *bogstaver*, eller *symboler*, hvormed der kan skrives *ord*; mængden Y^n , for et naturligt tal n , er ordene af *længde* n .

Mængden Y forudsættes at være forsynet med en *rækkefølge af elementerne* – en *alfabetisk ordning* – og det er naturligt at benytte en indicering af elementerne i Y , der svarer til den alfabetiske rækkefølge af elementerne i Y , altså $Y = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, hvor

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m.$$

Symbolet $<$ benyttes her for ordningsrelationen på Y ; ofte er de benyttede symbolmængder ordnede på naturlig måde, fx for alfabeter bestående af (visse af de) sædvanlige bogstaver, eller cifersymboler, men dette er *ikke* et krav!

På basis af bogstavrækkefølgen i Y defineres en rækkefølge af ord svarende til den rækkefølge ord ordnes efter i et leksikon, eller en ordbog; her sammenlignes dog kun ord af samme længde n ; en mere generel udgave diskuteres i opgave 2.5.

Definition. For to forskellige elementer $U = u_1u_2 \dots u_n, V = v_1v_2 \dots v_n \in Y^n$ siges U at **komme leksikografisk før** V , og V at **komme leksikografisk efter** U , hvilket skrives: $U < V$, eller udførligt: $u_1u_2 \dots u_n < v_1v_2 \dots v_n$, såfremt $u_j < v_j$, hvor j betegner det mindste indeks $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ for hvilket $u_j \neq v_j$ (et sådant findes, da ordene er forskellige).

Idéen er at sammenligne de to ord fra venstre mod højre: første gang der optræder en forskel, er det ordet med det alfabetisk set første bogstav på denne første forskelsplads, der kommer leksikografisk først af de to ord. Derved defineres en *transitiv* og *asymmetrisk* relation i Y^n , altså en ordensrelation; den kaldes **leksikografisk ordning**, og det er ikke vanskeligt at indse, at den er en *total ordning* af Y^n . På sædvanlig måde benyttes også en »blød« variant, der skrives med symbolet \leq , og hvor $U \leq V$, for $U, V \in Y^n$, betyder, at $U < V$, eller $U = V$ (bogstav for bogstav).

Den leksikografiske ordning af ord af længde 1 svarer til den givne ordning af alfabetet Y .

Hver (ikke-tom) delmængde M af Y^n har et *leksikografisk set* mindste element, altså et ord $U \in M$, der opfylder $U \leq V$ for alle $V \in M$; det kan findes ved fx at sammenligne alle de endeligt mange elementer i M indbyrdes. For et givet ord $U \in Y^n$ kaldes det mindste element i mængden $\{V \in Y^n \mid U < V\}$ af ord, der kommer leksikografisk efter U (den *skarpe* relation), for **den leksikografiske efterfølger til U** ; denne *efterfølgermekanisme* giver anledning en *rækkefølge* af elementerne i Y^n . Nedenfor diskuteres en *algoritme*, der gennemgår ordene i Y^n i denne rækkefølge. Først et par enkle observationer.

Et ord af længde k , altså $w \in Y^k$, hvor $k < n$, kaldes et **præfiks** af et ord $V \in Y^n$ (af længde n), såfremt de første k bogstaver af w , plads for plads er de samme som bogstaverne i V , altså hvis w udgør *starten* af V . For et givet ord $w \in Y^k$ har mængden af ord $V \in Y^n$, der har w som præfiks, et (leksikografisk) mindste element, nemlig ordet: $w\alpha_1 \dots \alpha_1$, dannet ved at sætte $n - k$ eksemplarer af alfabetets første bogstav efter w . Videre er det mindste element af Y^n ordet $\alpha_1\alpha_1 \dots \alpha_1$ bestående af n eksemplarer af alfabetets første bogstav, og det største element af Y^n er ordet $\alpha_m\alpha_m \dots \alpha_m$ bestående af n eksemplarer af alfabetets sidste bogstav.

Algoritme. Med et ord $U = u_1u_2 \dots u_n \in Y^n$ som **input, som ikke er det sidste ord** $\alpha_m\alpha_m \dots \alpha_m$ (der findes altså et j således, at $u_j \neq \alpha_m$), giver algoritmen som **output** ordet $V = v_1v_2 \dots v_n \in Y^n$, der er **den leksikografiske efterfølger til U** .

Opskriften er: opsøg det første bogstav u i U regnet fra højre, der ikke er α_m , altså $u < \alpha_m$, og erstat u med efterfølgeren u^+ af u i alfabetet, og erstat de følgende bogstaver i U med litter α_1 .

En hjælpevariabel betegnet j initialiseres: $j := n$ (den peger på en plads indenfor ordet, og pladserne undersøges bagfra).

I. Hvis $u_j \neq \alpha_m$ fortsættes med II, ellers sættes $j := j - 1$ (dette udføres kun i en situation, hvor $j > 1$, fordi U ikke er det sidste ord), og algoritmeskridt I genudføres (det undersøges om bogstavet på plads j ikke er det sidste i alfabetet; når skridt I forlades er j indeks for den sidste plads i ordet med et bogstav, »der kan øges«, og et sådant findes ifølge antagelsen).

II. Nu defineres $V := u_1u_2 \dots u_{j-1}u_j^+\alpha_1 \dots \alpha_1$, hvor u_j^+ som nævnt betegner efterfølgeren til u_j i Y ($u_j < \alpha_m$). (Hvis $j = 1$ benyttes ikke et præfiks af $j - 1$ indledende u_i elementer. De sidste $n - j$ bogstaver i V er alle det første bogstav i alfabetet; disse bortfalder hvis $j = n$.)

2.8 Leksikografisk gennemgang af permutationer. Den leksikografiske ordning af samtlige ord tilhørende Y^m giver, når den anvendes på mængden af permutationer af Y , en ordning af denne mængde. En udbygning af algoritmen i det foregående afsnit giver en metode til at gennemgå de $m!$ permutationer af Y i den leksikografiske ordning af permutationer. Da bogstaverne i en permutation er indbyrdes forskellige, hvert bogstav fra Y forekommer endda præcis én gang, ses det let, at *den leksikografisk første permutation* er ordet: $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m$, hvor de m bogstaver forekommer i deres alfabetiske rækkefølge, og tilsvarende er *den leksikografisk sidste permutation* ordet:

$\alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_1$. (Da de m bogstaver er indbyrdes forskellige i en permutation, er $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ faktisk det første ord, der begynder med α_1 , og ligeledes det første ord, der har $\alpha_1 \alpha_2$ som præfiks af længde 2, og således videre.)

Eksempel. Permutationerne af mængden $\{1, 2, 3, 4\}$ skrevet i deres leksikografiske orden (svarende til den sædvanlige ordning af ciffersymbolerne 1, 2, 3, 4) er:

1234 1243 1324 1342 1423 1432 2134 2143 2314 2341 2413 2431
3124 3142 3214 3241 3412 3421 4123 4132 4213 4231 4312 4321

Tabellen skal som de øvrige sådanne tabeller læses *rækkevis*, oppefra og nedefter, og *hver række* fra venstre mod højre. □

Idéen i nedenstående algoritme er at modificere et givet ord så lidt som muligt og så langt til højre som muligt, og med bevarelse af egenskaben at være en permutation. En nøgleobservation er, at en given permutation, der kan opdeles i to segmenter $(y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k})(y_{i_{k+1}} y_{i_{k+2}} \dots y_{i_m})$, hvor det andet segment er *aftagende*, er den sidste blandt permutationerne, der har det første segment som præfiks. Derfor må efterfølgeren til en given permutation fås ved at modificere det sidste element før det længste aftagende slutsegment.

Algoritme. Med en permutation $u_1 u_2 \dots u_m$ som **input**, der **antages ulig permutationen** $\alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_1$ (derfor findes et j så $u_j \neq \alpha_{m+1-j}$), giver algoritmen som **output den leksikografiske efterfølger** til $u_1 u_2 \dots u_m$.

En hjælpevariabel j initialiseres: $j := m - 1$ (j er indeks for starten af et slutsegment indenfor ordet, af længde ≥ 2 , og disse undersøges efter voksende længde).

I. Hvis slutsegmentet $u_j \dots u_m$ ikke er aftagende fortsættes med II, ellers sættes $j := j - 1$, og algoritmeskridt I genduføres (det undersøges om bogstaverne på pladserne $j, j + 1, \dots, m$ udgør et aftagende segment; når skridt I forlades er j indeks for den sidste plads i ordet så bogstaverne på den og de følgende pladser kan »permuteres« til et »større« segment; en sådan plads findes ifølge antagelsen). Anderledes udtrykt: $u_j < u_{j+1}$, og $u_{j+1} > u_{j+2} > \dots > u_m$.

II. Efterfølgeren $v_1 v_2 \dots v_m$ til $u_1 u_2 \dots u_m$ er dermed bestemt på følgende måde:

De første $j - 1$ elementer er de samme som i $u_1 u_2 \dots u_m$ (bortfalder hvis $j = 1$);

v_j sættes til det mindste af bogstaverne $\{u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_m\}$, der er større end u_j ; og

de følgende bogstaver $v_{j+1} \dots v_m$ sættes til den entydigt bestemte voksende permutation af de resterende bogstaver $\{u_j, u_{j+1}, \dots, u_m\} \setminus \{v_j\}$.

Eksempler. Efterfølgeralgoritmen udført på nogle permutationer af: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (med den sædvanlige rækkefølge af tallene).

(a) $123456 \rightarrow 123465$; slutsegmentet af længde 2, altså 56, er ikke aftagende, og 6 er det mindste element i 6, der er større end 5; og 5 er de resterende bogstaver i slutsegmentet taget i voksende rækkefølge.

(b) $123465 \rightarrow 123546$; slutsegmentet af længde 2 er aftagende, men slutsegmentet af længde 3, altså 465, er ikke; 5 er det mindste element større end 4 blandt 65, og 46 er de resterende bogstaver i slutsegmentet i voksende rækkefølge.

(c) $124365 \rightarrow 124536$; slutsegmenterne af længde 2 er aftagende, men slutsegmentet af længde 3, altså 365, er ikke; 5 er det mindste element blandt 65, der er større end 3, og 36 er de resterende bogstaver i herfra i voksende rækkefølge.

(d) $546321 \rightarrow 561234$; slutsegmenterne af længde 2, 3, og 4 er alle aftagende, men slutsegmentet af længde 5, altså 46321, er ikke; 6 er det mindste element blandt 6321, der er større end 4, og 1234 er de resterende bogstaver i slutsegmentet i voksende rækkefølge. □

Opgaver

(2.1) Vis, at der for alle ikke-negative hele tal m , og alle reelle tal x gælder:

$$x^{\overline{m}} = (-1)^m (-x)^{\overline{m}} = (x - m + 1)^{\overline{m}}, \quad \text{og} \quad x^{\overline{m}} = (-1)^m (-x)^{\underline{m}} = (x + m - 1)^{\underline{m}}.$$

(2.2) En afbildning $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ siges at være **multiplikativ**, hvis det for alle primiske tal $m, n \in \mathbb{N}$ gælder, at $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$, og $\varphi(1) = 1$.

Angiv diverse eksempler på simple multiplikative funktioner.

Vis, at $n \mapsto d(n)$ er multiplikativ, hvor $d(n)$ er antallet af divisorer i $n \in \mathbb{N}$.

(2.3) Bestem (et regneudtryk for) antallet af voksende 8-cifrede tal (starter *ikke* med ciffer 0).

(2.4) Lad Y betegne et ordnet alfabet med m bogstaver. Vis, at der for et naturligt tal n er lige mange voksende og aftagende ord af længde n skrevet med bogstaver fra Y . Bestem antallet af *monotone ord* af længde $n \in \mathbb{N}$, altså ord som er enten voksende eller aftagende.

(2.5) Lad Y være et endeligt alfabet, og lad Y^+ betegne foreningsmængden $Y^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y^k$ af ord af vilkårlig (endelig) længde.

For to forskellige ord $U = u_1 u_2 \dots u_n \in Y^n$ og $V = v_1 v_2 \dots v_m \in Y^m$, hvor m, n er naturlige tal, siges U at **komme leksikografisk før** V , hvis enten U er et ægte præfiks af V (dette betyder, at $n < m$, og $u_i = v_i$ for $i = 1, 2, \dots, n$), eller hvis $u_j < v_j$, hvor j er det mindste k , så $u_k \neq v_k$ (altså nummeret på den første position med forskellige bogstaver indenfor de to ord).

Vis, at den derved definerede relation er en total ordensrelation i Y^+ .

Overvej om rækkefølgen af Y^+ : først ordene af længde 1, i deres leksikografiske orden, dernæst ordene af længde 2, i deres leksikografiske orden, dernæst ordene af længde 3, i deres leksikografiske orden, osv., definerer en ordensrelation på Y^+ .

(2.6) Vis, idet ord af længde n skrevet i alfabetet $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ af de sædvanlige ciffersymboler opfattes som n -cifrede tal, hvor altså eventuelle »indledende 0'er« skrives, at den leksikografiske ordning af ordene er den sædvanlige ordning af de tilsvarende talværdier.

(2.7) Lad $n \geq 3$ være et naturligt tal. Bestem antallet af *det væsentlige forskellige* placeringer af n personer (eller objekter) omkring et cirkulært bord; to placeringer regnes her for i det væsentlige ens såfremt de bestemmer samme *cykliske rækkefølge*, dvs. hvis den ene fås af den anden ved at lade samtlige personer flytte sig det samme antal stole, og alle i samme retning (alle til venstre, eller alle til højre). Der er udover den cykliske rækkefølge *også* en slags orientering, med eller mod uret!

(2.8) Bestem antallet af monotone, henholdsvis surjektive afbildninger af $X = \{a, b, c, d, e\}$ ind i $Y = \{0, 1\}$, hvor der benyttes de sædvanlige ordninger af X og Y .

(2.9) Overvej en algoritme til gennemløb af samtlige delmængder af given endelig mængde.

(2.10) Find, idet der betragtes permutationer af $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, efterfølgeren til 3147652, og til 2467531.

(2.11) For et naturligt tal n betragtes permutationer af mængden $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$; der er jo $n!$ sådanne permutationer, og de kan derfor nummereres, i den leksikografiske orden med tallene $0, 1, \dots, n-1$, der fungerer som en slags »løbenumre«. Overvej en metode til at udregne løbenummeret for en given permutation, og omvendt, en metode, der fra en permutations løbenummer, udregner permutationen.

Kapitel 3

Binomialkoefficienter: basale tællemodeller

Utallige tælleopgaver består i, eller har som vigtig delopgave, at bestemme antallet af »mønstre« en samling S af objekter, eller passende afgrænsede delmængder af S , kan danne.

I dette kapitel introduceres de nok nyttigste kombinatoriske tælle størrelser – *binomialkoefficienterne* – der er nærmest alle-steds-nærværende i sådanne problemer, og således fungerer som en slags *standardantal*. Disse binomialkoefficienter afhænger af to parametre, der på naturlig måde svarer til det tilhørende tælleproblems størrelse. Et vigtigt formål i det følgende er at illustrere, via en række eksempler, hvordan binomialkoefficienterne dukker op i tælleproblemer – for derved at give substans til det ovenfor benyttede vage begreb mønstre.

I sidste del af kapitlet omtales de med binomialkoefficienterne nært beslægtede *standardantal*, der kaldes *multinomialkoefficienter*; disse er en del »værre« – og heldigvis mindre hyppigt forekommende – end binomialkoefficienterne.

3.1 Introduktion. En af de mest fundamentale tælleopgaver er at bestemme antallet af *kombinationer* af objekter fra en forelagt objektsamling.

Lad A betegne den forelagte objektsamling (*mængde*), og antag at A består af n objekter, hvor $n \in \mathbb{N}$, fx, efter indicering $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. En *kombination* af objekterne fra A er primært bestemt ved hvilke og hvor mange af objekterne fra A den omfatter, men den kan betragtes med flere synspunkter. Lad k være et naturligt tal som opfylder $k \leq n$.

En kombination af k af objekterne fra A kan tænkes dannet ved k successive valg, og rækkefølgen i hvilken de k objekter udvælges kan være afgørende; i så fald er der tale om en *ordnet k -kombination* af objekter fra A , der på naturlig måde kan specificeres ved en liste med de valgte objekter: $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$, hvor det underforstås, at listens j 'te element, altså objektet a_{i_j} , er det j 'te valgte objekt, for $j = 1, 2, \dots, k$.

I andre situationer kan en eventuel rækkefølge i hvilken objekterne blev udvalgt – hvis de overhovedet blev valgt i en rækkefølge – være irrelevant, eller ikke til rådighed, og kun hvilke k objekter fra A , som kombinationen omfatter, er afgørende; så foreligger en *ikke-ordnet k -kombination* af objekter fra A , eller en *k -delmængde* af A , dvs. en delmængde $B \subseteq A$, for hvilken $|B| = k$.

Eksempel. For $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ er der de 20 ordnede 2-kombinationer af objekter fra A vist nedenfor (som kommaadskilte lister, først alle der starter med 1 og voksende efter andet listeelement, dernæst alle der starter med 2, analogt ordnede, osv.):

1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	2, 1	2, 3	2, 4	2, 5	3, 1	3, 2
3, 4	3, 5	4, 1	4, 2	4, 3	4, 5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4

Når der her ses bort fra rækkefølgen af listeelementerne fås de 10 nedenstående 2-delmængder af A (først alle, der indeholder 1, arrangeret voksende efter det største element, dernæst alle med 2 som mindste element, på analog måde, osv.):

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$. \square

Antallet af ordnede k -kombinationer af objekter fra A bestemmes nok lettest via en fortolkning af dem, som ord af længde k skrevet med indbyrdes forskellige bogstaver fra alfabetet A ; antallet

af disse ord er ifølge sætning 2 i afsnit 2.5, givet som den k 'te dalende faktoriel af antallet af elementer i A , altså:

$$n^{\underline{k}} = n(n-1) \dots (n-k+1).$$

Antallet af k -delmængder af A kan nu findes. Hver ordnet k -kombination $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ giver, ved at se bort fra objekternes rækkefølge, anledning til en k -delmængde af A , nemlig den bestående af de pågældende objekter, altså $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$; af de ialt $n^{\underline{k}}$ ordnede k -kombinationer giver præcis $k!$ anledning til denne delmængde: da der er $k!$ rækkefølger i hvilke de k objekter i $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ kan opstilles. Dermed er antallet af k -delmængder af A brøken:

$$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 1}.$$

Disse antal indgår ofte i beregninger med en række forskellige værdier af parametrene n og k , og for at få en robust regneformalisme er det vigtigt, at diverse *grænsetilfælde* for de kombinatorisk bestemte antal er fastlagte, på fornuftig og konsistent måde.

Parameteren k er i argumentet ovenfor et naturligt tal $\leq n$; for $k = 0$ er der ingen *sædvanlige* ordnede k -kombinationer, og heller ingen *sædvanlige* k -delmængder. Det viser sig dog praktisk at regne *den tomme liste* (uden objekter) for en ordnet 0-kombination, og den eneste sådanne, og tilsvarende at regne den tomme mængde for en 0-delmængde, og den eneste sådanne.

3.2 Binomialkoefficienter – definition og simple egenskaber. På basis af de indledende overvejelser fastsættes følgende:

Definition. For hele tal n, k , hvor $n \geq 0$, kaldes antallet af k -delmængder af en objektmængde med n elementer for **binomialkoefficienten** $\binom{n}{k}$, der læses » n over k «.

Dette er en *kombinatorisk definition*, hvilket betyder, at et antal, et ikke-negativt helt tal, fastsættes *som antallet af objekter med den-og-den egenskab*. En sådan definition kan være nyttig fordi den knytter et intuitivt prægnant indhold til en ellers neutral talværdi; derved kan det blive lettere at *opdage dette antal*, når det optræder i »forklædning«.

Den *øvre parameter* n er normalt et naturligt tal, men det er nyttigt også at tillade værdien $n = 0$, som det blev gjort i definitionen; i dette tilfælde er der ingen objekter i den givne mængde, og tilsvarende ingen *sædvanlige* k -delmængder, for noget-som-helst $k \neq 0$. Den tomme mængde er dog en fuldgældig 0-delmængde, også af den tomme objektmængde.

Den *nedre parameter* k angiver størrelsen af de betragtede delmængder; der findes naturligvis *ingen* delmængder med et negativt antal elementer, og heller ingen med flere elementer end n . Med disse bemærkninger giver optællingen i det foregående afsnit nedenstående beregningsudtryk for binomialkoefficienterne:

Sætning. Binomialkoefficienterne er for hele tal n, k , hvor $n \geq 0$, givet ved:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{for } k < 0, \\ \frac{n^{\underline{k}}}{k!} & \text{for } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{for } n < k. \end{cases} \quad (3.1)$$

Læg mærke til, at beregningsudtrykket giver de *rigtige* værdier også i grænsetilfældene, når $k = 0$, eller $k = n$, idet $0! = 1$, og $n^{\underline{0}} = 1$, også for $n = 0$.

Observation 1. For alle hele tal n, k , hvor $n \geq 0$, gælder:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \quad (3.2)$$

Bevis. Begge sider af ligningen (3.2) er 0 når $k < 0$ og når $k > n$. Antag derfor, at $0 \leq k \leq n$, og lad A betegne en mængde med n elementer. Ved til en k -delmængde af A at lade svare dens komplementærmængde, der er en $(n - k)$ -delmængde af A , defineres en afbildning fra mængden af k -delmængder af A til $(n - k)$ -delmængderne af A . Denne afbildning er bijektiv – hvert valg af k elementer fra A bestemmer et valg af $n - k$ elementer fra A , nemlig de ved det første valg udeladte! – hvilket giver påstanden. ■

Symmetrien mellem k og $n - k$, der udtrykkes i ligning (3.2), træder klart frem i nedenstående udgave af beregningsudtrykket fra sætningen, der følger ved at forlænge brøken med $(n - k)!$, og det er nok den form hvori binomialkoefficienterne er kendt af de fleste!

Observation 2. For alle hele tal n, k , hvor $n \geq 0$ og $0 \leq k \leq n$, gælder:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ved brug af regneudtrykket for binomialkoefficienterne kan $\binom{n}{k}$ let findes, i det mindste for små værdier af n og k , og nedenfor er binomialkoefficienterne for alle $n \leq 15$ angivet.

3.3 Binomialformelen. Som nævnt indgår binomialkoefficienterne på naturlig måde i utallige tælleproblemer; betegnelsen *binomialkoefficienter* skyldes disse tals optræden i det simplificerende *regneudtryk* for n 'te potens af en toleddet, eller *binom*, størrelse $(x + y)^n$. Ved at »gange parenteserne ud« fås en sum af ialt 2^n led, hvor hvert er¹ af formen $x^k y^{n-k}$; samles alle led med fælles værdi af k , reduceres summen til ialt $n + 1$ led, nemlig ét for hvert $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Eksempel. For $n = 0, 1, 2, 3$ finder man ved direkte udregning (og med voksende besvær):

$$(x + y)^0 = 1, \quad (x + y)^1 = x + y, \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

og

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3. \quad \square$$

Sætning. For vilkårlige (relle eller komplekse) tal x, y og et vilkårligt helt tal $n \geq 0$ gælder:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \quad (3.3)$$

(Ligningen (3.3) kaldes **binomialformelen**.)

Bevis. Formelen (3.3) er korrekt for $n = 0, 1$, fordi $\binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, så vi betragter et $n \geq 2$. Som nævnt til indledning drejer det sig om at bestemme, hvor mange gange et led af formen $x^k y^{n-k}$ forekommer i resultatet af multiplikationen:

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y) \dots (x + y)}_{n \text{ par af parenteser}}.$$

Hvert af de 2^n led, der fås ved at gange alle parenteserne ud, er produktet af et tal (x eller y) fra det første parentesudtryk med et tal (x eller y) fra det andet parentesudtryk, og således videre,

¹Fordi x og y kommuterer, altså $xy = yx$.

med et tal fra det sidste (det n 'te) parentesudtryk, og et sådant led er $x^k y^{n-k}$ præcis hvis der fra k af parentesudtrykkene er benyttet x , medens der fra de resterende $n - k$ parentesudtryk er benyttet y . Derfor er antallet af led, blandt de 2^n , af udseendet $x^k y^{n-k}$ antallet af k -delmængder af mængden af de n par af parenteser, altså $\binom{n}{k}$. ■

Beviset for binomialformelen (3.3) er et *kombinatorisk bevis*. Problemstillingen formuleres som en tælleopgave, hvor det søgte antal via en fortolkning som antallet af k -delmængder af en vis objektmængde kan udtrykkes som en binomialkoefficient. Den benyttede *objektmængde* er vel nærmest mængden af parentespar i regneudtrykket for $(x + y)^n$, altså en ret *uhåndgribelig*, eller *abstrakt*, objektmængde; mange analoge tælleopgaver bliver nærmest trivielle, når den *rette objektmængde* er fundet, og det er derfor vigtigt via (mange) eksempler at få erfaring i at udpege en relevant mængde af objekter!

3.4 Rekursionsformelen og Pascals trekant. Der består utallige *relationer* mellem binomialkoefficienter for diverse sæt af parametre; én af de vigtigste sådanne er nedenstående, hvor også værdifastsættelsen for parameterverdier n, k udenfor det *naturlige* område står sin prøve:

Sætning. For alle naturlige tal n , og alle hele tal k gælder:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \quad (3.4)$$

(Ligningen (3.4) kaldes for **rekursionsformelen** for binomialkoefficienterne.)

*Bevis.*² For $k < 0$ og for $k > n$ er alle led i (3.4) lig 0, og (3.4) derfor trivielt opfyldt; for $k = 0$ reducerer (3.4) til $1 = 1 + 0$, hvor den altså også er opfyldt. Betragt derfor tilfældet, hvor k opfylder $1 \leq k \leq n$; lad A være en objektmængde med n objekter, og lad $a \in A$ betegne et fast valgt objekt (et sådant findes, da $n \geq 1$). Samlingen af k -delmængder af objekter fra A består af to *typer*: delmængder af den ene type har *ikke* det udvalgte objekt a som element, delmængder af den anden har a som element, og da denne typeopdeling er en udtømmende og disjunkt deling af k -delmængderne af A , er antallet af disse, altså $\binom{n}{k}$, blot summen af antallene af hver af de to typer. Antallet af k -delmængder af A , der ikke indeholder objektet a er antallet af k -delmængder af $A \setminus \{a\}$, altså $\binom{n-1}{k}$. Antallet af k -delmængder af A , der indeholder objektet a er antallet af måder, hvorpå $\{a\}$ kan suppleres med $k - 1$ objekter fra $A \setminus \{a\}$ til en fuld k -delmængde af A , altså $\binom{n-1}{k-1}$. ■

Rekursionsformelen (3.4) for binomialkoefficienterne (den kan også mødes under betegnelserne *Pascals formel*, og *additionsformelen*), kan benyttes til en successiv beregning af binomialkoefficienterne (og som kernen i et induktionsbevis for binomialformelen). Denne beregningsmetode får en simpel form, når den *forklares* ved hjælp af *Pascals trekant*, der er et talskema indeholdende samtlige binomialkoefficienter $\binom{n}{k}$ med uendeligt mange rækker, og hvor rækkerne nedefter i skemaet rummer flere og flere egentlige værdier; normalt skrives dog kun værdierne svarende til $0 \leq k \leq n$, og rækken for $n \geq 0$ indeholder dermed $n + 1$ talværdier ($\neq 0$).

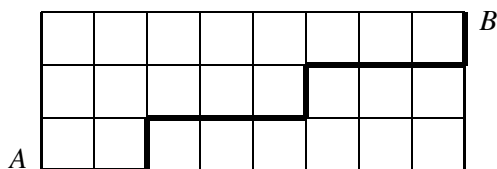
Pascals trekant, hvoraf et udsnit omfattende de øverste rækker er vist på næste side, dannes ved at skrive den venstre søjle bestående af lutter $1 = \binom{n}{0}$, og diagonalen i skemaet, hvor altså $n = k$, ligeledes af lutter $1 = \binom{n}{n}$, og derefter benytte rekursionsformelen til at fylde »resten« ud! Hver værdi $\binom{n}{k}$ i skemaet er nemlig summen af $\binom{n-1}{k}$, der står i samme søjle, men i den foregående række, og $\binom{n-1}{k-1}$, der står i søjlen én plads til venstre og i den foregående række. Undervejs lettes arbejdet ved at benytte symmetrien omkring *midtpunktet* af rækkerne, se ligning (3.2).

²Se opgave 3.1 for et udregningsbevis, der også gælder i en mere generel ramme.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$	$\binom{n}{11}$	$\binom{n}{12}$	$\binom{n}{13}$	$\binom{n}{14}$	$\binom{n}{15}$
0	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1	1	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2	1	2	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	1	3	3	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4	1	4	6	4	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
5	1	5	10	10	5	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
6	1	6	15	20	15	6	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–
7	1	7	21	35	35	21	7	1	–	–	–	–	–	–	–	–
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	–	–	–	–	–	–	–
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	–	–	–	–	–	–
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	–	–	–	–	–
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	–	–	–	–
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	–	–	–
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	–	–
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	–
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

De følgende afsnit diskuterer et par vigtige eksempler på tælleopgaver, hvis løsning på naturlig måde inddrager binomialkoefficienter.

3.5 Antal gitterveje. Lad n og k være naturlige tal. Vi betragter et *gitter* dannet af $k + 1$ vandrette linjestykker og $n + 1$ lodrette linjestykker; den indbyrdes afstand mellem nabolinjer er den samme vandret og lodret, og linjerne danner dermed $n \cdot k$ små kvadrater, der kaldes et $k \times n$ gitter; et eksempel er vist på figuren nedenfor i tilfældet $n = 8$ og $k = 3$.



Idet gitteret er en slags *vejnet* (fx fra et udsnit af et kort over Manhattan, hvor kvadraterne er husblokke) ønskes antallet af veje fra A , i nederste venstre hjørne, til B , i øverste højre hjørne, beregnet. Det er underforstået, at veje er så direkte som muligt – men følger linjerne – altså, at en vej består af præcis n vandrette småskridt mod højre og præcis k lodrette småskridt opad.

Denne abstrakte *mængde af veje* fra A til B tælles ved at bringe den i bijektiv korrespondance med en anden abstrakt mængde, hvis elementer tælles via en binomialkoefficient. Hver vej af den betragtede type kan beskrives entydigt via et ord af længde $n + k$ af bogstaverne H og O, med præcis n bogstaver H og k bogstaver O, idet ordet opfattes som en *kode*. For en given vej fås koden ved at følge vejen, og for hver påbegyndt kvadratside langs vejen at registrere om vejen går vandret mod højre (kode H), eller lodret op (kode O). Den på figuren fedt optrukne vej har således koden: HHOHHHOHHHO (to skridt vandret mod højre, et skridt lodret op, tre mod højre, et op, tre mod højre, et op). Omvendt fås fra et givet ord af den specificerede type (længde $n + k$, præcis n bogstaver H, og k bogstaver O) en entydigt bestemt vej af den ønskede art, simpelthen ved at *navigere* efter den givne kode.

Mængden af veje af den specificerede type er dermed i bijektiv korrespondance med mængden af ord af den specificerede type, og da antallet af ord er antallet af måder at vælge de k pladser af de ialt $n + k$, i hvilken bogstavet er O, er antallet af veje binomialkoefficienten: $\binom{n+k}{k}$. \square

3.6 Antal løsninger til visse heltalsligninger. I en række situationer ønskes antallet af *gruppeinddelinger* af en samling af objekter bestemt; selvom objekterne er forskellige, er der *ikke behov for*, eller *ikke mulighed for*, at skelne mellem objekterne; objekterne fungerer nærmest som en slags *enere*, hvor antallet af elementer i hver gruppe er afgørende.

Lad n være et naturligt tal, antallet af *objekter*, der ikke skelnes indbyrdes, og k et naturligt tal, antallet af *grupper* objekterne ønskes fordelt på; disse grupper kan skelnes indbyrdes, fx nummereres. Idet antallet af objekter i den j 'te gruppe betegnes x_j er der en bijektiv korrespondance mellem inddelinger af objekterne og sæt (x_1, x_2, \dots, x_k) af hele tal $x_j \geq 0$, der løser ligningen

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n. \quad (3.5)$$

Antal gruppeinddelinger af de n objekter i k grupper er derfor antallet af sæt (x_1, x_2, \dots, x_k) af ikke-negative heltal, der løser (3.5); dette antal kan findes via flere tællemødelles.

En model fortolker løsningssæt som sekvenser af længde $n + k - 1$ bestående af n objekter og $k - 1$ skillevægge, hvor x_1 er antal objekter indtil den første skillevæg, x_2 er antal objekter mellem den første og den anden skillevæg, osv. x_k er antal objekter efter den $k - 1$ 'te skillevæg; hvilke objekter, der står hvor, er ligeegyldigt, kun antallet af objekter før, mellem, og efter skillevæggene, er afgørende; fx med $n = 5$ og $k = 3$ er sekvensen $x|x.x.x|x$ model af løsningen: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, og $x_3 = 0$. Dermed ses:

Observation 1. *Antallet af løsninger til (3.5) er antallet af måder de $k - 1$ pladser til skillevæggene kan vælges blandt de ialt $n + k - 1$ pladser til objekter/skillevægge, altså*

$$\binom{n + k - 1}{k - 1}. \quad (3.6)$$

En anden – måske mere suggestiv – model beskriver sæt af løsninger via de vandrette vejstrækninger i et passende vejgitter, se det foregående afsnit. Med k vandrette linjestykker, hver af længde n , altså et $(k - 1) \times n$ gitter, er der en bijektiv korrespondance mellem sæt (x_1, x_2, \dots, x_k) af hele tal $x_j \geq 0$, der løser ligningen (3.5) og gitterveje fra A til B ; fra en given sådan gittervej aflæses sættet (x_1, x_2, \dots, x_k) som længden af de vandrette stræk, med x_j som længden på den j 'te vandrette linje; omvendt giver en løsning (x_1, x_2, \dots, x_k) til (3.5) anledning til en gittervej, fx ved at danne koden for vejen som x_1 gange H, dernæst et O, dernæst x_2 gange H, dernæst et O, osv. sluttende med x_k gange H (hvor visse af de nævnte antal H kan være 0); den på figuren viste gittervej svarer til løsningen $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 3$ og $x_4 = 0$ til ligningen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$. Igen fås antallet givet ved binomialkoefficienten (3.6).

Bemærkning. Den første af ovenstående modeller blev – i det væsentlige – tidligere benyttet i forbindelse med optælling af monotont voksende ord, se lemmaet i afsnit 2.5; her er overvejselsen nok simplere, fordi der fra starten *ikke skelnes* mellem objekterne indbyrdes.

Tællerresultatet her giver tillige en klarere optælling af antallet af monotont voksende ord af længde n skrevet med et alfabet på k bogstaver; et sådant ord er jo fastlagt ved antallene x_1, x_2, \dots, x_k af successive forekomster af alfabetets bogstaver: først x_1 af det første, dernæst x_2 af det andet, og således videre, og sidst x_k eksemplarer af det sidste (k 'te) bogstav. \square

Eksempel. Ofte forsvinder den skelnen mellem forskellige objekter, der ligger til grund for binomialkoefficienterne ved anvendelsen (fx binomialformelen, antal løsninger til heltalsligninger). Som et yderligere eksempel klares et tilsyneladende helt anderledes problem på denne måde. De hele tal, der spiller rollen af x_i 'erne i (3.5), består af et vist antal *enere*, men typen af disse *enere* kan tillades at variere mellem x_i 'erne.

En bolchefabrikant pakker *poser med blandede bolcher*. Hver pose indeholder n bolcher, og der er k typer af bolcher, hvor n og k er naturlige tal – hver type bolcher er til rådighed i et

ikke-begrænset antal. Antallet af forskellige indhold af sådanne posere blandede bolcher ønskes bestemt. Ved at lade x_i , for $i = 1, 2, \dots, k$, betegne antallet af en sådan poses bolcher af den i 'te type, er der en naturlig bijektiv korrespondance mellem mængden af mulige bolche-pose-indhold og mængden af sæt (x_1, x_2, \dots, x_k) af ikke-negative løsninger til (3.5), og det søgte antal er derfor givet ved binomialkoefficienten i (3.6). \square

I overvejelserne ovenfor er det afgørende, at koordinaterne i løsningssæt (x_1, x_2, \dots, x_k) er ikke-negative, altså, at $x_i \geq 0$, for alle indices $i = 1, 2, \dots, k$. En mere generel problemstilling er følgende. Lad der være givet et sæt (a_1, a_2, \dots, a_k) af k hele tal a_i , og betragt ligningen:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n. \quad (3.7)$$

sammen med *sidebetingelserne*:

$$a_1 \leq x_1, \quad a_2 \leq x_2, \quad \dots \quad a_k \leq x_k. \quad (3.8)$$

Antallet af sæt af løsninger (x_1, x_2, \dots, x_k) af hele tal til (3.7), der opfylder alle ulighederne i (3.8), kan bestemmes ved at *oversætte* til et problem af den tidligere behandlede type (hvor x_i 'erne er ikke-negative). Lettest foregår det nok ved at introducere *nye variable*: $y_i := x_i - a_i$, for $i = 1, 2, \dots, k$. Det er da klart, at der er en bijektiv korrespondance mellem mængden af sæt (x_1, x_2, \dots, x_k) af hele tal, der løser ligningen (3.7), og som opfylder alle ulighederne i (3.8) og mængden af sæt (y_1, y_2, \dots, y_k) af *ikke-negative hele tal* y_i , der tilfredsstiller ligningen:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - (a_1 + a_2 + \dots + a_k); \quad (3.9)$$

korrespondancen er simpelthen givet *koordinatvis* ved: $x_i - a_i \leftrightarrow y_i$, for $i = 1, 2, \dots, k$.

Observation 2. Det søgte antal er derfor binomialkoefficienten:

$$\binom{n + k - 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)}{k - 1}. \quad \blacksquare$$

Antallet af løsninger til en ligning af formen (3.7), hvor koordinaterne opfylder tosidede uligheder, er vanskeligere at bestemme: se kapitel 15 om optælling ved inklusion og eksklusion.

3.7 Multinomialkoefficienter. For en mængde af $n \geq 1$ (indbyrdes skelnelige) objekter, er binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$, for hele tal k , antallet af k -delmængder, altså delmængder med præcis k elementer. Eller $\binom{n}{k}$ er antallet af opdelinger af de n objekter i to kategorier, den ene med k *valgte objekter*, den anden med de $n - k$ *fravalgte objekter*. Mere almindeligt kan der spørges:

For en mængde af $n \geq 1$ objekter, og et sæt af $r \geq 2$ hele tal (k_1, k_2, \dots, k_r) , der opfylder, at $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, *hvad er antallet af fordelinger af objekterne i r skuffer med k_i objekter i den i 'te skuffe, for $i = 1, 2, \dots, r$?*

Eksempel 1. Et hold på 14 studerende skal – inddelt i passende studiegrupper – løse en »projektopgave« valgt blandt 5 projektforslag; bemanningen af de 5 grupper er givet ved tabellen:

Opgave nr.	1	2	3	4	5
Antal stud.	3	4	2	2	3

Antallet af måder, hvorpå de 14 studerende kan fordeles i 5 studiegrupper med de anførte antal medlemmer, ønskes bestemt. Denne tælleopgave kan løses ved successivt at bestemme antallet af måder hvorpå gruppe 1 kan dannes, hvilket er binomialkoefficienten $\binom{14}{3}$, for hver af disse at gange med antallet af måder hvorpå gruppe 2 kan dannes blandt de resterende 11 studerende, hvilket er $\binom{11}{4}$, og således videre. Resultatet er produktet af disse antal, altså:

$$\binom{14}{3} \binom{11}{4} \binom{7}{2} \binom{5}{2} \binom{3}{3} = \frac{14!}{3! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!}. \quad \square$$

Med henblik på sådanne tælleopgaver beskrives et generelt *setup*: Der tænkes forelagt en mængde med $n \geq 0$ objekter, og en række mulige placeringer, de kaldes *kasser*, ialt $r \geq 2$ sådanne. Desuden tænkes givet et sæt af r hele tal (k_1, k_2, \dots, k_r) , der opfylder, at $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$; det viser sig praktisk at betragte *vilkårlige* hele tal k_i , og det *forudsættes altså ikke* her, at $k_i \geq 0$. Det er måske til hjælp at forestille sig objekterne som fx »tennisbolde« og de mulige placeringer som fx »kurve«, hvori tennisboldene kan lægges; tennisboldene er indbyrdes skelnelige, fx nummererede, og det samme gælder kurvene.

Definition. Med dette *setup* kaldes antallet af fordelinger af n objekter i r kasser, med k_j objekter i den j 'te kasse, for $j = 1, 2, \dots, r$, en **multinomialkoefficient**, og antallet betegnes

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r},$$

hvilket fx læses »multinomialkoefficienten n over k_1, k_2, \dots, k_r «. (Objekterne har **ikke en rækkefølge** i kasserne, og kassernes indhold opfattes altså **ikke-ordnet**.)

De ovenfor definerede multinomialkoefficienter har direkte relevans som udtryk for løsningen til det tælleproblem hvoraf de defineres, og de optræder – på samme måde som binomialkoefficienterne – som koefficienter i udtrykket for den n 'te potens af en flerleddet størrelse, her n 'te potensen af en r -leddet størrelse, se afsnit 3.8 nedenfor. Endvidere er hver binomialkoefficient $\binom{n}{k}$ faktisk multinomialkoefficienten $\binom{n}{k, n-k}$, med $r = 2$ kasser.

I en snæver vending kan det være fristende at kalde multinomialkoefficienterne svarende til $r \geq 2$ fordelingskasser for r -nomialkoefficienter, fx når $r = 3$, for *trinomialkoefficienter*.

Inden talværdier for multinomialkoefficienterne beregnes er det nyttigt at få et strukturelt overblik: Som nævnt tillades et eller flere negative k_i 'er, men for talsæt (k_1, k_2, \dots, k_r) med et eller flere negative »elementantal«, er der naturligvis *ingen* fordelinger, der opfylder *fordelingskravene*, og derfor er den tilsvarende multinomialkoefficient, nemlig antallet af relevante fordelinger, for sådanne sæt = 0. På den anden side er der for hvert sæt (k_1, k_2, \dots, k_r) af tal $k_i \geq 0$, med sum n , mindst én fordeling, der opfylder fordelingskravene, nemlig fx den, der placerer de k_1 første objekter i kasse 1, de næste k_2 af objekterne i kasse 2, og således videre, de sidste k_r af objekterne i kasse r (summen af elementantallene for kasserne er jo forudsat at være n). Dette gælder også for *grænsetilfældet* $n = 0$; det er også her umuligt at fordele på en sådan måde, at der i en kasse placeres et negativt (< 0) antal objekter; men med 0 objekter er der præcis én fordeling – den *tomme* – der placerer 0 objekter i hver af de r kasser, og dermed er multinomialkoefficienten $\binom{0}{0, \dots, 0} = 1$, hvilket også fås af regneudtrykket i sætningen nedenfor.

Derfor er en multinomialkoefficient $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r}$ *positiv* hvis og kun hvis det for sættet af antal (k_1, k_2, \dots, k_r) gælder, at $k_i \geq 0$ for $i = 1, 2, \dots, r$ (og sumbetingelsen $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$). Det er imidlertid på nuværende tidspunkt let for os at bestemme antallet af sådanne antalssæt (k_1, k_2, \dots, k_r) : det er jo antallet af løsninger til ligningen (3.5) i ikke-negative hele tal, dog her med r ubekendte, altså binomialkoefficienten $\binom{n+r-1}{r-1}$.

Endvidere afhænger en multinomialkoefficient kun af elementantallene k_1, k_2, \dots, k_r , *ikke af deres rækkefølge*; der er nemlig en oplagt bijektiv afbildning mellem fordelinger for et sæt af elementantal (k_1, k_2, \dots, k_r) og fordelinger for en *permutation* af disse elementantal (det der står på de r pladser), nemlig den, der består i at permutere objekterne »kassevis« tilsvarende.

Sætning. For hele tal n, r , hvor $n \geq 0$ og $r \geq 2$, og r -tupler (k_1, k_2, \dots, k_r) af hele tal k_i (med elementsum $= n$), er multinomialkoefficienten n over k_1, k_2, \dots, k_r givet ved:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \begin{cases} 0 & \text{hvis der findes et } i \text{ så } k_i < 0, \\ \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!} & \text{når } k_i \geq 0, \text{ for } i = 1, 2, \dots, r. \end{cases} \quad (3.10)$$

Bevis. Påstanden er allerede godtgjort i tilfældet med ét eller flere af k_i 'erne negative. Antallet beregnes i tilfælde, hvor alle $k_i \geq 0$, på samme måde som i eksemplet ovenfor:

De k_1 af de n objekter, der skal i den første kasse, kan vælges på $\binom{n}{k_1}$ måder; for hver af disse, kan blandt de $n - k_1$ resterende, de k_2 objekter, der skal i den anden kasse, vælges på $\binom{n-k_1}{k_2}$ måder; og således videre; efter valg af $k_1 + k_2 + \dots + k_{r-1}$ objekter til de første $r - 1$ kasser, skal de resterende $k_r = n - (k_1 + k_2 + \dots + k_{r-1})$ objekter alle i den r 'te kasse, hvilket er muligt på $\binom{n-(k_1+k_2+\dots+k_{r-1})}{k_r} = \binom{k_r}{k_r} = 1$ måde. Det samlede antal fordelinger er dermed produktet af de fundne binomialkoefficienter, altså:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \dots \cdot \binom{k_r}{k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}. \quad (3.11)$$

(Benyttes regneudtrykket for en binomialkoefficient, se observation 2 i afsnit 3.2, forkortes en af nævnerfaktorerne med tælleren i den næstfølgende binomialkoefficient.)

Til belysning (og *ikke ekstra bevissikkerhed*) anføres også en anden tællefremgangsmåde: En fordeling af de n objekter af den ønskede beskaffenhed kan fås ved at placere objekterne »på række«, og i denne afgrænse objekterne til de enkelte kasser med passende »skillevægge«, én efter de første k_1 objekter, dernæst én efter de følgende k_2 objekter, og således videre, med en skillevæg før de sidste k_r objekter (forstået passende i tilfælde af 0 objekter i en kasse). Blandt de ialt $n!$ rækkefølger af de n objekter vil $k_i!$ give samme sæt af elementer mellem skillevæggene, der fastlægger elementerne til den i 'te kasse, og dermed fås igen regneudtrykket i (3.11). ■

Bemærkning. Regneudtrykket viser, at multinomialkoefficienten $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r}$ kun afhænger af hvilke tal, der indgår i sættet (k_1, k_2, \dots, k_r) , og *ikke* disse tals rækkefølge, som allerede bemærket ovenfor; denne egenskab generaliserer binomialkoefficienternes *symmetri*, se (3.2). □

Eksempel 2. For øvre parameter $n = 4$ og $r = 3$ kasser, er der som nævnt ovenfor ialt $\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{6}{2} = 15$ talsæt, for hvilke de tilsvarende trinomialkoefficienter, med 4 som øvre parameter, er positive. Disse er:

$$\begin{aligned} \binom{4}{4, 0, 0} &= \binom{4}{0, 4, 0} = \binom{4}{0, 0, 4} = 1, \\ \binom{4}{3, 1, 0} &= \binom{4}{3, 0, 1} = \binom{4}{1, 3, 0} = \binom{4}{0, 3, 1} = \binom{4}{1, 0, 3} = \binom{4}{0, 1, 3} = 4, \\ \binom{4}{2, 2, 0} &= \binom{4}{2, 0, 2} = \binom{4}{0, 2, 2} = 6, \\ \binom{4}{2, 1, 1} &= \binom{4}{1, 2, 1} = \binom{4}{1, 1, 2} = 12. \end{aligned}$$

De falder som vist på naturlig måde i 4 typer, én for hver af de – pånær permutation – forskellige løsninger til $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ i ikke-negative hele tal. I forbifarten bemærkes, at summen af disse 15 trinomialkoefficienter er $3 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 12 = 81$, hvilket passer med multinomialformelen, se sætningen i afsnit 3.8 nedenfor, idet $3^4 = 81$. □

Eksempel 3. Som indført ovenfor tæller multinomialkoefficienterne antal fordelinger af indbyrdes *skelnelige* objekter i r kasser, med foreskrevne elementantal i kasserne. En tælleopgave kan imidlertid kræve at »situationen vendes på hovedet« (begrebsligt). Ordet MISSISSIPPI består af 11 bogstaver, hvoraf et M, fire I, to P, og fire S. Problem: *hvor mange forskellige ord, altså bogstavsekvenser af længde 11, bestående af netop bogstaverne fra MISSISSIPPI, kan der dannes?*

I stedet for at argumentere direkte på bogstaverne, og undervejs forsøge at holde styr på *gentagelser*, omformuleres spørgsmålet til ét, hvor der kan skelnes mellem alle de objekter, som indgår i *fordelingssituationen*. Et ord af længde 11 dannet af bogstaverne fra MISSISSIPPI i en eller anden rækkefølge, er entydigt fastlagt ved specifikation af hvilke af de 11 pladser i det dannede ord, hvorpå der står M, I, P, og S. Det søgte antal er derfor antallet af fordelinger af 11 objekter (»pladser«) i 4 kasser, med kasseantal (1, 4, 2, 4) (til et M, fire I'er, to P'er, og fire S'er), altså multinomialkoefficienten:

$$\binom{11}{1, 4, 2, 4} = \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 4!} = 34\,650. \quad \square$$

3.8 Multinomialformelen. Svarende til binomialkoefficienternes rolle i udviklingen af den n 'te potens af en 2-leddet størrelse fungerer multinomialkoefficienterne ved udviklingen af n 'te potensen af en r -leddet størrelse.

Sætning. *Lad n, r være hele tal, der opfylder $n \geq 0$ og $r \geq 2$. For hvert sæt (x_1, \dots, x_r) af r tal gælder:*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}. \quad (3.12)$$

(Den store sum i (3.12) har et led for hvert sæt (k_1, \dots, k_r) af ikke-negative hele tal med sum n , og det pågældende led er den anførte multinomialkoefficient multipliceret med r faktorer, hvoraf den j 'te er potensen $x_j^{k_j}$.)

Bevis. Argumentet er analogt til argumentet for binomialformelen. Ved direkte udregning af n 'te potensen af den r -leddede størrelse:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_r)(x_1 + x_2 + \dots + x_r) \dots (x_1 + x_2 + \dots + x_r)}_{n \text{ par af parenteser}}$$

fås en sum af ialt r^n led, der hver er et produkt af n faktorer x_j med præcis én faktor fra hvert af parentesudtrykkene. Disse led har dermed alle formen $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}$, hvor k_j er antallet af parentesudtryk, som har bidraget med faktoren x_j til det pågældende led; for et sæt af ikke-negative hele tal (k_1, k_2, \dots, k_r) , med sum $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, fås derfor et led af formen $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}$ for hvert af de præcis $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r}$ valg, blandt de n parentesudtryk, af de k_1 , fra hvilke der benyttes faktoren x_1 , de k_2 parentesudtryk, fra hvilke der benyttes faktoren x_2 , og således videre, de k_r parentesudtryk, fra hvilke der benyttes faktoren x_r . ■

3.9 Rekursionsformelen for multinomialkoefficienter. I lighed med rekursionsformelen for binomialkoefficienter er en multinomialkoefficient med et naturligt tal n som øvre parameter en sum af multinomialkoefficienter med $n - 1$ som øvre parameter; antallet af led i summen er r , dvs. dette antal er multinomialkoefficientens *nedre* parametre. Præcist:

Sætning. For hele tal n, r , hvor $n \geq 1$ og $r \geq 2$, og sæt (k_1, k_2, \dots, k_r) af hele tal, gælder

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \sum_{j=1}^r \binom{n-1}{k_1, k_2, \dots, k_j-1, \dots, k_r}. \quad (3.13)$$

(Det j 'te led i summen er altså multinomialkoefficienten med $n-1$ som øvre parameter, og sættet af r nedre parametre fås af (k_1, k_2, \dots, k_r) ved at trække 1 fra tallet på den j 'te plads. Ligningen (3.13) kaldes **rekursionsformelen** for multinomialkoefficienterne.)

Bevis. Betragt en samling A af n indbyrdes skelnelige objekter, og lad ét af dem være a (det forudsættes jo, at $n \geq 1$). Multinomialkoefficienten på venstre side i (3.13) er antallet af fordelinger af objekterne fra A i r kasser, med k_j objekter i den j 'te kasse; disse fordelinger er af r typer, afhængigt af placeringen af a , og antallet af fordelinger (tallet på venstre side) er derfor summen af antallene af fordelinger af de r typer; antallet af fordelinger, hvor objektet a placeres i den j 'te kasse, er imidlertid det j 'te led i summen på højre side i (3.13), altså multinomialkoefficienten

$$\binom{n-1}{k_1, k_2, \dots, k_j-1, \dots, k_r},$$

nemlig antallet af måder en *delvis fordeling*, der placerer a i den j 'te kasse, kan suppleres til en fuld fordeling af A i r kasser med k_i objekter i den i 'te kasse, for $i = 1, 2, \dots, r$. (Læg mærke til, at eventuelle værdier $k_i \leq 0$ håndteres automatisk.) ■

3.10 Generaliserede binomialkoefficienter. Definitionen i afsnit 3.2 af binomialkoefficienterne er *kombinatorisk*, og forudsætter, at den øvre parameter er et helt tal ≥ 0 ; den nedre parameter kan være et vilkårligt helt tal. Regneudtrykket $\frac{n^k}{k!}$ for binomialkoefficienterne, se (3.1), har imidlertid god mening for vilkårlige reelle, eller komplekse, tal indsat for n , og for k et ikke-negativt helt tal; når den nedre parameter k er negativ (og et helt tal) fås 0, og derfor fastsættes:

Definition. For reelle eller komplekse tal x og hele tal k betegner $\binom{x}{k}$ talværdien:

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} 0 & \text{for } k < 0, \\ \frac{x^k}{k!} & \text{for } 0 \leq k. \end{cases} \quad (3.14)$$

og den kaldes den »generaliserede binomialkoefficient x over k .«

De generaliserede binomialkoefficienter har ikke direkte kombinatorisk relevans medmindre den øvre parameter x er et ikke-negativt helt tal; uden at komme ind på detaljer nævnes, at de generaliserede binomialkoefficienter, med et reelt tal α som øvre parameter, er koefficienter i en vigtig rækkeudvikling af størrelsen $(1+z)^\alpha$, gældende for komplekse tal z , der har numerisk værdi $|z| < 1$ (rækken kaldes *binomialrækken*).

De generaliserede binomialkoefficienter er også nyttige på andre måder: Dels gælder *formler for binomialkoefficienter* ofte også for generaliserede binomialkoefficienter. Desuden anlægges et synspunkt, der kan forsimple beviser, også for de sædvanlige binomialkoefficienter. En afgørende *nøgle* hertil er, at de generaliserede binomialkoefficienter $\binom{x}{k}$, når k er et ikke-negativt helt tal, er *polynomier* i x , af *grad* k , se eksempler i opgaverne.

Eksempel. Når x er et helt tal gælder, at $\binom{x}{k} = 0$ for $k > x$. Når x er et »brudent tal« (altså et tal $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) så er $\binom{x}{k} \neq 0$ for alle $k \geq 0$. □

3.11 Vandermondes foldningsformel. Binomialkoefficienterne udgør et sandt eldorado for »formelelskere«, med utallige relationer mellem binomialkoefficienter for diverse sæt af parametre. Som eksempel nævnes en berømt formel, der kaldes *Vandermondes* formel.

Sætning. Lad m og n være ikke-negative hele tal. Så gælder:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}, \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots, m+n. \quad (3.15)$$

Bevis. Binomialformelen giver direkte, at

$$(1+x)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i, \quad \text{og} \quad (1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i,$$

og produktet af disse to polynomier er polynomiet $(1+x)^{m+n}$, altså igen ved binomialformelen:

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k.$$

For polynomier $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ og $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ er koefficienten til x^k i produktpolynomiet $p(x)q(x)$ summen af produkterne $a_j b_{k-j}$, af koefficienten til x^j i $p(x)$ og koefficienten til x^{k-j} i $q(x)$. Dermed er koefficienten til x^k i $(1+x)^{m+n}$, der på den ene side er $\binom{m+n}{k}$, på den anden side bestemt ved multiplikationen af polynomierne $(1+x)^m$ og $(1+x)^n$, hvilket giver summen på højre side af (3.15). Husk ved fortolkningen af (3.15), at en binomialkoefficient er 0, når den nedre parameter er negativ, og når den er større end den øvre. ■

Denne drabelige formel er næppe indlysende; den har imidlertid en simpel kombinatorisk fortolkning, med bevis: Lad der være givet ialt $m+n$ objekter, der falder i to klasser, den ene med m , den anden med n , objekter. Delmængder på k objekter, valgt blandt de $m+n$ objekter, opdeles naturligt i $k+1$ typer, med $j = 0, 1, 2, \dots, k$ elementer fra den første klasse og $k-j$ elementer fra den anden (her er naturligvis $j \leq m$ og $k-j \leq n$). Antallet af delmængder på k objekter valgt blandt $m+n$ er binomialkoefficienten til venstre, medens antallet af delmængder på k objekter, med j valgt fra den første klasse og $k-j$ valgt fra den anden klasse, er produktet af de to binomialkoefficienter i summen ovenfor.

Et eksempel på Vandermondes foldningsformel (regn selv efter!):

$$\binom{6}{2} = \binom{5}{1} \binom{1}{1} + \binom{5}{2} \binom{1}{0} = \binom{4}{0} \binom{2}{2} + \binom{4}{1} \binom{2}{1} + \binom{4}{2} \binom{2}{0}.$$

3.12 Leksikografisk gennemgang af r -delmængder. Der er *ikke* nogen naturlig rækkefølge af r -delmængderne af en given mængde $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ på n objekter, men ved at vælge en standardopskrivning af r -delmængderne kan de opstilles i en rækkefølge på følgende måde: først skrives en r -delmængde af A som det entydigt bestemte ord af længde r , der fås ved at tage elementerne i delmængden i voksende indiceringsrækkefølge. Dernæst, blandt de ialt $\binom{n}{r}$ således dannede voksende ord af længde r skrevet med indbyrdes forskellige bogstaver fra A , benyttes den leksikografiske rækkefølge, arvet fra mængden af samtlige ord af længde r , og på samme måde som tidligere for permutationer, se afsnit 2.8, giver denne anledning til en efterfølgermekanisme for mængden af (de på denne måde voksende skrevne) r -delmængder.

Den første er delmængden $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ bestående af de r første bogstaver i alfabetet, og den sidste delmængde er $\{\alpha_{n-r+1}, \alpha_{n-r+2}, \dots, \alpha_n\}$ bestående af de sidste r bogstaver i alfabetet.

Idéen i algoritmen nedenfor er at modificere et givet ord så lidt som muligt og så langt til højre som muligt, og med bevarelse af egenskaben at være en voksende skrevet r -delmængde. En given voksende skrevet r -delmængde, der kan opdeles i to segmenter $(y_1 y_2 \dots y_{ik})(y_{ik+1} y_{ik+2} \dots y_r)$, hvor det andet segment, af længde $r - k$, består af de $r - k$ sidste bogstaver i A , er den sidste blandt de voksende skrevne r -delmængder, der har det første segment som præfiks, og dens efterfølger fås ved at modificere det sidste bogstav før det længste sådanne slutsegment til det næste bogstav i alfabetet, og justere de efterfølgende bogstaver så de kommer til at danne det mindste relevante segment.

Algoritme. Med en voksende skrevet r -delmængde $u_1 u_2 \dots u_r$ af $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ som **input**, der er **forskellig fra** $\alpha_{n-r+1} \alpha_{n-r+2} \dots \alpha_n$ (derfor findes et j så $u_j < \alpha_{n-r+j}$), giver algoritmen som **output** den r -delmængde, der er **leksikografisk efterfølger** til $u_1 u_2 \dots u_r$.

En hjælpevariabel j initialiseres: $j := r$ (j er indeks for starten af et slutsegment indenfor ordet, der undersøges bagfra).

I. Hvis $u_j < \alpha_{n-r+j}$, altså hvis u_j ikke er det $(n - r + j)$ 'te bogstav fra A fortsættes med II, ellers sættes $j := j - 1$, og algoritmeskridt I genudføres (det undersøges om bogstaverne på pladserne $j, j + 1, \dots, r - 1, r$ er de sidste $r - j + 1$ bogstaver fra A i voksende rækkefølge; når skridt I forlades er j indeks for den sidste plads i ordet så bogstaverne på den og de følgende pladser kan »modificeres« til sammen med præfikset af længde $j - 1$ at danne en »større« voksende skrevet r -delmængde).

II. Nu gælder: $u_j < \alpha_{n-r+j}$, og $u_{j+1} = \alpha_{n-r+j+1}, \dots, u_r = \alpha_n$.

Efterfølgeren $v_1 v_2 \dots v_r$ til $u_1 u_2 \dots u_r$ er dermed bestemt på følgende måde:

De første $j - 1$ elementer i $v_1 v_2 \dots v_r$ er som i $u_1 u_2 \dots u_r$ (bortfalder hvis $j = 1$); v_j sættes til α_k , altså efterfølgerbogstavet i A til u_j ; og de efterfølgende bogstaver sættes til $v_i = \alpha_{k-j+i}$, for $i = j + 1, \dots, r$. (Ordet $v_1 v_2 \dots v_r$ er således den voksende skrevne r -delmængde, der har $u_1 \dots u_{j-1}$ som præfiks, og som ender med $\alpha_k, \dots, \alpha_{k+r-j}$.)

Eksempel. Den leksikografiske rækkefølge af delmængder blev benyttet ved opskrivning af 2-del-mængderne af $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i afsnit 3.1.

For at illustrere algoritmens virkemåde vises her de første seks efterfølgere til $\{1, 3, 5, 7\}$ opfattet som 4-del-mængde af $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$$1357 \rightarrow 1367 \rightarrow 1456 \rightarrow 1457 \rightarrow 1467 \rightarrow 1567 \rightarrow 2345. \quad \square$$

Opgaver

(3.1) Vis, for de generaliserede binomialkoefficienter defineret i afsnit 3.10, for et reelt (eller komplekst) tal x og helt tal k , at:

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}.$$

(3.2) Vis binomialformelen ved induktion (efter n) baseret på rekursionsformelen.

(3.3) Ved at sætte $y = 1$ i binomialformelen fås

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \quad (3.16)$$

der ofte ligeledes kaldes *binomialformelen*. Vis, at binomialformelen (3.3) er en konsekvens af den simplificerede formel (3.16).

(3.4) Bevis rekursionsformelen for binomialkoefficienterne (med n hel ≥ 1 og k hel opfyldende $1 \leq k \leq n$) ved at argumentere i et gitter af passende størrelse.

(3.5) Overvej, hvordan gitterargumentet tager sig ud for multinomialkoefficienter (fx $r = 3$).

(3.6) Mængden af løsninger, altså sæt (x_1, x_2, \dots, x_k) af k ikke-negative hele tal x_i , til ligningen $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$, er leksikografisk ordnede, når disse løsningssæt opfattes som ord af længde k skrevet med bogstaver fra alfabetet $\{0, 1, \dots, n\}$. Angiv første og sidste element. Beskriv en algoritme, der beregner den leksikografiske efterfølger til et givet løsningssæt, der ikke er det sidste.

Gittervejsmodellen giver en fortolkning af disse løsningssæt. Kan den leksikografiske ordning også fortolkes heri?

(3.7) Vis, at der for reelle tal x og hele tal k gælder:

$$\binom{x}{k} = (-1)^k \binom{k-x-1}{k}.$$

(3.8) Vis, at der for hele tal m og n , der opfylder $0 \leq m \leq n$, gælder:

$$\binom{n+1}{m+1} = \sum_{k=m}^n \binom{k}{m},$$

og giv en kombinatorisk fortolkning af formelen.

(3.9) Vis, at for et naturligt tal n :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n},$$

og giv en gittervejsfortolkning af denne formel.

(3.10) Angiv samtlige trinomial-koefficienter $\binom{5}{k_1, k_2, k_3}$.

Kapitel 4

Grundlæggende om grafer

Grafer benyttes til at modellere og studere »kommunikation« – taget i meget bred forstand. En graf består af en endelig samling af objekter, og visse relationer mellem disse objekter; nærmere bestemt er visse, eventuelt ingen, par af forskellige objekter »knyttet sammen«, eller »forbundne«, og grafen er fastlagt ved sin mængde af objekter, og sin mængde af sammenknyttede par af objekter; begge disse mængder kan fx være givet via elementlister.

Der er her slet ikke taget stilling hverken til arten af objekter eller til den sammenknytning af objekter, der bestemmer grafen; begge kan være ganske vilkårlige, og teorien er dermed *abstrakt*. Derimod er hvert forelagt eksempel på en graf et *konkret* matematisk objekt.

I forbindelse med argumentation vedrørende en graf benyttes ofte illustrationer af grafen, hvor objekterne markeres som punkter på en tegning, og par af sammenknyttede objekter markeres med en kurve på tegningen, der forbinder de til de pågældende objekter svarende to punkter på tegningen. Det virker måske her som »pindehuggeri«, men en sådan illustration af en graf er *ikke selve grafen*, kun en særdeles bekvem anskueliggørelse af den graf, som tegningen er en illustration af, og ofte en god hjælp ved omtale af og argumentation vedrørende grafens egenskaber.

Hovedformålet her er at indføre de – desværre ganske mange – grundbegreber for grafer; de fleste af disse begreber virker nok nærmest trivielle i deres enkelhed, men et sådant førsteindtryk kan skuffes, og under alle omstændigheder er det vigtigt at blive fortrolig med begreberne, og især at kunne argumentere præcist med dem.

Udover eksempler på grafer, og diverse typer af *standardgrafer*, diskuteres to vigtige klasser af grafer, nemlig *træer* og *bipartite grafer*; disse dukker op flere gange i det følgende som objekter for eller som begrebsramme for tælleopgaver.

4.1 Basale definitioner. Der er uheldigvis *ingen standardiseret terminologi* for grafer, og man må være forberedt på at møde såvel *varianter af betegnelser* som *ændrede begrebsafgrænsninger* i andre fremstillinger af grafteori, og måske især i anvendelser af grafteori.

Eksempel. Mulighederne for flybefordring, fx indenfor Europa, med en bestemt gruppe af flyselskaber, kan illustreres på et kort, hvor *lufthavne* er markeret med udfyldte cirkler på kortet, svarende til deres geografiske placering, og hvor en buet kurve forbinder to lufthavne hvorimellem der findes en *flyrute* – betjent af et af de betragtede flyselskaber.

På et sådant kort angiver de buede kurver kun den abstrakte mulighed for at kunne beforders mellem to lufthavne, men *ikke hvordan* befordringen præcist foregår, fx hvad angår flyselskab, eller hvilken luftkorridor, der benyttes ved en konkret beflyvning af ruten. □

Definition. En *graf* G er et par bestående af en ikke-tom mængde V af **knuder** (eller **hjørner**, eller **punkter**; engelsk **vertices**, i ental **vertex**) og en mængde E af **kanter** (engelsk **edges**). Hver kant »forbinder« to knuder, **kantens endeknuder**. For at tydeliggøre **knudemængden** V og **kantmængden** E benyttes også betegnelsen $G = (V, E)$. For en graf $G = (V, E)$ kaldes antallet af knuder, altså $|V|$, for **grafens orden**.

Diskussion. I en graf, der studeres med henblik på kommunikation, er kanter med ens endeknuder (en sådan kaldes en *løkke*, engelsk *loop*) ikke relevante. Tilsvarende er det for to for-

skellige knuder u, v kun afgørende om der er en kant mellem dem; eventuelle yderligere kanter mellem u og v (hvor u og v så siges at være forbundet med *multiple kanter*) øger ikke grafens kommunikationsmuligheder (men nok dens robusthed og kapacitet). Ofte udelukkes derfor løkker og multiple kanter, dvs. der betragtes de såkaldte »simple grafer«. I denne situation er kanter i det væsentlige *par af to forskellige knuder*, og det er praktisk simpelthen at *identificere* hver kant med det ikke-ordnede par af kantens endeknuder. I andre situationer kan der være behov for at studere grafer, hvor kanterne har en *retning*, og kanten kun tillader »trafik« i kantens retning (en graf, hvor alle kanter har en retning, kaldes en *orienteret graf*, eller en *digraf* – på engelsk *directed graph*, eller *digraph*); eller hvor kanterne har tilknyttet en *vægt* (en »vægtet« graf), fx til modellering af »prisen« for at benytte den pågældende kant til at »flytte sig« mellem endeknuderne, eller til beskrivelse af *kapaciteten* af kanten fortolket som kommunikationskanal.

Definition. I det følgende står glosen **graf**, og betegnelsen $G = (V, E)$, altid – med mindre andet udtrykkeligt skrives – for en **simpel graf**, dvs. V er en ikke-tom endelig mængde af **knuder**, og E er en mængde af **kanter**, hvor hver kant, altså element $e \in E$, **forbinder** to knuder $u, v \in V$, med $u \neq v$, og altså svarer til et ikke-ordnet par $e = \{u, v\}$ af elementer $u, v \in V$, der kaldes **endeknuderne** for e ; da parret opfattes ikke-ordnet bestemmer u, v og v, u samme kantomulighed, der også betegnes uv . For $u, v \in V$ skrives $u \leftrightarrow v$, eller blot $uv \in E$, såfremt der findes en kant $e \in E$, altså $e = uv$, mellem u og v , og u og v er i så fald **naboknuder**. (I forhold til den foregående definition udelukkes således løkker og multiple kanter (og kanter er ikke-orienterede).)

Mængden V af knuder forudsættes $\neq \emptyset$, hvorimod kantomængden E kan være tom; grafer med $E = \emptyset$ er naturligvis ikke ret interessante – enhver sådan kaldes en *tom graf* – men de dukker tit op som grænsesituationer, fx som starttilfælde i induktionsbeviser.

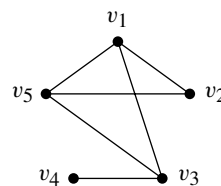
Kravet, at kanter forbinder *to forskellige knuder*, bevirker, at knudemængder med én enkelt knude, hvor altså $|V| = 1$, udgør et specialtilfælde; den eneste graf med $|V| = 1$ er tom, og den kaldes den *trivielle graf*. Den kræver ofte særbehandling, fx i påstande om *alle grafer med en bestemt egenskab*, hvor antallet af knuder er en naturlig parameter.

4.2 Specifikation af graf – valens. En graf $G = (V, E)$ er givet ved sin knudemængde V og sin kantomængde E ; begge disse er endelige mængder, og kan derfor beskrives via lister med deres elementer. Er grafens orden $n = |V|$ angives knudemængden altså ved en liste af længde n ; knuderne kan fx betegnes med indicering, v_1, v_2, \dots, v_n .

Kantomængden E er en vis delmængde af ikke-ordnede par $\{v_i, v_j\}$; da disse par består af to forskellige elementer, er der ialt $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ mulige kanter, og E , og dermed grafen G , er således specificeret ved angivelse af hvilke af disse $\binom{n}{2}$ kantomuligheder, der er *realiserede*. Grafens kantomængde kan kodes via den såkaldte *kantmatrix* (engelsk: *adjacency matrix*); den består, med en valgt rækkefølge af knuderne, fx v_1, v_2, \dots, v_n som ovenfor, af en $n \times n$ matrix, hvis indgange er 0 eller 1, og hvor elementet på plads (i, j) (altså i den i 'te række, og den j 'te søjle) er = 1, hvis $v_i \leftrightarrow v_j$, og = 0 ellers. Denne matrix er *symmetrisk* og har lutter 0'er i diagonalen; den er derfor redundant, og ofte angives kun en bestemmende del af den, fx elementerne under diagonalen.

Eksempel. Nedenfor til højre er tegnet en graf med 5 knuder og 6 kanter; dens kantmatrix er vist til venstre – antallet af 1'er i delen under diagonalen, er antallet af kanter.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	0	1
v_2	1	0	0	0	1
v_3	1	0	0	1	1
v_4	0	0	1	0	0
v_5	1	1	1	0	0



□

I kantmatricen er hver knudes naboer angivet med 1'er i knudens søjle, ud for rækkerne svarende til naboer, og i knudens række ud for naboernes søjler. Ved alle tegninger af grafer underforstås, at kun markerede skæringspunkter mellem kanter – de »udfyldte klatter« – er knuder!

Fordelingen af kanter i en graf, der dels kan opfattes *lokalt* som antallet af kanter til hver knude i grafen, dels *globalt*, altså for hele grafen på én gang, som *familien* bestående af disse antal, er vigtige størrelsesparametre for en graf.

Definition. Lad $G = (V, E)$ være en graf, og $u \in V$ en knude.

Antallet af kanter med u som endeknude, altså antallet af knuder $v \in V$ for hvilke $uv \in E$, kaldes **valensen** af u , og det betegnes δ_u (δ er et lille græsk delta).

Knuden u kaldes en **isoleret knude**, hvis $\delta_u = 0$, altså hvis u ikke er endeknude for en kant, og u kaldes et **blad**, hvis $\delta_u = 1$, altså hvis u er endeknude for præcis 1 kant.

Da der højst er én kant mellem to forskellige knuder (og ingen løkker) gælder, for en vilkårlig knude u i en vilkårlig graf $G = (V, E)$, at $0 \leq \delta_u \leq |V| - 1$. For tomme grafer, specielt for den trivielle graf, har alle knuder u valens $\delta_u = 0$; i en tom graf er alle knuder altså isolerede.

Observation 1. I enhver ikke-triviell graf findes to knuder af samme valens.

Bevis. Dette er faktisk vist i indpakning, se skakklubeksemplet i kapitel 1; også her benyttes skuffeprincippet. Lad $n \geq 2$ betegne antallet af knuder i grafen; disse n knuder kategoriseres, hver knude u efter dens valens δ_u , et helt tal, der opfylder, $0 \leq \delta_u \leq n - 1$; da $\delta_u = 0$ for én knude u udelukker at $\delta_v = n - 1$ for nogen-som-helst anden knude v , er enten kategorien $\delta_u = 0$, eller kategorien $\delta_u = n - 1$, eller begge tom(me); derfor er der højst $n - 1$ ikke-tomme kategorier, men med n knuder findes så en kategori indeholdende to eller flere knuder, altså et helt tal, der er fælles valens for to (eller flere) knuder. ■

Observation 2. For enhver graf $G = (V, E)$ er summen af knudernes valenser et lige tal, nemlig to gange antallet af kanter, altså: $\sum_{v \in V} \delta_v = 2|E|$.

Specielt er der et lige antal knuder af ulige valens.

Bevis. Første påstand er klar: hver kant bidrager med en valens 1 til hver af endeknuderne.

Det samlede bidrag til valenssummen fra knuder af lige valens er sum af lige tal, altså selv et lige tal, og derfor er resten af valenssummen, der jo er det samlede bidrag fra (eventuelle) knuder af ulige valens, også et lige tal, men da en sum af et ulige antal addender, der alle er ulige, selv er ulige, medfører dette, at der er et lige antal knuder af ulige valens. ■

Definition. For en graf $G = (V, E)$, med $n = |V|$ knuder, kaldes n -tuplet bestående af de n knuders valenser i G , taget i aftagende rækkefølge, for **valensprofilen** for grafen G .

Grunden til at tage knudevalenserne i aftagende rækkefølge – voksende rækkefølge ville være lige så nyttig – er, at derved lettes sammenligning mellem grafer; endvidere – og dette synspunkt forstærkes gennem kapitlet – er knudernes »navne«, og en eventuel indiceringsrækkefølge af knuderne, delvis irrelevante for de fleste formål – kun grafens »form« er vigtig.

Eksempel – fortsat. I grafen i eksemplet ovenfor har v_1, v_3, v_5 valens 3, knude v_2 har valens 2, og v_4 har valens 1; der er ingen isolerede knuder, og v_4 er det eneste blad i grafen. Valensprofilen er 5-sættet: (3, 3, 3, 2, 1). □

4.3 Grundbegreber: vandring, tur, vej, lukkethed og kreds. Grafer benyttes som nævnt til at studere »kommunikation«, og dertil indføres en række begreber, der for fleres vedkommende tilsyneladende kun afviger indbyrdes med betydningsløse distinktioner; disse distinktioner udtrykker imidlertid *relevante forskelle* for »færdsel« i en graf, og de pågældende begreber bliver *anvendt* i argumenter i deres præcise definerede betydninger, som derfor skal kendes. Der må dog advares: der er desværre IKKE en fast praksis for definition af disse begreber; mange bøger/artikler

benytter afvigende definitioner og glosor, og man må derfor i hvert tilfælde ved brug af andre kilder sikre sig at benytte begreberne med den af kilden fastsatte betydning.

Definitioner. Lad $G = (V, E)$ være en graf, og $n \geq 2$ et naturligt tal. En liste af knuder $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$, hvor $v_i \in V$, for $i = 1, 2, \dots, n$, for hvilken alle par af på hinanden følgende listelemeter er kantforbundne i G , altså for hvilken $v_i v_{i+1} \in E$, for $i = 1, 2, \dots, n-1$, kaldes en **vandring fra knude v_1 til knude v_n** (på engelsk ofte: **walk**). Der er ingen begrænsninger på, hvor mange gange en knude forekommer i listen, og det forudsættes ikke, at de $n-1$ kanter $v_i v_{i+1}$ er indbyrdes forskellige (men $v_i \neq v_{i+1}$, for $i = 1, 2, \dots, n-1$, da $v_i v_{i+1}$ er en kant).

Antallet af kanter $v_i v_{i+1}$ i en vandring, altså tallet $n-1$, kaldes **længden** af vandringen. (Hver kant medtælles det antal gange den »benyttes«.) Ofte er der behov for at kunne tale mere præcist om en vandrings eventuelle »genbrug« af knuder og kanter. En vandring kaldes: en **tur** (engelsk ofte: **trail**), hvis dens kanter er indbyrdes forskellige (knuder kan gentages), og den kaldes en **vej** (engelsk ofte: **path**), hvis alle knuderne er indbyrdes forskellige – dermed er også kanterne indbyrdes forskellige (man kan også møde betegnelsen: **simpel vej**). En vandring/tur kaldes **lukket** (engelsk: **closed**), hvis $v_1 = v_n$, altså hvis startknuden er den samme som slutknuden.

Ofte er det bekvemt at udvide disse begreber en smule, ved for en knude v i en graf, at opfatte listen bestående af v alene som en »lukket vandring« fra v til v , den **tomme vandring/vej i v** (den har altså ingen kanter, og ingen knudegentagelser), af **længde 0**. For det meste gøres der i argumenter, hvor tomme vandringer/veje forekommer, udtrykkeligt opmærksom på dette.

Observation. En vandring i en graf $G = (V, E)$ fra knude u til knude v definerer, når den tilsvarende liste af knuder »læses baglæns«, en vandring fra v til u .

En vandring, der ikke er lukket, hvor altså første og sidste knude i den liste af knuder, der beskriver vandringen, er forskellige, kaldes derfor en **vandring mellem u og v** , eller kort, en (u, v) -vandring. Tilsvarende for tur og vej mellem to forskellige knuder.

Lemma. Enhver (u, v) -vandring i en graf $G = (V, E)$, hvor $u, v \in V$ er to forskellige knuder, er enten en (u, v) -vej, eller den kan ved at fjerne visse knuder fra dens knudelite gøres til en (u, v) -vej, hvor altså samtlige vandringens knuder er indbyrdes forskellige.

Bevis. Der benyttes induktion efter længden k af en forelagt (u, v) -vandring. Hvis $k = 1$ er vandringen simpelthen u, v , der er en (u, v) -vej fordi $u \neq v$ ifølge antagelsen. Betragt nu en (u, v) -vandring af længde $k > 1$, og antag – dette er induktionsantagelsen – at en vilkårlig (u, v) -vandring af længde $< k$ kan gøres til en (u, v) -vej ved at fjerne knuder. Enten er knuderne på denne vandring indbyrdes forskellige, og vandringen er i så fald en vej; eller to af knuderne er ens, fx $u_i = u_j$ med $1 \leq i < j \leq n$; i så fald fjernes alle knuderne med indices $i+1, i+2, \dots, j$ fra vandringen; dette giver en (u, v) -vandring af længde $k - (j - i)$, som ifølge induktionsantagelsen kan gøres til en (u, v) -vej ved at fjerne knuder. ■

Et meget vigtigt begreb, der på en vis måde kombinerer lukkethed og simpelhed, hvor simpelhed udtrykker, at knuderne langs en vandring er forskellige, er følgende:

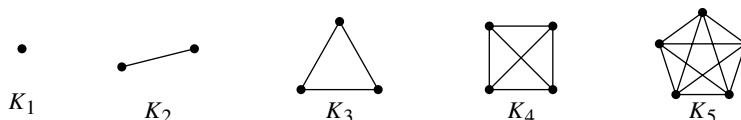
Definition. Lad $G = (V, E)$ være en graf og n et naturligt tal ≥ 3 . En **kreds** (engelsk: **cycle**) i G , er en liste $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$ af længde n bestående af knuder $v_i \in V$, for $i = 1, 2, \dots, n$, med $v_1 \neq v_n$, som udgør en vej fra v_1 til v_n (knuderne v_i er derfor indbyrdes forskellige), og hvor desuden v_1 og v_n er kantforbundne; **længden af en kreds** er antallet n af knuder, der definerer den, altså også antallet af kanter, der indgår i den (en kreds har længde ≥ 3).

Bemærkning. For en vej, og tilsvarende for en kreds, er det for det meste den tilhørende konfiguration af knuder og forbindende kanter (altså delgraf, se afsnit 4.5), der tænkes på. Retningen af en vej er således i en række forbindelser delvis irrelevant, og for en kreds kan hver knude tjene som »startknude«, ligesom de to knuderækkfølger »rundt i kredsen« ofte er lige gode. □

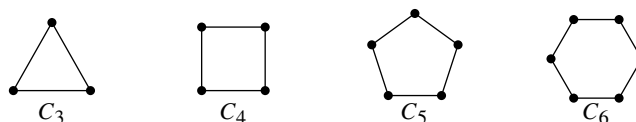
Eksempel. Alle knuderne i en kreds er forskellige, og længden af en kreds er derfor højst antallet af knuder i grafen; videre har alle knuder, der indgår i en kreds, valens 2 eller mere. Grafen i eksemplet i afsnit 4.2 har to kredse af længde 3, nemlig v_1, v_2, v_5 og v_1, v_3, v_5 , og én kreds af længde 4, nemlig v_1, v_2, v_5, v_3 , men ingen kreds af længde 5 (knode v_4 har valens 1). \square

4.4 Standardgrafer: Komplette grafer, kredse- og vejgrafer. Med en given knudemængde V giver visse kantmængder let genkendelige grafer, og de kan siges at være standardgrafer. Ofte kan en graf bedst beskrives ved, at den »næsten er en standardgraf«, eller mere præcist, at den er en standardgraf på nær en vis (lille) mængde af kanter – der er mange eksempler i det følgende. Tegningerne nedenfor anbringer ofte knuderne i regulær formation, dvs. som hjørnerne i en regulær n -kant; dette gør det let at »se« grafens »symmetrier«.

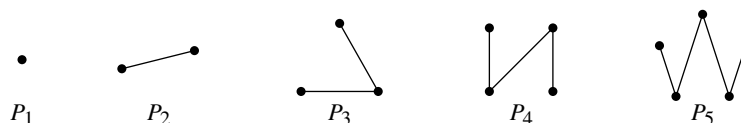
Komplette grafer. For en knudemængde V med $n = |V|$ elementer, er den *komplette graf med knudemængde V* grafen $G = (V, E)$, hvor E består af samtlige par $\{u, v\}$, af to forskellige knuder $u, v \in V$; kantmængden har altså $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ elementer. Ofte er knudemængdens beskaffenhed delvis irrelevant, og kun knudeantallet afgørende; en **komplet graf med n knuder**, der betegnes K_n , er så en graf med n knuder og samtlige $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ kantmuligheder realiserede. Her er tegninger af de første små K_n -grafer:



Kredsgrafer. For en knudemængde V med $n = |V| \geq 3$ elementer, er *kredsgrafen med knudemængde V* , og en *valgt cyklisk rækkefølge*, fx v_1, v_2, \dots, v_n , af elementerne fra V , grafen $G = (V, E)$, hvor E består af samtlige par $\{v_i, v_{i+1}\}$, for $i = 1, 2, \dots, n-1$, samt $\{v_1, v_n\}$; kantmængden har altså n elementer. Ofte er knudemængdens beskaffenhed delvis irrelevant, og kun knudeantallet afgørende; en **kredsgraf med n knuder**, der betegnes C_n , er så en graf med n knuder og et bestemt sæt af n kantmuligheder realiserede, svarende til en *valgt cyklisk rækkefølge af knuderne*. En cyklisk rækkefølge af n knuder, og den modsatte cykliske rækkefølge, bestemmer samme sæt af n kanter, og dermed samme kredsgraf. Der er derfor $(n-1)!/2$ kredsgrafer på en given knudemængde af n knuder. Her er tegninger af de første små C_n -grafer:



Vejgrafer. For en knudemængde V med $n = |V|$ elementer er *vejgrafen med knudemængde V* , og en *valgt rækkefølge*, fx v_1, v_2, \dots, v_n , af elementerne fra V , grafen $G = (V, E)$, hvor E består af samtlige par $\{v_i, v_{i+1}\}$, for $i = 1, 2, \dots, n-1$; kantmængden har altså $n-1$ elementer. Ofte er knudemængdens beskaffenhed delvis irrelevant, og kun knudeantallet afgørende; en **vejgraf med n knuder**, og **længde $n-1$** , er så en graf, der betegnes P_n , med n knuder og et bestemt sæt af $n-1$ kantmuligheder realiserede, svarende til en *valgt rækkefølge af knuderne*. For $n=1$ er der naturligvis ikke nogen egentlig vej, men det kan være praktisk at medtage $P_1 = K_1$ (som den tomme vejgraf). Her er tegninger af de første små P_n -grafer:



En rækkefølge af n knuder, og den modsatte rækkefølge, bestemmer samme sæt af n kanter, og dermed samme vejgraf. Der er derfor $n!/2$ vejgrafer på en given knudemængde af n knuder. \square

4.5 Delgraf, sammenhæng og komponenter. Ofte er der for en given graf $G = (V, E)$ brug for at betragte diverse fra G afledte grafer, der – løst sagt – fås ved at tilføje/fjerne knuder/kanter til/fra G . Tilfældet, hvor knuder/kanter fjernes, diskuteres via begrebet delgraf.

Definition. Lad $G = (V, E)$ være en graf. En **delgraf af G** er en graf $G' = (V', E')$, hvor V' er en ikke-tom delmængde af V , altså $V' \subseteq V$ (det udelukkes ikke, at $V' = V$), og E' er en delmængde af E , for hvilke alle kanter i E' har begge deres endeknuder tilhørende V' .

En nærliggende delgrafkonstruktion for en forelagt graf består i at fjerne én eller flere kanter fra grafen, men beholde alle knuder. Eller fra grafen kan fjernes én eller flere knuder, og alle kanter i grafen, for hvilke én eller begge endeknuder er blandt de fjernede knuder.

For en graf $G = (V, E)$, der tænkes »fastholdt« som en slags »univers«, kan mængden af delgrafer af G forsynes med en ordning, hvorved visse delgrafer kan sammenlignes.

Definition. For delgrafer $G' = (V', E')$ og $G'' = (V'', E'')$ af $G = (V, E)$ siges G' at være **indeholdt i G''** , hvis $G' = (V', E')$ er en delgraf af $G'' = (V'', E'')$, dvs. hvis der gælder $V' \subseteq V''$ og $E' \subseteq E''$. (Det udelukkes ikke, at $V' = V''$, og heller ikke, at $V' = V''$ og $E' = E''$.)

Dette definerer en ordningsrelation, dvs. en antisymmetrisk og transitiv relation, på mængden af delgrafer af $G = (V, E)$. Ordningen er *partiell* – altså ikke nødvendigvis total: for to delgrafer af $G = (V, E)$ gælder ikke i almindelighed, at en er en delgraf af den anden (fx for delgrafer med disjunkte knudemængder). Ordningen er *refleksiv*, og burde måske læses: »indeholdt i eller lig«.

I mange bevissituationer er det praktisk at udnytte en viden om at visse objekter er størst mulige, eller mindst mulige, med hensyn til en given egenskab; ofte kan dette udtrykkes som at være maksimal, eller minimal, med hensyn til en partiell ordning (se også senere i afsnittet).

På knudemængden V i en graf $G = (V, E)$ defineres en relation betegnet med symbolet \sim .

Definition. For $u, v \in V$ siges u og v at være **vejforbundne** i G , eller, at u står i relationen \sim til v , hvilket skrives $u \sim v$, hvis enten $u = v$, eller, hvis $u \neq v$ og der findes en vej fra u til v .

Relationssymbolet \sim benyttes kun i dette afsnit – relationen benyttes derimod utallige gange; specialtilfældet $u = v$ kan fortolkes, at u og v er forbundne med den tomme vej.

Observation 1. Relationen \sim er en ækvivalensrelation på V .

Bevis. Den er *refleksiv*, da $u \sim u$ for alle $u \in V$, og *symmetrisk*, fordi $u \sim v$, for $u, v \in V$, medfører, at $v \sim u$; dette er klart, hvis $u = v$, ellers bruges en vej fra u til v baglæns. Videre er \sim *transitiv*. Antag nemlig, for $u, v, w \in V$, at $u \sim v$ og $v \sim w$; hvis $u = w$ gælder $u \sim w$; hvis $u \neq w$ betragtes knudelisten, der eventuelt kan bestå af én knude, for en vej fra u til v , hvorfra slutknuden v fjernes, efterfulgt af knudelisten for en vej fra v til w ; denne sammensatte liste er ikke i almindelighed en vej fra u til w , men blot en *vandring* fra u til w ; ifølge lemmaet i afsnit 4.3 findes imidlertid så en vej fra u til w , og derfor gælder $u \sim w$. ■

Relationen \sim giver anledning til en *klassedeling* af V , dvs. en familie af ikke-tomme, parvis disjunkte delmængder V_i af V , med foreningsmængde V . Hver delmængde V_i fra klassedelingen er en samling af indbyrdes ækvivalente (via \sim) knuder: enten består den af en enkelt knude u af valens $\delta_u = 0$ (en *isoleret knude*), eller den består af knuder, for hvilke vilkårlige to forskellige er vejforbundne. Der findes således *ingen kant* mellem knuder fra forskellige ækvivalensklasser.

Definition. En graf $G = (V, E)$ kaldes **sammenhængende**, hvis vilkårlige to forskellige knuder u og v i V er vejforbundne i G ; dette betyder, at den til \sim svarende klassedeling af knudemængden V består af én enkelt klasse, altså, at vilkårlige knuder er ækvivalente ved \sim .

Eksempel. Alle de ovenfor indførte standardgrafer K_n , C_n , og P_n , er sammenhængende for alle relevante værdier af parameteren n . Vilcårlige to forskellige knuder u og v er nemlig vejforbundne i grafen. For en komplet graf K_n er dette klart, fordi der simpelthen (når $n \geq 1$) er en kant, nemlig

uv , mellem u og v ; i almindelighed, for $n \geq 3$, er der flere veje fra u til v . For en kredsgraf C_n , hvor knudeantallet $n \geq 3$, benyttes blot vejen fastlagt ved knuderne fra u til v i den til kredsgrafen hørende cykliske rækkefølge af knuderne; idet også knuderne fra u til v , men benyttet »baglæns« i forhold til den cykliske rækkefølge, udgør en vej fra u til v , er der to veje mellem u og v (og faktisk ikke andre). For en vejgraf P_n kan benyttes vejen fra u til v , enten med eller mod den valgte rækkefølge af knuderne (og her er der kun denne ene vej mellem u og v). \square

Definition. En delgraf $G' = (V', E')$ af en graf $G = (V, E)$, bestemt ved, at V' er en ækvivalensklasse af knuder (ved \sim), og E' består af samtlige kanter fra E , for hvilke begge endeknuder tilhører V' , kaldes en **sammenhængskomponent** af grafen G .

En sammenhængskomponent af en graf er sammenhængende: vilkårlige to knuder i en sammenhængskomponent er jo vejforbundne. For en sammenhængende graf $G = (V, E)$ er der kun en enkelt sammenhængskomponent, nemlig G selv – alle knuder tilhører samme klasse.

Observation 2. Lad $G = (V, E)$ være en graf. Hver sammenhængskomponent af G er en maksimal (mht. relationen indeholdt i for delgrafer af G) sammenhængende delgraf af G , og omvendt er enhver maksimal sammenhængende delgraf af G en sammenhængskomponent af G .

Bevis. Lad $G' = (V', E')$ være en sammenhængende delgraf af $G = (V, E)$; det skal vises, at $G' = (V', E')$ er indeholdt i en af sammenhængskomponenterne af G . Lad derfor $G'' = (V'', E'')$ betegne sammenhængskomponenten indeholdende én af knuderne fra V' . Så gælder $V' \subseteq V''$, og $E' \subseteq E''$, det sidste fordi E'' består af samtlige kanter med endeknuder i V'' .

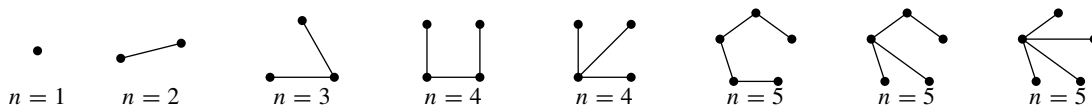
Hvis omvendt $G' = (V', E')$ er en sammenhængende delgraf af G , der er maksimal mht. indeholdt i blandt delgrafer af G , så er G' en sammenhængskomponent af G . Ingen knude $\in V \setminus V'$ er nemlig vejforbunden med en knude i V' : en sådan ville tilhøre V' , da $G' = (V', E')$ er forudsat maksimal, og tilsvarende er der ingen kant $\in E \setminus E'$, der har begge endeknuder i V' . \blacksquare

4.6 Træer. I mange situationer er der behov for at »skabe sammenhæng« mellem et antal, fx n , knuder, med brug af det mindst mulige antal kanter. Dette kan foregå ved at anbringe knuderne som »perler på en snor« i en vejgraf af længde n , altså med brug af $n - 1$ kanter. Mange andre konfigurationer, ligeledes med $n - 1$ kanter, er mulige, og de bliver senere opregnet fuldstændigt.

Det er vel intuitivt klart, at med en foreliggende sammenhængende knudegruppe, hvortil en ekstra knude ønskes forbundet – en ny »maskine« til et eksisterende »netværk« – kræves (mindst) én ekstra kant, og desuden, at en tilføjet kant, der bruges til at forbinde to knuder, der allerede indgår i en sammenhængende knudegruppe, er unødvendig for sammenhængen; det er vel også ret klart, at en sådan kant faktisk indgår i en kreds.

Definition. En graf, der er sammenhængende og kredsløs, kaldes et **træ**.

Den trivielle graf, med $|V| = 1$, er et træ; det indtager en særstilling blandt træer, og kaldes det *trivielle træ*. En graf med 2 knuder V er et træ hvis den er sammenhængende, dvs. af type $K_2 = P_2$; en kreds omfatter jo 3 eller flere knuder. Her er alle små træer, med $|V| \leq 5$:



Alle træer – pånær det trivielle – har mindst ét blad, altså knude af valens 1, og et sådant blad er særdeles nyttigt, fx i forbindelse med induktionsbeviser for påstande om træer.

Lemma 1. Hvert træ med to eller flere knuder har mindst én knude af valens 1.

*Bevis.*¹ For at finde en knude af valens 1 vælges (vilkaarligt) en knude $v_0 \in V$. Valensen δ_{v_0} er ≥ 1 fordi grafen er sammenhængende og ikke-triviel. Hvis $\delta_{v_0} = 1$, er en knude som ønsket

¹Et næsten arketyrisk argument; det har ikke et fast navn, men »spadsere«-argumentet er vel ganske suggestivt!

fundet; ellers er $\delta_{v_0} \geq 2$, og i så fald vælges én af kanterne fra v_0 , fx til knude v_1 . Hvis $\delta_{v_1} = 1$, er en knude som ønsket fundet; ellers er $\delta_{v_1} \geq 2$, og i så fald vælges én af kanterne fra v_1 , blot ikke den, der fører tilbage til v_0 , fx til knude v_2 ; hvis $\delta_{v_2} \geq 2$ fortsættes analogt, ved at vælge én af kanterne til v_2 , blot ikke den der fører tilbage til v_1 , fx til knude v_3 ; denne proces fører efter et vist antal skridt til en knude af valens 1; processen kan nemlig *ikke* fortsætte med stadig nye knuder, da knudemængden er endelig, og processen kan *ikke* føre til besøg af en allerede benyttet knude, idet et sådant besøg ville fastlægge en kreds (knuderne fra det første til, men ikke med, det andet besøg af en dobbeltbesøgt knude udgør en kreds). Dermed findes en knude af valens 1. ■

Argumentet i lemmaet kan let udvides – ved at lade »spadsereturen« starte i et allerede fundet blad – til at vise eksistensen af mindst to blade i hvert ikke-trivielt træ; denne påstand følger også let af tælleovervejelserne nedenfor, se opgave 4.8. Inden den vigtige karakterisering af træer er det praktisk at overveje en simpel, og naturlig, operation med træer:

Lemma 2. *Lad $T = (V, E)$ være et træ.*

Hvis $v \in V$ er en knude af valens 1, så er grafen, der fås fra T ved at fjerne v og kanten til v (denne kant er entydigt bestemt), ligeledes et træ.

For en knude $u \in V$ i T og et element v , der ikke tilhører V , er grafen $(V \cup \{v\}, E \cup \{uv\})$, der fås fra T ved at tilføje den ny knude v og en kant fra u til v , ligeledes et træ.

Bevis. Fjernes, fra en sammenhængende graf uden kredse, en knude af valens 1 og kanten til den, efterlades en sammenhængende graf uden kredse.

Omvendt giver tilføjelse, til en sammenhængende graf uden kredse, af en ny knude, og en kant, der forbinder denne med resten af grafen, en sammenhængende graf uden kredse (den nye knude, og kanten til den, indgår ikke i en kreds, da valensen af en knude på en kreds er ≥ 2). ■

Sætning 1. *For et træ $T = (V, E)$ er $|E| = |V| - 1$; der er altså én kant færre end knuder.*

Bevis. Der benyttes induktion efter antallet af knuder $n = |V|$. Et træ med 1 knude er det trivielle træ, altså med $0 = |V| - 1$ kanter. Antag, at det for et givet $n > 1$ er bevist, at alle træer med $n - 1$ knuder har $(n - 1) - 1 = n - 2$ kanter, og betragt et træ $T = (V, E)$ med n knuder. Dette træ har ifølge lemma 1 en knude, fx v , af valens 1. Grafen T' , der fås fra T ved at fjerne knuden v , og kanten til v , er et træ, se lemma 2, med $n - 1$ knuder, og T' har derfor ifølge induktionsantagelsen $n - 2$ kanter, og dermed har T selv $n - 2 + 1 = n - 1$ kanter. ■

Sætning 2. *En sammenhængende graf $G = (V, E)$, med $|E| = |V| - 1$ kanter, altså med en kant færre end der er knuder, har ingen kredse, og er derfor et træ.*

Bevis. Igen benyttes induktion efter antallet af knuder. En graf med $|V| = 1$ er (sammenhængende og) den trivielle graf med 0 kanter, og ingen kreds. Antag, at det for et givet $n > 1$ er bevist, at enhver sammenhængende graf med $n - 1$ knuder og $n - 1 - 1 = n - 2$ kanter er kredsløs, og lad $G = (V, E)$ være en sammenhængende graf med $n = |V|$ knuder og $n - 1$ kanter; det skal vises, at G er kredsløs. Alle knuder i G har valens ≥ 1 , og der findes (mindst) én knude af valens 1 (hvis alle knuder har valens ≥ 2 er valenssummen $\geq 2n$, men denne valenssum er præcis $2n - 2$, fordi der ifølge antagelsen er $n - 1$ kanter). Lad v betegne en knude af valens 1; grafen G' , der fås af G ved at fjerne v og kanten til v er sammenhængende, har $n - 1$ knuder, og $n - 2 = (n - 1) - 1$ kanter, og den er derfor ifølge induktionsantagelsen kredsløs. Dermed er også $G = (V, E)$ kredsløs.

(Det er måske mere naturligt at argumentere »indirekte«: ved fra en eventuel kreds i G at fjerne en kant, fås en sammenhængende graf med færre kredse end den givne graf, og fortsættes denne proces – at fjerne en kant, der indgår i en kreds, fra grafen – indtil der ikke er flere kredse, opnås en sammenhængende graf uden kredse, altså et træ, og for et sådant vides fra sætning 1, at der er $n - 1$ kanter (til n knuder), men ved processens start er der $n - 1$ kanter, og derfor er ingen kanter, fra en eventuel kreds, fjernet undervejs, så startgrafene er selv kredsløse!) ■

Sætning 3. En graf $G = (V, E)$, der er kredsløs og har $|E| = |V| - 1$ kanter, altså en kant færre end der er knuder, er sammenhængende og derfor et træ.

Bevis. Antag, at $G = (V, E)$ er en graf med n knuder, uden kredse, og med $n - 1$ kanter; det skal vises, at G er sammenhængende. Lad k betegne antallet af sammenhængskomponenter af G ; det skal vises, at $k = 1$. Hver sammenhængskomponent er (naturligvis) sammenhængende, og endvidere uden kredse, altså et træ; derfor gælder ifølge sætning 1, at antallet af kanter i hver sammenhængskomponent G_i af G er $n_i - 1$, hvor n_i betegner antallet af knuder i den pågældende komponent. Det samlede antal kanter er derfor $\sum_i (n_i - 1) = \sum_i n_i - k = n - k$, men på den anden side ifølge forudsætning $n - 1$, hvilket viser, at $k = 1$. ■

Bemærkning. Resultatet i sætningerne 1, 2, 3 kan også udtrykkes, at for en graf $G = (V, E)$, kan der fra vilkårlige to af nedenstående tre udsagn om G sluttes det tredje:

- grafen G er sammenhængende,
- grafen G er kredsløs, og
- antallet af kanter er antallet af knuder minus én ($|E| = |V| - 1$).

Den del heraf, der udtrykkes af sætning 1, er den hyppigst brugte. Formuleringen i tre særskilte påstande er valgt for overskuelighedens skyld. □

Observation. For et træ $T = (V, E)$ findes der for vilkårlige to forskellige knuder $u, v \in V$ præcis en (u, v) -vej. Hvis der i en graf $G = (V, E)$, for vilkårlige to forskellige knuder $u, v \in V$, findes præcis en (u, v) -vej, så er G et træ.

Bevis. Et træ er sammenhængende, og altså findes for vilkårlige $u, v \in V$ en (u, v) -vej. Lad $u, v \in V$ være to forskellige knuder, og antag, for et indirekte bevis, at der findes to forskellige (u, v) -veje i grafen T ; der findes (mindst) én kant $e = xy$, som forekommer i præcis én af (u, v) -vejene, og ved at sætte den ene vej efter den anden læst baglæns (kun et eksemplar af hver sammensætningsknode) fås en lukket vandring, hvori kanten e forekommer præcis 1 gang. Fjernes kanten $e = xy$ fra denne lukkede vandring fås en (x, y) -vandring, der ikke benytter kanten e , og der findes derfor ifølge lemmaet i afsnit 4.3 en (x, y) -vej, der ligeledes ikke benytter e ; indsættes kanten e heri fås en kreds, hvilket strider mod, at der ikke findes kredse i T .

Antag nu omvendt, at der for vilkårlige $u, v \in V$ findes præcis en (u, v) -vej. Dette medfører, at G er sammenhængende. En eventuel kreds i G ville give anledning til to forskellige (u, v) -veje mellem to forskellige knuder u, v , der indgår i kredsen (»hver sin vej rundt« i kredsen). ■

4.7 Bipartite, eller todelte, grafer. I en række situationer er der i en graf en naturlig skelnen mellem to typer knuder, og grafen har kun kanter fra en knude af den ene type til en knude af den anden type. En sådan todeling af knudemængden giver grafen vigtige egenskaber, og gør det ofte lettere at argumentere for en todelte graf end for en generel graf.

Definition. En graf $G = (V, E)$ kaldes **bipartit**, eller **todelt**, hvis knudemængden V kan opdeles $V = V_1 \cup V_2$ i to ikke-tomme, disjunkte mængder V_1, V_2 således, at for enhver kant $uv \in E$ i G gælder, $u \in V_1$ og $v \in V_2$, eller omvendt.

Bemærk, at begge knudedelmængder kræves ikke-tomme; dette er måske delvis en smags-sag. Den afgørende bipartithedsbetingelse er, at der ikke er interne kanter indenfor hver af de to knudedelmængder, så den eneste graf, der udelukkes ved dette krav, er den trivielle graf.

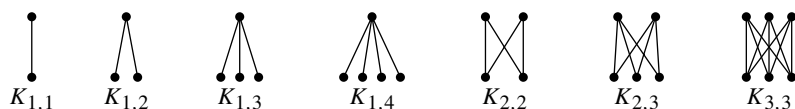
Begge grafer med 2 knuder er bipartite, med 1 knude i hver del. Endvidere er K_2 den eneste komplette graf, der er bipartit: en graf med en K_3 -delgraf er nemlig ikke bipartit. Den eneste graf med 3 knuder, der ikke er bipartit er $K_3 = C_3$. Vejgraferne P_n er bipartite, for alle $n \geq 2$. Dette følger – de er træer – af observationen nedenfor. Endvidere gælder, at kredsgraferne C_n ($n \geq 3$) er bipartite hvis og kun hvis n er lige. Det er nemlig klart, at en kreds af lige længde er

bipartit: knuderne fordeles blot med hveranden i V_1 , og de øvrige i V_2 . At omvendt en kredsgraf af ulige længde *ikke* er bipartit kan ses ved at prøve efter, eller af karakteriseringen senere i afsnittet.

Observation. *Ethvert træ med 2 eller flere knuder er bipartit.*

Bevis. Induktion efter antallet $n = |V|$ af knuder i træet $T = (V, E)$. Induktionsstarten, $n = 2$, er klar: benyt opdelingen $V = V_1 \cup V_2$ med én knude i hver af mængderne V_1, V_2 . Induktionsskridtet godtgøres med et »blad«-argument: Antag $n \geq 3$, og, at alle træer med $n - 1$ knuder er bipartite (dette er induktionsantagelsen). Vælg en knude v af valens 1 og lad u betegne den med v forbundne knude; grafen T' , der fås af T ved at fjerne v og kanten til v er et træ, se lemma 2 i det foregående afsnit, med $n - 1$ knuder, og derfor bipartit; lad den disjunkte opdeling af $V \setminus \{v\} = V'_1 \cup V_2$ være valgt så $u \in V_2$; tilføjes v til V'_1 , altså $V_1 = V'_1 \cup \{v\}$, fås, som det let ses, en todeling af V , hvor alle kanter forbinder en knude i V_1 med en knude i V_2 . ■

Komplet-bipartite grafer. Hvis en mængde af knuder V er delt $V = V_1 \cup V_2$ i to ikke-tomme disjunkte delmængder V_1, V_2 , definerer mængden af *samtlige par*, af en knude $u \in V_1$ og en knude $v \in V_2$, som kantmængde, en bipartit graf. Den kaldes den **komplet-bipartite graf med knudemængder** V_1, V_2 . Når der ses bort fra selve knudemængderne V_1, V_2 betegnes med $K_{n,m}$ den komplet-bipartite graf med n og m knuder i de to knudedelmængder. Tegningerne her viser de første små $K_{n,m}$ -grafer, hvor det underforstås, at knudernes lodrette placering markerer deres delmængdetilknytning (den ene delmængde har knuderne foroven, den anden forned).



Nedenstående resultat om bipartite grafer er en såkaldt *karakterisering*², her af egenskaben *at være en bipartit graf*; dermed menes en *omformulering* af denne egenskab til en anden, der selvom den ser ud til at have et *ændret indhold*, ved nærmere eftersyn – og dette foregår i beviset – faktisk ses at have samme indhold som den første.

Sætning. *En graf med to eller flere knuder er bipartit hvis og kun hvis den ikke har kredse af ulige længde.*

Bevis. Antag først, at den foreliggende graf er bipartit, med opdelingen $V = V_1 \cup V_2$ af knudemængden, og lad der være givet en kreds heri, fx bestemt ved knuderne v_1, v_2, \dots, v_n (er der ingen kredse er der jo specielt ingen af *ulige* længde, som påstået). Det skal godtgøres, at n er lige. Kredsen består af kanterne: $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n$ samt $v_n v_1$; antag, fx, at $v_1 \in V_1$ (tilfældet $v_1 \in V_2$ behandles analogt). Bipartitheden sikrer, da grafen indeholder de angivne kanter, at først $v_2 \in V_2$, dernæst $v_3 \in V_1$, og således videre, altså, at $v_i \in V_1$ for i ulige, og $v_i \in V_2$ for i lige; på den anden side giver eksistensen af kanten $v_n v_1$, at $v_n \in V_2$ da $v_1 \in V_1$, altså n lige som ønsket.

Antag nu omvendt, at den givne graf er uden kredse af ulige længde; det skal vises, at den er bipartit. Alle (eventuelle) kanter er kanter i de sammenhængskomponenter af grafen, der består af 2 eller flere knuder. Det er idéen at foretage opdeling i to dele af knudemængderne for hver sammenhængskomponent, og stykke disse todelinger sammen til en todeling af V .

Derfor betragtes først en *sammenhængende* graf $G = (V, E)$, med $|V| \geq 2$, hvori alle (eventuelle) kredse har lige længde (dvs. antal indgående kanter, eller knuder); en sådan graf er *bipartit*, da den har en opdeling af knudemængden som krævet ved bipartithed. Beviset for dette føres ved induktion efter antallet k af kredse i $G = (V, E)$. Induktionens start, altså tilfældet $k = 0$, at hvert træ med 2 eller flere knuder er bipartit, følger af observationen ovenfor.

²Hovedresultatet i det foregående afsnit – se bemærkningen – er også en karakterisering. Matematikere har et passioneret forhold til karakteriseringer. Som i andre brancher er det dog ikke altid kun kærlighed, der driver værket!

Nu til induktionsskridtet: Lad $G = (V, E)$ være en sammenhængende graf med $|V| \geq 2$ og $k > 0$ kredse, alle af lige længde, og antag, at enhver sammenhængende graf med mindst 2 knuder og højst $k - 1$ kredse, der alle er af lige længde, er bipartit – dette er induktionsantagelsen.

Antagelsen om G sikrer, at der findes en kant, som indgår i en kreds (med et lige antal kanter og knuder); lad uv være en sådan kant, og lad $G' = (V, E \setminus \{uv\})$ være hjælpegrafen, der fås fra G ved at fjerne kanten uv . Denne graf G' er sammenhængende og den har færre end k kredse: Det første skyldes, at kanten uv indgår i en kreds, og derfor ikke er afgørende for sammenhæng (en vej, hvori kanten uv indgår, kan »omdirigeres den anden vej rundt« i kredsen, se eksemplet i afsnit 4.5). Det andet er ligeledes klart, da kun de kredse i G , hvori kanten uv ikke indgår, er kredse i G' , og uv indgår jo ifølge antagelsen i mindst én kreds i G . Det er videre klart, at eventuelle kredse i G' også er kredse i G og derfor har lige længde. Ifølge induktionsantagelsen kan V derfor opdeles $V = V_1 \cup V_2$ i to disjunkte mængder V_1, V_2 , så alle kanter uv i G' har endeknuderne fordelt $u \in V_1$ og $v \in V_2$, eller omvendt. En sådan opdeling er også en todeling for grafen $G = (V, E)$; dette kræver nemlig blot yderligere, at hvis $u \in V_1$, så gælder $v \in V_2$. Antag, at $u \in V_1$. Ifølge valget af uv , som kant i en kreds (af lige længde), findes jo en sekvens $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n)$ af parvis forskellige knuder (knuderne i en kreds hvori uv indgår), hvor n er lige, og så

$$u = v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n = v$$

danner en vej fra u til v . Kanterne $v_j v_{j+1}$, for $j = 1, 2, \dots, n - 1$, er jo kanter i G' , som er bipartit, med knudemængdetodeling $V = V_1 \cup V_2$, og derfor, da $v_1 \in V_1$, gælder induktivt, at $v_j \in V_1$, når j er ulige, og $v_j \in V_2$, når j er lige; specielt er altså $v = v_n \in V_2$, da n er lige.

For hver sammenhængskomponent af G bestemmes dermed en todeling af den pågældende komponents knudemængde, og komponenternes todelinger giver en todeling af den fulde knudemængde $V = V_1 \cup V_2$. Her sættes V_1 til foreningsmængden af eventuelle isolerede knuder, og af én af todelingsknudemængderne for hver komponent, der ikke blot består af en enkelt knude, og V_2 sættes til foreningsmængden af den anden todelingsknudemængde for de pågældende komponenter. Dette giver en todeling, da der ikke findes kanter mellem forskellige komponenter. ■

Bemærkning. Betingelsen, at grafen *ikke* har kredse af ulige længde, kan være opfyldt dels ved, at der slet ikke findes kredse – så er der heller ingen kredse af ulige længde – eller grafen kan indeholde kredse, men alle sådanne har lige længde. Resultatet omfatter det allerede kendte (og i bevist benyttede), at hvert ikke-trivielt træ er bipartit: da der i et træ ikke findes kredse, findes der naturligvis heller ikke kredse af ulige længde. (Sammenhængen spiller ingen rolle her!) □

4.8 Isomorfi og komplement. Man kan *ikke* tale om en konkret graf uden at have *navne* for knuderne, og enhver computerbehandling af en graf forudsætter en passende *repræsentation* af grafens objekter via datastrukturer, der i det mindste udmærker sig ved deres placering i computers lager (deres »variabelnavne«) ved afvikling af algoritmer, der behandler grafen. På den anden side er de navne, der bruges til at referere til graferes knuder og kanter delvis irrelevante: mange forhold for grafer afhænger kun af grafernes *overordnede form*. For de tegninger, hvormed grafer illustreres, er tilsvarende kun visse *strukturelle træk* vigtige. Mange forskellige tegninger illustrerer *den samme graf*. Disse »tågede« overvejelser præciseres via begrebet: grafisomorfi.

Definition. Lad $G = (V, E)$ og $H = (W, F)$ være grafer. En bijektiv afbildning $\phi : V \rightarrow W$ kaldes en **isomorfi af G på H** , hvis det for alle $u, v \in V$ gælder, at u og v er kantforbundne i G , altså $uv \in E$, hvis og kun hvis billedknuderne $\phi(u), \phi(v) \in W$ er kantforbundne i H , altså $\phi(u)\phi(v) \in F$. Hvis der findes en isomorfi ϕ af G på H siges graferne $G = (V, E)$ og $H = (W, F)$ at være **isomorfe**.

Den afgørende egenskab for den bijektive afbildning ϕ kan løst formuleres, at ϕ »bevarer kanter«. Alle *grafteoretiske forhold* bevares af en isomorfi, og de er altså ens for to *isomorfe*

grafer, blot på nær navne på knuder, og den konkrete art af kanter. Som eksempler på sådanne grafteoretiske forhold kan nævnes, at to isomorfe grafer har samme antal knuder, og samme antal kanter, og samme valensprofil, og samme antal sammenhængskomponenter, og samme antal og længder af kredse (forstået passende), og der er mange, mange andre.

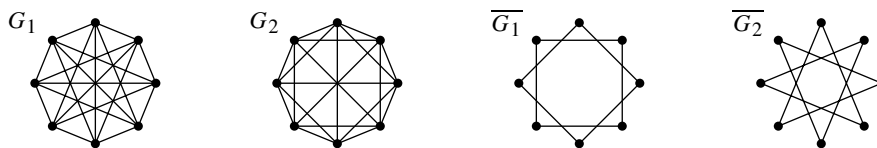
Bemærkning. Grafisomorfi giver anledning til en *ækvivalensrelation* på mængden af grafer (to grafer står i relationen til hinanden hvis og kun hvis de er isomorfe). For det meste studeres en graf G kun *på nær isomorfi*, hvilket præcist betyder, at de udsagn, der bevises om G , faktisk gælder for alle grafer, som er isomorfe med G . \square

Bemærkning. Er der forelagt to grafer $G = (V, E)$ og $H = (W, F)$ kan det vises, at de er isomorfe ved at angive en bijektiv afbildning, der opfylder betingelsen i definitionen ovenfor, eventuelt kan samtlige bijektive afbildninger af V på W prøves efter; hvis én opfylder isomorfibetingelsen er de to grafer isomorfe; hvis ingen gør det, er de ikke isomorfe. I kantmatrixsprog, se afsnit 4.2, drejer det sig om at permutere knuderne i den ene graf, og udføre den tilsvarende permutation af rækker og søjler i kantmatricen, så de to grafer derved får samme kantmatrix. Ulempen ved disse metoder er at arbejdet kan være enormt, også selvom resultatet er afkræftende. Ofte kan det lettere godtgøres, at to grafer *ikke er isomorfe*, ved at påpege et strukturelt træk, der *ikke* er fælles for graferne, men ville være det, hvis de var isomorfe. \square

Definition. Lad $G = (V, E)$ være en graf. Grafen $\overline{G} = (V, \overline{E})$, med samme knudemængde som G , og hvor kantmængden \overline{E} består af netop de »ikke-realiserede« kantmuligheder i E , kaldes **komplementet til G** , eller den til G **komplementære graf**.

Definitionen skal forstås på følgende måde: for to forskellige knuder $u, v \in V$ gælder, at $uv \in \overline{E}$ hvis og kun hvis $uv \notin E$, dvs. u og v er kantforbundne i $\overline{G} = (V, \overline{E})$ hvis og kun hvis u og v ikke er kantforbundne i $G = (V, E)$. Eller: grafen $\overline{G} = (V, \overline{E})$ fås fra grafen $G = (V, E)$ ved at danne den *komplette graf* på knudemængden V , og derfra fjerne kanterne tilhørende E .

Eksempel 1. Graferne G_1 og G_2 nedenfor har begge 8 knuder og 20 kanter – alle knuder har valens 5. Afklaring af om de to grafer er isomorfe er dermed ganske omstændeligt. To grafer er imidlertid isomorfe hvis og kun hvis deres komplement er isomorfe (overvej!), og komplementerne til G_1 og G_2 , vist nedenfor til højre, er *ikke isomorfe*: det ene komplement består af to disjunkte 4-kredse, medens det andet komplement er en 8-kreds. \square



Eksempel 2: Grafer med 4 knuder. For en knudemængde V , med $|V| = 4$, er der 6 kantmuligheder, og derfor $2^6 = 64$ grafer, alle vist nedenfor, af ialt 11 forskellige isomorfityper.

På tegningen er graferne angivet med 6-bit-koder, der fx kan læses som tallene 0, 1, 2, ..., 63 skrevet binært, eller som en *bitmap* over de indgående kanter. De 6 bit, læst fra venstre mod højre, koder kanterne i rækkefølgen: NV-SØ, SV-NØ, SV-NV, SV-SØ, NØ-SØ, og NV-NØ.

Der er 1 graf med $|E| = 0$ (uden kanter). Der er 6 grafer, indbyrdes isomorfe, med $|E| = 1$, bestående af en kant og 2 isolerede knuder.

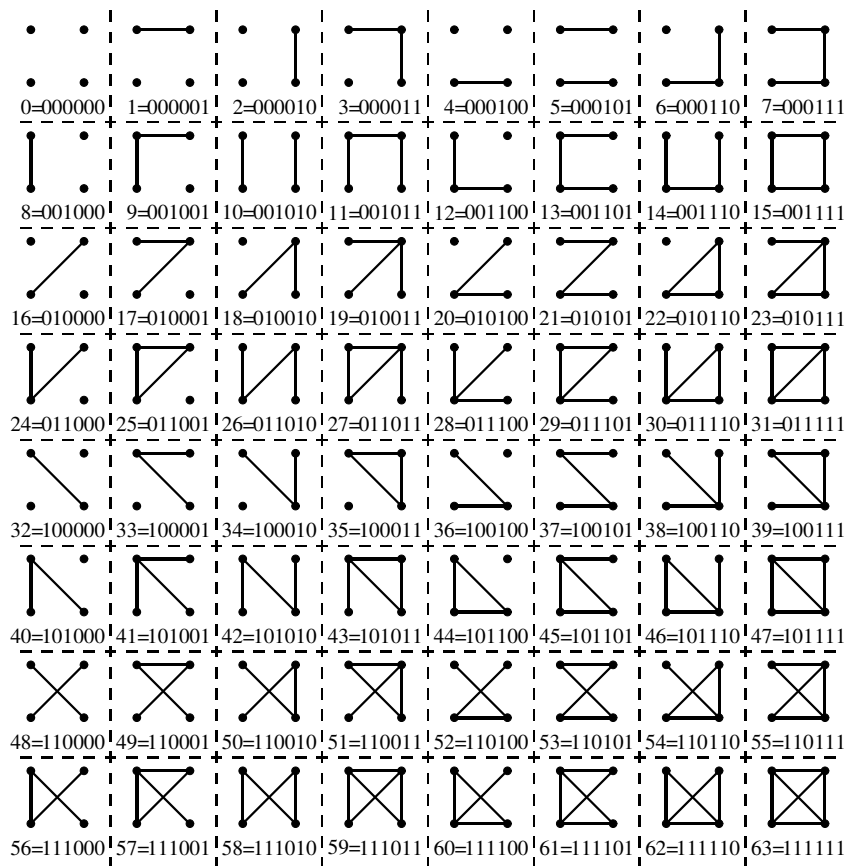
Der er 15 grafer med $|E| = 2$, af to isomorfityper; dels 3 grafer med to disjunkte kanter, dvs. grupperinger af knuderne i to par; dels 12 vejgrafer af længde 2 (og 3 knuder) med 1 isoleret knude, med 4 valg af den isolerede knude, og for hver sådan, ved valget af midterknude på 3-vejen.

Der er 20 grafer med $|E| = 3$, af tre isomorfityper; dels 4 kredsgrafer af længde 3 med 1 isoleret knude, bestemt ved den isolerede knude; dels 4 grafer af type $K_{1,3}$, en »3-stjerne«, hver bestemt ved sin knude af valens 3; dels 12 vejgrafer af længde 3 (og 4 knuder), hver bestemt ved

valget af de to midterknuder, og for hvert af disse valg, rækkefølgen af de to endeknuder. (De to sidstnævnte isomorfityper er *træerne* med 4 knuder.) Komplementet til en 3-kreds er af type $K_{1,3}$ (naturligvis med samme antal grafer), og komplementet til en vejgraf er igen en vejgraf, se fx graferne 7 og 56. (Er det et tilfælde, at numrene har sum 63?)

Der er 15 grafer med $|E| = 4$, af to isomorfityper; dels 3 kredsgrafer af længde 4, fastlagt (efter navngivning 1, 2, 3, 4) ved hvilken knude blandt 2, 3, 4, der står overfor 1; dels 12 grafer af type K_3 med en supplementskant, hver bestemt ved dens indeholdte K_3 (4 muligheder), og for hver af disse, hvilken af de 3 knuder i denne K_3 , som den fjerde knude er forbundet til. Komplementet til en 4-kreds er to løse kanter, se fx graferne 5 og 58, med 3 grafer af hver type.

Der er 6 grafer med $|E| = 5$, der alle er af type: K_4 med én kant fjernet (eller en 4-kreds med en *diagonal* tilføjet); komplementet er naturligvis den fjernede kant. Og der er 1 graf med $|E| = 6$, af type K_4 , og med den tomme graf som komplement.



Hver af de 11 isomorfityper af grafer med 4 knuder er fastlagt ved dens valensprofil; dette gælder *ikke* for grafer med 5 eller flere knuder. Bemærk videre, at graferne her med 4 eller flere kanter alle er sammenhængende, og indeholder mindst én kreds. □

Opgaver

(4.1) Tegn grafen $G = (V, E)$ med knudemængde $V := \{2, 3, \dots, 9, 10\}$, hvor $u, v \in V$, med $u \neq v$, er kantforbundne, hvis og kun hvis u og v ikke er primiske. Er G sammenhængende?

(4.2) Angiv alle grafer med 1, 2, og 3 knuder.

(4.3) Hvor mange grafer er der på en mængde V af n knuder? Hvor mange kredse af længde m , og veje af længde $m - 1$, findes der i den fuldstændige graf med knudemængde V ?

(4.4) Find de to mindste, dvs. med færrest knuder og færrest kanter, ikke-isomorfe grafer med samme valensprofil. (Vink: Der skal 5 knuder til.)

(4.5) Betragt grafen $G = (V, E)$, hvor knudemængden består af 2-delmængderne af en mængde på 5 elementer, fx tallene $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (der er $\binom{5}{2} = 10$ sådanne 2-delmængder), og hvor to forskellige af knuderne u, v er kantforbundne hvis og kun hvis de pågældende to 2-delmængder er disjunkte. Gør rede for, at alle knuder har samme valens, og angiv denne. Lav dernæst en tegning af G . Grafen kaldes *Petersen-grafen*, efter den danske matematiker *Julius Petersen*.

(4.6) Beskriv udseendet af kantmatricen for en stjernegraf (præcist en $K_{1,m}$ graf), en kreds, en vej! Det kan måske være en fordel at vælge en passende indicering af knuderne.

(4.7) Angiv den maksimale længde af en kreds i en bipartit graf med m og n knuder i todelingsmængderne ($m, n \geq 1$).

(4.8) Vis, at et ikke-trivielt træ har mindst to blade.

(4.9) Bestem de naturlige tal n for hvilke der findes et træ med n knuder således at også komplementgrafen er et træ (med n knuder). Angiv for hver funden værdi af n alle sådanne træer.

(4.10) Vis, at enhver knude i en sammenhængende graf, med to eller flere knuder, har positiv valens (altså valens ≥ 1).

(4.11) Lad $G = (V, E)$ være en sammenhængende graf. For vilkårlige to knuder $u, v \in V$, hvor $u \neq v$, findes en *korteste vej* fra u til v , og ved at sætte $d(u, v)$ til længden af en korteste vej fra u til v , når $u \neq v$, og $d(u, u) = 0$ for alle $u \in V$, defineres en funktion $d : V \times V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$. Vis at d er en *metrik*, altså $d(u, v) \geq 0$, og kun $= 0$ når $u = v$; $d(u, v) = d(v, u)$ for alle $u, v \in V$; og *trekantsuligheden* $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ for alle $u, v, w \in V$.

(4.12) Vis, at en sammenhængende graf, hvor alle knuder har valens 2, er en kredsgraf.

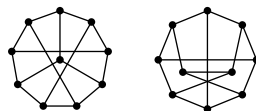
(4.13) Antag, for et naturligt tal n , at der findes en graf $G = (V, E)$, med $|V| = n$ knuder, og som er isomorf med sin komplementgraf $\overline{G} = (V, \overline{E})$. Vis, at n er kongruent med 0 eller 1 modulo 4. Angiv for $n = 4$ én graf G , og $n = 5$ to ikke indbyrdes isomorfe grafer G , der hver er isomorfe med deres komplement. Prøv også med $n = 8$ og $n = 9$.

(4.14) Vis, at der i et træ er 3 blade hvis og kun hvis der i træet findes en knude af valens ≥ 3 . Gælder tilsvarende, at der i et træ er 4 blade hvis og kun hvis der findes en knude af valens ≥ 4 ?

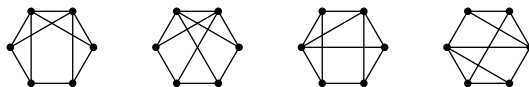
(4.15) Vis, at hvis der i en graf findes en ikke-tom lukket vandring, så findes der for hver knude u på denne vandring en ikke-tom lukket vandring, der starter og slutter i u .

(4.16) Vis, at en sammenhængende graf med n knuder har $n - 1$ eller flere kanter.

(4.17) Undersøg om graferne her er isomorfe:



(4.18) Undersøg om graferne her er isomorfe:



Kapitel 5

Trætælling

I dette kapitel er et træ – ligesom i kapitel 4 – en *sammenhængende graf uden kredse*, men ved siden af den underliggende træstruktur er vi interesserede i, hvor de enkelte, indbyrdes sknelige, knuder er anbragt i træet. Her er det nærliggende at benytte afsnit af den naturlige talrække, altså mængder af formen $\{1, 2, \dots, n\}$, for et $n \in \mathbb{N}$, som *standardknuder*.

Hovedresultatet er, at antallet af træer, hvis knudemængde er et sådant afsnit af den naturlige talrække, er n^{n-2} ; dette tællerresultat kaldes *Cayleys formel*, og det er i tidens løb bevist med en række forskellige metoder.

En naturlig idé til et bevis er at forsøge at tælle træer med en given *valensvektor*, dvs. med et foreskrevet sæt af knudevalenser, og bestemme antallet af træer ved at addere de fundne antal for alle mulige valensvektorer. Dette gennemføres som første hovedemne i kapitlet, hvilket samtidig giver anledning til at genopfriske bekendtskabet med multinomialkoefficienter.

Et træ med knudemængden $\{1, 2, \dots, n\}$, for et $n \in \mathbb{N}$, kan naturligvis specificeres via listen, af længde $n - 1$, af træets *kanter*. En mere økonomisk specifikation af sådanne træer kan ske via *Prüfer-koder*, der er ord af længde $n - 2$ skrevet i *bogstaverne* $\{1, 2, \dots, n\}$, hvor gentagelser som sædvanlig er tilladte. Kapitlets andet hovedemne er disse Prüfer-koder, deres beregning, og konstruktion af træet med en forelagt Prüfer-kode, især hvorledes strukturen af et træ afspejles i træets Prüfer-kode. Prüfer-koder giver supplerende indsigt i Cayleys formel, og kan faktisk benyttes til et bevis for den.

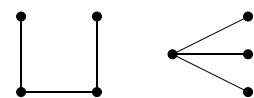
5.1 Træer med en fast knudemængde. For at få fornemmelse for, hvad der ligger i synspunktet at benytte en mængde af formen $\{1, 2, \dots, n\}$ som standardknuder for de betragtede træer diskuteres først små træer, med op til 4 knuder.

Eksempel. Der er 1 træstruktur med $n = 1$ knude, nemlig det *tomme træ*, uanset beskaffenheden af den ene knude. Dermed er der præcis ét træ med knudemængde $\{1\}$.

Der er ligeledes 1 træstruktur med $n = 2$ knuder, nemlig grafen, hvis kantmængde består af den eneste mulige kant mellem de to knuder. Med knudemængde $\{1, 2\}$ er der derfor præcis ét træ, nemlig træet med den ene kant¹ $\overline{12}$.

For $n = 3$ knuder er der fortsat kun én mulig træstruktur, nemlig et vejtræ med 3 knuder (og længde 2), men dette træ kan bygges med knuderne $\{1, 2, 3\}$ på 3 forskellige måder, hvor forskelligheden præcist ytrer sig i, at de tilsvarende lister af kanter er forskellige. Løst sagt kommer det ud på, hvilken af knuderne, der er midterknude: med 1 som midterknude fås kantmængden $\{\overline{12}, \overline{13}\}$, med 2 som midterknude fås kantmængden $\{\overline{12}, \overline{23}\}$, og med 3 som midterknude fås kantmængden $\{\overline{13}, \overline{23}\}$.

For $n = 4$ knuder er situationen lidt sjovere! Der er 2 forskellige træstrukturer for træer med 4 knuder, se kapitel 4, nemlig dels et vejtræ med 4 knuder (og længde 3), dels et stjernetræ med 4 knuder, eller mere præcist, en graf af type $K_{1,3}$. Disse er vist her:



¹Dette kapitel benytter, for at undgå forveksling med decimaltal, en særlig overstregnotation for kanter: kanten mellem i og j , hvor $i \neq j$ er *ciffersymboler*, betegnes \overline{ij} ; dette virker naturligvis kun når $n \leq 9$.

Når knuderne konkretiseres til $\{1, 2, 3, 4\}$, giver dette anledning til et nogenlunde stort antal forskellige træer. Trætypen til højre er lettest at overskue: der er ialt 4 forskellige træer af denne type bygget på knuderne $\{1, 2, 3, 4\}$, nemlig ét for hvert valg af knude af valens 3; overvej selv, at uanset hvordan de tre øvrige knuder placeres fås samme kantmængde. Trætypen til venstre kan bygges på 12 forskellige måder. Dette kan fx ses ved at bemærke, at der er $4! = 24$ rækkefølger af de 4 knuder langs den til træet svarende vej, og to forskellige rækkefølger giver samme kantmængde, hvis og kun hvis den ene rækkefølge er den modsatte af den anden rækkefølge, altså $24/2 = 12$ måder.

Samlet fås altså for $n = 4$ ialt $16 = 4 + 12$ forskellige træer; det ses, at de hidtil indsamlede data stemmer overens med den indledningsvis nævnte Cayleys formel. På den anden side er også behovet for en systematisk fremgangsmåde for optællingen blevet tydeligt! \square

5.2 Træer med given valensvektor. I fortsættelse af den konkrete optælling i eksemplet ovenfor, hvor optællingen for $n = 4$ skelnede mellem træernes struktur – dette begreb er dog for store træer ganske diffust – forsøges her en opdeling af tælleopgaven i delopgaver, svarende til de pågældende træers *knudevalenser*.

Definition. Lad $n \in \mathbb{N}$. **Valensvektoren** for et træ² med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$ er n -tuplet af knudevalenser: $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, hvor δ_k er valensen af knuden k , for $k = 1, 2, \dots, n$.

Som sædvanlig er tilfældet $n = 1$ særligt – men let overskueligt, og ret uinteressant – og i det følgende antages altid, at $n \geq 2$. Denne forudsætning giver specielt, at alle knuder har positiv valens (der er kanter til alle $n \geq 2$ knuder); da et træ med n knuder har $n - 1$ kanter, og hver kant bidrager med 2 »valenser«, fås umiddelbart:

Observation. Valensvektoren for et træ med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$, hvor $n \geq 2$, har positive hele tal som elementer, og summen af elementerne er $2n - 2$. \blacksquare

Eksempel 1. For $n = 2$ er der jo kun 1 træ, og derfor kun 1 mulig valensvektor, nemlig $(1, 1)$. For $n = 3$ er der 3 træer med knudemængde $\{1, 2, 3\}$, og de tilsvarende valensvektorer er: $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, og $(1, 1, 2)$, hvor knuden med valens 2 er midterknuden i træet. I disse tilfælde er hver valensvektor altså valensvektoren for et entydigt bestemt træ.

Lad $n = 4$. Valensvektoren for et stjernetræ består af tre gange 1, og én gang 3, med 3 placeret på centerknudens nummer, og den er altså valensvektor for et entydigt bestemt træ. Et vejtræ på $\{1, 2, 3, 4\}$ har valensvektor med to gange 2 og to gange 1, og der er ialt 6 sådanne vektorer; det ses heraf, at en valensvektor *ikke* i alle tilfælde er valensvektor for et entydigt bestemt træ. \square

Sætning. Lad (d_1, d_2, \dots, d_n) , for et naturligt tal $n \geq 2$, være et n -tupel af positive hele tal d_i med sum $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$. Antallet af træer med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$, for hvilke knude i har valens d_i , for $i = 1, 2, \dots, n$, er givet ved multinomialkoefficienten:

$$\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1}. \quad (5.1)$$

Tallet i (5.1) udtrykker det søgte antal træer som en multinomialkoefficient med n tal forneden, hvor disse fås fra de givne d_i 'er, ved at trække 1 fra hver af dem. Summen af tallene forneden er, fordi summen af d_i 'erne ifølge antagelsen er $2n - 2$, netop $2n - 2 - n = n - 2$, altså tallet foroven i multinomialkoefficienten, der således er korrekt formet, og dens værdi er dermed:

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdot (d_2-1)! \cdot \dots \cdot (d_n-1)!}$$

²Begrebet *valensvektor* har god mening for en vilkårlig graf på $\{1, 2, \dots, n\}$ og ikke blot for træer!

Bevis. Der benyttes induktion efter n .

Starttilfældet, for $n = 2$, er næsten færdigbehandlet via eksemplerne ovenfor. Der findes netop ét 2-tupel af positive hele tal (d_1, d_2) med elementsum $d_1 + d_2 = 2 \cdot 2 - 2 = 2$, nemlig givet ved $d_1 = d_2 = 1$. Dette 2-tupel er altså det eneste som påstanden i sætningen vedrører, og det er umiddelbart, at den anførte multinomialkoefficient i dette tilfælde er $\binom{2-2}{1-1, 1-1} = \binom{0}{0,0} = 1$, hvilket stemmer med, at der er præcis 1 træ med knuderne $\{1, 2\}$ og valensvektor $(1, 1)$.

Nu til induktionsskridtet. Lad der være givet et n -tupel (d_1, d_2, \dots, d_n) af positive hele tal med sum $2n - 2$. Det drejer sig om at tælle træerne med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$ og med (d_1, d_2, \dots, d_n) som valensvektor. Det antages, at det for et vilkårligt $(n - 1)$ -tupel af positive hele tal med sum $2(n - 1) - 2$ gælder, at antallet af træer med knudemængde $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ og med dette $(n - 1)$ -tupel som valensvektor er givet ved den tilsvarende multinomialkoefficient (5.1).

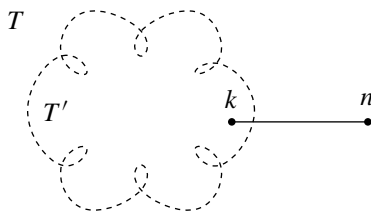
Idéen i beviset er, under forudsætningen, at $d_n = 1$, at lede efter træer af formen: et træ med knudemængde $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ suppleret med en kant fra én af disse knuder, fx k , til n , således, at det derved dannede træ på knudemængden $\{1, 2, \dots, n\}$ samlet set har de rigtige knudevalenser. Antallet af relevante træer på knudemængden $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ er via induktionsantagelsen en multinomialkoefficient, og det søgte antal er, idet k gennemløber de mulige sammensætningsknuder, en sum af multinomialkoefficienter, der ved brug af rekursionsformelen for multinomialkoefficienter, se afsnit 3.9, udtrykkes som en enkelt multinomialkoefficient.

Det er på forhånd *uvist om* der overhovedet er sådanne træer, så det vides altså *ikke* om (d_1, d_2, \dots, d_n) faktisk er en valensvektor for et træ med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$. (Man kan tænke på d_j 'erne som »forsøgs«-valenser!) Vi går frem i en række skridt.

1. Mindst ét af tallene d_j er $= 1$ (hvilket gælder, hvis (d_1, d_2, \dots, d_n) er en valensvektor, men dette vides endnu ikke!). Tallene d_j er positive hele tal, og antages, for et indirekte argument, at alle tallene d_j er ≥ 2 , fås, at deres sum er $\geq 2 \cdot n$, men summen er forudsat $= 2n - 2$.

2. Det antages, primært for at få simple betegnelser, at $d_n = 1$; hvis det om det givne n -tupel gælder, at $d_n > 1$, så betragtes i stedet n -tuplet med d_n ombyttet med et af de d_j 'er for hvilke $d_j = 1$ (og et sådant findes som allerede vist). Denne ombytning påvirker *ikke* tællerresultatet. Antallet af træer for det modificerede n -tupel er nemlig det samme som antallet af træer for det oprindelige n -tupel, da denne ombytning definerer en bijektiv afbildning mellem de tilsvarende mængder af træer – og multinomialkoefficienten ændres ikke ved denne ombytning.

3. Lad os forsøge at danne et foreløbigt »billede« af et *eventuelt træ* med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$ og (d_1, d_2, \dots, d_n) som valensvektor. Da $d_n = 1$, er knuden n i et eventuelt sådant træ – hvis det findes – et blad, altså en knude med valens $= 1$, og derfor forbundet til en éntydigt bestemt af knuderne $\{1, 2, \dots, n - 1\}$.



Figuren ovenfor illustrerer »analysen«. Antages, at T er et sådant træ, så har knude n valens 1, og den med n forbundne knude er en af de andre, fx knude k . Tænkes kanten kn og knuden n fjernet fra træet T resterer en graf, på figuren kaldt T' i den stiplede »sky«, som – ifølge lemma 2, afsnit 4.8 – er et træ med knudemængde $\{1, 2, \dots, n - 1\}$, og disse knuders valenser i T' er næsten som de tilsvarende knuders valenser i T , bortset fra, at valensen af k i T' er 1 mindre end valensen af k i T (og knude n ikke findes i T'). Valensvektoren for T' , af længde $n - 1$, er $(d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1})$, hvor $d'_k = d_k - 1$, og $d'_j = d_j$ for alle $j = 1, 2, \dots, n - 1$, som opfylder $j \neq k$.

Derved er der en korrespondance mellem følgende to mængder:

A_k : træer med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$ og valensvektor (d_1, d_2, \dots, d_n) hvor $d_n = 1$, og hvor den entydigt bestemte, med n forbundne knude, er k , og

B_k : træer med knudemængde $\{1, 2, \dots, n-1\}$ hvis valensvektor $(d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1})$ opfylder $d'_k = d_k - 1$, og $d'_j = d_j$ for alle $j = 1, 2, \dots, n-1$, hvor $j \neq k$.

Denne korrespondance er bijektiv. To forskellige træer fra A_k giver ved fjernelse af kanten kn og knuden n to forskellige træer fra B_k , og hvert træ fra B_k kan fås på denne måde.

4. Nu vides det jo ikke hvilken af knuderne $\{1, 2, \dots, n-1\}$, som n er forbundet til; men mængden af træer, der ønskes optalt, er naturligvis foreningsmængden:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1},$$

(disse mængder er disjunkte) og da hver mængde A_k på grund af den nævnte bijektive korrespondance har samme elementantal som den tilsvarende B_k -mængde, er det søgte træantal

$$|B_1| + |B_2| + \dots + |B_{n-1}|.$$

(Visse af disse træmængder, faktisk mindst én, og ofte flere, er tomme, og de tilsvarende antal er derfor 0, se også nedenfor.) Hvert af træantallene $|B_k|$ kan imidlertid, med brug af induktionsantagelsen, udtrykkes ved en multinomialkoefficient: Det er antallet af træer med knudemængde $\{1, 2, \dots, n-1\}$ og valensvektor af formen $(d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1})$ (fra den givne »kandidat«-valensvektor (d_1, d_2, \dots, d_n) er det n 'te element fjernet, fra det k 'te element er trukket 1, og de øvrige er uændrede), altså udtrykt ved (d_1, d_2, \dots, d_n) :

$$|B_1| = \binom{(n-1)-2}{d_1-2, d_2-1, \dots, d_{n-1}-1}, \quad \dots, \quad |B_{n-1}| = \binom{(n-1)-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_{n-1}-2}.$$

5. Disse $n-1$ multinomialkoefficienter har en fælles opbygning, for $k = 1, 2, \dots, n-1$, nemlig baseret på den afkortede »kandidat«-valensvektor $(d_1, d_2, \dots, d_{n-1})$; fra hvert af elementerne her er trukket 1, dog på nær det k 'te element, som er reduceret med 2. Summen af disse multinomialkoefficienter er derfor, ifølge rekursionsformelen for multinomialkoefficienter, se afsnit 3.9, selv en multinomialkoefficient, med et tal foroven, der er øget med 1, og baseret på selve sættet $(d_1-1, d_2-1, \dots, d_{n-1}-1)$, altså

$$|B_1| + |B_2| + \dots + |B_{n-1}| = \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_{n-1}-1}. \quad (5.2)$$

Dette udtryk er næsten det påståede; multinomialkoefficienten i (5.2) har $n-1$ elementer fornedet, hvorimod multinomialkoefficienten i (5.1) har n elementer fornedet. De to multinomialkoefficienter er dog samme talværdi, fordi $d_n - 1 = 0$, da jo ifølge antagelsen $d_n = 1$. ■

Bemærkning. Det blev undervejs i beviset flere gange fremhævet, at det *ikke var* klart, hvorvidt der overhovedet findes træer med et forelagt n -tupel af positive hele tal, med sum $2n-2$, som valensvektor. Det er det til gengæld nu! Antallet af sådanne træer er nemlig, ifølge sætningen, bestemt som multinomialkoefficienten (5.1), og denne er med de anførte betingelser på d_j 'erne et *positivt* helt tal. □

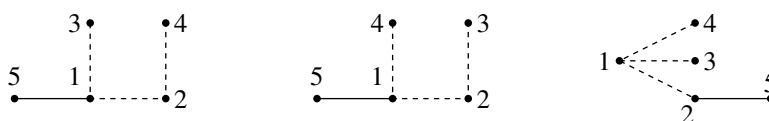
Eksempel 2. Det er instruktivt at se, hvordan sætningens optælling tager sig ud i et konkret tilfælde. *Hvor mange træer er der med knudemængde $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ og valensvektor $(3, 2, 1, 1, 1)$?* (Dette 5-tupel består af positive hele tal med sum $8 = 5 \cdot 2 - 2$, og elementet på 5'te plads er 1.)

Som i beviset opdeles mængden af sådanne træer efter hvilken af knuderne $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ som knude 5 er kantforbundet til. Tælleopgaven består på denne måde i addition af resultaterne

af optælling af træer med knudemængde $\{1, 2, 3, 4\}$ og »valensvektorer«, der fås af den givne valensvektor ved at fjerne det 5'te element, og successivt, for $k = 1, 2, 3, 4$, at reducere det k 'te af de øvrige elementer med 1 (anførselstegnene her skal minde om, at det ikke i alle tilfælde giver anledning til en rigtig valensvektor), altså

k	»valensvektor«	træer
1	(2, 2, 1, 1)	2
2	(3, 1, 1, 1)	1
3	(3, 2, 0, 1)	0
4	(3, 2, 1, 0)	0

Disse træantal for knudemængden $\{1, 2, 3, 4\}$ beregnes som visse multinomialkoefficienter, og de tilsvarende træer er allerede beskrevet i forbindelse med det tidligere eksempel. De resulterende træer med knudemængde $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ er vist nedenfor (træet på $\{1, 2, 3, 4\}$ er stipt):



Den tilhørende multinomialkoefficient er: $\binom{3}{2, 1, 0, 0, 0} = \frac{3!}{2! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} = 3$. \square

5.3 Cayleys formel. Den detaljerede optælling – i det foregående afsnit – af træer med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$ og forelagt valensvektor giver nu antallet af samtlige træer ved at lægge disse antal sammen for alle »mulige« valensvektorer.³ Denne addition udføres via multinomialformlen; resultatet⁴ kaldes *Cayleys formel*.

Sætning. Antallet af træer med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$ er n^{n-2} .

Bevis. Det er allerede bemærket, at antalsudtrykket er korrekt for $n = 1, 2$, så det antages herefter, at $n \geq 3$. Antallet af træer med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$ og en given valensvektor (d_1, d_2, \dots, d_n) er ifølge sætningen i afsnit 5.2 multinomialkoefficienten:

$$\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1},$$

og antallet $|\mathcal{T}_n|$ af *alle* træer med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$ er derfor summen af disse, hvor der summeres over samtlige valensvektorer, altså

$$|\mathcal{T}_n| = \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots, d_n) \\ \text{valensvektor}}} \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1}. \quad (5.3)$$

Dette drabelige udtryk er ikke så slemt som det ser ud! Et n -tupel (d_1, d_2, \dots, d_n) er en valensvektor hvis og kun hvis alle d_i 'erne er positive hele tal, og deres sum er $2n - 2$. Højre side i (5.3) kan derfor simplificeres, ved at erstatte d_i med $k_i + 1$, for $i = 1, 2, \dots, n$, til

$$\sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0 \\ \text{hele tal med sum } n-2}} \binom{n-2}{k_1, k_2, \dots, k_n}, \quad (5.4)$$

³Det ændrer *ikke* resultatet, at et eller flere antal for umulige »valensvektorer« medtages: hvert sådant er 0.

⁴Efter A. Cayley (1821–1895); resultatet er fra 1889.

og denne sum er tidligere blevet beregnet til: n^{n-2} , se afsnit 3.8. ■

Eksempel. Hvilke n -tupler (k_1, k_2, \dots, k_n) indgår i additionen (5.4) fra beviset for sætningen?

Tallene k_i er ikke-negative hele tal, med sum $n - 2$, og antallet af n -tupler er således antallet af løsninger (k_1, k_2, \dots, k_n) , i ikke-negative hele tal, til ligningen: $k_1 + k_2 + \dots + k_n = n - 2$. Dette antal er tidligere, se afsnit 3.6, bestemt til binomialkoefficienten

$$\binom{(n-2) + n - 1}{n - 1} = \binom{2n - 3}{n - 1}.$$

For $n = 5$ er der således $\binom{7}{4} = 35$ led, der bidrager til summen; løsningerne, i ikke-negative hele tal (k_1, k_2, \dots, k_5) , til ligningen: $k_1 + k_2 + \dots + k_5 = 3$, falder naturligt i 3 typer: i den første er ét af k_i 'erne 3, og de øvrige 0 (ialt 5 sæt); i den anden er ét af k_i 'erne 2, og ét andet 1, og de øvrige 3 er 0 (ialt 20 sæt); i den tredje er 3 af k_i 'erne 1, de øvrige 2 er 0 (ialt 10 sæt). Summen er altså:

$$5 \cdot \binom{3}{3, 0, 0, 0, 0} + 20 \cdot \binom{3}{2, 1, 0, 0, 0} + 10 \cdot \binom{3}{1, 1, 1, 0, 0} = 5 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 6 = 125. \quad \square$$

5.4 Prüfer-kode for et træ. I dette afsnit vises, at hvert træ med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$, for $n \geq 3$, kan beskrives ved et ord af længde $n - 2$ skrevet i symbolerne $\{1, 2, \dots, n\}$, hvor det er underforstået, at samme symbol kan forekomme flere gange i et ord; indholdet af glosen *beskrives* er her, at der er en *bijektiv korrespondance* mellem mængden \mathcal{T}_n af træer med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$, og mængden af ord af længde $n - 2$ i bogstaverne $\{1, 2, \dots, n\}$, altså mængden $\{1, 2, \dots, n\}^{n-2}$. Disse træbeskrivelser kaldes *Prüfer-koder*,⁵ og eksistensen af denne bijektive korrespondance kan udnyttes til et andet bevis for Cayleys formel.

Bemærkning 1. For $n = 1$, og ligeledes for $n = 2$, er der netop ét sådant træ, og dermed ikke behov for en præcisere beskrivelse end angivelse af knudeantallet n . For $n = 3$ er der 3 sådanne træer, der hvert er præcist fastlagt ved specifikation af navnet på midterknuden (se afsnit 5.1) som faktisk er Prüfer-koden for det pågældende træ. □

Den nævnte bijektive korrespondance mellem træerne \mathcal{T}_n og ordene $\{1, 2, \dots, n\}^{n-2}$ er »konstruktiv« og eksplicit, og kan *implementeres* via to *algoritmer*, hvor den ene på basis af et forelagt træ $T \in \mathcal{T}_n$ beregner *koden* for T , og den anden, på basis af et forelagt ord, altså et element $\kappa \in \{1, 2, \dots, n\}^{n-2}$, beregner *træet* $T \in \mathcal{T}_n$, hvis tilhørende kode er κ .

Fremgangsmåden i den første algoritme, der konstruerer det til et træ hørende kodeord, er successivt at *vælge* en knude, derefter *fjerne* den og kanten til den, og undervejs registrere den ikke-fjernede endeknude for denne kant, og fortsætte hermed indtil et træ bestående af en enkelt kant, dvs. med præcis 2 knuder, resterer.

Algoritme 1: fra træ til Prüfer-kode. Lad T være et træ med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$, hvor $n \geq 3$. Algoritmen tager træet T som **input** og producerer som **output** et ord κ af længde $n - 2$ skrevet i bogstaverne $\{1, 2, \dots, n\}$. Processen begynder med at *initialisere outputordet* κ til det tomme ord, eller den **tomme liste**. Dernæst gennemføres nedenstående 1.–4.:

1. Find den mindste knude u i træet af valens 1. (Der findes mindst 2 knuder af valens 1.)

2. Lad v betegne den entydigt bestemte knude i træet som u er kantforbundet til.

3. Indsæt v bagest i listen κ , og fjern knuden u , samt kanten uv , fra træet. (Dette efterlader et træ med én knude og én kant færre end ved den nærmest foregående passage af punkt 1.; at restgrafen er et træ, følger af lemma 2 i afsnit 3.8.)

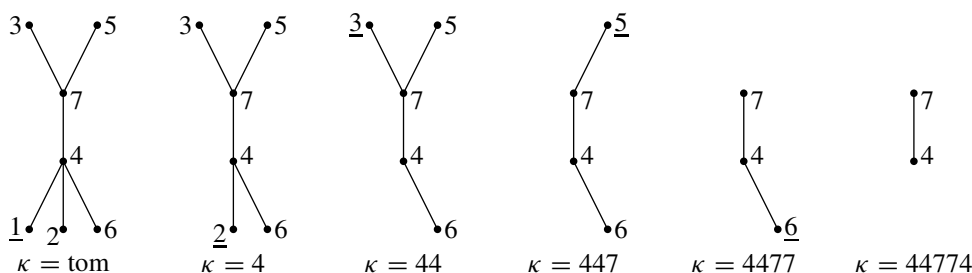
4. Hvis restgrafen er et træ med en enkelt kant, så STOP, ellers gentag processen fra 1., men nu anvendt på resttræet. (Hvert gennemløb af 1.–3. reducerer kantantallet, der til start var $n - 1$, med 1, så processen stopper!)

⁵Efter H. Prüfer (1896–1934), der 1918 benyttede disse koder til at give et bevis for Cayleys formel.

Hvert gennemløb af 1.–3. tilføjer et knudenavn til listen og fjerner en kant fra (listen af kanter i) træet, og processen fortsættes indtil kun en enkelt kant resterer, altså med præcis $n - 2$ gennemløb, altså med outputordet κ af længde $n - 2$.

Definition. For et træ $T \in \mathcal{T}_n$, hvor $n \geq 3$, kaldes det ved ovenstående algoritme 1 definerede ord $\kappa = \kappa(T) \in \{1, 2, \dots, n\}^{n-2}$, af længde $n - 2$ skrevet i bogstaverne $\{1, 2, \dots, n\}$, for **Prüfer-koden for træet T** .

Eksempel 1. For træet nedenfor til venstre, med knuderne $\{1, 2, \dots, 7\}$, findes Prüfer-koden skridtvis som antydnet på figurerne (med navnet på den mindste valens-1 knude understreget):



Dermed er Prüfer-koden for det givne træ: $\kappa = 44774$. \square

Det viser sig, at dette ord af længde $n - 2$ i bogstaverne $\{1, 2, \dots, n\}$, er en slags fingeraftryk⁶ for træet: et træ er entydigt bestemt ved sin Prüfer-kode, og det er relativt let at finde træet, der har et forelagt ord (af længde $n - 2$ i bogstaverne $\{1, 2, \dots, n\}$) som Prüfer-kode.

Bemærkning 2. Det er kun i første skridt af algoritme 1, at det behandlede træ har knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$; hvis den i første skridt fjernede knude er k , har resttræet knudemængde $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$. I de følgende overvejelser er det derfor nyttigt at anlægge et mere abstrakt synspunkt, hvor der betragtes træer, hvis knudemængde er et eller andet alfabet, hvis elementer er ordnede, så det har mening at vælge et mindste element med en vis egenskab, og hvor hvert skridt i algoritme 1 ovenfor benyttes til at producere, dels et bogstav fra (rest)alfabetet, dels et træ med én knude og tilhørende kant fjernet, altså med en knudemængde, der er en yderligere reduceret delmængde af det til start benyttede alfabet. \square

Lemma. Antag $n \geq 3$. For et træ T med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$ og Prüfer-kode $\kappa(T)$ forekommer knudenavnet k , for $k = 1, 2, \dots, n$, præcis $\delta_k - 1$ gange i ordet $\kappa(T)$. Specielt forekommer der i $\kappa(T)$ ikke navne på knuder af valens 1.

Bevis. Dette er vel næsten klart fra beskrivelsen af algoritme 1. Et induktionsargument går som følger. For $n = 3$, hvor Prüfer-koden er navnet på træets midterknude, eller knude af valens 2, er påstanden korrekt. For et træ T med n knuder ($n > 3$), har den første knude v i Prüfer-koden en valens i T , som er 1 større end dens valens i resttræet, der fås ved at fjerne præcis én kant til v . (Disse med 1 reducerede valenser er tallene foruden i multinomialkoefficientudtrykket for antallet af træer med given valensvektor.) \blacksquare

Eksempel 2. Mekanismen i Prüfer-koder, altså hvorledes rækkefølgen af bogstaverne i $\kappa(T)$ registrerer træets »form«, er allerede aktiv for $n = 4$. Den ene type træer, af formen $K_{1,3}$, har en Prüfer-kode af to ens bogstaver, nemlig navnet på knuden af valens 3. Den anden type træer, af formen P_4 , har Prüfer-koder κ med navnene på de 2 knuder af valens 2; rækkefølgen af disse navne i κ bestemmer rækkefølgen af $\{1, 2, 3, 4\}$ langs P_4 -vejen, med det i κ førstnævnte knudenavn som den knude af valens 2, der har den mindste af de ikke-nævnte knuder som valens-1-naboknude. \square

Sætning 1. Lad S og T være træer med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$, hvor $n \geq 3$, og antag, at træernes Prüfer-koder er ens, altså: $\kappa(S) = \kappa(T)$. Så er træerne ens, altså: $S = T$.

⁶Mere moderne: en slags DNA-profil!

Bevis. For $n = 3$ er påstanden korrekt, idet Prüfer-koden for et træ med knudemængde $\{1, 2, 3\}$ er midterknuden, eller den entydigt bestemte knude af valens 2.

I almindelighed er det første bogstav, fx v , i Prüfer-koden for et træ den knude, der er kantforbundet til den mindste knude af valens 1 i træet, altså med et kant vk , hvor k er den mindste knude af valens 1 i træet, men her er k fastlagt ved Prüfer-koden, fordi knuderne af valens 1 i træet er netop de knuder, der *ikke* forekommer i Prüfer-koden; begge træerne S og T har altså kanten vk .

Betegner S' og T' de to resttræer, der fås fra S og T ved i begge træer at fjerne kanten vk , så har begge knudemængden $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$, og deres Prüfer-koder, når de opfattes som træer med knudemængden $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$, er begge den oprindelige Prüfer-kode med første bogstav v slettet. Specielt har S' og T' samme Prüfer-kode, hvilket induktivt medfører, at S' og T' er samme træ, men så er også S og T samme træ (begge fås ved at montere kanten vk i $S' = T'$). ■

Fremgangsmåden i den anden algoritme, der konstruerer et træ på basis af et ord κ af længde $n - 2$ i bogstaverne $\{1, 2, \dots, n\}$, er i princippet en »omvendning« af den direkte algoritme (algoritme 1); nøglen til denne omvendning er, at den i første skridt af den direkte algoritme fjernede kant har endeknuderne u og v , hvor v er første bogstav i κ , og u er den mindste knude i træet af valens 1, altså den mindste knude, der *ikke forekommer* i den producerede Prüfer-kode κ .

Algoritme 2: fra Prüfer-kode til træ. Lad der her være givet et ord κ af længde $n - 2$ i bogstaverne $\{1, 2, \dots, n\}$, hvor $n \geq 3$. Algoritmen konstruerer, med κ som **input**, som **output** et træ T , hvis Prüfer-kode er κ , i form af en liste bestående af $n - 1$ kanter. Processen begynder med at oprette en hjælpe-liste K , der simpelthen omfatter alle knudenavnene $1, 2, \dots, n$, og videre en liste L , hvori træets kanter efterhånden »opsamles«, og L initialiseres til den tomme liste (af kanter). Dernæst gennemføres nedenstående 1.–4.:

1. Find det mindste element a i K , der ikke forekommer i κ . (Elementerne i K er indbyrdes forskellige, og K indeholder 2 elementer mere end der er bogstaver i κ .)

2. Indsæt kanten ab i listen L , hvor b er det første bogstav i κ .

3. Fjern elementet a fra hjælpe-listen K , og det første bogstav b fra κ . (Herefter er såvel K som κ ét bogstav kortere end ved den nærmest foregående udførelse af punkt 1.)

4. Hvis κ er det tomme ord (den tomme liste) så indsæt kanten ab i L , hvor a, b er de 2 resterende elementer i listen K , og STOP, ellers gentag processen fra 1.

Hvert gennemløb af 1.–3. fjerner et bogstav fra såvel κ som K , og tilføjer en kant til listen L , og processen stopper derfor efter $n - 2$ sådanne gennemløb, og efterfølgende tilføjelse af »restkanten« til L , der således ialt indeholder $n - 1$ kanter.

Eksempel 3. Her følges processen i algoritme 2 for inputordet 22334. Listen har længde 5, og derfor er knudemængden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Restkode	Listen K	Listen L
<u>2</u> 2334	<u>1</u> , 2, 3, 4, 5, 6, 7	<u>12</u>
<u>2</u> 334	2, 3, 4, <u>5</u> , 6, 7	<u>12</u> , <u>25</u>
<u>3</u> 34	<u>2</u> , 3, 4, 6, 7	<u>12</u> , <u>25</u> , <u>23</u>
<u>3</u> 4	3, 4, <u>6</u> , 7	<u>12</u> , <u>25</u> , <u>23</u> , <u>36</u>
<u>4</u>	<u>3</u> , 4, 7	<u>12</u> , <u>25</u> , <u>23</u> , <u>36</u> , <u>34</u>
	4, 7	<u>12</u> , <u>25</u> , <u>23</u> , <u>36</u> , <u>34</u> , <u>47</u>

I hvert algoritmeskridt er det aktive første bogstav i Prüfer-koden og det mindste knudenavn i hjælpe-listen, der ikke forekommer i Prüfer-koden, markeret ved understregning. □

Det er klart, at algoritme 2 ovenfor, for et givet ord af længde $n - 2$ i bogstaverne $\{1, 2, \dots, n\}$ (når $n \geq 3$) konstruerer en liste af længde $n - 1$ af kanter, altså en graf med knudemængde

$\{1, 2, \dots, n\}$ og $n - 1$ kanter; denne graf har hver af knuderne $\{1, 2, \dots, n\}$ som endeknude for en kant en gang for hver forekomst enten i Prüfer-koden eller i hjælpe listen med samtlige knudenavne, og valensen af en knude er altså 1 mere end antal forekomster af knudenavnet i koden. Denne graf er faktisk et træ, der endda har det givne ord som sin Prüfer-kode:

Sætning 2. *Antag, at $n \in \mathbb{N}$ opfylder $n \geq 3$. For hvert ord $\kappa \in \{1, 2, \dots, n\}^{n-2}$ er den af algoritme 2 konstruerede graf med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$ et træ, hvis Prüfer-kode er κ .*

Bevis. Beviset er induktion efter n . For $n = 3$ giver første (og eneste) skridt i algoritme 2 en kant fra den mindste knude, der ikke forekommer i κ , til knuden, der nævnes i κ , og derefter tilføjes kanten mellem de to resterende knuder i hjælpe listen – den ene af disse er den i κ forekommende knude – hvilket giver en sammenhængende graf, altså et træ; der er ikke mulighed for en kreds bestående af 2 kanter. Det er klart, at dette træ har det givne ord κ af længde 1, nemlig navnet på midterknuden i det konstruerede træ, som Prüfer-kode.

Antag her, at $n > 3$, og induktivt, at algoritme 2, for hvert inputord af længde $n - 3$ skrevet i et alfabet med $n - 1$ bogstaver, producerer et træ med alfabetets bogstaver som knuder, og det givne ord som Prüfer-kode (skrevet i det relevante alfabet). Lad nu κ være et ord af længde $n - 2$ i bogstaverne $\{1, 2, \dots, n\}$, og antag, at det første skridt i algoritme 2 producerer kanten ab , hvor a er det første bogstav i κ . Så gælder, at b ikke forekommer i κ , og derfor har κ formen $\kappa = a\kappa'$, hvor κ' er et ord af længde $n - 3$ skrevet i alfabetet $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{b\}$; ifølge induktionsantagelsen vides, at algoritme 2 anvendt på κ' producerer et træ T' med $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{b\}$ som knudemængde, og κ' som Prüfer-kode (skrevet i det relevante alfabet); dette træ, suppleret med den i første skridt konstruerede kant ab , udgør et træ T med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$ (se lemma 2 i afsnit 4.6), fordi $a \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{b\}$. Ifølge valget af knude b som den mindste knude, der ikke forekommer i κ , er første bogstav i Prüfer-koden for T knuden a , og derfor $\kappa(T) = a\kappa(T') = a\kappa' = \kappa$. ■

Bemærkning 3. Når træet med en given Prüfer-kode skal tegnes er det bekvemt at benytte den af algoritme 2 konstruerede kantliste »bagfra«; derved fås i hvert tegneskridt en sammenhængende graf, som det ses af beviset for sætning 2. □

Bemærkning 4. Udsagnet i sætning 1 er, at afbildningen af mængden \mathcal{T}_n af træer med knudemængde $\{1, 2, \dots, n\}$ ind i mængden $\{1, 2, \dots, n\}^{n-2}$ af ord af længde $n - 2$ skrevet med bogstaver fra knudemængden $\{1, 2, \dots, n\}$, der til et træ $T \in \mathcal{T}_n$ knytter træets Prüfer-kode $\kappa(T)$, er en *injektiv* afbildning.

Ifølge Cayleys formel er antallet af disse træer: $|\mathcal{T}_n| = n^{n-2}$, hvilket jo også er antallet af elementer i mængden $\{1, 2, \dots, n\}^{n-2}$ af ord af længde $n - 2$ skrevet med bogstaver fra $\{1, 2, \dots, n\}$, og injektiviteten af afbildningen $T \mapsto \kappa(T)$ medfører derfor, at denne afbildning *også* er surjektiv, altså ialt en *bijektiv afbildning*. Derfor kan det på basis af Cayleys formel – og uden brug af sætning 2 – konkluderes, at *ethvert ord fra $\{1, 2, \dots, n\}^{n-2}$ Prüfer-kode for et træ.*

Tilsvarende giver udsagnet i sætning 2, at afbildningen $T \mapsto \kappa(T)$ er *surjektiv*, altså samlet *bijektiv*, og har »algoritme 2« afbildningen som omvendt afbildning. Både algoritme 2 og argumenterne for sætning 2 er uafhængige af – de benytter *ikke* – Cayleys formel, og sætningerne 1,2 giver derfor et nyt bevis for Cayleys formel. Direkte anvendt giver de som nævnt, at $T \mapsto \kappa(T)$ er bijektiv, og da mængden af Prüfer-koder, altså $\{1, 2, \dots, n\}^{n-2}$, har ialt n^{n-2} elementer, er der lige så mange træer, hvoraf $|\mathcal{T}_n| = n^{n-2}$.

Også den detaljerede trætælleformel i afsnit 5.2 er direkte konsekvens af lemmaet og sætningerne 1,2. For hvert n -sæt (d_1, d_2, \dots, d_n) af hele positive tal med sum $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2n - 2$ er antallet af træer med knudemængden $\{1, 2, \dots, n\}$ og (d_1, d_2, \dots, d_n) som valensvektor naturligtvis antallet af Prüfer-koder (ord af længde $n - 2$ skrevet i bogstaverne $\{1, 2, \dots, n\}$) hvori bogstavet k forekommer $d_k - 1$ gange, for $k = 1, 2, \dots, n$. Antallet af disse ord er en multinomial-koefficient, nemlig antallet af fordelinger af de $n - 2$ pladser i ordet, med $d_k - 1$ pladser i den k 'te

»kasse«, svarende til, at der står bogstavet k på den pågældende plads, for $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1}. \quad \square$$

Opgaver.

(5.1) Undersøg om 7-tuplerne a), b), og c) nedenfor er valensvektorer for træer, og angiv i bekræftende fald antallet af træer, med det pågældende 7-tupel som valensvektor.

a) (1, 2, 1, 4, 2, 1, 1), b) (1, 2, 1, 2, 1, 2, 2), c) (4, 3, 1, 1, 1, 1, 1).

(5.2) Find en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en valensvektor, dvs. et n -tupel af positive hele tal med sum $2n - 2$ (hvor $n \geq 2$) er valensvektor for et entydigt bestemt træ.

(5.3) Bestem antallet af typer (=isomorfiklasser) af træer med 5 knuder, og find for hver type antallet af træer af den pågældende type.

(5.4) Lav en opgørelse svarende til den i den foregående opgave, men nu for træer med 6 knuder.

(5.5) Tegn et træ T med de 8 knuder $\{1, 2, \dots, 8\}$ og bestem Prüfer-koden for T .

(5.6) Kast en terning 6 gange, og noter øjenantallene; find dernæst det træ med – hvor mange knuder har det? – der har denne sekvens af øjenantal som Prüfer-kode.

(5.7) Beskriv Prüfer-koden for et vejtræ, eller »perler-på-snor«, og et stjernetræ, altså præcist af formen $K_{1,m}$.

(5.8) Findes der træer, hvis Prüfer-kode omfatter alle bogstaverne $\{1, 2, \dots, n\}$ i alfabetet?

(5.9) Beskriv udseendet af et træ, hvis Prüfer-kode består af lutter forskellige bogstaver. Hvor mange sådanne træer er der?

Kapitel 6

Euler-grafer og Hamilton-grafer

I dette kapitel introduceres to grafegenskaber, der ved første øjekast virker ganske analoge, men ved nærmere eftersyn viser sig at være dramatisk forskellige, også hvad angår vanskeligheden af i konkrete tilfælde at afklare, hvorvidt en forelagt graf har den pågældende egenskab.

De to egenskaber vedrører muligheden af at tilrettelægge en »besøgsrunde«, i grafen, der benytter alle kanter i grafen, henholdsvis, besøger samtlige knuder i grafen. Den præcise afgrænsning af glosen besøgsrunde i de to situationer er selvsagt afgørende.

En besøgsrunde af førstnævnte art kan benyttes som en model for *gadefejning*, hvor dels samtlige gadestrækninger (kanter i grafen) skal passeres og det for at undgå dobbeltfejning, eller overflødig kørsel, er ønskeligt at kunne tilrettelægge besøgsrunden, så hver gadestrækning passeres netop én gang. En besøgsrunde af den anden art kan bruges som model for *postudbringning*, hvor dels alle adresser (knuder i grafen) skal besøges, og det desuden ønskes – om muligt – at gennemføre postomdelingen uden at dobbeltbesøge adresser.

6.1 Euler-ture. Det grundlæggende spørgsmål er det simple, om det er muligt, i en given graf, at »sammenstrikke« grafens kanter til en tur, der benytter hver kant i grafen præcis én gang. (Kanterne i en tur er indbyrdes forskellige.)

Definition. Lad $G = (V, E)$ være en graf. En tur i G kaldes en **Euler-tur** hvis den omfatter samtlige kanter i G , og G kaldes en **Euler-graf** hvis der findes en lukket Euler-tur¹ i G .

Alle knuder på en ikke-tom tur i en graf tilhører en fælles sammenhængskomponent af grafen, og har desuden positiv valens. Derfor har en graf, i hvilken der findes en ikke-tom Euler-tur, præcis én ikke-triviel sammenhængskomponent, og kan derudover eventuelt have en eller flere isolerede knuder. I tomme grafer, hvor alle knuder er isolerede, findes kun én tur, den tomme tur, der i en vis forstand omfatter alle grafens kanter, og således er en slags Euler-tur, men på den anden side er irrelevant for kantbesøg. Tilsvarende er hver (eventuel) isoleret knude i en graf, da den ikke er endeknude for kanter i grafen, irrelevant for Euler-ture, så i det følgende betragtes udelukkende *sammenhængende grafer med mindst én kant*, hvor altså alle knuder har *positiv valens*.

En *lukket Euler-tur* har samme start- og slutknude, og en vilkårlig knude på turen kan fungere som en sådan. Det er vel plausibelt – og det vises præcist nedenfor – at hver knude på en lukket Euler-tur i en graf har en valens, der er det dobbelte af antallet af gange knuden passeres på turen (start og slut på turen tæller hver en halv passage af startknuden = slutknuden). Specielt gælder derfor, *at alle knuder på en lukket Euler-tur har lige og positiv valens*.

En *ikke-lukket Euler-tur* har forskellige start- og slutknuder; hver knude på en ikke-lukket Euler-tur har en valens, der er det dobbelte af antallet af gange knuden passeres på turen, og start og slut på turen tæller hver en halv passage af startknuden, henholdsvis slutknuden. Specielt *har startknuden og slutknuden på en ikke-lukket Euler-tur ulige (og positiv) valens, medens alle andre knuder har lige og positiv valens*.

¹Begrebet er knyttet til *Leonhard Euler* (1707–1783), som efter sigende overvejede, om det var muligt at tilrettelægge en spadsererundtur i Königsberg/Kaliningrad, der passerede byens broer præcis én gang hver.

Sættet af valensbetingelser, at *alle knuder har lige og positiv valens*, der som skitseret løst ovenfor er opfyldt i en graf med en lukket Euler-tur, er altså *nødvendige* for eksistens af en lukket Euler-tur; de vises i næste afsnit også at være *tilstrækkelige* for eksistens af en lukket Euler-tur i en graf. Sætningen, der udtrykker, at dette sæt af valensbetingelser er *nødvendige og tilstrækkelige* for eksistens af en lukket Euler-tur er således en *karakterisering* af klassen af Euler-grafer. Tilsvarende vises de nævnte valensbetingelser for grafer, der har en ikke-lukket Euler-tur, også at være tilstrækkelige for eksistens af en ikke-lukket Euler-tur, se afsnit 6.3.

6.2 Karakterisering af Euler-grafer. Den afgørende ingrediens i beviset for karakteriseringen af Euler-grafer via valensbetingelser er nedenstående tekniske hjælperesultat:

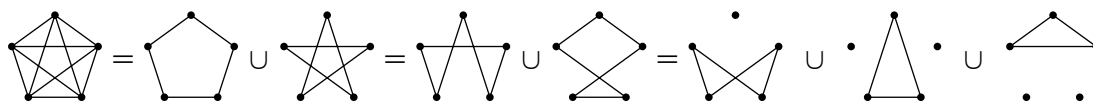
Lemma. *En graf $G = (V, E)$ for hvilken alle knuder har lige valens er disjunkt forening af endelig mange kredse. (Det præcise indhold heri er, at der findes en endelig familie $(C_i)_{i \in I}$, indiceret af den endelige mængde I , således, at C_i , for hvert $i \in I$, er en kreds, at disse kredse er disjunkte hvad angår kanter – men i almindelighed ikke hvad angår knuder – og videre, at kantmængden E er foreningsmængden af disse kredses kantmængder, altså (lidt løst): $E = \cup_{i \in I} C_i$.)*

Bevis. Hvis grafen er tom, altså $E = \emptyset$, benyttes den tomme mængde af kredse, og derfor betragtes tilfældet $E \neq \emptyset$.

Der findes således en knude med positiv valens, og en sådan, fx $u \in V$, tænkes valgt. Derefter vælges en kant fra u , dvs. en knude $v \in V$ så $uv \in E$; knuden v er *ikke* et blad, dvs. $\delta_v > 1$, fordi alle knuder har lige valens, altså valens ≥ 2 , medmindre valensen er $= 0$, og der findes derfor en kant fra v , der er forskellig fra kanten uv , og en sådan vælges. Dette valg af på-hinanden-følgende knuder i grafen fortsættes, men efter et vist antal sådanne valg af knuder dukker en allerede benyttet knude dukke op: første gang dette sker defineres en kreds, der betegnes C ; denne kreds – præcist kanterne i den – fjernes derefter fra E . Restgraf $G' = (V, E \setminus C)$ har egenskaben, at alle knuder har lige valens: kredsen C bidrager nemlig med valensen 2 til hver af sine knuder. Processen fortsættes til den tomme graf resulterer; processen stopper fordi hver kreds, der dannes og hvis kantmængde derefter fjernes fra E , reducerer antallet af kanter med 3 eller mere. ■

Der er *ikke i almindelighed* entydighed af en sådan opspaltning af kantmængden for G i kantmængder fra disjunkte kredse, se det følgende eksempel.

Eksempel. Til belysning af lemmaets opspaltning af kantmængden i en graf, hvor alle valenser er lige, i en disjunkt forening af kredse, vises her diverse sådanne opspaltninger for en K_5 .



De to første består af to 5-kredse (der er 6 opspaltninger i to 5-kredse), medens den tredje består af én 4-kreds og to 3-kredse (der er 15 sådanne opspaltninger, én for hver 4-kreds i K_5). □

Sætning. *Lad $G = (V, E)$ være en sammenhængende og ikke-triviel graf. Så findes en lukket Euler-tur i G hvis og kun hvis alle knuder i G har lige valens.*

Bevis. Det vises først, at for en graf af den betragtede type, i hvilken der eksisterer en lukket Euler-tur, gælder, at alle knudevalenser er lige (det er *kun-hvis-delen*). Antagelsen giver, at der findes en sekvens $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ af knuder, hvor gentagelser kan forekomme, således, at $v_i v_{i+1}$, for $i = 1, 2, \dots, n - 1$, samt $v_n v_1$ er kanterne i G , hver optrædende netop én gang, altså

$$E = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\}. \quad (6.1)$$

For en vilkårlig knude $v \in V$ er valensen δ_v af v præcis antallet af forekomster af v i listen (6.1), og dette antal er for hver knude lige – hver knude, der er slutknode for én kant er startknode

for den i listen næstfølgende kant, på nær, at slutknuden for den sidste kant i (6.1) er startknuden for den første kant i (6.1).

Beviset for *hvis-delen* er mere raffineret. Det antages, at $G = (V, E)$ er en sammenhængende graf, hvor alle knuder har lige og positiv valens, og det skal vises, at grafen har en lukket Euler-tur; beviset, der benytter induktion, angiver en slags *konstruktion* af en lukket Euler-tur. Ifølge lemmaet er kantmængden E disjunkt forening af kantmængderne for en endelig familie af kredse, og induktionsbeviset benytter antallet r af kredse, i en sådan fremstilling af E , som induktionsparameter, og udfører en slags sammenstriking af disse kredse til en lukket Euler-tur.

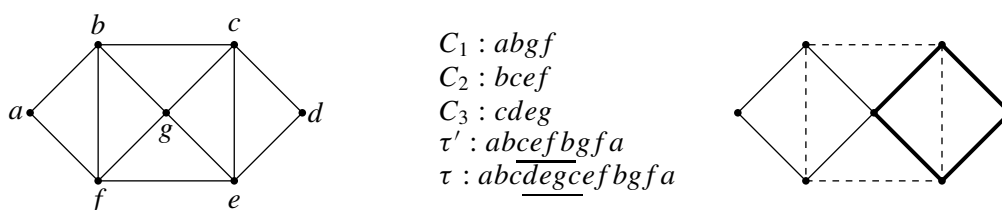
Induktionens start er let. For $r = 1$, altså hvis kantmængden E selv er mængden af kanter i en kreds C , så definerer kredsen C direkte en lukket Euler-tur.

Nu betragtes en sammenhængende graf $G = (V, E)$, hvor alle knuder har lige valens, og hvor kantmængden har en fremstilling som foreningsmængde af $r > 1$ kantmæssigt disjunkte kredse: det skal vises, at G har en lukket Euler-tur. *Induktionsantagelsen* er følgende: *enhver sammenhængende graf, hvis kantmængde er foreningsmængde af færre end r kantmæssigt disjunkte kredse (i en sådan har alle knuder lige valens), har en lukket Euler-tur.*

De r kredse, der indgår i fremstillingen af E , indiceres på en særlig måde: $C_1, C_2, C_3, \dots, C_r$, hvor de $r - 1$ første kredse danner en *sammenhængende* graf; eksplicit kan fx vælges følgende rækkefølge: C_1 er vilkårlig, dernæst vælges C_2 blandt de øvrige kredse, så $C_1 \cup C_2$ er sammenhængende (en sådan kreds findes blandt de øvrige, fordi G er sammenhængende), dernæst vælges C_3 blandt de resterende kredse, så $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ er sammenhængende (en sådan kreds findes fordi G er sammenhængende), og således fortsættes, indtil den r 'te kreds – den sidste – der på grund af sammenhængen af G har en knude fælles med $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{r-1}$.

De $r - 1$ første af kredsene udgør en graf $G' = (V', E')$, der er sammenhængende og hvor kantmængden E' , ifølge konstruktionen, er foreningsmængde af $r - 1$ kantmæssigt disjunkte kredse. Denne graf har derfor ifølge induktionsantagelsen en lukket Euler-tur, fx τ' . Efter valg af en vilkårlig »startknode« v på en sådan lukket Euler-tur (relativt til G'), defineres en lukket Euler-tur τ for G på følgende måde: med udgangspunkt i v følges turen τ' indtil der første gang nås en knude, fx w , der indgår i kredsen C_r (og naturligvis τ'); herefter indsættes et enkelt men fuldt gennemløb af C_r , og efter dette, nået til w , fortsættes med resten af τ' . ■

Eksempel. Metoden fra beviset kan faktisk benyttes til i praksis at finde en lukket Euler-tur i en sammenhængende graf, hvor alle knuder har lige valens. Her er et eksempel:



I midten er dels beskrevet opspaltningen af kantmængden i disjunkte kredse C_1, C_2, C_3 , der er vist på figuren til højre (C_2 er stiplede, og C_3 har »tykke« kanter), dels er sammenstykningsen til en lukket Euler-tur – dannet som i beviset – med kredsene successivt indføjet (vist understreget). □

Bemærkning. Det er på forhånd klart, at eksistens af en lukket Euler-tur i en graf vedrører »hele grafen på én gang« – og man siger, at eksistens af en lukket Euler-tur er en *global egenskab*. Sætningen er en slags analyse af denne egenskab i en »global del«, at grafen er sammenhængende, og en primært »lokal del«, at hver knude har et lige antal naboknuder. At hver knude har lige valens kan *kontrolleres* separat for hver knude, kun under hensyntagen til knudens naboer. □

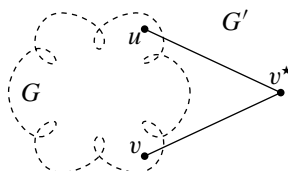
6.3 Karakterisering af grafer med ikke-lukket Euler-tur. Det er på basis af karakteriseringen i det foregående afsnit forholdsvis let at bestemme en *nødvendig og tilstrækkelig betingelse* for eksistens af en ikke-lukket Euler-tur i en graf.

Sætning. *En sammenhængende graf $G = (V, E)$ har en ikke-lukket Euler-tur hvis og kun hvis to knuder har ulige valens, og alle andre knuder har lige valens.*

Bevis. Det vises først – *hvis-delen* – at hvis to knuder i en sammenhængende graf G har ulige valens, og alle andre har lige valens, så findes en ikke-lukket Euler-tur i G , dvs. valensbetingelsen er i en sammenhængende graf tilstrækkelig for eksistens af en ikke-lukket Euler-tur.

Lad altså G være en sammenhængende graf, og antag, at knuderne $u, v \in V$ har ulige valens (og er forskellige), og at alle andre (hvis der er sådanne) knuder i G har lige valens.

Nu betragtes en hjælpegraf $G' = (V \cup \{v^*\}, E \cup \{uv^*, vv^*\})$, hvor v^* betegner en »ny« knude (ikke tilhørende V); knudemængden er altså V med v^* tilføjet, og kantmængden er E med to nye kanter, nemlig fra u til v^* og fra v til v^* . Konstruktionen er antydnet på figuren nedenfor.



Det er næsten oplagt, at denne hjælpegraf G' er sammenhængende og at alle dens knuder har lige valens (overvej det!); derfor findes der i G' , ifølge sætningen i afsnit 6.2, en lukket Euler-tur τ ; det kan gerne antages, at τ starter i knuden v^* , og at v^*u er den første, og vv^* den sidste kant på τ ; ved at fjerne kanterne $\{v^*u, vv^*\}$ fra τ fås en ikke-lukket Euler-tur fra u til v .

Nu vises, at betingelsen er nødvendig for eksistens af en ikke-lukket Euler-tur. Det skal altså vises, at hvis den sammenhængende graf $G = (V, E)$ har en ikke-lukket Euler-tur τ , fx med u som startknude, og v som slutknude, så har alle knuder i G , på nær præcis to, lige valens.

Som i første del af beviset, og på analog måde, konstrueres en hjælpegraf G' ved at tilføje en ny knude v^* , og de to kanter uv^* og vv^* ; det er herefter klart, at v^*u, τ, vv^* definerer en lukket Euler-tur i hjælpegrafens, der derfor ifølge resultatet i afsnit 6.2 har alle knuder af lige valens; men valenserne i G fås let fra valenserne i G' , de er nemlig de samme som valenserne i G' på nær, at knuden v^* er fjernet, og knuderne u og v har valens 1 mindre i G end i G' , hvoraf påstanden. ■

Bemærkninger. Det virker måske ved første øjekast overflødigt at introducere den nye knude v^* i konstruktionen af hjælpegrafens G' ; hvorfor ikke bare tilføje kanten uv mellem u og v , hvor, ligesom i beviset, u, v er de to knuder af ulige valens i G . Grunden er, at u og v kunne være *kantforbundne* i G , og vores konventioner for grafer udelukker multiple kanter (der dog ellers slet ikke ville »gøre skade« i forbindelse med Euler-ture).

Kun-hvis-delen kan også vises som i foregående afsnit: En ikke-lukket Euler-tur fra u til v bestemmer en liste af kanter som (6.1), og en knudes valens er 2 gange dens antal forekomster i listen, på nær u og v , hvis valens er 2 gange deres antal forekomster i listen minus 1. □

6.4 Hamilton-kredse. Det til eksistens af en lukket Euler-tur tilsyneladende analoge problem, men *for knuder*, spørger i en graf om eksistensen af en kreds gennem alle grafens knuder.

Definition. *Lad $G = (V, E)$ være en graf. En kreds i G kaldes en **Hamilton-kreds** hvis den har længde $|V|$, altså hvis den går gennem alle knuder i grafen, og grafen G kaldes en **Hamilton-graf** hvis der eksisterer en Hamilton-kreds² i G .*

²Betegnelsen er knyttet til matematikeren W. R. Hamilton (1805–1865), som lancerede – med beskedne succes – et brætspil baseret på konstruktion af kredse gennem alle knuder i *dodekaedergrafen*, se kapitel 12.

Eksempel 1. Hver kredsgraf C_n , hvor $n \geq 3$, er en Hamilton-graf: den cykliske rækkefølge af de n knuder definerer en Hamilton-kreds. Ligeledes er alle de komplette grafer K_n , hvor $n \geq 3$, Hamilton-grafer: en vilkårlig cyklisk rækkefølge af de n knuder definerer en Hamilton-kreds (da alle de $\binom{n}{2}$ »kantomligheder« er realiserede, mellem de n knuder, der danner kredsen). \square

Begrebet Hamilton-graf er langt mere »forfinet« end begrebet Euler-graf; løst sagt skal der være mange kanter i grafen, for at kunne danne en Hamilton-kreds, men det afgørende er, at der er tilstrækkeligt mange relevante kanter, hvilket naturligvis er håbløst diffust. Der kendes *ikke* en karakterisering af Hamilton-grafer, analogt til karakteriseringen i afsnit 6.2 af Euler-grafer, via en simpel *nødvendig og tilstrækkelig betingelse*.

Det er let at få øje på en række egenskaber, som en graf $G = (V, E)$, i hvilken der findes en Hamilton-kreds, nødvendigvis må have. Således:

- Den har mindst 3 knuder, altså $|V| \geq 3$ (dette gælder alle kredse).
- Den er sammenhængende (benyt en »strækning« fra u til v af en Hamilton-kreds).
- Alle knuder har valens ≥ 2 (dette gælder enhver knude på en kreds).
- Ingen kant i grafen er afgørende for grafens sammenhæng, dvs. for hver kant $e \in E$ er delgraf, der fås af G ved at fjerne e , sammenhængende (dette gælder alle kredsgrafer); se også kapitel 12.
- Ingen knude i grafen er afgørende for grafens sammenhæng, dvs. for hver knude $v \in V$ er delgraf, der fås af G ved at fjerne v og kanterne til v , sammenhængende (dette gælder alle kredsgrafer); se også kapitel 12.

Bemærkning. Der kan være anledning til i en graf $G = (V, E)$ at betragte en vej af længde $|V| - 1$, som altså passerer gennem alle grafens knuder. (En sådan vej kan kaldes en **Hamilton-vej** i G .) De fleste af de ovenfor nævnte egenskaber for grafer med en Hamilton-kreds følger *ikke* eksistensen af en Hamilton-vej; grafen er dog sammenhængende, højst to knuder har valens 1, og alle øvrige har valens ≥ 2 ; de eneste træer, der har en Hamilton-vej, er vejtræerne P_n , $n \geq 2$. \square

Problemet at afgøre, hvorvidt en given graf har en Hamilton-kreds eller ej er, uden dog at præcisere nærmere, »svært«, og det har endvidere en særlig egenskab, der ofte mødes for grafteoretiske og kombinatoriske problemer, nemlig, at selvom det kan være vanskeligt såvel at finde en eventuel Hamilton-kreds, eller bevise, at ingen sådan findes, så er det »let« at konstatere om en forelagt liste over knuder i grafen bestemmer en Hamilton-kreds. Det skal nemlig blot undersøges om listen indeholder samtlige grafens knuder, og desuden, om knuderne i listens rækkefølge definerer en kreds. Gloserne *svær/let* skal naturligvis forstås relativt til en slags problemstørrelse, her typisk antallet af knuder i grafen.

I næste afsnit diskuteres en simpel betingelse, der sikrer – altså er *tilstrækkelig* for – eksistens af en Hamilton-kreds i en graf; denne betingelse er dog langt fra nødvendig, hvormed menes, at der findes mange – endda uendelig mange – Hamilton-grafer, hvori den pågældende betingelse *ikke* er opfyldt. Forinden varmes op med diverse heuristiske greb, der i mange situationer kan hjælpe i et argument for, at der *ikke* findes en Hamilton-kreds i en given graf. Et sådant argument består typisk i at nå en modstrid ved efterprøvning via et system af »forgrenende« muligheder.

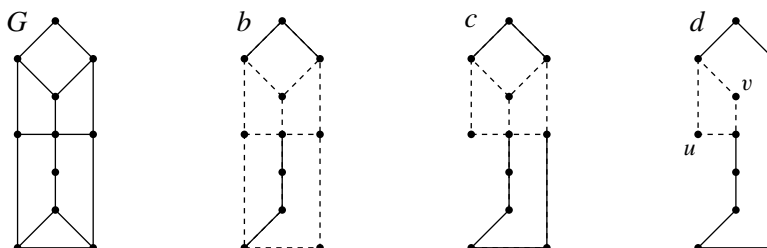
Observation. Lad $G = (V, E)$ være en graf.

1. Hvis $v \in V$ har valens 2 så indgår begge kanterne til v i en eventuel Hamilton-kreds.
2. Ved konstruktionen af en Hamilton-kreds dannes ikke en ægte delkreds, dvs. en kreds af længde $< |V|$.

3. Hvis det fra anden side vides, at to kanter til en knude $v \in V$ indgår i en eventuel Hamilton-kreds – under opbygning – så er de de eneste kanter til v , der kan indgå i Hamilton-kredsen.

4. For en graf med en »symmetri« er det tilstrækkeligt at kontrollere, eller efterprøve, ét af to symmetriske konstruktionsforløb. ■

Eksempel 2. Nedenstående graf G er *ikke* en Hamilton-graf, som billedserien illustrerer (kommentarer nedenfor). En »eventuel« Hamilton-kreds i G analyseres nærmere:



Grafen G har to knuder af valens 2, og af symmetri Grunde kan det antages at en eventuel Hamilton-kreds benytter den skrå kant fra knuden nederst til venstre, altså omfatter de optrukne kanter på tegning b , hvor også den skrå kant til knuden nederst til højre er slettet; denne kant kan ikke indgå i en Hamilton-kreds, der benytter den optrukne nederste skrå kant.

En eventuel Hamilton-kreds fortsætter derfor som vist på tegning c med optrukne kanter, hvor også den lodrette kant nederst til venstre, som *ikke* kan indgå i en Hamilton-kreds, er slettet.

Den vandrette kant fra midterknuden på den lodrette højreside i grafen kan *ikke* indgå i en eventuel Hamilton-kreds, da kredsen derved ville lukkes for tidligt, og derfor må den øvre lodrette kant fra denne knude indgå, hvilket nu medfører, at den skrå kant til knuden øverst til højre *ikke* kan indgå, og situationen er derefter som vist på tegning d .

Derfor har G *ikke* en Hamilton-kreds. Kun én af de to knuder u og v kan nu indgå i en sådan kreds: uanset hvilken stiplede kant der benyttes forceres en for tidlig lukning af kredsen. □

6.5 En tilstrækkelig betingelse for eksistens af Hamilton-kreds Ét af de bedste resultater om Hamilton-grafer er nok den tilstrækkelige betingelse for eksistens af en Hamilton-kreds i nedenstående sætning 2 af Ore; denne sætning er dog i det væsentlige en »strømlinet« udgave af et tidligere resultat, formuleret i sætning 1, der skyldes Dirac.

Sætning 1. En graf $G = (V, E)$, med 3 eller flere knuder, for hvilken den minimale knudevalens, der betegnes $\delta(G)$, opfylder uligheden: $\delta(G) \geq |V|/2$, er en Hamilton-graf.

Udsagnet i sætning 1 kan løst udtrykkes, at med $|V|/2$ eller flere kanter fra hver knude er der tilstrækkeligt mange kanter til at der *findes* en Hamilton-kreds. En graf der opfylder denne betingelse er således specielt sammenhængende, hvilket også let følger direkte af valensbetingelsen. Sætning 1 er en næsten umiddelbar konsekvens af nedenstående skærpelse:

Sætning 2. En graf $G = (V, E)$, med $|V| \geq 3$, for hvilken det for vilkårlige to knuder $u, v \in V$, med $u \neq v$ og $uv \notin E$, gælder, at $\delta_u + \delta_v \geq |V|$, er en Hamilton-graf.

Bemærkning. Forudsætningerne i sætning 2 er nok ved et første møde lidt »tricky«. Det kræves, at der er mange kanter fra vilkårlige to knuder, der *ikke* er kantforbundne, præcist, at det samlede antal kanter fra to sådanne knuder mindst er lig antallet af knuder i grafen. Der er derimod ikke noget krav om mange kanter til to knuder u og v , der er kantforbundne. (En graf i hvilken der slet ikke findes par af ikke-forbundne knuder opfylder således betingelsen – betingelsen er i så fald trivielt opfyldt – grafen er jo i så fald komplet, og det vides så (heldigvis!?) fra anden side, at en sådan faktisk er en Hamilton-graf, når $|V| \geq 3$.)

Bevis for sætning 2. Der benyttes et indirekte bevis, af en ganske spøjss karakter. Det antages, at der foreligger en graf $G = (V, E)$, der opfylder betingelserne, og som ikke har en Hamilton-kreds; denne graf modificeres – om nødvendigt – til en graf, der heller ikke har en Hamilton-kreds, men hvor det dog ved nøjere eftersyn viser sig, at der alligevel findes en Hamilton-kreds!

Det antages nu yderligere, at den betragtede *modeksempelgraf* er »maksimal« derved, at den har så mange kanter, at der ved tilføjelse af blot en enkelt kant (mellem to ikke forbundne knuder) skabes en Hamilton-kreds. Hvis dette ikke gælder for G kan en »maksimal modeksempelgraf« konstrueres ved for hvert par u, v af knuder, der ikke er kantforbundne i G , at undersøge, om grafen med uv tilføjet har en Hamilton-kreds eller ej, og hvis denne graf ikke har en Hamilton-kreds, så at tilføje den pågældende kant til G ; denne »mætnings«-proces fortsætter med at undersøge næste ikke-realiserede kantmulighed, indtil der ikke er flere sådanne. (Overvej, at i denne graf gælder: $\delta_u + \delta_v \geq |V|$, for alle par af forskellige ikke-forbundne knuder u, v .)

Denne maksimale modeksempelgraf er ikke komplet – de komplette grafer med ≥ 3 knuder er jo Hamilton-grafer. Der findes altså knuder u, v som ikke er kantforbundne; og ifølge antagelsen har grafen med uv tilføjet en Hamilton-kreds, dvs. der findes en *Hamilton-vej* fra u til v , der altså omfatter samtlige grafens $n = |V|$ knuder (indiceret fra 1 til n , med $u = v_1, v = v_n$):

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_{n-1}, v_n, \quad (6.2)$$

med vilkårlige to på hinanden følgende knuder her kantforbundne; en sådan rækkefølge fås simpelthen fra den Hamilton-kreds, der »ville opstå« ved tilføjelse af kanten uv .

Nu oprettes et »skuffedarium« med $n - 1$ skuffer, en for hver af kanterne $v_i v_{i+1}$ nævnt i (6.2). Baseret på rækkefølgen af knuderne har hver skuffe en tilknyttet *første knude*, og en tilknyttet *anden knude*. For skuffen hørende til kanten $v_i v_{i+1}$ er v_i første knude, og v_{i+1} anden knude.

De ialt $\delta_u + \delta_v \geq n$ kanter til u og v fordeles nu i skufferne på følgende snedige måde: hver kant fra $u = v_1$ lægges i den skuffe, hvis anden knude er kantens fra u forskellige endeknude, og tilsvarende lægges hver kant fra $v = v_n$ i den skuffe, hvis første knude er kantens fra v forskellige endeknude. Skuffeprincippet giver umiddelbart, at der findes en skuffe med to kanter (overvej, at der ikke kan være mere end to kanter i nogen skuffe), og de to kanter er nødvendigvis 1 kant fra u og 1 kant fra v .

Dette betyder, at der findes et par af naboknuder i rækkefølgen ovenfor, fx v_j og v_{j+1} , så der er en kant fra $u = v_1$ til v_{j+1} , og en kant fra v_j til $v = v_n$.

Med et sådant par v_j, v_{j+1} er det let at angive en Hamilton-kreds i grafen, nemlig:

$$v_1, v_2, \dots, v_j, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{j+1},$$

der jo »lukkes« af kanten v_{j+1}, v_1 . ■

Bemærkning. Betingelsen i sætning 2 er som vist tilstrækkelig for eksistens af en Hamilton-kreds, men den er ikke nødvendig; en kreds C_n , med $n \geq 5$ knuder, har en Hamilton-kreds (nemlig kredsen selv), men opfylder ikke valensuligheden.

Opgaver

(6.1) Beskriv udseendet, hvad angår »krydspunkter«, af en tegning, der er lavet på et stykke papir ved 1) at sætte blyanten til papiret, 2) tegne uden at løfte blyanten fra papiret, og uden at tegne oveni allerede trukne streger, og 3) at slutte i det punkt, hvori blyanten blev sat til papiret.

(6.2) Vis, at en bipartit graf, der har en Hamilton-kreds, har et lige antal knuder, med lige mange knuder i hver todelingsmængde.

(6.3) Vis, at Petersen-grafen *ikke* har en Hamilton-kreds.

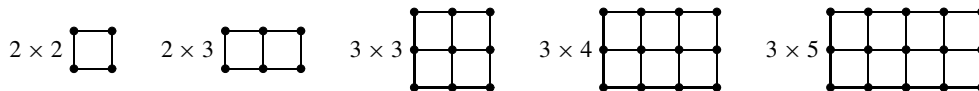
(6.4) Vis, at for en sammenhængende graf $G = (V, E)$ med $k > 0$ knuder af ulige valens ($k \leq |V|$) er kantmængden E foreningsmængde af $k/2$ kantmæssigt disjunkte ikke-lukkede ture.

(6.5) I en multigraf er der mulighed for mere end 1 kant mellem to forskellige knuder. Hvad kan der med rimelighed forstås ved en Euler-tur i en sådan multigraf, og hvordan kan multigrafen med en lukket Euler-tur karakteriseres? Hvad skal ændres, hvis også løkker, dvs. kanter, hvis to endeknuder er samme knude, blev tilladt i en multigraf?

(6.6) Lad $k \geq 2$ være et naturligt tal. Mængden $\{0, 1\}^k$ af k -tupler af 0, 1, er knudemængden i en graf, der kaldes den k -dimensionale *hyperterning*, hvor to forskellige k -tupler (x_1, x_2, \dots, x_k) og (y_1, y_2, \dots, y_k) er kantforbundne, hvis de afviger indbyrdes på præcis én af de k koordinater.

Vis, at den k -dimensionale hyperterning er en Hamilton-graf. (En Hamilton-kreds heri bestemmer en såkaldt *Gray-kode* for tallene $0, 1, \dots, 2^k - 1$, der kodes »binært« af knudenavnene; denne kode har den ønskværdige egenskab, at j og $j + 1$ har $k - 1$ ens »cifre«!)

(6.7) For hele tal p, q , med $p, q \geq 2$, består $p \times q$ -gittergrafen af $p \cdot q$ knuder i et rektangulært gittermønster med p rækker, hver på q knuder, og kanter mellem knuder, der er vandrette eller lodrette naboknuder (se tegning). Hvilke af $p \times q$ -gittergraferne er Hamilton-grafer?



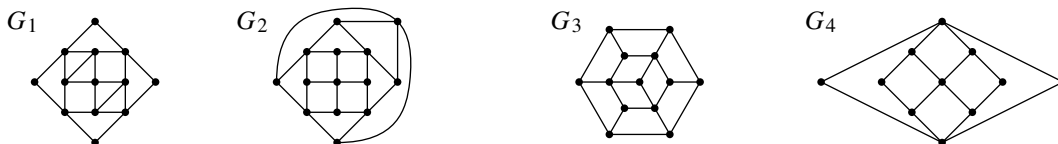
(6.8) Lad $G = (V, E)$ være en graf med $|V| = 2d + 1$ knuder, der alle har valens d , hvor d er et ikke-negativt helt tal. Vis, at G har en lukket Euler-tur.

(6.9) Lad $G = (V, E)$ være en graf med $|V| \geq 4$ knuder, med egenskaben, at for vilkårlige 3 forskellige knuder u, v, w er mindst 2 af kantmulighederne uv, vw, uvw realiserede. Vis, at G er en Hamilton-graf.

(6.10) Vis, at en graf $G = (V, E)$, der har $|V| = n$ knuder, hvor n er et naturligt tal, og hvor antallet af kanter opfylder $|E| > \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$, har en Hamilton-kreds.

Vis videre, at det for alle $n > 1$ gælder, at den tilsvarende påstand er falsk, hvis det kun forudsættes, at $|E| \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$.

(6.11) Gør rede for, at nedenstående graf G_1 har en lukket Euler-tur, og angiv en sådan. Undersøg om nedenstående graf G_2 har en Hamilton-kreds.



(6.12) Undersøg om G_3 (*Kirkmans graf*) og G_4 (*Herschels graf*) ovenfor er Hamilton-grafer.

(6.13) Vis, uden at benytte sætning 2 i afsnit 6.5, at en graf $G = (V, E)$, med $|V| \geq 3$, for hvilke alle par af to forskellige ikke-kantforbundne knuder u, v opfylder valensuligheden: $\delta_u + \delta_v \geq |V|$, er sammenhængende og har alle knudevalenser ≥ 2 .

Kapitel 7

Rekursioner

I mange situationer er der knyttet en *størrelsesparameter* til en tælleopgave, og løsningen afhænger på en informativ måde af denne parameter. Typisk kan løsningen af et sådant problem, for en bestemt værdi af parameteren, reduceres til løsningen af analoge problemer svarende til mindre værdier af størrelsesparameteren, og ofte kan en tælleopgaves løsning, det søgte antal, udtrykkes ved løsningsantal for den eller de tilsvarende mindre tælleopgaver gennem en ligning; en sådan ligning kaldes en *rekursionsligning*, eller ofte blot en *rekursion*.

Idéen at løse en forelagt tælleopgave via løsning af »mindre« analoge opgaver er udnyttet flere gange i det foregående, og mange flere kommer til i det følgende. Som vigtige eksempler nævnes *rekursionsformlerne* for binomial- og multinomialkoefficienter, se kapitel 3.

Dette kapitel ser lidt nærmere på simple typer af rekursioner, hvis løsninger er *talfølger*. Behandlingen er indledende, og i høj grad baseret på eksempler.

7.1 Indledning til rekursioner. De rekursioner, der diskuteres her i kapitlet, drejer sig om *talfølger* $(x_n)_{n \geq 0}$, der er indiceret fra $n = 0$, bestående af reelle eller komplekse tal x_n , og i forbindelse med tælleopgaver endda for det meste hele tal. En sådan følge $(x_n)_{n \geq 0}$ er naturligvis i princippet givet ved kendskab til x_n for alle $n \geq 0$, fx via en formel; følgen kan dog også være bestemt ved, at der består diverse relationer, eller ligninger, mellem dens elementer; sådanne relationer/ligninger – de kaldes *rekursioner*¹ – kan være af mange typer. Det afgørende er, at det via ligningerne, og kendskab til følgens *start*, dvs. kendskab til et passende sæt af følgeværdier, givet ved information af formen $x_0 = \alpha_0, x_1 = \alpha_1, \dots, x_m = \alpha_m$, hvor $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ er kendte konstanter – et sådant sæt kaldes *begyndelsesbetingelser* – er muligt at *beregne følgens elementer successivt*. Ofte tillader relationerne at give en *eksplicit formel* for (det n 'te element af) en sådan følge; hermed kan beregningen af følgelementer – med store indices – forenkles, men en formel kan desuden tjene andre formål, fx vurdering af den asymptotiske opførsel af følgen, og i det hele taget give *indsigt* i følgen, og den problemstilling, der hører til følgen.

Det er ikke altid naturligt at indicere den involverede talfølge fra $n = 0$; problemstillingen kan simpelthen forudsætte en vis positiv mindste størrelse af indeks n , eller det kan på anden måde være nødvendigt at give visse n -værdier en særskilt behandling. I mange situationer er det dog muligt – med omhu – at fortolke eventuelle grænsetilfælde på en måde, der harmonerer med rekursionen og dens »naturlige« begyndelsesværdier (mange eksempler i det følgende).

Eksempler. (1) Antallet a_n af *rækkefølger* af $n \geq 1$ objekter opfylder begyndelsesbetingelsen: $a_1 = 1$, og rekursionen: $a_n = na_{n-1}$, for $n \geq 2$; af n objekter kan nemlig det første i en rækkefølge af dem bestemmes på n måder, og for hver af disse er der a_{n-1} rækkefølger for de resterende $n - 1$ objekter. (Sættes $a_0 = 1$, svarende til den »tomme« rækkefølge af $n = 0$ objekter, opfylder $(a_n)_{n \geq 0}$ rekursionen $a_n = na_{n-1}$, for $n \geq 1$, med begyndelsesbetingelsen $a_0 = 1$.)

¹Sådanne rekursioner kan også formuleres ved ligninger mellem *differenser*: $x_{n+1} - x_n$, for $n \geq 0$, mellem successive elementer i den søgte talfølge $(x_n)_{n \geq 0}$, og rekursioner kaldes derfor ofte *differensligninger*. Synspunktet via differenser gør analogien til *differentialligninger* tydelig; i kapitlet tilstræbes en ikke-teknisk behandling.

(2) *Kontoudvikling*. På en bankkonto gøres der til tidspunktet t_0 et indskud på 100 kroner; til tidspunkterne t_1, t_2, \dots foretages rentetilskrivning på 5% af indeståendet ved begyndelsen af perioden fra t_{i-1} til t_i (inklusive eventuelle tilskrevne renter). Idet s_n betegner indeståendet ved tidspunktet t_n gælder: $s_0 = 100$, og $s_n = 1,05 \cdot s_{n-1}$, for $n = 1, 2, \dots$

Gøres der til alle tidspunkterne (og ikke blot ved det første) et indskud på 100 kroner, gælder om indeståendet: $s_0 = 100$, og $s_n = 1,05 \cdot s_{n-1} + 100$, for $n = 1, 2, \dots$

(3) En ofte forekommende rekursion er *Fibonacci-rekursionen*, af form: $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, for $n \geq 0$. Mange kombinatoriske problemer har løsningsantal, der tilfredsstiller denne rekursion med passende begyndelsesbetingelser: $x_0 = c_0$ og $x_1 = c_1$. (Der er desværre *ikke enighed* om de begyndelsesbetingelser, der fastlægger *Fibonacci-følgen*; vi benytter begyndelsesbetingelserne: $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$, og den tilsvarende talfølge behandles detaljeret senere, se næste kapitel.)

(4) En rekursion af en helt anden karakter, der ligeledes optræder i forbindelse med mange tælleproblemer, er nedenstående:

$$x_n = x_0 \cdot x_{n-1} + x_1 \cdot x_{n-2} + \dots + x_{n-1} \cdot x_0 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

Denne rekursion udtrykker det n 'te element i den ubekendte følge $(x_n)_{n \geq 0}$ som sum af produkter af elementerne med indices $0, 1, \dots, n-1$ (endda således, at faktorerne i hvert led har sum af indices $= n-1$; dette minder om multiplikation af polynomier, hvor koefficienten til x^k i produktet $p(x) \cdot q(x)$, af polynomier $p(x)$ og $q(x)$, er summen af alle produkter af koefficienten til x^j i $p(x)$ med koefficienten til x^{k-j} i $q(x)$, hvor j successivt antager værdierne $j = 0, 1, 2, \dots, k$). Rekursionen fastlægger med kendskab til det første element x_0 den ubekendte følge. For små værdier af n er regningerne simple; for eksempel fås for $x_0 = 1$:

$$x_1 = x_0^2 = 1, \quad x_2 = x_0 x_1 + x_1 x_0 = 2, \quad x_3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5,$$

og således videre. Læg mærke til, at den ene begyndelsesbetingelse er nok til at fastlægge følgen, og endvidere at beregningerne »svulmer op«, når n vokser, fordi ligningen for x_n involverer samtlige elementer med indeks $< n$. I kapitel 10 om *Catalan-tal* løses denne rekursion. \square

7.2 Diverse terminologi. Det er her næppe umagen værd at indføre en strikt terminologi, men et par løse betegnelser til beskrivelse af eksempler kan være nyttige. Det er praktisk at benytte en skrivemåde for rekursionerne, hvori deres *struktur* er synlig, eller som er tilpasset formålet med at studere den pågældende rekursion. I visse situationer kan dette ske ved at samle de led, der inddrager den ubekendte følges elementer, på den ene side af ligningen, og om muligt ordne dem efter aftagende indices; når rekursionen bruges til beregning er det måske mere naturligt at udtrykke *højeste-indeks-leddet* direkte ved de øvrige led – hvis dette er muligt.

Mange af de rekursioner, der mødes i praksis, har følgende overordnede struktur:

$$c_{m,m+n}x_{m+n} + c_{m-1,m-1+n}x_{m-1+n} + \dots + c_{0,n}x_n = d_n, \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1)$$

Her betegner $(x_n)_{n \geq 0}$ den ubekendte talfølge, medens $(c_{m,n})_{n \geq 0}$, $(c_{m-1,n})_{n \geq 0}$, osv. $(c_{0,n})_{n \geq 0}$ og $(d_n)_{n \geq 0}$ er givne følger, der fungerer som *koefficienter* og *højreside* i rekursionen (7.1).

En sådan rekursion kaldes *lineær*; ofte antages, at koefficientfølgen $(c_{m,n})_{n \geq 0}$ til leddet med den højest forekommende indeks til den ubekendte følge er den konstante følge $(1, 1, 1, \dots)$, og i så fald siges (7.1) at være *normeret*. Hvis også alle de øvrige forekommende *koefficientfølger* $(c_{m-1,n})_{n \geq 0}$, osv. $(c_{0,n})_{n \geq 0}$ er konstante siges (7.1) at have *konstante koefficienter* (læg mærke til, at *højresidefølgen* her *ikke* forudsættes at være konstant).

En rekursion af formen (7.1) for hvilken højresidefølgen $(d_n)_{n \geq 0}$ er nul-følgen $(0, 0, 0, \dots)$ kaldes *homogen*; en rekursion for hvilken det ikke vides, at højresidefølgen er nul-følgen, siges at

være *generel*, eller *inhomogen* (eller *ikke-homogen*). Ofte er det relevant, for en given (inhomogen) rekursion (7.1), at betragte den rekursion, der fås ved at erstatte højresidefølgen med nul-følgen: denne rekursion kaldes *den til den forelagte rekursion svarende homogene rekursion*.

Lad der være givet en normeret rekursion af formen (7.1), altså skrevet ud

$$x_{m+n} + c_{m-1,m-1+n}x_{m-1+n} + \dots + c_{0,n}x_n = d_n, \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.2)$$

Denne rekursion har normalt – for et givet sæt af *koefficientfølger* og *højresidefølge* – uendelig mange løsninger, dvs. følger $(x_n)_{n \geq 0}$, der indsat passer i (7.2). Idéen med en rekursion er at fastlægge den skridt-for-skridt-vise opførsel af den ukendte følge, og at rekursionen – suppleret med et passende sæt af startværdier – fastlægger følgen $(x_n)_{n \geq 0}$ entydigt.

For vilkårlige m begyndelsesværdier, altså hvert sæt af m tal $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})$, findes præcis én følge $(x_n)_{n \geq 0}$, der tilfredsstiller ligningen (7.2) og opfylder begyndelsesbetingelserne: $x_i = \alpha_i$, for $i = 0, 1, 2, \dots, m - 1$.

På basis af disse begyndelsesværdier giver (7.2) anvendt for $n = 0$ nemlig x_m ; herefter er specielt x_1, x_2, \dots, x_m kendte, og (7.2) anvendt for $n = 1$ giver så x_{m+1} , hvorefter x_2, x_3, \dots, x_{m+1} er kendte; denne procedure kan naturligvis fortsættes (i tanken og delvis i praksis). (Påstanden ovenfor er en slags *eksistens- og entydighedssætning* for rekursioner af den betragtede type.)

En rekursion af formen (7.2) siges at have *orden* m , hvor denne orden *måler afstanden i indices mellem yderleddene* i rekursionens venstre side, og m er ligeledes *antallet af begyndelsesbetingelser* for en entydig fastlæggelse af en løsningsfølge. Normalt forudsættes, at koefficientfølgen $(c_{0,n})_{n \geq 0}$ til den lavest indicerede forekomst af den ubekendte følge »spiller en rolle«, dvs. *påvirker* løsningsfølgen via den 0'te begyndelsesværdi, altså, at $c_{0,0} \neq 0$. (Derved er rekursionens *egentlige* orden m ; dette bliver nok klarere i forbindelse med sætningen i afsnit 7.5.)

Eksempler (fortsat fra afsnit 7.2). (1) Rekursionen $a_{n+1} - (n + 1) \cdot a_n = 0$ er en lineær homogen rekursion, af orden $m = 1$, med koefficientfølge $(n + 1)_{n \geq 0}$, der er ikke-konstant.

(2) Den anden rekursion kan skrives: $s_{n+1} - 1.05 \cdot s_n = 100$, som er en lineær ikke-homogen rekursion af orden 1 (eller første orden), med højresidefølge $(d_n)_{n \geq 0}$, hvor $d_n = 100$ for alle n ; den første er den tilsvarende homogene rekursion, med konstant koefficientfølge $(1,05)_{n \geq 0}$.

(3) Rekursionen kan skrives: $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$, der er en lineær homogen rekursion af orden $m = 2$ (eller anden orden) med konstante koefficienter ($c_{1,i} = c_{0,j} = -1$ for alle i, j).

(4) Rekursionen er ikke-lineær, og den kan ikke tilskrives en »fast orden«. □

Begrebet løsningsfølge til en rekursion er uproblematisk – en følge, der indsat passer i ligningerne for alle n ; den *fuldstændige løsning til en rekursion* er mængden af samtlige løsningsfølger. Det er derimod ikke ganske klart hvad det er (eller burde være!) at »løse en rekursion«.

Fra et passende sæt af begyndelsesbetingelser kan det n 'te element i den entydigt bestemte løsningsfølge $(x_n)_{n \geq 0}$ i princippet *beregnes* for hver fast given værdi af indeks n , simpelthen ved at benytte selve rekursionen; for store, og meget store, værdier af n kan det imidlertid være vanskeligt, eller direkte umuligt, i praksis at beregne x_n indenfor den til rådighed stående tid, eller med en for formålet tilstrækkelig beregningsnøjagtighed.

Normalt indebærer *løsning af en rekursion* en eller anden slags formelmæssig beskrivelse af løsningsfølgerne, og her bestemmer arten af »tilladte formler« naturligvis hvilke ligninger, der kan løses i denne forstand. (Dette bliver klarere – håber jeg – i lyset af senere overvejelser!)

7.3 Lineære 1. ordens rekursioner med konstante koefficienter. Det er nyttigt at gennemføre overvejelserne for tilfældet af lineære rekursioner af første orden med konstante koefficienter; en sådan kan skrives:

$$x_{n+1} + cx_n = d_n, \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.3)$$

hvor konstanten c , og følgen $(d_n)_{n \geq 0}$ er givne. Den til (7.3) svarende homogene rekursion er: $x_{n+1} + cx_n = 0$, for $n = 0, 1, 2, \dots$, der blot udtrykker, at hvert følgeelement x_n , for $n > 0$, er $-c$ gange det foregående følgeelement x_{n-1} ; den til en begyndelsesbetingelse $x_0 = \alpha_0$ (hvor α_0 er givet) entydigt bestemte løsningsfølge er derfor: $x_n = (-c)^n \alpha_0$, for $n > 0$ (og faktisk også for $n = 0$). Når $c = 0$ er det kun det 0'te følgeelement i løsningen, der afhænger af begyndelsesværdien.

Dermed er det homogene tilfælde »uddebatteret«! For at få hul på det inhomogene tilfælde er det nyttigt at anlægge et abstrakt synspunkt, der yderligere forfølges i næste afsnit.

Mængden af komplekse talfølger, udstyret med de sædvanlige *pladsvise* regneoperationer, udgør et vektorrum, der betegnes \mathcal{F} . (Summen af følger $(x_n)_{n \geq 0}$ og $(y_n)_{n \geq 0}$ er $(z_n)_{n \geq 0}$, hvis n 'te element er $z_n = x_n + y_n$, og en skalar c gange $(x_n)_{n \geq 0}$ er følgen, hvis n 'te element er cx_n .)

Det ses umiddelbart – ved at indsætte – at løsningerne til den til (7.3) svarende homogene rekursion udgør et underrum af \mathcal{F} ; videre ses – ligeledes ved at indsætte – at hvis $(x_n)_{n \geq 0}$ og $(y_n)_{n \geq 0}$ er to vilkårlige løsninger til den inhomogene rekursion (7.3) så er *differensfølgen*, hvis n 'te element er $x_n - y_n$, løsningsfølge til den tilsvarende homogene rekursion. Dette betyder, at hvis blot én enkelt løsningsfølge $(y_n)_{n \geq 0}$ til (7.3) kendes, så kendes alle: enhver anden fås nemlig ved til $(y_n)_{n \geq 0}$ at addere en (passende valgt) løsning til den tilsvarende homogene rekursion, og den fuldstændige løsning hertil er beskrevet ovenfor.

Problemet er altså at beskrive en enkelt løsning til den inhomogene rekursion, hvilket dog kan være trivielt, eller umuligt, afhængigt af hvad der forstås ved at beskrive en løsning.

Eksempel 1. I specialtilfældet $c = -1$ er løsningerne til den til (7.3) svarende homogene rekursion de konstante følger, og den inhomogene rekursion har løsningen

$$x_{n+1} = x_0 + \sum_{j=0}^n d_j, \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.4)$$

der let ses at passe i (7.3). Nyten af denne løsningsformel, der dog trods alt blotlægger begyndelsesbetingelsens indvirkning på løsningen, afhænger (af brugen og især) af om det er muligt at udtrykke summen i (7.4) eksplicit. \square

Problemstillingen kan også ansues delvis omvendt: for at finde en følge $(x_n)_{n \geq 0}$ som indsat passer i (7.3), og gerne med et »pænt udtryk«, beregnes, med kendte og nogenlunde pæne udtryk for følgen $(x_n)_{n \geq 0}$, hvad $x_{n+1} + cx_n$, altså venstresiden i (7.3), er. Med held kan det heraf ses, hvorledes $(x_n)_{n \geq 0}$ skal se ud for indsat i (7.3) at passe med en given højresidefølge $(d_n)_{n \geq 0}$. Tabellen nedenfor giver resultatet af sådanne beregninger for diverse simple følger $(x_n)_{n \geq 0}$.

x_n	$x_{n+1} + cx_n$
a (en konstant)	$a(1 + c)$
n	$(1 + c)n + 1$
n^2	$(1 + c)n^2 + 2n + 1$
n^3	$(1 + c)n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
...	...
a^n (a en konstant, $a \neq -c$)	$(a + c)a^n$
na^n (a en konstant, $a \neq -c$)	$(a + c)na^n + a^{n+1}$
$n^2 a^n$ (a en konstant, $a \neq -c$)	$(a + c)n^2 a^n + (2n + 1)a^{n+1}$
...	...
$(-c)^n$	0
$n(-c)^n$	$(-c)^{n+1}$
$n^2(-c)^n$	$(2n + 1)(-c)^n$
$n^3(-c)^n$	$(3n^2 + 3n + 1)(-c)^n$
...	...

Det ses, at for rekursioner med højresidefølge af formen: et polynomium i n gange potensfunktionen $n \mapsto a^n$, er det let at udpege – eller gætte på – en løsning; potensfunktionerne $n \mapsto (-c)^n$, hvor c er konstanten i (7.3), kræver dog en lidt afvigende behandling.

Eksempel 2. Med henblik på løsning baseret på et sådant »gæt« betragtes rekursionen (7.3), med $c = -1$ og højresidefølge n^2 , altså: $x_{n+1} - x_n = n^2$, for $n \geq 0$, med begyndelsesbetingelsen $x_0 = 0$. For at simulere højresidefølgen n^2 forsøges med x_n af formen: $x_n = an^3 + bn^2 + cn$, for passende konstanter a, b, c (polynomiet går én grad ned når $x_{n+1} - x_n$ dannes):

$$x_{n+1} - x_n = a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) - an^3 - bn^2 - cn = 3an^2 + (3a+2b)n + a+b+c,$$

hvilket er n^2 hvis og kun hvis: $3a = 1$, $3a + 2b = 0$, og $a + b + c = 0$, dvs. for

$$x_n = \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Det tilsvarende udtryk for x_{n+1} giver, se eksempel 1, summen af højresideleddene, her den klassiske formel (se TAL2, Eksempel (2.6), i Algebrabogen):

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \text{for } n = 1, 2, \dots \quad \square$$

7.4 Lineære rekursioner med konstante koefficienter. Mange² af *strukturforholdene* for 1. ordens rekursioner (afsnit 7.3) gælder – passende generaliserede – også for lineære rekursioner med konstanter koefficienter af *vilkårlig orden*. En sådan rekursion af orden $m > 0$ kan skrives:

$$x_{n+m} + c_{m-1}x_{n+m-1} + \dots + c_0x_n = d_n, \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.5)$$

hvor konstanterne c_0, c_1, \dots, c_{m-1} , og følgen $(d_n)_{n \geq 0}$ er givne. Den til (7.5) svarende homogene rekursion er:

$$x_{n+m} + c_{m-1}x_{n+m-1} + \dots + c_0x_n = 0 \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.6)$$

Igen benyttes vektorrummet \mathcal{F} af komplekse talfølger; det er let at se ved indsætning, at mængden af løsninger $(x_n)_{n \geq 0}$ til (7.6) udgør et *underrum* af \mathcal{F} .

Rekursionen bestemmer en lineær afbildning L af \mathcal{F} ind i sig selv: billedet ved L af en følge $(x_n)_{n \geq 0}$ fra \mathcal{F} er følgen, hvis n 'te element er givet ved venstresiden af (7.6). Dermed er mængden af løsninger til (7.6) blot *kernen*, eller *nul-rummet*, for L . Videre ses, at afbildningen af \mathbb{C}^m ind i \mathcal{F} , som til et givet sæt af m begyndelsesbetingelser: $x_i = \alpha_i$, for $i = 0, 1, \dots, m-1$, knytter den entydigt bestemte løsning til (7.6) med disse begyndelsessværdier, er lineær og bijektiv, og derfor har underrummet af \mathcal{F} bestående af løsninger til (7.6) dimension m .

For den givne inhomogene rekursion gælder, at hvis $(x_n)_{n \geq 0}$ og $(y_n)_{n \geq 0}$ er to vilkårlige løsningsfølger til (7.5) så er *differensfølgen*, hvis n 'te element er $x_n - y_n$, løsning til (7.6); dette følger ligeledes ved indsætning. Denne enkle observation har vidtrækkende konsekvenser:

Fra den fuldstændige løsning til (7.6) – det kan vises på samme måde som i næste afsnit for tilfældet $m = 2$, at denne fuldstændige løsning kan bestemmes via rødderne i et passende polynomium – og en enkelt løsning til (7.5), kan den fuldstændige løsning til (7.5) angives. En følge $(x_n)_{n \geq 0}$ af formen $x_n = y_n + z_n$, hvor $(y_n)_{n \geq 0}$ er en løsning til (7.6), og $(z_n)_{n \geq 0}$ er en løsning til (7.5), er en løsning til (7.5); omvendt er enhver løsning $(x_n)_{n \geq 0}$ til (7.5) af denne form (med $(z_n)_{n \geq 0}$ fastholdt), dvs. der findes en løsningsfølge $(y_n)_{n \geq 0}$ til (7.6) så $x_n = y_n + z_n$.

²Dette afsnit er kapitlets vigtigste – er det volapük kan det dog uden tab af sammenhæng springes over!

Den ovenfor indførte lineære afbildning L af \mathcal{F} ind i sig selv er ifølge *eksistens- og entydighedssætningen*, se afsnit 7.2, *bijektiv*, og at løse (7.5) for en given højresidefølge $(d_n)_{n \geq 0}$ kommer derfor ud på at bestemme det entydigt bestemte element af \mathcal{F} , altså følge $(x_n)_{n \geq 0}$, der ved L afbildes i følgen $(d_n)_{n \geq 0}$; om dette kan ske via et pænt, eller simpelt udtryk, afhænger af rekursionens højresidefølge.

7.5 Lineære 2. ordens rekursioner med konstante koefficienter. Mange tællesituationer fører til en lineær 2. ordens rekursion med konstante koefficienter, altså af formen:

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = d_n \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.7)$$

til fastlæggelse af en talfølge $(x_n)_{n \geq 0}$, hvor konstanterne b , c , og talfølgen $(d_n)_{n \geq 0}$ er givne.

Hovedresultatet i dette afsnit vedrører den tilsvarende homogene rekursion, altså:

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0 \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.8)$$

Idet et følgeelement x_n , for $n \geq 2$, afhænger af de to foregående (og for (7.7) af højresidefølgen $(d_n)_{n \geq 0}$), kræves to begyndelsesværdier til entydig fastlæggelse af en løsning.

I resten af dette afsnit betragtes kun den homogene rekursion (7.8). Tilfældet $b = c = 0$ er udartet: en løsningsfølge $(x_n)_{n \geq 0}$ er konstant $x_n = 0$, for $n \geq 2$, og x_0 og x_1 er blot de givne begyndelsesværdier. Tilfældet $c = 0$ er delvis udartet – på en måde svarer det til en 1. ordens rekursion – idet i en løsningsfølge $(x_n)_{n \geq 0}$ hvert element x_n , for $n \geq 2$, er $-b$ gange det foregående; dermed er x_0 fastlagt ved den ene begyndelsesværdi, og resten af følgen er $x_n = (-b)^{n-1}x_1$, altså bestemt ved den anden begyndelsesværdi. Ved at forudsætte $c \neq 0$ sikres en *egentlig afhængighed* mellem x_{n+2} og x_n , altså på en måde, at rekursionen *effektivt* er af 2. orden.

Erfaringerne fra afsnit 7.3 gør det nærliggende at undersøge, om en følge af formen $(\lambda^n)_{n \geq 0}$, for en konstant $\lambda \neq 0$, er løsning til rekursionen (7.8). Ved at indsætte $x_n = \lambda^n$ fås:

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = \lambda^{n+2} + b\lambda^{n+1} + c\lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 + b\lambda + c).$$

Denne udregning viser, at følgen $x_n = \lambda^n$ er løsning til (7.8) hvis og kun hvis $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Derfor er følgende andengradsligning afgørende for løsning af (7.8):

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (7.9)$$

Denne andengradsligning kaldes *den karakteristiske ligning* for rekursionen (7.8) (og venstresiden det *karakteristiske polynomium*); den er afledt fra (7.8) ved at »overføre« koefficienterne i (7.8) til x_{n+2} , x_{n+1} og x_n som koefficienter til λ^2 , λ^1 og konstantleddet λ^0 i den karakteristiske ligning.

Det viser sig, at samtlige løsninger til ligningen (7.8) kan udtrykkes simpelt via løsningsfølger af formen $x_n = \lambda^n$, hvor λ er løsning til den karakteristiske ligning (7.9). Tilfældet hvor den karakteristiske ligning har løsning $\lambda = 0$ er særligt; det indtræffer hvis og kun hvis $c = 0$.

Sætning. Lad $(x_n)_{n \geq 0}$ være den entydigt bestemte løsning til rekursionen (7.8), der antager givne begyndelsesværdier α_0 og α_1 , altså for hvilken:

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0 \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{samt } x_0 = \alpha_0 \quad \text{og} \quad x_1 = \alpha_1.$$

Antag,³ at $c \neq 0$, og lad α og β betegne de to rødder i den karakteristiske ligning (7.9) for (7.8). I tilfældet $\alpha \neq \beta$, hvor (7.9) har to forskellige rødder, findes entydigt bestemte konstanter r , s , så

$$x_n = r\alpha^n + s\beta^n \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.10)$$

³Tilfældet $c = 0$ er diskuteret ovenfor.

I tilfældet $\alpha = \beta$, hvor (7.9) har dobbeltroden α , findes entydigt bestemte konstanter r, s , så

$$x_n = r\alpha^n + s n \alpha^n \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.11)$$

Bevis. Til forberedelse betragtes tilfældet med dobbeltrod, hvor altså α er to gange rod i den karakteristiske ligning. Dette betyder, at polynomiet: $\lambda^2 + b\lambda + c$ er kvadrateret på førstegradspolynomiet $\lambda - \alpha$, altså at

$$\lambda^2 + b\lambda + c = (\lambda - \alpha)^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2.$$

Heraf ses, at $2\alpha = -b$ og $\alpha^2 = c$. Følgen $(n\alpha^n)_{n \geq 0}$ er en løsning til (7.8). Dette verificeres på samme måde som ovenfor for følgen $(\lambda^n)_{n \geq 0}$ ved at indsætte:

$$\begin{aligned} b(n+1)\alpha^{n+1} + cn\alpha^n &= \alpha^n(b(n+1)\alpha + cn) = \alpha^n(-2\alpha(n+1)\alpha + \alpha^2 n) \\ &= \alpha^{n+2}(-2(n+2) + n) = -(n+2)\alpha^{n+2}. \end{aligned}$$

Dermed er der i tilfældet $\alpha \neq \beta$ de to *basisløsninger* $(\alpha^n)_{n \geq 0}$ og $(\beta^n)_{n \geq 0}$ til rekursionen, medens der i tilfældet med dobbeltrod $\alpha = \beta$ er de to *basisløsninger* $(\alpha^n)_{n \geq 0}$ og $(n\alpha^n)_{n \geq 0}$ til rekursionen. Det viser sig, at de er lineært uafhængige, og at hver løsning til (7.8) er en linearkombination af dem.

Antag først, at $\alpha \neq \beta$. Det drejer sig om at bestemme r, s så (7.10) gælder, med $x_0 = \alpha_0$ og $x_1 = \alpha_1$. Men for $n = 0, 1$ fås, at eventuelle brugbare konstanter r, s opfylder:

$$\alpha_0 = r + s, \quad \text{og} \quad \alpha_1 = r\alpha + s\beta,$$

og dette ligningssystem har en entydigt bestemt løsning i (r, s) , fordi de to højresider *ikke* er proportionale, da $\alpha \neq \beta$.

Antag dernæst, at $\alpha = \beta$. Det drejer sig om at bestemme r, s så (7.11) gælder, med $x_0 = \alpha_0$ og $x_1 = \alpha_1$. Men indsættes $n = 0$, og $n = 1$ fås, at eventuelle brugbare konstanter r, s skal opfylde:

$$\alpha_0 = r, \quad \text{og} \quad \alpha_1 = r\alpha + s\alpha = \alpha(r + s),$$

og dette ligningssystem har en entydigt bestemt løsning i (r, s) , fordi faktoren α er $\neq 0$, da den karakteristiske ligning *ikke* har 0 som rod ($c \neq 0$). ■

Eksempler. (a) Rekursionen $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, for $n \geq 2$, har karakteristisk ligning: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, med rødderne $\lambda = 1, 2$. Ved direkte indsætning i rekursionen bestemmes starten af løsningsfølgerne med begyndelsesværdier 1, 0, henholdsvis 0, 1, til

$$(1, 0, -2, -6, -14, -30, \dots) \quad \text{og} \quad (0, 1, 3, 7, 15, 31, \dots),$$

og disse løsninger har formeludtrykkene: $x_n = 2 - 2^n$, henholdsvis $x_n = -1 + 2^n$, som findes ved at tilpasse konstanterne r, s fra sætningen.

(b) Rekursionen $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$, for $n \geq 2$, med $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ som karakteristisk ligning; denne har dobbeltroden $\lambda = 1$. Ved direkte indsætning i rekursionen bestemmes starten af løsningsfølgerne med begyndelsesværdier 1, 0, henholdsvis 0, 1, til

$$(1, 0, -1, -2, -3, -4, \dots) \quad \text{og} \quad (0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots),$$

og disse løsninger har formeludtrykkene: $x_n = 1 - n$, henholdsvis $x_n = n$, som findes ved at tilpasse konstanterne r, s fra sætningen.

(c) Rekursionen $x_{n+2} + x_n = 0$, for $n \geq 2$, har den karakteristiske ligning: $\lambda^2 + 1 = 0$, med de to komplekse rødder $\lambda = \pm i$. Hvert følgelement x_n er for $n \geq 2$, med et fortegnsskift, følgelementet to indices tidligere, altså (uden fortegnsskift) for $n \geq 4$, følgelementet fire indices tidligere,

dvs. løsningsfølger er periodiske med periodelængde 4. Ved direkte indsætning i rekursionen bestemmes starten af løsningsfølgerne med begyndelsesværdier 1, 0, henholdsvis 0, 1, til

$$(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots) \quad \text{og} \quad (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots).$$

For den første findes formeludtrykket: $x_{2k} = (-1)^k$, og $x_{2k+1} = 0$, for $k = 0, 1, 2, \dots$, og for den anden: $x_{2k} = 0$, og $x_{2k+1} = (-1)^k$, for $k = 0, 1, 2, \dots$, ved at tilpasse konstanterne r, s fra sætningen. \square

Bemærkning. I eksempel (c) hvor den karakteristiske ligning har komplekse rødder fås når udregningerne føres til bunds hele tal som elementer i løsningsfølgerne. Dette er *ikke overraskende!* Rekursionen har hele tale som koefficienter, og derfor består enhver løsning med hele tal som begyndelsesværdier af lutter hele tal.

Læg også mærke til, at den indledende beregning af de første elementer i en løsningsfølge faktisk siger det meste.

Som det er gjort i eksemplerne kan det være praktisk at beregne løsningsfølger for begyndelsesværdierne 1, 0, henholdsvis 0, 1. Løsningen med generelle begyndelsesværdier α_0 og α_1 er da blot linearkombinationen af de to specielle løsninger med koefficienterne α_0 og α_1 . \square

7.6 Fortsættelse: det inhomogene tilfælde. Løsning af inhomogene rekursioner kan ofte gennemføres ved et kvalificeret »gæt«. Den fuldstændige løsning har den generelle form: en vilkårlig løsningsfølge til den givne inhomogene rekursion plus den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene rekursion, se afsnit 7.4, og det sidstnævnte bidrag, for en rekursion af orden 2, er givet ved løsningsformlerne (7.10) og (7.11). Dermed kan den fuldstændige løsning opskrives når en enkelt løsning til den inhomogene rekursion er kendt, en sådan kaldes en *partikulær løsning*. Hvordan en partikulær løsning er erhvervet er sagen uvedkommende – én måde kunne være via et gæt. Nedenstående tabel, der svarer til tabellen for en 1. ordens rekursion i afsnit 7.3, udregner $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n$ for diverse simple følger $(x_n)_{n \geq 0}$; den kan benyttes til sådanne gæt.

x_n	$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n$
a (en konstant)	$a(1 + b + c)$
n	$n(1 + b + c) + (2 + b)$
n^2	$n^2(1 + b + c) + n(4 + 2b) + (4 + b)$
n^3	$n^3(1 + b + c) + n^2(6 + 3b) + n(12 + 3b) + (8 + b)$
...	...
a^n (a en konstant)	$a^n(a^2 + ba + c)$
na^n	$na^n(a^2 + ba + c) + a^{n+1}(2a + b)$
n^2a^n	$n^2a^n(a^2 + ba + c) + na^{n+1}(4a + 2b) + a^{n+1}(4a + b)$
n^3a^n	$n^3a^n(a^2 + ba + c) + n^2a^{n+1}(6a + 3b) + na^{n+1}(12a + 3b) + a^{n+1}(8a + b)$
...	...

Med x_n givet som et polynomium i n er $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n$ ligeledes et polynomium i n ; graden som polynomium i n er ikke i almindelighed bevaret.

Tilsvarende når x_n er af formen: et polynomium i n gange n 'te potensen af en konstant, så er $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n$ af samme form, og med eventuelt tab af grad i polynomiet, hvis konstanten er rod i det karakteristiske polynomium for 2. ordens rekursionen.

Eksempel. Antallet af visse ord, dvs. endelige følger, skrevet i bogstaverne 0, 1 ønskes bestemt. Dette antal kunne være relevant i en *kommunikationssituation*, hvor en *meddelelse* skrives som en sekvens af 0, 1, og hvor et bestemt *mønster* fungerer som en slags skillesymbol.

Præcist skal antallet af følger af længde $n \geq 3$, der *ender med skillesymbolet* 010 beregnes. Det er dog ikke alle følger af længde n , for hvilke de tre sidste tegn er 010, der *ender med*

skillesymbolet (i kommunikationsmæssig forstand): det ligger i modellen, at en følge »afkodes sekventielt« fra venstre ende, og hver gang et skillesymbol detekteres genstartes »dekodningen« med det næstfølgende symbol i meddelelsen.

Med $(b_n)_{n \geq 3}$ betegnes det søgte antal. Det er klart, at $b_3 = 1$ (den ene sekvens 010 af længde 3), og $b_4 = 2$ (de 2 sekvenser 0010 og 1010 af længde 4). Der er naturligvis ialt 4 ord af længde 5 for hvilke de 3 sidste bogstaver er 010, nemlig antallet af *forstavelser* af længde 2, men kun 3 af dem ender på 010 i den fastlagte betydning (undtagelsen er 01010, hvor mønsteret 010 i starten »blokerer« for at opfatte de sidste 3 tegn som skillesymbol); altså er $b_5 = 3$.

For et $n \geq 5$ er der ialt 2^{n-3} følger af længde n i bogstaverne 0, 1 for hvilke de 3 sidste symboler udgør mønsteret 010. Disse følger er af to typer: den første består af følger, der ender i 010 i den fastlagte betydning, og antallet af disse er b_n ; den anden type består af de følger, der *ikke* ender i 010 i den fastlagte betydning, hvor altså det tredjesidste tegn i følgen, der jo er et 0, er slut-0'et i et foregående skillesymbol 010. Hver følge af den anden type svarer dermed – på bijektiv måde – til en følge af længde $n - 2$, der ender på 010 i den anførte betydning, og antallet af sådanne er b_{n-2} . Derfor er antalsfølgen $(b_n)_{n \geq 3}$ løsning til rekursionen nedenfor med de anførte begyndelsesbetingelser:

$$x_n + x_{n-2} = 2^{n-3} \quad \text{for } n = 5, 6, 7, \dots, \quad \text{og } x_3 = 1, \quad x_4 = 2.$$

Denne inhomogene 2. ordens rekursion løses. Den tilsvarende homogene rekursion er behandlet i eksempel (c), afsnit 7.5, hvor der blev fundet de to *basisløsninger*:

$$(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots), \quad \text{og} \quad (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots),$$

indiceret med $n = 3, 4, \dots$

Højresiden i den inhomogene 2. ordens rekursion er 2^{n-3} , og derfor »gættes« på en partikulær løsning af formen $x_n = c2^{n-3}$, for en konstant c . Indsættes $x_n = c2^{n-3}$ i rekursionens venstreside fås

$$x_n + x_{n-2} = c2^{n-3} + c2^{n-2-3} = 5c2^{n-5}.$$

Dette viser, at $x_n = c2^{n-3}$ tilfredsstiller den inhomogene rekursion (for $n \geq 3$) hvis og kun hvis $5c = 4$. Dermed fås den partikulære løsning:

$$\left(\frac{4}{5}2^{n-3}\right)_{n \geq 3} = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{16}{5}, \frac{32}{5}, \dots\right).$$

Nu benyttes begyndelsesbetingelserne, at $b_3 = 1$ og $b_4 = 2$, og den søgte løsning findes til:

$$\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{16}{5}, \frac{32}{5}, \frac{64}{5}, \dots\right) + \frac{1}{5}(1, 0, -1, 0, 1, \dots) + \frac{2}{5}(0, 1, 0, -1, 0, \dots) = (1, 2, 3, 6, 13, \dots).$$

(Husk, at følgerne indiceres fra $n = 3$.) □

7.7 Eksempel på 3. ordens rekursion. Antallet af ord af længde n skrevet med de 3 ciffer-symboler 0, 1, 2 er 3^n . Visse af ordene indeholder et, eller måske flere, delord af længde 3 bestående af 012 (i denne rækkefølge). Med a_n betegnes for $n \geq 1$ antallet af ord af længde n , som *ikke* har et eller flere delord 012 (også gerne for $n = 0$, hvor $a_0 = 1$, da det ene ord af længde 0 er det tomme ord, hvori delordet 012 ikke forekommer). Dermed er $a_1 = 3$ og $a_2 = 9$, og af de ialt 27 ord af længde 3 er der præcis ét, nemlig 012, der har 012 som delord; dermed er $a_3 = 27 - 1 = 26$.

Lad $n \geq 4$. Et ord af længde n , hvori delordet 012 ikke forekommer, fås af et ord af længde $n - 1$, hvori delordet 012 heller ikke forekommer, ved forlængelse med et symbol, der er 0, 1, eller 2. Hvis forlængingssymbolet er 0 eller 1 kan der *ikke* ved forlængelsen skabes et delord 012; hvis

derimod forlængelsessymbolet er 2 vil forlængelsen skabe et delord 012 hvis og kun hvis ordet af længde $n - 1$ ender på 01. Idet antallet af ord af længde $n - 1$, hvori delordet 012 ikke forekommer, og som ender på 01, er a_{n-3} , gælder således, at

$$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-3}.$$

(Leddet $3a_{n-1}$ tæller samtlige 1-symbolforlængelser af 012-delordfri ord af længde $n - 1$, og leddet a_{n-3} tæller de 012-delordfri ord af længde $n - 1$, der ender på 01, hvis forlængelse med 2 altså danner et 012-delord på de 3 sidste positioner.)

Den fundne rekursion er en lineær 3. ordens rekursion med konstante koefficienter; læg mærke til, at med fastsættelsen $a_0 = 1$, er rekursionen ovenfor faktisk opfyldt for $n \geq 3$. De næstfølgende værdier a_n kan herefter let bestemmes:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	3	9	26	75	216	622	1791

Den tilhørende karakteristiske ligning, der fås af rekursionen ved at overføre koefficienterne fra rekursionen til potenser af λ er: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 1 = 0$, der ikke er venlig. Den har 3 forskellige reelle rødder, én mellem -1 og 0 , én mellem 0 og 1 , og én mellem 2 og 3 . \square

7.8 Antal permutationer uden fikspunkter. Lad n være et naturligt tal. Blandt de $n!$ permutationer af en mængde af n objekter har visse ét eller flere *fikspunkter*, altså et objekt, der *ikke flyttes* af permutationen. Den *identiske permutation* af n objekter har alle n objekter som fikspunkter. *Antallet af permutationer uden fikspunkter ønskes bestemt.*

Definition.⁴ For $n \in \mathbb{N}$ betegner D_n antallet af permutationer $\pi \in S_n$ uden fikspunkter.

Her er D_n , for små værdier af n , let at bestemme med kendskab til små permutationer:

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad D_3 = 2, \quad D_4 = 9.$$

(For $n = 3$ er kun de to 3-cykler uden fikspunkter, og for $n = 4$ er det kun de tre dobbelt-transpositioner, samt de seks 4-cykler, der flytter alle objekter.)

For større værdier af n er den direkte optælling af permutationerne uden fikspunkter besværlig, og næsten umulig at gennemføre uden fejl. Derfor søges en rekursion for D_n .

Sætning. Følgen $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er den entydigt bestemte følge, der tilfredsstiller rekursionen

$$x_n = (n - 1)(x_{n-1} + x_{n-2}) \quad \text{for } n = 3, 4, 5, \dots \quad (7.12)$$

med begyndelsesværdierne: $x_1 = 0$ og $x_2 = 1$.

Bevis. Det er klart, at D_n har de anførte værdier for $n = 1, 2$. Lad $n \geq 3$. Rekursionen (7.12) verificeres ved at bestemme antallet af permutationer $\pi \in S_n$ uden fikspunkter, som opfylder $\pi(1) = k$, for $k = 2, 3, \dots, n$, og addere de fundne antal.

For hver af de $n - 1$ mulige værdier for k tælles permutationerne $\pi \in S_n$ uden fikspunkter, som opfylder $\pi(1) = k$, ved dels at bestemme antallet af sådanne, hvor 1 og k ombyttes, hvor altså $\pi(k) = 1$, dels antallet af sådanne, hvor 1 og k ikke ombyttes, hvor altså $\pi(k) \neq 1$. Det viser sig, at antallet, hvor 1 og k ombyttes er D_{n-2} , og antallet, hvor 1 og k ikke ombyttes er D_{n-1} ; specielt er antallet af permutationer $\pi \in S_n$ uden fikspunkter, som opfylder $\pi(1) = k$, det samme for alle værdier af $k \neq 1$, og ligningen (7.12) følger ved addition.

⁴På engelsk kaldes en permutation uden fikspunkter for *a derangement*.

Lad $\pi \in S_n$ være en permutation uden fikspunkter, for hvilken $\pi(1) = k$, for et $k \in \{2, \dots, n\}$, og betragt permutationen: $\nu = \pi(1 k)$, altså transpositionen $(1 k)$ efterfulgt af π .

Hvis $\pi \in S_n$ ombytter 1 og k (og ingen fikspunkter har), så har ν fikspunkterne 1 og k , og ikke andre; derved giver $\pi \mapsto \pi(1 k)$ anledning til en bijektiv afbildning af mængden af permutationer $\pi \in S_n$ uden fikspunkter, der ombytter 1 og k , på mængden af permutationer af $n - 2$ objekter uden fikspunkter. Antallet af disse permutationer er således D_{n-2} .

Hvis derimod $\pi \in S_n$ er uden fikspunkter, opfylder $\pi(1) = k$, og hvor π ikke ombytter 1 og k , så gælder om permutationen $\nu = \pi(1 k)$, at $\nu(k) = k$, den har altså k som fikspunkt, og – viser det sig – ikke andre fikspunkter. Det er nemlig klart, at $j = 1$ ikke er fikspunkt, fordi ifølge antagelsen, $\pi(k) \neq 1$. Videre gælder, at et $j > 1$, med $j \neq k$, ikke berøres af transpositionen $(1 k)$, og ikke er fikspunkt for anden faktor π . Derved giver $\pi \mapsto \pi(1 k)$ anledning til en bijektiv afbildning af mængden af permutationer $\pi \in S_n$ uden fikspunkter, for hvilke $\pi(1) = k$, men hvor π ikke ombytter 1 og k , og mængden af permutationer af $n - 1$ objekter uden fikspunkter. Antallet af disse permutationer er således D_{n-1} . ■

For $n = 5$ giver rekursionen – baseret på de tidligere værdier – at $D_5 = 4(2 + 9) = 44$, svarende til de $24 + 20$ permutationer af cykeltyperne 5^1 og $2^1 3^1$. Diverse antal af permutationer studeres nærmere i eksempel 2, afsnit 15.5.

Bemærkning. Rekursionen (7.12) har, som det let eftervises, udover følgen $(D_n)_{n \geq 1}$ også en anden interessant løsningsfølge, nemlig fakultetstallene $(n!)_{n \geq 0}$, der svarer til begyndelsesværdien 1 for $n = 0$ og $n = 1$. For $n \geq 2$ gælder nemlig

$$(n - 1)((n - 1)! + (n - 2)!) = (n - 1)(n - 1 + 1)(n - 2)! = n!. \quad \square$$

Eksempel. For et naturligt tal $n > 1$, og et helt tal m , der opfylder $0 \leq m \leq n$, er antallet af permutationer af n objekter, der har præcis m fikspunkter, produktet: $\binom{n}{m} D_{n-m}$, nemlig for hvert valg af m blandt de n objekter de D_{n-m} permutationer, der holder de valgte objekter fast og permuterer resten indbyrdes på fikspunktsfri måde. □

Opgaver.

(7.1) Løs den inhomogene 1. ordens rekursion: $x_{n+1} - x_n = n^3$, for $n \geq 0$, med begyndelsesbetingelsen: $x_0 = 0$, og find derved en formel for summen af de n første kubiktal, altså $\sum_{k=1}^n k^3$.

(7.2) Løs for $k \in \mathbb{N}$ rekursionen: $x_{n+1} - x_n = n^k$. (Højresidefølgen er n i k 'te faldende.)

(7.3) Gennemfør udregningerne i eksempelrekursionerne i afsnit 7.5.

(7.4) Betragt den lineære homogene 2. ordens rekursion: $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0$. Brug rekursionen til beregning af de 6 første elementer i løsningerne med begyndelsesværdier $(x_0, x_1) = (1, 0)$, henholdsvis, $(x_0, x_1) = (0, 1)$. Find den fuldstændige løsning til rekursionen, og tilpas dernæst konstanterne svarende til de to angivne begyndelsesværdier.

(7.5) Betragt den lineære homogene 2. ordens rekursion: $x_{n+2} - 2x_n = 0$. Brug rekursionen til beregning af de 6 første elementer i løsningerne med begyndelsesværdier $(x_0, x_1) = (1, 0)$, henholdsvis, $(x_0, x_1) = (0, 1)$. Find den fuldstændige løsning til rekursionen, og tilpas dernæst konstanterne svarende til de to angivne begyndelsesværdier.

(7.6) Betragt den lineære homogene 2. ordens rekursion: $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$. Brug rekursionen til beregning af de 8 første elementer i løsningerne med begyndelsesværdier $(x_0, x_1) = (0, 1)$, henholdsvis, $(x_0, x_1) = (1, 0)$. Find den fuldstændige løsning til rekursionen, og tilpas dernæst konstanterne svarende til de to angivne begyndelsesværdier.

- (7.7) Identificer de følger af længde 6, 7, 8, der ender på 010, som i eksemplet i afsnit 7.6.
- (7.8) Udpeg de ord, skrevet i bogstaverne 0, 1, 2, af længde 4, 5, 6, der *ikke* indeholder noget delord 012, se eksemplet i afsnit 7.7, hvor en rekursion for antallet af sådanne ord er udledt.
- (7.9) Bestem antallet af permutationer af 5, 6 og 7 elementer, der ikke har fikspunkter, og angiv disse.
- (7.10) Bestem for hvert $m = 0, 1, 2, \dots, 7$ antallet e_m af permutationer af 7 objekter, der har præcis m fikspunkter.
- (7.11) Gør rede for, at følgen $(D_n)_{n \geq 1}$ af antal permutationer af n objekter uden fikspunkter, suppleret med værdien $D_0 = 1$, tilfredsstiller rekursionen (7.12) for alle $n \geq 2$.

Vis, med fastsættelsen $D_0 = 1$, at der for naturlige tal $n \geq 1$ gælder:

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k.$$

- (7.12) *Lineære rekursioner med konstante koefficienter, af orden ≥ 3 .* Hvad mon den karakteristiske ligning for en sådan rekursion er?, og hvilken rolle spiller løsningerne i den karakteristiske ligning i en løsningsformel for en homogen ligning? Hvad mon der skal gøres i tilfælde af løsninger med multiplicitet > 1 ? Gættemetode for en inhomogen ligning?

Kapitel 8

Fibonacci-tallene

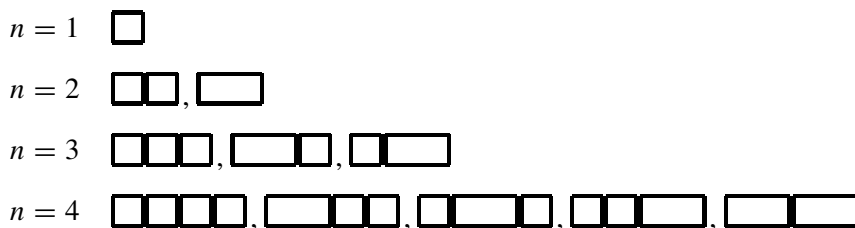
Emnet for dette kapitel er en berømt talfølge, bestående af de såkaldte *Fibonacci-tal*. Ved første øjekast virker disse tal nok ret tilfældige, og mange andre talfølger kan forekomme lige så, eller mere, interessante; det kan måske være fristende at tro, at interessen for dem er udtryk for matematikeres sædvanlige (!?) forkærlighed for sære objekter. Det sidste kan næppe afvises fuldstændigt, men det er et faktum, at Fibonacci-tallene ofte dukker op i svar på tælleopgaver.

Grunden hertil er i al korthed, at mange tællesituationer har en fælles overordnet struktur, der klart fremgår i standardeksemplet med fliselægninger, se afsnit 8.1. En mængde A_n af objekter, der er fastlagt ved en *størrelsesparameter*, et naturligt tal n , ønskes talt; videre er der, pånær for de første mindste værdier af n , en naturlig – dog ikke altid direkte synlig – opdeling af objekterne i to klasser, hvor den ene svarer til mængden A_{n-1} , og den anden svarer til mængden A_{n-2} . Glosen *svare* betyder her: *er i bijektiv korrespondance med*, og derfor gælder: $|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-2}|$. Fibonacci-tallene er simpelthen en af løsningerne til denne rekursion.

Kapitlet introducerer Fibonacci-tallene via en intuitiv tællemodel, der er udgangspunkt for kombinatoriske beviser for relationer mellem Fibonacci-tal, og også kan benyttes til illustration af beslægtede talfølger. Desuden diskuteres et meget beskedent udpluk af den meget omfattende mængde af egenskaber ved Fibonacci-tallene, især diverse »mærkelige« delighedsegenskaber.

8.1 Fliselægninger. Betragt, for et naturligt tal n , et rektangel af størrelse $n \times 1$; længden er altså n gange bredden. Dette rektangel er model for en smal vej, fx en havegang, som ønskes belagt med *fliser*, af to typer, dels kvadratiske med sidelængde lig vejens bredde, dels rektangulære svarende til to af de kvadratiske fliser sat sammen lang en side – disse kaldes kort for *dobbeltfliser*. Den j 'te (*kvadrat*)*position* i en fliselægning af længde $n \geq 1$ er, for $j = 1, 2, \dots, n$, den del af vejen, der dækkes af den j 'te flise i en fliselægning *bestående af lutter kvadratiske fliser*. Det underforstås, at en korrekt fliselægning dækker hele vejen, og at ingen flise rager ind over nogen anden. Antallet k af kvadratiske fliser plus antallet m af dobbeltfliser, der bruges i en fliselægning af længde n , opfylder derfor: $n = k + 2m$. *Antallet af forskellige fliselægninger ønskes bestemt.*

For $n = 1$ kan fliselægningen udføres på én måde, med 1 kvadratisk flise; for $n = 2$ kan fliselægningen udføres med 2 kvadratiske fliser, eller med 1 dobbeltflise, altså på 2 måder. For $n = 3$ er der 3 måder, enten 3 kvadratiske fliser, eller 1 kvadratisk flise og 1 dobbeltflise, hvor de 2 fliser kan lægges på to måder (rækkefølger). For $n = 4$ er der 5 måder, som vist på figuren:



Antallet f_n af fliselægninger af en vej af længde n vokser hurtigt med n . Der svarer naturligvis ingen i praksis forekommende fliselægningsopgave til en vej af længe $n = 0$, men det viser sig

praktisk at opfatte den »tomme fliselægning« – uden fliser – som den eneste fliselægning af en vej af længde 0 (den tomme vej), og sætte det tilsvarende antal af fliselægninger til $f_0 = 1$. Dermed er de første små værdier af f_n givet ved (overvej selv tilfældet $n = 5$):

n	0	1	2	3	4	5
f_n	1	1	2	3	5	8

Fliselægninger kan kombineres ved at blive lagt i *forlængelse* af hinanden, og dette er nøglen til mange relationer mellem fliselægningsantal for forskellige vejlængder.

Observation. Lad $n \geq 3$. Så gælder: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Bevis. En vilkårlig fliselægning af en vej af længde n er af én af følgende to typer: enten er den sidste flise en kvadratisk flise, eller den sidste flise er en dobbeltflise. I det første tilfælde er den fulde fliselægning altså en fliselægning af længde $n - 1$ efterfulgt af en kvadratisk flise, og antallet af den første type fliselægninger er derfor f_{n-1} ; i det andet tilfælde er den fulde fliselægning en fliselægning af længde $n - 2$ efterfulgt af en dobbeltflise, og antallet af disse er f_{n-2} , hvilket derfor er antallet af fliselægninger af den anden type. Det samlede antal fliselægninger er dermed summen af de to antal, som påstået. (Med $f_0 = 1$ gælder ligningen også for $n = 2$). ■

8.2 Fibonacci-tallene – definition og simple egenskaber. Rekursionen, som fliselægningsantallene $(f_n)_{n \geq 0}$ tilfredsstillers, mødes i mange situationer, og med andre *begyndelsesbetingelser*.

Definition. Den lineære homogene 2. ordens rekursion med konstante koefficienter:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad \text{for } n \geq 0, \quad (8.1)$$

kaldes **Fibonacci-rekursionen**. Talfølgen $(F_n)_{n \geq 0}$, der opfylder Fibonacci-rekursionen (8.1) med begyndelsesbetingelserne: $F_0 = 0$, og $F_1 = 1$, kaldes **Fibonacci-talfølgen**, og elementerne i følgen kaldes **Fibonacci-tal**.¹

Det er klart, at de to begyndelsesbetingelser sammen med rekursionen fastlægger en éntydig bestemt talfølge, se også det foregående kapitel; alle tallene F_n er hele tal, endda positive når $n > 0$, fordi $F_0 = 0$ og $F_1 = 1$ er hele tal, og hvert Fibonacci-tal er summen af de to foregående. Endvidere er talfølgen $(F_n)_{n \geq 0}$ voksende, endda strengt, på nær, at $F_1 = F_2$, og den går mod ∞ for $n \rightarrow \infty$, fx fordi $F_{n+1} \geq F_n + 1$, når $n \geq 2$. Her er en tabel over de første små Fibonacci-tal.

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
F_{10+n}	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181

For fortolkning af Fibonacci-tallene via fliselægningsantallene er det praktisk at udvide definitionen af $(f_k)_{k \geq 0}$ endnu en gang ved at sætte: $f_{-1} = 0$. Dette er en naturlig konvention: dels er der ingen fliselægninger af en vej af længde -1 (og vel heller ikke en vej), og desuden sørges derved for, at rekursionen i (8.1) gælder for følgen $(f_k)_{k \geq -1}$, for alle $n \geq -1$. Fibonacci-tallene kan så udtrykkes via disse »generaliserede« fliselægningsantal på følgende måde:

Observation 1. Fibonacci-tallet F_n er, for alle $n \geq 0$, lig fliselægningsantallet for en vej af længde $n - 1$, altså: $F_n = f_{n-1}$, for $n \geq 0$. ■

¹Efter Leonardo Fibonacci, der »indførte« disse tal år 1202. Det følger Murphys lov, at der ikke er enighed om de begyndelsesbetingelser, som fastlægger Fibonacci-talfølgen; andre konventioner end den benyttede kan mødes!

Sætning 1. Fibonacci-tallene $(F_n)_{n \geq 0}$ er givet ved formelen:²

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.2)$$

Bevis. Det er nærmest en øvelsesopgave, der løses via sætningen i afsnit 7.5. Den til Fibonacci-rekursionen (8.1) svarende karakteristiske ligning er: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, der har de to forskellige løsninger: $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, og $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Dermed er Fibonacci-følgen af formen: $r \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + s \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$, hvor r og s tilpasses begyndelsesbetingelserne, altså, at $r + s = 0$ (for $n = 0$), og $r \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + s \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1$ (for $n = 1$). Disse ligninger fastlægger r, s til: $r = \frac{1}{\sqrt{5}}$, og $s = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, hvoraf formel (8.2). ■

Bemærkning. Den noget intimiderende formel (8.2) er ikke meget anvendelig. Dens primære styrke er at tydeliggøre den asymptotiske opførsel af F_n , for n gående mod ∞ . Da $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ er ca. $\frac{16}{10}$ og $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ er ca. $\frac{-6}{10}$, er det leddet $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$, der dominerer i udtrykket (8.2) for F_n , når $n \rightarrow \infty$, idet det andet led går »hurtigt« mod 0 for $n \rightarrow \infty$.

Formel (8.2) udtrykker det *hele tal* F_n som et stort regnestykke med masser af tal, der for ca. halvdelen vedkommende er irrationale. Størrelsen $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$ kan via binomialformelen skrives som en sum af $n + 1$ led, hvor hverandet indeholder $\sqrt{5}$, og tilsvarende med $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$. Da F_n er et helt tal, specielt et rationalt tal, er det store regnestykke en »irrational maskering« – alle de egentlig irrationale led går ud-mod-hinanden, se også opgave 8.9. □

Der gælder utallige (!?) formler for talfølgerne $(F_n)_{n \geq 0}$ og $(f_n)_{n \geq -1}$; sådanne formler kan for det meste let bevises ved induktion, og brug af rekursionen. Via et kombinatorisk argument kan der imidlertid ofte fås »indsigt« i talfølgerne. Et sådant kombinatorisk argument består typisk af forskelligt strukturerede optællinger af fliselægninger af en bestemt længde: tælleresultaterne herfra er jo samme talværdi, og dermed fås en ligning mellem elementerne i talfølgen.

Observation 2. For alle $n \geq 0$ gælder:

$$f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1, \quad (8.3)$$

$$f_0 + f_2 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1}. \quad (8.4)$$

Bevis. Højresiden i (8.3) er antallet af fliselægninger af længde $n + 2$, der *ikke* består af lutter kvadratiske fliser (antallet af dem alle på nær 1, den der består af $n + 2$ kvadratiske fliser); leddene på venstre side af (8.3) fortolkes på følgende måde, idet der for en fliselægning af længde $n + 2$, der indeholder *mindst én* dobbeltflise skelnes mellem placeringen af den sidste dobbeltflise. Antallet af fliselægninger af længde $n + 2$, med den sidste dobbeltflise på positionerne $k + 1$ og $k + 2$, for $k = 0, 1, \dots, n$, hvor der altså er lutter kvadratiske fliser på positionerne $k + 3, \dots, n + 2$, er jo f_k , nemlig antallet af fliselægninger af længde k (idet resten af fliselægningen er bestemt).

Højresiden i (8.4) er antallet af fliselægninger af længde $2n + 1$; venstresiden fortolkes som en sum af passende fliselægningsantal: en fliselægning af længde $2n + 1$ omfatter, da længden er ulige, mindst én kvadratisk flise, og endvidere er positionen af den sidste kvadratiske flise ulige (da resten af fliselægningen består af dobbeltfliser, og altså dækker en strækning af lige længde). Antallet af fliselægninger, hvor den sidste kvadratiske flise ligger på position $2k + 1$, for $k = 0, 1, \dots, n$, er f_{2k} , nemlig antallet af fliselægninger af længde $2k$. (Læg mærke til den naturlige brug af f_0 .) ■

²Denne formel kan – delvis misvisende – mødes under betegnelsen: Binets formel. Leonhard Euler publicerede et bevis for formelen i 1765, men det blev tilsyneladende glemt, og Jacques Binet genopdagede formelen i 1839.

Sætning 2. For naturlige tal n gælder:

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots \quad (8.5)$$

(Øvre parameter i binomialkoefficienterne aftager med 1, og den nedre øges med 1, fra et led til det næste, og summen består af de led, hvor den øvre parameter er \geq den nedre. For n ulige er der $\frac{n+1}{2}$, og for n lige, $\frac{n}{2}$ sådanne led.)

Bevis. Her er F_n antallet af fliselægninger af længde $n - 1$. Disse fliselægninger typeinddeles efter, hvor mange dobbeltfliser de benytter: enten ingen dobbeltflise og $n - 1$ kvadratiske, eller 1 dobbeltflise og $n - 3$ kvadratiske, eller 2 dobbeltfliser og $n - 5$ kvadratiske, og således videre. Med i dobbeltfliser, og altså $n - 1 - 2i$ kvadratiske, omfatter en fliselægning $n - 1 - i$ fliser, og antallet af fliselægninger med i dobbeltfliser er dermed antallet af måder de i placeringer til dobbeltfliser kan vælges blandt de ialt $n - 1 - i$ pladser i fliserækkefølgen, altså binomialkoefficienten: $\binom{n-1-i}{i}$. Dermed er F_n summen af disse binomialkoefficienter, som påstået i (8.5). ■

Eksempel. For $n = 8$ gælder således

$$\binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} = 1 + 6 + 10 + 4 = 21 = F_8.$$

og for $n = 9$,

$$\binom{8}{0} + \binom{7}{1} + \binom{6}{2} + \binom{5}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34 = F_9. \quad \square$$

Sætning 3. For naturlige tal n gælder:³ $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

*Bevis.*⁴ Idet $F_2F_0 - F_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = -1$ passer ligningen for $n = 1$; antages, for $n > 1$, at $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, så giver rekursionsformelen (8.1) brugt et par gange, at

$$\begin{aligned} F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1} - (-1)^n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

og påstanden følger derfor ved induktion. ■

I argumentation for formler for tallene $(f_n)_{n \geq 0}$ føles den kombinatoriske fortolkning måske mere som en hemsko end en hjælp: ofte er det ganske let at argumentere for formlerne ved induktion baseret på rekursionen (8.1). Derimod er den kombinatoriske fortolkning nærmest uundværlig, når det drejer sig om at »opdage« de ofte mærkelige formler, der gælder for løsninger til rekursionen (8.1). Her er situationen delvis omvendt: på basis af en-eller-anden distinktion for fliselægninger kan mængden af alle fliselægninger af en bestemt længde struktureres i dele, hvis antal og sammensætningsmåde giver anledning til en formel for fliselægningsantallene.

8.3 Delelighedsegenskaber. Udtrykkes, for et fastholdt naturligt tal n , de nærmestfølgende Fibonacci-tal via rekursionsformlen, som linearkombination af F_n og F_{n+1} , finder man:

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \\ F_{n+3} &= F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+1} + F_n + F_{n+1} = 2F_{n+1} + F_n, \\ F_{n+4} &= F_{n+3} + F_{n+2} = 3F_{n+1} + 2F_n, \\ F_{n+5} &= F_{n+4} + F_{n+3} = 5F_{n+1} + 3F_n, \end{aligned}$$

³Ligningen kaldes *Cassinis formel*, efter *Jean-Dominique Cassini*, der opdagede den i 1680.

⁴Der er en kombinatorisk fortolkning af denne formel via antal fliselægninger, se opgave 8.10.

og koefficienterne her »lugter« langt væk af Fibonacci-tal. Dette er ikke tilfældigt:

Observation 1. For alle hele tal $n \geq 2$ og $k \geq 0$ gælder:

$$F_{n+k} = F_n F_{k+1} + F_{n-1} F_k. \quad (8.6)$$

Bevis. For $n = 2$, hvor $F_n = F_{n-1} = 1$, er (8.6) blot rekursionsformelen for Fibonacci-tallene, som jo gælder for alle $k \geq 0$. Betragt nu et naturligt tal $n > 2$ og et helt tal $k \geq 0$, og antag, for et induktionsbevis (efter n for fastholdt k), at $F_{m+k} = F_m F_{k+1} + F_{m-1} F_k$, for alle naturlige tal m , med $m < n$. Så finder man via rekursionsformlen, dernæst induktionsantagelsen anvendt på to led, og så rekursionsformelen benyttet to gange, at

$$F_{n+k} = F_{n-1+k} + F_{n-2+k} = (F_{n-1} F_{k+1} + F_{n-2} F_k) + (F_{n-2} F_{k+1} + F_{n-3} F_k) = F_n F_{k+1} + F_{n-1} F_k,$$

og påstanden, ligning (8.6), følger derfor ved induktion. ■

Nu begynder løjerne: Ved at sætte $k = n$ i formel (8.6) fås

$$F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n,$$

og dermed er F_{2n} et multiplum af F_n ; anvendes formel (8.6) igen, nu med $k = 2n$, fås

$$F_{3n} = F_{2n} F_{n+1} + F_{2n-1} F_n,$$

som er multiplum af F_n , fordi F_{2n} er det. Ved induktion fås:

Observation 2. For alle hele tal $n, q \geq 1$ er F_{nq} et multiplum af F_n . ■

Eksempel. Ved opslag i tabellen fra afsnit 8.2 ses, at $F_9 = 34$, der, som påstået, går op i $F_{18} = 2584 = 76 \cdot 34$. □

Observation 3. For alle hele tal $n \geq 0$ er største fælles divisor $\gcd(F_n, F_{n+1})$ for F_n og F_{n+1} lig 1; to på hinanden følgende tal i $(F_n)_{n \geq 0}$ er altså primiske.

Bevis. For $n = 0$ har vi $\gcd(F_0, F_1) = \gcd(0, 1) = 1$, og hvis $\gcd(F_n, F_{n+1}) = 1$, for et $n > 1$, så fås direkte af rekursionsformlen:

$$\gcd(F_{n+1}, F_{n+2}) = \gcd(F_{n+1}, F_{n+1} + F_n) = \gcd(F_{n+1}, F_n) = 1,$$

fordi et tal er fælles divisor for F_{n+1} og $F_{n+1} + F_n$ hvis og kun hvis det er fælles divisor for F_{n+1} og F_n , og påstanden følger derfor ved induktion. ■

Observation 4. For alle hele tal $n, m \geq 0$ gælder: $\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(n,m)}$.

Bevis. Antag fx, at $n > m$ og skriv $n = qm + r$ med et r , der opfylder $0 \leq r < m$. Ifølge observation 1 kan F_n derfor skrives: $F_n = F_{qm+r} = F_{qm+1} F_r + F_{qm} F_{r-1}$. Da F_m går op i F_{qm} kan vi regne videre

$$\gcd(F_n, F_m) = \gcd(F_m, F_{qm+1} F_r) = \gcd(F_m, F_r). \quad (8.7)$$

Den sidste identitet er en konsekvens af, at F_{qm+1} og F_{qm} er primiske. Af (8.7) fås, at Euklids algoritme udført på F_n og F_m skridt-for-skridt svarer til Euklids algoritme udført på n og m , hvilket giver påstanden. ■

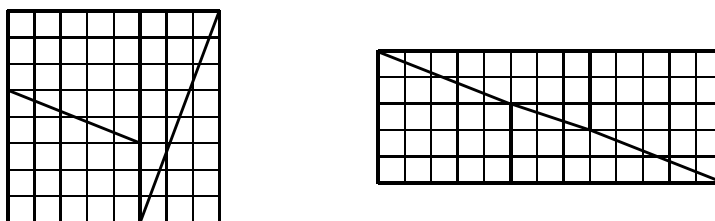
Observation 5. Lad $m, n > 2$ være hele tal. Hvis $F_n \mid F_m$ så gælder $n \mid m$.

Bevis. Hvis $F_n \mid F_m$ så gælder $F_n = \gcd(F_n, F_m)$, men $\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(n,m)}$ ifølge observation 4. Idet $F_{\gcd(n,m)} \leq F_n$ fås sammenfattende, at $F_n = F_{\gcd(n,m)}$, hvilket, da $n > 2$, medfører, at $n = \gcd(n, m)$, altså, at $n \mid m$. ■

Idet $F_3 = 2$ fås heraf, at F_n er lige hvis og kun hvis n er et multiplum af 3, hvilket naturligvis også følger let direkte fra Fibonacci-rekursionen. Tilsvarende, da $F_5 = 5$, er F_n et multiplum af 5 hvis og kun hvis n er et multiplum af 5.

Opgaver

- (8.1) Angiv en rekursion for $(F_{2n})_{n \geq 0}$, de lige, og $(F_{2n+1})_{n \geq 0}$, de ulige Fibonacci-tal.
- (8.2) Angiv rekursioner for $(F_{3n})_{n \geq 0}$, $(F_{3n+1})_{n \geq 0}$, og $(F_{3n+2})_{n \geq 0}$.
- (8.3) Et sædvanligt 8×8 skakbræt kan opskæres i 4 dele, der kan samles til et 5×13 rektangel som vist nedenfor. Fortolk, eller diskutér, dette »trylleri«, i lyset af Cassinis formel.



- (8.4) Giv et kombinatorisk bevis for ligningen: $f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$ ($n, m \geq 0$) for fliselægningsantallene (f_n) .
- (8.5) Lav en teori for fliselægninger, der benytter 3 typer fliser, dels de sædvanlige (kvadratiske fliser og dobbeltfliser), dels tripelfliser, der dækker 3 på-hinanden-følgende positioner.
- (8.6) Lav en teori for fliselægninger der benytter 5 typer fliser, kvadratiske, der findes som både *sorte* og *hvide*, og dobbeltfliser, der findes *sorte*, *grå*, og *hvide*. Hvilke ændringer skal foretages hvis det i stedet er de kvadratiske fliser, der findes *sorte*, *grå*, og *hvide*, medens dobbeltfliserne er enten *sorte* eller *hvide*.
- (8.7) Giv en fortolkning af ligning (8.5) via Pascals trekant.
- (8.8) Ved at benytte Fibonacci-rekursionen baglæns kan der defineres et »Fibonacci-tal« F_k for alle hele tal k : først $F_{-1} = F_1 - F_0 = 1$, dernæst $F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1$, dernæst $F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} = 2$. Angiv diverse formler for tallene F_k .
- (8.9) Vis først, at udtrykket på højre side af (8.2) tilfredsstiller Fibonacci-rekursionen med korrekte begyndelsesbetingelser. Formel (8.2) fremstiller det hele tal F_n som et udtryk med masser af $\sqrt{5}$. Forsøg en omskrivning til et udtryk uden disse faktorer $\sqrt{5}$.
- (8.10) Forsøg en kombinatorisk fortolkning af Cassinis formel via på den ene side *par af fliselægninger* af længde n , og på den anden side, par af fliselægninger, den ene af længde $n - 1$ og den anden af længde $n + 1$.
- (8.11) Fibonacci-rekursionen, med de sædvanlige begyndelsesbetingelser, $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$, har god mening for restklasser, fx modulo et primtal p .
 Find betingelser på en restklasse λ for, at følgen λ^n tilfredsstiller Fibonacci-rekursionen modulo p .
 Løs ligningen $x^2 = 5$ modulo 19, og angiv dernæst en eksplicit formel for Fibonacci-tallene modulo 19.
 Gentag for $p = 17$ og Fibonacci-tallene modulo 17.

Kapitel 9

Stirling-tal og partitionstal

I dette kapitel introduceres diverse nye familier af nyttige kombinatoriske antal: *Stirling-tal af anden og første art*, og *partitionstal*.

Begge typer Stirling-tal afhænger af to parametre n og k ; der er desværre langtfra enighed om en notation for disse antal; her benyttes en notation, der fremhæver analogien til binomialkoefficienter. Stirling-tallet af anden art $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ angiver antallet af måder, hvorpå en mængde med n elementer kan deles i k ikke-tomme delmængder; antal elementer i de enkelte delmængder er uden betydning, ligesom delmængderne heller ikke har en rækkefølge, afgørende er kun, hvilke elementer, der samles i hver af delmængderne. Stirling-tallet af første art $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ er en slags forfining af Stirling-tallet af anden art; det angiver antallet af måder, hvorpå n objekter kan opstilles i k ikke-tomme cykliske arrangementer; udover en opdeling af mængden af de n objekter i k ikke-tomme delmængder, er der til hver delmængde knyttet en cyklisk rækkefølge af den pågældende delmængdes elementer. Stirling-tallene er således *standardantal* knyttet til tælleopgaver, og de dukker op i mange situationer; her belyses de især via deres rolle ved omsætning mellem sædvanlige potenser x^k , og dalende $x^{\bar{k}}$, henholdsvis, stigende faktorieller $x^{\bar{k}}$.

Partitionstallene kan opfattes som en slags forgrovnig af Stirling-tallene af anden art: de angiver antallet af måder, hvorpå n objekter kan grupperes, men objekterne kan ikke skelnes indbyrdes, så alene størrelserne af grupperne, altså antallet af objekter i de enkelte grupper, er afgørende, og der er heller ikke en rækkefølge af grupperne – de kan ikke skelnes indbyrdes.

9.1 Stirling-tal af anden art. Vi begynder med Stirling-tallene af anden art, der optræder noget oftere i forbindelse med tælleopgaver end Stirling-tallene af første art. Det drejer sig om at bestemme antallet af *klassedeling af n elementer i k ikke-tomme klasser*, eller, hvad der kommer ud på det samme, antallet af *ækvivalensrelationer på en mængde med n elementer, med præcis k ækvivalensklasser*. Der er ikke nogen ordning, eller rækkefølge, af ækvivalensklasserne, og der spørges derfor om antallet af »grupperinger« af n objekter i k ikke-tomme grupper.

Definition. Lad n, k være hele tal, med $n \geq 0$. Antallet af opdelinger af en mængde med n elementer i k ikke-tomme delmængder betegnes $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, og kaldes **Stirling-tallet af anden art, med parametre n og k** ; det kan fx læses » n over k delmængder«.

Tilfældet $n = 0$ er specielt. Det viser sig praktisk – det giver et simpelt formelapparat – at sætte $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} := 1$, svarende til den tomme partition af den tomme mængde; på en måde tælles vel her den tomme delmængde af den tomme mængde, men den svarer *ikke* til en klassedeling af den tomme mængde! Uanset elementantallet n er der, såvel for $k < 0$ som for $k > n$, *ingen* opdelinger af en mængde med n elementer i k ikke-tomme delmængder, og derfor er $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = 0$ for $k < 0$, og for $k > n$. Når antallet n af elementer er positivt, er $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$, og $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} > 0$, præcis for $k = 1, 2, \dots, n$.

Eksempel. For $n = 4$ objekter er der følgende opdelinger i k ikke-tomme delmængder: Med $k = 1$: alle objekter sammen (1 opdeling); med $k = 2$: enten én singleton, og de tre andre sammen (4 opdelinger, en for hver mulig singleton), eller to-og-to (3 opdelinger, en for hver partner til 1); med $k = 3$: to singleton'er og et par (6 opdelinger, en for hvert valg af to objekter), og

med $k = 4$: fire singleton'er (1 opdeling). Stirling-tallene af anden art med »kød på«, for $n = 4$, er dermed $\left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$, $\left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 7$, $\left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = 6$, $\left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} = 1$. \square

Observation. Der er præcis én opdeling af n elementer ($n > 0$) i såvel $k = 1$ som i $k = n$ delmængder, nemlig alle i samme delmængde, henholdsvis 1 element i hver delmængde. Også værdierne for $k = 2$, og $k = n - 1$, er simple:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{n-1} - 1, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \binom{n}{2}, \quad \text{og} \quad \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1 \quad \text{for} \quad n > 0. \quad (9.1)$$

Bevis. Værdierne for $k = 1$ og $k = n$ er begrundede. Betragt $k = 2$. Det anførte udtryk for $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ er 0 for $n = 1$, hvilket er korrekt. For enhver opdeling af $n > 1$ objekter i 2 ikke-tomme delmængder gælder, at delmængden indeholdende det sidste af de n objekter består af dette objekt suppleret med visse, eventuelt ingen, men ikke alle, af de øvrige objekter; dette supplement kan vælges på $2^{n-1} - 1$ måder (antallet af ægte delmængder af en mængde med $n - 1$ elementer). Eller argumentere således: hver ægte og ikke-tom delmængde giver anledning til en opdeling i 2 ikke-tomme delmængder, nemlig delmængden og dens komplement, og 2 sådanne delmængder bestemmer samme opdeling hvis og kun hvis den ene er komplementærmængden til den anden; der er $2^n - 2$ ikke-tomme ægte delmængder, og halvdelen heraf er $2^{n-1} - 1$.

En opdeling af n objekter i $n - 1$ ikke-tomme delmængder er fastlagt ved hvilke 2 objekter, der er i samme delmængde. \blacksquare

Sætning. Antallet af surjektive afbildninger af en mængde X med $n = |X|$ elementer på en mængde Y med $m = |Y|$ elementer er: $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\} m!$.

Bevis. Vi kan antage, at elementerne i Y er nummererede. En surjektiv afbildning φ af X på $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ bestemmer en opdeling af X i et ordnet sæt af m ikke-tomme delmængder, nemlig originalmængderne $\varphi^{-1}(\{y_j\})$ til elementerne i Y . Omvendt bestemmer hver opdeling af X i m ikke-tomme delmængder, og et valg af én af de ialt $m!$ rækkefølger af disse delmængder, en surjektiv afbildning af X på Y . \blacksquare

9.2 Rekursionen for Stirling-tal af anden art. Der findes formler, der udtrykker Stirling-tallene af anden art »eksplicit«, men de er ganske indviklede, og benyttes sjældent. Derimod er der en simpel og informativ rekursion for disse tal:

Sætning. For hele tal n, k med $n > 0$ gælder:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}. \quad (9.2)$$

Bevis. Hvis $k < 1$ eller hvis $k > n$ er begge sider i (9.2) lig 0, og vi antager derfor, at $1 \leq k \leq n$. I tilfældet $n = k = 1$ er venstre side i (9.2) lig 1, og andet led på højre side er 0, og det første er $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 1$, så formelen (9.2) passer (med konventionen $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 1$). Betragt dernæst tilfældet $n > 1$. Opdelingerne af en mængde med n objekter i k ikke-tomme delmængder er af to typer: enten har opdelingen det sidste objekt i en delmængde for sig selv, og de øvrige $n - 1$ objekter er fordelt i $k - 1$ ikke-tomme delmængder, hvilket kan ske på $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$ måder, eller opdelingen anbringer det sidste objekt sammen med andre, dvs. opdelingen fås fra en entydigt bestemt opdeling af de $n - 1$ første objekter i k ikke-tomme delmængder, ved at supplere én af de k mængder i den pågældende opdeling med det sidste objekt; en given opdeling kan suppleres på præcis k måder, nemlig hver bestemt ved hvilken af de k delmængder, der suppleres med det sidste objekt. \blacksquare

Rekursionen (9.2) sammen med de lette »yderværdier«, for $k = 1$ og $k = n$, der er givet ved (9.1), gør det let at beregne $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ for små værdier af n, k . Det giver et godt overblik at opstille

disse værdier i hvad der kan kaldes »Stirlings anden trekant«, svarende til binomialkoefficienternes *Pascals trekant*. I tabellen nedenfor, hvor alle ikke skrevne værdier skal fortolkes som 0, er hver indgang i rækken for $n > 0$ summen af tallet skråt til venstre i rækken ovenover, og k gange tallet i rækken over (fx $1701 = 301 + 4 \cdot 350$, for $n = 8$ og $k = 4$). Stirling-tallene af anden art i skrålinien under diagonalen i tabellen er binomialkoefficienterne: $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$, se også (9.1).

n	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 5 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 6 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 7 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 8 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 9 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 10 \end{matrix} \right\}$
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

9.3 Stirling-tal af første art. Det drejer sig her om antallet af måder at arrangere n objekter i k cykler; de n objekter er altså ikke blot grupperet i k ikke-tomme grupper, men tillige er der til hver af grupperne, med $m \geq 3$ objekter, knyttet én af de $(m-1)!$ cykliske rækkefølger af gruppens objekter.

Definition. Lad n, k være hele tal, hvor $n \geq 0$. Antallet af cykliske arrangementer af n objekter i præcis k cykler, betegnes $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$, og kaldes **Stirling-tallet af første art, med parametre n og k** ; det kan fx læses » n over k cykler«.

Igen er tilfældet $n = 0$ objekter specielt; der findes ingen cykliske arrangementer, hverken med et positivt, eller med et negativt, antal cykler, og derfor er $\left[\begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right] = 0$ for alle hele tal $k \neq 0$; derimod sættes $\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] := 1$, fordi det viser sig praktisk.

Da et cyklisk arrangement i k cykler omfatter k eller flere objekter – hver cykel består af mindst ét objekt – er det især tilfælde med $n > 0$ og $1 \leq k \leq n$, der har kombinatorisk relevans. Videre er $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ antallet af permutationer af n objekter, hvis fremstilling som produkt af disjunkte cykler består af præcis k cykler. For $n > 0$ gælder, at $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] > 0$ for $k = 1, 2, \dots, n$, hvorimod $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = 0$ for $k \leq 0$ og for $n < k$ (disse tilfælde medtages især for at få et strømliinet formelapparat).

Eksempel. For $n = 4$ objekter er der følgende arrangementer i k cykler:

Med $k = 1$: alle 4 objekter i en cykel, med 6 cykliske rækkefølger; med $k = 2$: enten en singleton, med en 3-cykel, på ialt 8 måder (4 valg af singleton, og for hver af disse 2 cykliske rækkefølger af de tre andre objekter), eller to 2-cykler, på ialt 3 måder (3 muligheder for opdeling af de 4 objekter i to 2-cykler); med $k = 3$: to singleton'er, og en 2-cykel, på ialt 6 måder (nemlig de 6 valg af to objekter til 2-cyklen); med $k = 4$: fire singleton'er, på 1 måde; Stirling-tallene af første art med »kød på«, for $n = 4$, er dermed $\left[\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right] = 6$, $\left[\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right] = 11$, $\left[\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right] = 6$, $\left[\begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right] = 1$. \square

Observation. For naturlige tal n gælder:

$$\left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = (n-1)!, \quad \left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right] = \binom{n}{2}, \quad \text{og} \quad \left[\begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right] = 1 \quad \text{for} \quad n > 0, \quad (9.3)$$

og

$$\sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = n!. \quad (9.4)$$

Bevis. En cykel af n objekter kan laves på $(n - 1)!$ måder; $n - 1$ cykler af n objekter består af en 2-cykel, der kan vælges på $\binom{n}{2}$ måder, og resten 1-cykler; og n cykler af n objekter forekommer kun med lutter 1-cykler. Ligningen (9.4) følger direkte af definitionen, da der er $n!$ permutationer af $n > 0$ objekter (og da $0! = 1$ gælder ligningen også for $n = 0$). ■

9.4 Rekursionen for Stirling-tal af første art. Der findes »grimme« formler for Stirling-tallene af første art; beregningsmæssig tilgang sker imidlertid (forholdsvis) let via en rekursion:

Sætning. For hele tal n, k , med $n > 0$, gælder:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}. \quad (9.5)$$

Bevis. Hvis $k < 1$ eller hvis $k > n$ er begge sider i (9.5) lig 0, og vi antager derfor at $1 \leq k \leq n$. Tilfældet $n = k = 1$ klares via konventionen $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$. Et arrangement af $n > 1$ objekter i k cykler består enten af det sidste objekt i en 1-cykel for sig selv, og de øvrige $n - 1$ objekter arrangeret i $k - 1$ cykler, eller det kan fås fra et arrangement af de første $n - 1$ objekter i k cykler ved at indsætte det sidste objekt i én af disse k cykler. Antallene af disse to typer svarer til leddene på højre side i (9.5). Antallet af arrangementer af $n - 1$ objekter i $k - 1$ cykler er jo $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$; og et arrangement af de $n - 1$ første objekter i k cykler kan suppleres til et arrangement af alle n objekter (fortsat i k cykler) på ialt $n - 1$ måder. Dette er måske ikke umiddelbart klart: Betragt en cykel af længde m (af objekter valgt blandt de $n - 1$ første), fx $(x_1 x_2 \dots x_m)$; den kan forlænges til en cykel af længde $m + 1$ med et ekstra objekt x på ialt m måder, idet x jo kan indsættes mellem x_i og x_{i+1} for $i = 1, 2, \dots, m - 1$, eller mellem x_1 og x_m . (Dette gælder også for cykler af længde 1.) Derved er antallet af arrangementer af den anden type præcis: $(n - 1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$. ■

Rekursionen (9.5) gør det let at beregne $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ for små værdier af n, k . I »Stirlings første trekant« nedenfor er hver indgang i den n 'te række summen af tallet skråt til venstre i rækken ovenover, og $n - 1$ gange tallet i rækken over (fx $13132 = 1764 + 7 \cdot 1624$, for $n = 8$ og $k = 3$).

n	$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 10 \end{bmatrix}$
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	2	3	1							
4	0	6	11	6	1						
5	0	24	50	35	10	1					
6	0	120	274	225	85	15	1				
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1			
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1		
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1	
10	0	362880	1026576	1172700	723680	269325	63273	9450	870	45	1

I rækken for $n = 5$ aflæses – det for »garvede permutatorer« velkendte – at der er 24 arrangementer af 5 objekter i 1 cykel (det er 5-cyklerne, type 5^1), 50 arrangementer i 2 cykler (permutationer af typerne $1^1 4^1$ og $2^1 3^1$), 35 arrangementer i 3 cykler (typerne $1^1 2^2$ og $1^2 3^1$), 10 arrangementer i 4 cykler (typen $1^3 2^1$), samt 1 arrangement i 5 cykler (typen 1^5 , den identiske permutation).

9.5 Omsætning mellem potenser og faktorieller. En vigtig anvendelse af Stirling-tal er til at udtrykke koordinatskift, altså oversættelse, mellem diverse baser for vektorrum af polynomier.

Den dalende faktoriel $x^{\underline{k}}$ er et *normeret polynomium af grad k* i variabelen x , dvs. koefficienten til x^k i dette polynomium er 1; for de første små værdier af k ses ved udregning, at:

$$\begin{aligned}x^{\underline{0}} &= x^0 = 1, \\x^{\underline{1}} &= x^1 = x, \\x^{\underline{2}} &= x(x-1) = x^2 - x, \\x^{\underline{3}} &= (x^2 - x)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x, \\x^{\underline{4}} &= (x^3 - 3x^2 + 2x)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x,\end{aligned}$$

og disse ligninger kan løses med hensyn til *monomierne*, altså potenserne x^n , der således udtrykkes via polynomierne $x^{\underline{k}}$, for $k = 0, 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}x^0 &= x^{\underline{0}}, \\x^1 &= x^{\underline{1}}, \\x^2 &= x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, \\x^3 &= x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, \\x^4 &= x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.\end{aligned}$$

Koefficienten til $x^{\underline{k}}$ i fremstillingen af x^n ligner Stirling-tallet af anden art $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, se fx rækken for $n = 4$ i tabellen i afsnit 9.2, og dette er *ikke* et tilfælde.

Sætning 1. For hele tal $n \geq 1$ og alle reelle tal x gælder:

$$x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}}. \quad (9.6)$$

Bevis. Induktion efter n . For $n = 1$ er (9.6) verificeret ovenfor. Idet $x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k)$, er $x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$. Lad $n > 1$. Antages induktivt, at (9.6) gælder for $n-1$, fås

$$\begin{aligned}x^n &= x \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}} \\&= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} kx^{\underline{k}} \\&= \sum_{k=2}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} kx^{\underline{k}} \\&= \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{n}} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} \right) x^{\underline{k}} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{1}} \\&= \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{n}} + \sum_{k=2}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}} + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{1}} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}},\end{aligned}$$

hvor næstsidste skridt fås af rekursionsformlen (9.2), idet »yderværdierne« omskrives ved (9.1). ■

Bemærkning 1. Ved i summen fra (9.6) at summere fra $k = 0$, fås en gyldig formel (det ekstra led er 0), der så også gælder for $n = 0$ idet jo $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 1$. Udregningerne ville nok fremstå klarere ved at udelade summationsgrænserne, og lade definitionen af Stirling-tallene selv styre, at kun led for k -værdier mellem 1 og n (dog $k = 0$ når $n = 0$) bidrager effektivt til summen i (9.6)! □

For de stigende faktorieller $x^{\bar{k}}$ gælder tilsvarende

$$\begin{aligned}x^{\bar{0}} &= x^0 = 1, \\x^{\bar{1}} &= x^1 = x, \\x^{\bar{2}} &= x(x+1) = x^2 + x, \\x^{\bar{3}} &= (x^2 + x)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x, \\x^{\bar{4}} &= (x^3 + 3x^2 + 2x)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x.\end{aligned}$$

Sætning 2. For hele tal $n \geq 1$ og alle reelle tal x gælder:

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k. \quad (9.7)$$

Bevis. Igen induktion efter n , hvor tilfældene for de første små værdier af n er verificeret ved udregningen ovenfor. Lad $n > 1$. Antages induktivt, at ligningen (9.7) gælder for $n-1$, fås ved brug af identiteten: $(x+n-1)x^k = x^{k+1} + (n-1)x^k$, at

$$\begin{aligned}x^{\bar{n}} &= (x+n-1)x^{\overline{n-1}} \\&= (x+n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \\&= \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \\&= \sum_{k=2}^n \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \\&= \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^n + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} x^1 \\&= \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} x^n + \sum_{k=2}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k + (n-1)! x^1 = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k,\end{aligned}$$

hvor næstsidste skridt fås af rekursionsformlen (9.5) idet »yderværdierne« omskrives ved (9.3). ■

Bemærkning 2. Ved i summen fra (9.7) at summere fra $k=0$, fås en gyldig formel (det ekstra led er 0), der så også gælder for $n=0$ idet jo $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$. Se også den foregående bemærkning. □

Ligning (9.6) udtrykker x^n som linarkombination af faldende faktorieller med Stirling-tal af anden art som koefficienter; ligning (9.7) udtrykker tilsvarende en stigende faktoriel som linarkombination af sædvanlige potenser med Stirling-tal af første art som koefficienter. Ved formelmanipulation fås andre varianter heraf. Summerne i resten af afsnittet er summer over alle heltalsværdier af summationsvariablen(e); kun endeligt mange af disse giver led $\neq 0$.

Først giver (9.6) ved brug af identiteten: $x^{\underline{k}} = (-1)^k (-x)^{\bar{k}}$:

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^k (-x)^{\bar{k}},$$

der, idet $(-1)^j = (-1)^{-j}$, for hele tal j , ved at erstatte x med $-x$ giver

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}}. \quad (9.8)$$

Og (9.7) giver ved brug af: $x^{\bar{k}} = (-1)^k (-x)^k$, og efterfølgende erstatning af x med $-x$, at

$$x^n = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k. \quad (9.9)$$

Det virker måske ved første betragtning lidt tilfældigt hvilke af formlerne, der indeholder fortegnsskift, men for hele tal $k > 0$ og store x , fx $x \geq k$, gælder uligheden:

$$x^{\bar{k}} < x^k < x^{\bar{k}},$$

hvilket om ikke andet kan benyttes som hjælp til at kunne huske, hvor der er behov for fortegnsskift. (Et »stort« polynomium kan måske udtrykkes som linearkombination, med ikke negative koefficienter af »mindre« polynomier, hvorimod visse negative koefficienter er nødvendige, når et »lille« polynomium skrives som linearkombination af »større« polynomier.)

Ved at indsætte det udtryk for $x^{\bar{k}}$, der fås af (9.7) anvendt for k som øvre parameter, i (9.8), fås

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}} = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n+k} \sum_m \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k,m} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^m.$$

Observation. For $n, m \geq 1$ er

$$\sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{for } m = n, \\ 0 & \text{for } m \neq n. \end{cases} \quad (9.10)$$

Bevis. Ovenstående identitet mellem polynomier giver, via identitetssætningen for polynomier, at koefficienten til x^j er den samme i polynomiet på venstre side, og i polynomiet på højre side; på venstre side er denne koefficient tydeligvis 0, pånær for $j = n$, hvor den er 1, og dette gælder derfor også på højre side. ■

Bemærkning 3. Den drabelige formel (9.10) er en slags *inversionsformel*, der knytter de to arter Stirling-tal sammen. En tilsvarende formel gælder med de to typer Stirling-tal ombyttede, se opgave 9.1.

Disse formler kan fortolkes, at visse matricer er indbyrdes inverse, hvilket antydes i en af opgaverne, se opgave 9.3. Formlerne (9.6) og (9.9) giver koordinattransformationen mellem sættene: $1, x, \dots, x^m$ og $1, x^{-1}, \dots, x^{-m}$.

De fortegnsskift, der indgår i (9.10), og den nævnte analoge formel med de to typer Stirling-tal ombyttede, kan gøre det naturligt definere Stirling-tallene af første art med disse fortegnsskift »indbyggede«, og denne konvention kan ofte mødes (fx i Maple). □

9.6 Partitionstal: Indledning og definition. Stirling-tallene af anden art $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ angiver antallet af opdelinger af en mængde med n elementer i k ikke-tomme delmængder. I en række forbindelser er der ikke behov for, eller det er ikke muligt, at skelne mellem elementerne, og det er da alene *typen af opdelingen*, dvs. *det ikke-ordnede sæt af elementantal* i de k delmængder, der er afgørende. I de følgende afsnit undersøges antallet af sådanne typer. Det drejer sig om at bestemme antallet af måder, hvorpå et naturligt tal n kan *deles*, eller *partitioneres*, dvs. fremstilles som sum af ét eller flere naturlige tal; dette *antal*, der betegnes $p(n)$, er ofte en vigtig parameter; således er antallet af typer af permutationer af n elementer, og antallet af (isomorfiklasser af) endelige kommutative grupper af orden q^n , for et primtal q , begge lig $p(n)$.

Definition. En *partition* af et naturligt tal n er en fremstilling af n som sum af naturlige tal, den pågældende *partitions summander*, eller *dele*, hvor rækkefølgen af addenderne er uden betydning. **Antallet af partitioner** af $n \in \mathbb{N}$ betegnes $p(n)$.

Ved omtale af partitioner er det ofte praktisk at skrive partitionens dele, eller summander, i monoton rækkefølge – typisk aftagende. For $n = 1, 2, \dots, 5$ er partitionerne følgende:

$$1: 1;$$

$$2: 1 + 1 = 2;$$

$$3: 1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 3;$$

$$4: 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4;$$

$$5: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 = 3 + 2 = 4 + 1 = 5;$$

For $n \leq 5$ kan partitionstallene bestemmes herfra ved »inspektion«; antallene $p(n)$ af partitioner er, for de første små værdier af n , givet ved (se beregningskemaet i næste afsnit):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

9.7 Rekursiv beregning af partitionstal. Der kendes ikke en generel formel for $p(n)$, men dog diverse simple rekursioner, hvoraf værdier af $p(n)$ kan beregnes. En partition er lidt diffus fordi antallet af summander er ubestemt; for at modvirke dette indføres nogle hjælpeantal:

Definition. For naturlige tal n og k betegner $p_k(n)$ **antallet af partitioner af n med præcis k summander**.

Hermed er $p_k(n) = 0$, hvis $k > n$. For eksempel ses af det ovenstående, at:

$$p_1(5) = 1, \quad p_2(5) = 2, \quad p_3(5) = 2, \quad p_4(5) = 1, \quad p_5(5) = 1.$$

Observation 1. Da hver partition af n har et eller andet summandantal, mellem 1 og n , gælder

$$p(n) = \sum_{k=1}^n p_k(n).$$

Tallene $p_k(n)$ er mere »håndgribelige« end partitionsantallene $p(n)$, fordi antallet af summander er fast ($= k$); de tilsvarende partitioner kan derfor tælles på næsten sædvanlig måde som antal løsninger i naturlige tal til diverse ligninger. Enhver partition af n i k dele svarer nemlig til en løsning, dvs. et sæt (y_1, y_2, \dots, y_k) af naturlige tal y_j , til ligningen:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = n, \quad (9.11)$$

som opfylder:

$$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_k \geq 1. \quad (9.12)$$

Disse y_j 'er er simpelthen summanderne af n i den tilsvarende partition af n i k summander.

Det fulde sæt af partitioner af n , altså partitioner uden bånd på antallet af summander, kan ligeledes beskrives via løsninger til ligninger. Der er nemlig en bijektiv korrespondance mellem mængden af partitioner af n og mængden af løsninger (x_1, x_2, \dots, x_n) i ikke-negative hele tal til ligningen:

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = n. \quad (9.13)$$

Ved denne korrespondance er $x_j \geq 0$ antallet af summander af størrelse j i den tilsvarende partition af n . Partitioner med præcis k summander svarer herved til løsninger for hvilke:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k. \quad (9.14)$$

Til bekvem formulering af de rekursioner, hvoraf $p(n)$ kan beregnes, indføres antallene af partitioner med givet maksimalt summandantal.

Definition. For naturlige tal n og k betegner $p_k^*(n)$ **antallet af partitioner af n med op til k summander**, altså k eller færre summander.

Det er klart, at $p_k^*(n) = p(n)$ når $k \geq n$, og at hvert af antallene $p_k^*(n)$ er en slags stamsum¹ af tallene $p_k(n)$, mere præcist, at de opfylder ligningerne:

$$p_k^*(n) = \sum_{j=1}^k p_j(n), \quad \text{og} \quad p_k(n) = p_k^*(n) - p_{k-1}^*(n). \quad (9.15)$$

Lemma. Sættes, for naturlige tal k , $p_k^*(0) = 1$, så tilfredsstiller antallene $p_k^*(n)$ følgende:

$$p_k^*(n) = p_{k-1}^*(n) + p_k^*(n-k), \quad \text{når} \quad n \geq k \geq 2, \quad \text{og} \quad p_1^*(n) = 1.$$

Bevis: Her er $p_k^*(n)$ antallet af løsninger til (9.13), der opfylder betingelsen $x_1 + x_2 + \dots \leq k$, og mængden af disse løsninger deles naturligt i to (disjunkte) dele: på den ene side løsninger til (9.13), der opfylder betingelsen $x_1 + x_2 + \dots \leq k-1$, og på den anden side løsninger til (9.13), der opfylder betingelsen $x_1 + x_2 + \dots = k$ (altså betingelse (9.14)). Antallet af løsninger i den førstnævnte delmængde er $p_{k-1}^*(n)$; løsningerne i den anden delmængde er i bijektiv korrespondance med løsninger (x_2, \dots, x_n) til ligningen $x_2 + 2x_3 + \dots = n-k$ der opfylder $x_2 + x_3 + \dots \leq k$ (ved at trække (9.14) fra (9.13); der betragtes løsninger med $x_i \geq 0$); antallet af elementer i den anden delmængde er derfor $p_k^*(n-k)$. ■

Nedenstående tabel viser starten af et *beregningsskema* for størrelserne $p_k^*(n)$, med værdierne $p(n)$ angivet ved understregninger. Rekursionsformlen i lemmaet udtrykker, at elementet $p_k^*(n)$ i den k 'te række af kolonnen mærket n , når $k > 1$ og $n \geq 1$, er summen af elementerne i rækken over (samme kolonne) og elementet i samme række men k pladser til venstre.

$p_k^*(n)$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$k=1$	1	<u>1</u>	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$k=2$	1	1	<u>2</u>	2	3	3	4	4	5	5	6
$k=3$	1	1	2	<u>3</u>	4	5	7	8	10	12	14
$k=4$	1	1	2	3	<u>5</u>	6	9	11	15	18	23
$k=5$	1	1	2	3	5	<u>7</u>	10	13	18	23	30
$k=6$	1	1	2	3	5	7	<u>11</u>	14	20	26	35
$k=7$	1	1	2	3	5	7	11	<u>15</u>	21	28	38
$k=8$	1	1	2	3	5	7	11	15	<u>22</u>	29	40
$k=9$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	<u>30</u>	41
$k=10$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	<u>42</u>

En særdeles instruktiv grafisk model for argumenter vedrørende partitioner er de såkaldte² *Ferrers-diagrammer*. De kan mødes i flere udformninger; her illustreres en partition af n , svarende til ligningen (9.11) og kravet (9.12), ved k rækker af prikker, hvor den i 'te består af y_i prikker.

Ferrers-diagrammet for partitionen $21 = 6 + 5 + 5 + 3 + 2$ er vist nedenfor til venstre:



¹Dette betyder, at formlerne i (9.15) gælder; den anden formel viser, at $p_k(\cdot)$ er en differens af $p_k^*(\cdot)$ og $p_{k-1}^*(\cdot)$.

²Efter *N. M. Ferrers, 1829–1903*, hvis navn især er knyttet til disse diagrammer; navnet udtales 'færrærs' med et tydeligt 's'.

Ved at læse Ferrers-diagrammet for en given partition af n søjlevis, eller *spejle* det om »hoveddiagonalen«, fås en ny partition af n . Mere præcist, betegner z_i antallet af prikker i den i 'te søjle gælder $z_1 + z_2 + \dots = n$ og $z_1 \geq z_2 \geq \dots$. Denne partition kaldes den til den givne partition *konjugerede partition*. På figuren til højre er vist den til $21 = 6 + 5 + 5 + 3 + 2$ konjugerede partition af 21; skrevet eksplicit er den: $21 = 5 + 5 + 4 + 3 + 3 + 1$.

Observation 2. Antallet $p_k^*(n)$ af partitioner af n i højst k summander er lig antallet af partitioner af n i summander, der hver er højst k , altså $\leq k$.

Bevis. Konjugering anvendt på de til partitioner hørende Ferrers-diagrammer giver, at der består en bijektiv korrespondance mellem partitioner af n i højst k summander, og partitioner af n i summander, der hver er højst k . ■

9.8 Algoritme for gennemgang af partitioner. Ved brug af partitioner er der ofte behov for en gennemgang af partitionerne af et givet n , der er *systematisk*, bl. a. for at undgå, at én eller flere partitioner *overses*, hvilket let³ kan ske, når n er andet end et legetøjstal. En naturlig rækkefølge af partitioner fås via den *leksikografiske ordning*, se afsnit 2.7.

Ved gennemgang af k -delmængderne af en mængde på n objekter, se afsnit 3.12, blev der benyttet et trick, nemlig at *skrive delmængderne med elementerne i voksende rækkefølge*, til fastlæggelse af den leksikografiske rækkefølge af delmængderne. På analog måde anvendes her standardskrivemåden for partitioner, med *summanderne skrevet efter aftagende størrelse*, til definition af den leksikografiske rækkefølge:

Lad (x_1, x_2, \dots, x_s) og (y_1, y_2, \dots, y_t) være partitioner af n i henholdsvis s og t summander; der gælder således, at

$$x_1 + x_2 + \dots + x_s = n = y_1 + y_2 + \dots + y_t,$$

og

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_s \quad \text{og} \quad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_t.$$

Hvis de to partitioner er forskellige findes et indeks i , mindre end eller lig det mindste af s og t , så $x_i \neq y_i$, og med j betegnes det mindste sådanne indeks; så gælder $x_1 = y_1, \dots, x_{j-1} = y_{j-1}$ og $x_j \neq y_j$, og den *leksikografisk første, eller mindste, af de to partitioner*, defineres så som den med mindst værdi af den j 'te summand. I det indledende eksempel, se afsnit 9.6, blev partitionerne af 5 angivet i den leksikografiske rækkefølge.

Som udgangspunkt for en *algoritme*, der for et fast givet n gennemløber partitionerne af n i leksikografisk rækkefølge, bemærkes, at den leksikografisk første partition er $n = 1 + 1 + \dots + 1$, altså med n summander, der alle er 1, og den sidste er den med en enkelt summand, altså $n = n$.

Blandt partitionerne af n i summander, hvoraf den største er m , med $m < n$, har den leksikografisk sidste partition et antal k ens summander af størrelse m , og eventuelt 1 summand af størrelse $r = n - km$ (hvor k er kvotienten, og r er resten, der opfylder $0 \leq r < m$, ved division af n med m); denne partitions leksikografiske efterfølger har derfor 1 summand af størrelse $m + 1$, og $n - (m + 1)$ summander af størrelse 1 (dette antal kan være 0). Tilsvarende er for en partition af n med et givet sæt af »store« summander: $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_r$, hvor $x_r > 1$, den leksikografisk sidste partition med disse summander, og alle øvrige summander $< x_r$, den, hvor restsummen $n' = n - (x_1 + \dots + x_r)$ er fordelt »fladest/størst muligt«, præcist, med k summander af størrelse $x_r - 1$, og en eventuel restsummand af størrelse $n' - k(x_r - 1)$, hvor k er valgt, så restsummanden er $< x_1 - 1$ (og ≥ 0).

Algoritme. For en given partition (x_1, x_2, \dots, x_s) af n i s summander bestemmes den leksikografisk næste partition, hvis der er en sådan, på følgende måde:

³Dette skrives baseret på pinagtige personlige erfaringer!

1. Hvis partitionen har to eller flere ens mindste summander, fx q ens af størrelse m , hvor $q > 1$, med samlet bidrag qm til partitionen af n , erstattes disse med $(m + 1) + 1 + 1 + \dots + 1$, dvs. én summand $m + 1$ og $qm - (m + 1)$ summander, der alle er 1 (summander $> m$ beholdes, og erstatningssummander af størrelse 1 bortfalder, hvis $qm - (m + 1) = 0$).

2. Hvis partitionen har præcis én mindste summand, af størrelse m , og er $m < n$, så findes der summander $> m$; antag, at den næstmindste summand er $m' > m$, og at partitionen indeholder ialt q' summander af størrelse m' . Så bidrager summanderne af de to mindste summandstørrelser med ialt $q'm' + m$ til partitionen af n , og disse $q' + 1$ summander i partitionen af n erstattes med summen $(q' + 1) + 1 + 1 + \dots + 1$, med én summand $m' + 1$ og $q'm' + m - (m' + 1)$ summander, der alle er 1 (summander $> m'$ beholdes, og erstatningssummander af størrelse 1 bortfalder, hvis $q'm' + m - (m' + 1) = 0$).

3. Hvis partitionen har præcis én summand er denne $= n$, og partitionen er den sidste partition i den leksikografiske ordning.

Eksempel 1. Her er partitionerne af 7, med hjælpeantallene m, m', q, q' fra algoritmen anført:

Partition	m	q	m'	q'	Partition	m	q	m'	q'
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	1	7	—	—	4 + 1 + 1 + 1	1	3	—	—
2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	1	5	—	—	4 + 2 + 1	1	1	—	—
2 + 2 + 1 + 1 + 1	1	3	—	—	4 + 3	3	1	4	1
2 + 2 + 2 + 1	1	1	2	3	5 + 1 + 1	1	2	—	—
3 + 1 + 1 + 1 + 1	1	4	—	—	5 + 2	2	1	5	1
3 + 2 + 1 + 1	1	2	—	—	6 + 1	1	1	6	1
3 + 2 + 2	2	2	—	—	7	—	—	—	— (slut)
3 + 3 + 1	1	1	3	2					

Eksempel 2. På basis af partitionerne af 7, fra det foregående eksempel, er det relativt let at udarbejde en fuldstændig cykel-»statistik« for permutationer af 7 objekter.

Type	Antal	Cykler	Type	Antal	Cykler	Type	Antal	Cykler
1^7	1	7	$1^2 2^1 3^1$	420	4	$3^1 4^1$	420	2
$1^5 2^1$	21	6	$2^2 3^1$	210	3	$1^2 5^1$	504	3
$1^3 2^2$	105	5	$1^1 3^2$	280	3	$2^1 5^1$	504	2
$1^1 2^3$	105	4	$1^3 4^1$	210	4	$1^1 6^1$	840	2
$1^4 3^1$	70	5	$1^1 2^1 4^1$	630	3	7^1	720	1

De fundne antal kan sammenholdes med Stirling-tallene af første art $\left[\begin{smallmatrix} 7 \\ k \end{smallmatrix} \right]$, se tabellen i afsnit 9.4. $420 + 504 + 840 = 1764$, $210 + 280 + 630 + 504 = 1624$, $105 + 420 + 210 = 735$, $105 + 70 = 175$. □

Opgaver

(9.1) Vis, at

$$\sum_{k,m} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{for } m = n, \\ 0 & \text{for } m \neq n. \end{cases}$$

(9.2) I afsnit 9.5 er der ligninger, der udtrykker de stigende faktorieller $x^{\bar{k}}$ som polynomier, for $k = 0, 1, \dots, 4$. Løs disse ligninger mht. x^j , for $j = 0, 1, \dots, 4$.

(9.3) Opskriv 5×5 -matricen $A = (\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\})$, for $n, k = 1, 2, \dots, 5$, idet n er rækkeindeks, og k er søjleindeks, og tilsvarende 5×5 -matricen $B = ((-1)^{n-k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right])$, for $n, k = 1, 2, \dots, 5$, idet n er rækkeindeks, og k er søjleindeks. Udregn matrixproduktet: AB .

- (9.4) Opstil og bevis de rekursionsformler, der beskriver antallet $q_m(n)$ af partitioner af n i summander, der højst er m .
- (9.5) Vis, at $p_2^*(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Her betegner $\lfloor x \rfloor$, for et reelt tal x , det største hele tal, der er $\leq x$.)
- (9.6) Vis, at antallet $p_k(n)$ af partitioner af n i præcis k summander tilfredsstiller rekursionen:
$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k).$$
- (9.7) Vis at antallet af partitioner af n i summander, der alle er forskellige og ulige, er lig antallet af *selvkonjugerede* partitioner af n (præcist betyder dette, at den pågældende partitions Ferrers-diagram ikke ændres ved spejlingen om linien $x = y$).
- (9.8) Find antallet af typer af permutationer af 10 elementer; og antal typer af permutationer af 11 elementer.
- (9.9) Der betragtes partitioner af $n = 30$. Angiv den leksikografisk næste partition til nedenstående partitioner:
- (a) $10 + 10 + 10$.
 - (b) $9 + 9 + 9 + 1 + 1 + 1$.
 - (c) $8 + 8 + 8 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.
 - (d) $7 + 7 + 7 + 7 + 1 + 1$.
 - (e) $6 + 6 + 6 + 6 + 3 + 1 + 1 + 1$.
 - (f) $6 + 6 + 6 + 6 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
- (9.10) Find antallet af permutationer af 8 objekter, hvis cykelfremstilling består af 3 cykler.
- (9.11) Angiv for hvert naturligt tal $k \leq 10$, dels antallet af permutationer af 10 elementer, hvis cykelfremstilling består af k cykler, dels antallet af cykeltyper, der består af k cykler.

Kapitel 10

Catalan-tal mm.

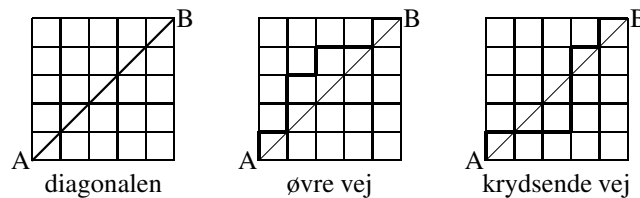
Hovedemnet for dette kapitel er de såkaldte *Catalan-tal*¹, der dukker op i mange tællesituationer, hvor en given problemstilling, fx af *størrelse* n , naturligt – når man har set det – lader sig opdele i *komplementære* delproblemer af samme overordnede struktur som det givne problem, af *størrelserne* k og $n - k$, og hvor det ønskede antal objekter kan beregnes som summen af en række produkter, der hver er antallet af objekter for størrelse k gange antallet af objekter for størrelse $n - k$, adderet for de relevante værdier af k , og ofte med diverse modifikationer undervejs.

En nøgle til Catalan-tallene er derfor deres fortolkning som løsning til *rekursionen*:

$$s_n = s_0 \cdot s_{n-1} + s_1 \cdot s_{n-2} + \dots + s_{n-1} \cdot s_0.$$

I fremstillingen her indføres Catalan-tallene imidlertid som antal objekter knyttet til en bestemt tælleopgave, og det godtgøres derefter, at tallene tilfredsstillere rekursionen ovenfor, med en naturlig begyndelsesbetingelse. Hovedformålet er at diskutere diverse konkrete tælleopgaver, hvor Catalan-tallene direkte, eller modificeret, indgår i løsningen. Desuden undersøges, med anvendelser, hvor mange gange et *primtal* p er divisor i $n!$, for naturlige tal n .

10.1 Veje, der forløber over diagonalen i kvadratisk gitter. I fortsættelse af fortolkningen af binomialkoefficienter som antallet af *gitterveje* i et $k \times n$ gitter af småkvadrater betragtes her specialtilfældet af et *kvadratisk gitter*, af størrelse $n \times n$, altså med $n + 1$ vandrette og $n + 1$ lodrette gitterlinier. Nedenfor er et sådant gitter illustreret for $n = 5$.



I den oprindelige model, se afsnit 3.5, blev antallet af veje fra A til B (i et $n \times n$ gitter) bestemt som $\binom{2n}{n}$, fordi hver gittervej kan beskrives éntydigt via et ord af længde $2n$ i bogstaverne O (gå et skridt op) og H (gå et skridt til højre), med n O'er og n H'er, og antallet af sådanne ord er $\binom{2n}{n}$; hvert ord er jo fastlagt ved hvilke n af de ialt $2n$ bogstaver, der er O'er.

Disse ialt $\binom{2n}{n}$ gitterveje fra A til B forekommer i tre *typer* afhængig af deres forløb relativt til *diagonalen*, der er vist på figuren ovenfor til venstre. Veje af den første type forløber over diagonalen; kravet hertil er præcist, at alle punkter på vejen har en y -koordinat, der er \geq punktets x -koordinat, når figuren indlægges i et sædvanligt xy -koordinatsystem med begyndelsespunkt i A; sådanne veje kaldes *øvre veje*. Tilsvarende er *nedre veje* gitterveje, der forløber under diagonalen; der er naturligvis en bijektiv korrespondance mellem mængden af øvre veje og mængden af nedre veje bestemt ved *spejling omkring diagonalen*. Den tredje type veje, bestående af de resterende, er altså gitterveje, der forløber på begge sider af diagonalen, altså *krydser* diagonalen. Midterfiguren viser en øvre vej, der ganske vist »rører« diagonalen flere steder (og ikke bare i A og B som

¹Studeret af E. Catalan, belgisk matematiker (1814–1894), i forbindelse med parentesproblemet, se afsnit 10.3

alle veje gør), medens figuren til højre viser en vej, der hverken er øvre eller nedre: den krydser diagonalen to gange. Tælleopgave: *Find antallet af øvre gitterveje i et $n \times n$ gitter.*

Om en gittervej beskrevet som ovenfor ved et ord af længde $2n$ i bogstaverne O og H, med n af hver, er øvre, nedre eller krydsende, beror på fordelingen af bogstaver på langs i ordet, dvs. om ordet har en »overvægt« eller »undervægt« af bogstaver O i starten af ordet. Mere præcist:

Observation. *En vej beskrevet ved et bestemt ord af længde $2n$ i bogstaverne O og H, med n af hver, er en øvre gittervej hvis og kun hvis det for hvert startsegment af ordet gælder, at dets antal bogstaver O er større end eller lig dets antal bogstaver H.* ■

For $n = 1$ er der to gitterveje, hvoraf én er øvre, den anden nedre (og ingen krydser diagonalen). For $n = 2$ er der ialt 6 gitterveje, med 2 af hver af de tre typer. For $n = 3$ er situationen allerede – prøv selv – næsten uoverskuelig! På en måde er det klare geometriske indhold af tælleopgaven forstyrrende. Derfor reformuleres tælleopgaven så det anskuelige indhold nedtones.

10.2 Følger med ikke-negative partialsummer. For $n \in \mathbb{N}$ betragtes følger $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ af længde $2n$, af ialt n elementer $+1$ og n elementer -1 ; den tilsvarende *følge af partialsummer* er følgen $(s_1, s_2, \dots, s_{2n})$ givet ved:

$$s_j := \sum_{i=1}^j x_i \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, 2n.$$

En følge $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, af lige mange $+1$ og -1 , er naturligvis fastlagt ved på hvilke n af dens $2n$ pladser, der står $+1$; der er således ialt $\binom{2n}{n}$ af disse følger. Videre er der en næsten umiddelbar oversættelse mellem en sådan følge og en gittervej fra A til B i et $n \times n$ gitter: plads-for-plads erstattes i $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ tallet x_i med O hvis $x_i = +1$ og med H hvis $x_i = -1$; derved fås et ord af længde $2n$ skrevet i bogstaverne O og H, med lige mange O og H, altså en gittervej fra A til B; oversættelsen den anden vej er analog, og tilordningen mellem følger (af den betragtede type) og gitterveje er *bijektiv* (overvej!). Det er nu klart, at:

Observation. *En forelagt følge $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ af længde $2n$, bestående af n elementer $+1$ og n elementer -1 , svarer på ovenstående måde til en øvre gittervej hvis og kun hvis den har alle sine partialsummer ikke-negative.* ■

Dermed løses den i afsnit (10.1) formulerede tælleopgave via nedenstående:

Sætning. *Lad $n \in \mathbb{N}$. Antallet af følger $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ af længde $2n$, bestående af n elementer $+1$ og n elementer -1 , for hvilke alle partialsummer er ikke-negative, er: $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.*

Bevis. Der er, som nævnt, ialt $\binom{2n}{n}$ følger $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ af lige mange elementer $+1$ og -1 , og en sådan følge har *enten* alle partialsummer ≥ 0 , *eller* én eller flere af dens partialsummer er < 0 . Det viser sig nogenlunde let at bestemme antallet af følger, der har én eller flere negative (altså < 0) partialsummer; mængden af sådanne følger betegnes i beviset her kort \mathcal{N} , og det søgte antal er derfor $\binom{2n}{n} - |\mathcal{N}|$, antallet af samtlige de betragtede følger, fratrukket antallet $|\mathcal{N}|$, der bestemmes nedenfor, af følger med én eller flere negative partialsummer.

Optællingen af \mathcal{N} bruger standardmetoden, at fastlægge en bijektiv afbildning mellem mængden, hvis elementantal skal bestemmes, altså her \mathcal{N} , og en mængde, hvis elementer er mere overskuelige. Ét af problemerne ved optællingen af \mathcal{N} er, at antallet af negative partialsummer, der optræder i hvert element af \mathcal{N} , tilsyneladende kan være næsten vilkårligt mellem 1 og $2n - 1$, og de negative partialsummer kan forekomme på tilsyneladende næsten vilkårlige pladser.

Denne bijektive afbildning fra \mathcal{N} fastlægges på følgende måde: Lad $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ være et givet element af \mathcal{N} . Det vides altså, at der er n tal $+1$ blandt x_i 'erne, og n tal -1 , og desuden, at mindst én af partialsummerne er < 0 ; betragt nu det indeks k mellem 1 og $2n$, hvor den *første*

negative partialsum findes; præcist gælder altså om k , at

$$\sum_{i=1}^j x_i \geq 0 \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, k-1, \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^k x_i < 0.$$

I tilfældet $k = 1$, der indtræffer hvis $x_1 = -1$, skal summen til venstre ovenfor fortolkes som $= 0$ (den tomme sum). Det følger heraf, at $\sum_{j=1}^{k-1} x_j = 0$ og $x_k = -1$, fordi k er det første indeks, hvor en negativ partialsum optræder. Dette medfører, at k er *ulige*, da der blandt x_1, x_2, \dots, x_{k-1} er lige mange $+1$ og -1 (eventuelt slet ingen), idet summen af disse jo ifølge valget af k er 0 ; at $x_k = -1$ følger af, at partialsummen af leddene til og med indeks k er negativ.

Nu kommer der et trick: En følge $(y_1, y_2, \dots, y_{2n})$ defineres på basis af den givne ved at skifte fortegn på de k første elementer i $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, altså

$$(y_1, y_2, \dots, y_{2n}) := (-x_1, -x_2, \dots, -x_{k-1}, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_{2n}). \quad (10.1)$$

Denne følge har ikke samme antal elementer $+1$ og -1 , men præcis $n+1$ elementer $+1$ og $n-1$ elementer -1 ; blandt x_1, x_2, \dots, x_{k-1} , og derfor blandt y_1, y_2, \dots, y_{k-1} , er der jo lige mange $+1$ og -1 , hvorimod $x_k = -1$ og $y_k = +1$.

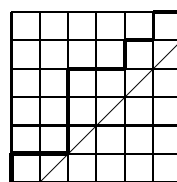
Samtlige følger af $n+1$ elementer $+1$ og $n-1$ elementer -1 , kan fås på denne måde fra en følge i \mathcal{N} , der endvidere er entydigt bestemt (dette sidste er klart); mængden af følger af $n+1$ elementer $+1$ og $n-1$ elementer -1 betegnes \mathcal{H} . Opskriften til at finde den følge $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ tilhørende \mathcal{N} , der ved konstruktionen (10.1) giver en forelagt følge $(y_1, y_2, \dots, y_{2n})$ fra \mathcal{H} , er blot at opsøge det første ulige indeks k så der i $(y_1, y_2, \dots, y_{2n})$ er flere elementer $+1$ end elementer -1 blandt de k første; et sådant k findes, da der jo ialt er $n+1$ elementer $+1$ men kun $n-1$ elementer -1 i følgen $(y_1, y_2, \dots, y_{2n})$; med dette k fastlagt kan processen i (10.1) *omvendtes* ved simpelthen at skifte fortegn på de første k elementer i følgen $(y_1, y_2, \dots, y_{2n})$ (det er faktisk samme proces som den, der giver $(y_1, y_2, \dots, y_{2n})$ fra $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$).

Den bijektive korrespondance mellem \mathcal{N} og \mathcal{H} giver specielt, at de to mængder har lige mange elementer; endvidere er $|\mathcal{H}|$ let at beregne. Det er jo blot antallet af følger $(y_1, y_2, \dots, y_{2n})$ af $n+1$ elementer $+1$ og $n-1$ elementer -1 , der klart er $\binom{2n}{n+1}$, nemlig antallet af valg af de $n+1$ pladser blandt $2n$, der tildeles værdien $+1$. Samlet er antallet af følger $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ med lutter ikke-negative partialsummer:

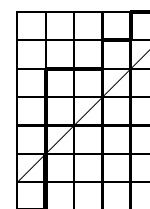
$$\binom{2n}{n} - |\mathcal{N}| = \binom{2n}{n} - |\mathcal{H}| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

som påstået (den sidste identitet fås ved at »sætte på fælles brøkstreg«). ■

Figuren her – svarende til fortolkningen som gitterveje – antyder overgangen fra en følge med en negativ partialsum (altså en ikke-øvre gittervej i $n \times n$ gitteret) til den *fortegnsmodificerede* følge (altså en bestemt gittervej i et $(n+1) \times (n-1)$ gitter):



en ikke-øvre vej



efter fortegnændring

Til venstre: en ikke-øvre vej i et 6×6 gitter og den del af vejen (vist tykt) der *flippes* (spejles omkring *underdiagonalen*, vist tyndt); til højre: den resulterende vej i 7×5 gitteret.² En vej er ikke-øvre hvis og kun hvis den har punkter på underdiagonalen.

²Det benyttede trick, at foretage en slags spejling af den første del af en gittervej omkring underdiagonalen, går tilbage til D. André, fransk kombinatoriker (1840–1917).

Definition. Følgen af **Catalan-tal**, der betegnes $(C_n)_{n \geq 0}$, er givet ved:

$$C_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.2)$$

Der er en – måske noget formel – fortolkning af C_0 : den tomme vej i et 0×0 gitter (det må være et punkt) kan opfattes som den eneste øvre gittervej, og tilsvarende har den ene (tomme) følge af længde 0 ingen elementer, og ingen (strengt) negativ partialsum!

Fortolkningen i de foregående afsnit, viser, at de for $n \geq 1$ ved (10.2) definerede tal alle er naturlige tal, hvilket vel ikke er direkte oplagt ud fra definitionen som binomialkoefficienten $\binom{2n}{n}$ divideret med $n+1$ (pånær for $n = 0, 1, 2$). Se imidlertid afsnit 10.4 og opgave 10.1.

De første Catalan-tal findes let af formel (10.2); for større værdier af n kan benyttes, at Catalan-tallene er løsning til en simpel rekursion, se opgave 10.2. Her er de første værdier:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429

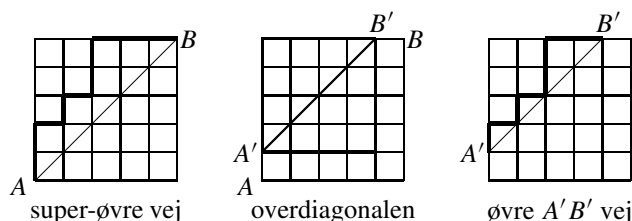
10.3 En rekursion for antallet af øvre veje. I fortsættelse af optællingen af de øvre veje i et $n \times n$ gitter vises her, at antallet af veje fra A til B , der forløber over diagonalen i gitteret, tilfredsstillende en vigtig rekursion, der mødes i mange tælleopgaver.

Sætning. Følgen $(u_n)_{n \geq 0}$, hvor $u_0 = 1$ og u_n , for $n \geq 1$, betegner antallet af øvre gitterveje i et $n \times n$ gitter, tilfredsstillende rekursionen:

$$u_n = u_0 \cdot u_{n-1} + u_1 \cdot u_{n-2} + \dots + u_{n-2} \cdot u_1 + u_{n-1} \cdot u_0 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

Bevis. Betragt en *hjælpefølge*, betegnet $(v_n)_{n \geq 0}$, der for $n \geq 1$ tæller de veje fra A til B i et $n \times n$ gitter, der dels *forløber over diagonalen* af kvadratet, altså er øvre, og desuden har A og B som *de eneste punkter fælles med diagonalen*: sådanne veje kaldes her *super-øvre veje*. Det er næppe ganske klart, hvad værdien v_0 er, eller burde være, men vi sætter $v_0 = 1$.

Figurerne nedenfor illustrerer idéen i det efterfølgende argument. Til venstre er vist en super-øvre vej fra A til B . På midterfiguren ses, at den øverste venstre del af $n \times n$ gitteret danner et *indlagt* $(n-1) \times (n-1)$ gitter, vist optrukket, hvori diagonalen bestemmes af A' og B' , og den er en slags overdiagonal i det givne $n \times n$ gitter. Ved at se bort fra første skridt (opad) og det sidste skridt (mod højre) i en forelagt super-øvre vej fås, som antydte til højre for den super-øvre vej vist på venstre figur, en øvre vej, relativt til $(n-1) \times (n-1)$ gitteret og A' og B' .



Da der er en naturlig bijektiv korrespondance mellem super-øvre gitterveje i et $n \times n$ gitter, og (almindelige) øvre gitterveje i et $(n-1) \times (n-1)$ gitter, er $v_n = u_{n-1}$ for $n = 2, 3, 4, \dots$

En vej fra A til B kan nemlig specificeres ved en sekvens af længde $2n$ bestående af n bogstaver O og n bogstaver H, der fortolkes som koder for skridt *opad*, henholdsvis til *højre*. En vej, der forløber i den øverste del af kvadratet og har A og B som de eneste punkter fælles med diagonalen kodes med en sekvens, der starter med O og slutter med H, og som desuden har egenskaben, at der på alle steder indeni sekvensen er mødt mindst et O mere end H (i modellen med følger af

længde $2n$ af lige mange $+1$ og -1 er alle egentlige partialsummer på nær den sidste (mindst $+1$). Ved fra en sådan sekvens at fjerne det første bogstav (der er et O) og det sidste (der er et H) fås en sekvens af længde $2n - 2$, der koder en øvre vej i et $(n - 1) \times (n - 1)$ gitter. Omvendt svarer der til hver øvre vej i et $(n - 1) \times (n - 1)$ en øvre vej i et $n \times n$ gitter, der kun møder diagonalen i dens endepunkter: fra en kodning af den første fås en kodning af den anden ved at foranstille et O, og efterstille et H.

Hver af de ialt u_n øvre veje fra A til B i et $n \times n$ gitter rører diagonalen en eller flere gange til visse af de lige antal skridt $0, 2, 4, \dots, 2n - 2$ (punktet B nås jo efter $2n$ skridt), om ikke senere så i det mindste efter 0 skridt svarende til startpunktet A ; ved at inddele alle de øvre veje efter det sidste tidspunkt, dvs. antal skridt, før $2n$ hvori de rører diagonalen, ses, at der gælder:

$$u_n = u_0 \cdot v_n + u_1 \cdot v_{n-1} + \dots + u_{n-2} \cdot v_2 + u_{n-1} \cdot v_1. \quad (10.3)$$

Det første led er nemlig antallet af øvre veje, der kun rører diagonalen i A og B ; det andet led er antallet af veje, der rører diagonalen efter 2 skridt, men er en super-øvre vej derefter; og således videre; det sidste led er antallet af øvre veje, der rører diagonalen efter $2n - 2$ skridt.

Erstattes v_j i ligningen (10.3) med u_{j-1} , for $j = 1, 2, \dots, n$, fås, at $(u_n)_{n \geq 0}$ tilfredsstiller rekursionen:

$$u_n = u_0 \cdot u_{n-1} + u_1 \cdot u_{n-2} + \dots + u_{n-2} \cdot u_1 + u_{n-1} \cdot u_0,$$

hvilket var påstanden. ■

Korollar. Følgen af Catalan-tal $(C_n)_{n \geq 0}$ er den entydigt bestemte talfølge $(u_n)_{n \geq 0}$ der tilfredsstiller rekursionen

$$u_n = u_0 \cdot u_{n-1} + u_1 \cdot u_{n-2} + \dots + u_{n-2} \cdot u_1 + u_{n-1} \cdot u_0, \quad (10.4)$$

med begyndelsesbetingelsen $u_0 = 1$. Rekursionen (10.4) kaldes **Catalan-rekursionen**.

Eksempel. Betrag $n + 1$ variable x_0, x_1, \dots, x_n , hvis produkt $x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n$, med faktorerne i den viste rækkefølge, ønskes beregnet via ialt n multiplikationer. Den associative opbygning af et beregningsudtryk for produktet kan fastlægges via parenteser, der fuldstændigt foreskriver hvilke delprodukter, der dannes undervejs i beregningen. For $n = 2$ er der de 2 beregningsudtryk:

$$(x_0 \cdot x_1) \cdot x_2 \quad \text{og} \quad x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2),$$

og for $n = 3$ er der de 5 beregningsudtryk:

$$x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)), \quad x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3), \quad (x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3), \quad (x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3, \quad \text{og} \quad ((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3.$$

Antallet af forskellige beregningsudtryk, altså af parentessætninger, ønskes bestemt. Dette antal betegnes b_n . Af eksemplerne ses, at $b_2 = 2$ og $b_3 = 5$. I grænsetilfældene, $n = 0, 1$, hvor der til det første ikke svarer noget produkt, og til det andet ikke svarer nogen parentessætning, haves $b_0 = b_1 = 1$, i begge tilfælde tællende den ene tomme parentessætning.

En rekursion for tallene $(b_n)_{n \geq 0}$ fås ved at bemærke, at der i et korrekt produkt findes præcis én \cdot udenfor alle parenteser, nemlig svarende til den sidste multiplikation (hvorefter beregningen er færdig). Er denne udenfor-alle-parenteser-stående \cdot placeret mellem x_k og x_{k+1} er der b_k måder at sætte parenteser til specifikation af produktet af variablene x_0, \dots, x_k og b_{n-k-1} måder at sætte parenteser til specifikation af produktet af variablene x_{k+1}, \dots, x_n , og derfor gælder:

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \dots + b_{n-1} b_0 \quad \text{for} \quad n \geq 2.$$

Det følger derfor af korollaret, at $(b_n)_{n \geq 0}$ er Catalan-talfølgen, altså $b_n = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ for $n = 0, 1, 2, \dots$ □

10.4 Gulv og loft af tal, med anvendelser. Det er ofte bekvemt at have korte betegnelser for de hele tal, der ligger nærmest ved at forelagt (reelt) tal. Lad $x \in \mathbb{R}$. Der findes et éntydigt bestemt helt tal k således, at

$$k \leq x < k + 1.$$

Hvis x selv er et helt tal gælder naturligvis om dette k , at $x = k$, og k er i så fald såvel *det største* hele tal $\leq x$, og *det mindste* hele tal $\geq x$. Ellers, altså når $k < x$, er k *det største* hele tal $\leq x$, og $k + 1$ er *det mindste* hele tal $\geq x$. I alle tilfælde benyttes følgende betegnelser, for $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor x \rfloor = \text{det største hele tal } m \text{ så } m \leq x,$$

og

$$\lceil x \rceil = \text{det mindste hele tal } m \text{ så } m \geq x.$$

Her kaldes $\lfloor x \rfloor$ for *gulvet* af x , og $\lceil x \rceil$ kaldes *loftet* af x (ofte mødes betegnelsen $\lfloor x \rfloor$ i stedet for $\lfloor x \rfloor$, og $\lceil x \rceil$ kaldes *den hele del af* x). Derved defineres to afbildninger af \mathbb{R} ind i \mathbb{Z} , den ene $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, og den anden $x \mapsto \lceil x \rceil$, der begge er monotont *voksende*, og der gælder:

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil \quad \text{for } x \in \mathbb{R}.$$

Endvidere gælder $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ hvis og kun hvis x er et helt tal, nemlig $x = \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$.

Det følger direkte af definitionerne, at

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1 \quad \text{for } x \in \mathbb{R}.$$

I flere forbindelser er det nyttigt at kende antallet af gange et givet primtal p går op i $n!$. Dette antal, der betegnes $v_p(n!)$, er naturligvis $= 0$ når $n < p$, men når n vokser, stiger antallet $v_p(n!)$ hver gang n er et multiplum af p . Præcist gælder:

$$v_p(n!) = v_p((n-1)!) + k,$$

når p indgår som faktor præcis k gange i primopløsningen af n . Dette kan benyttes til at få en *formel* for $v_p(n!)$. Værdierne af $v_p(n!)$, når p og n er små, findes let:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$v_2(n!)$	1	1	3	3	4	4	7	7	8	8	10	10	11	11	15
$v_3(n!)$	0	1	1	1	2	2	2	4	4	4	5	5	5	6	6
$v_5(n!)$	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
$v_7(n!)$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
$v_{11}(n!)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

Formelen for $v_p(n!)$ benytter *gulvfunktionen* introduceret ovenfor.

Sætning 1. For hvert primtal p og hvert naturligt tal n gælder:

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

(Summen her er endelig, da $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$ når k er så stor, at $p^k > n$.)

Bevis. Blandt faktorerne $2, 3, \dots, n$ i $n!$ bidrager kun tallene af formen mp , altså multipla af p , til $v_p(n!)$, og antallet af disse er $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$; faktisk bidrager hvert multiplum af p^2 med 2 (eller flere)

faktorer p , så det andet led i summen, der er antallet af multipla af p^2 blandt $2, 3, \dots, n$, er antallet af *bidrag nummer to* fra disse multipla, og således videre. ■

Eksempel. Man finder således umiddelbart, at:

$$v_2(100!) = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{64} \right\rfloor = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97.$$

(Her er $100!$ faktisk et ret stort tal!) □

Den kombinatoriske definition af *binomialkoefficienterne* $\binom{n}{k}$ giver umiddelbart, at disse er hele tal; hvert er nemlig *antallet* af \dots . Et kombinatorisk argument godtgør beregningsudtrykket for binomialkoefficienterne som forholdet mellem passende fakultetstal:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{for hele tal } n, k \text{ som opfylder } 0 \leq k \leq n. \quad (10.5)$$

Uden den kombinatoriske fortolkning af disse brøker er det næppe umiddelbart, at de faktisk er hele tal, altså, at nævneren $k!(n-k)!$ går op i tælleren $n!$, for alle de relevante værdier af k, n . At dette er tilfældet kan eftervises via beregningen af $v_p(m!)$ i sætning 1, der jo beskriver primopløsningerne af $n!, k!$, og $(n-k)!$.

Sætning 2. For hele tal n, k , der opfylder: $0 \leq k \leq n$, og vilkårlige primtal p gælder:

$$v_p(k!) + v_p((n-k)!) \leq v_p(n!).$$

Hvert primtal p går op i tælleren i brøken fra (10.5) mindst så mange gange som p går op i nævneren, og brøken er derfor et helt tal.

Bevis. Der gælder uligheden: $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$, for vilkårlige reelle tal x, y . Idet nemlig $\lfloor x \rfloor \leq x$, og $\lfloor y \rfloor \leq y$, er $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ dermed et helt tal $\leq x + y$, altså mindre end eller lig $\lfloor x + y \rfloor$, som er det største hele tal, der er mindre end eller lig $x + y$.

For et primtal p fås ved brug af denne ulighed:

$$v_p(k!) + v_p((n-k)!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor + \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-k}{p^j} \right\rfloor \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k+n-k}{p^j} \right\rfloor = v_p(n!). \quad \blacksquare$$

En anden nyttig egenskab – der let verificeres – ved gulvfunktionen er følgende:

For ikke-negative tal $x \in \mathbb{R}$ og ikke-negative hele tal k gælder: $k\lfloor x \rfloor \leq \lfloor kx \rfloor$.

Catalan-tallene $(C_n)_{n \geq 0}$ defineret ved formel (10.2) vides – via den kombinatoriske fortolkning – at bestå af lutter naturlige tal, men som nævnt er det ikke (helt) umiddelbart, at brøken i (10.2) faktisk er et helt tal, altså, at binomialkoefficienten $\binom{2n}{n}$ er delelig med $n+1$. At dette er tilfældet kan indses ved en forfinet variant af argumentet for sætning 2. Der gælder jo

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}, \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots$$

og det er en konsekvens af lemmaet nedenfor, at denne brøk er et helt tal.

Lemma. Lad p være et primtal, og lad n og k være naturlige tal. Så gælder:

$$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor.$$

Bevis. Tallet $\frac{n+1}{p^k}$ er enten et helt tal, eller det er ikke et helt tal. I det første tilfælde gælder, idet h betegner $\frac{n+1}{p^k} = \left\lfloor \frac{n+1}{p^k} \right\rfloor$, at $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = h - 1$, fordi $0 < \frac{1}{p^k} < 1$; videre gælder: $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor = 2h - 1$, fordi $\frac{2n+2}{p^k} = 2h$ og $0 < \frac{2}{p^k} < 1$.

I det andet tilfælde, hvor altså $\frac{n+1}{p^k}$ ikke er et helt tal, gælder $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{p^k} \right\rfloor$, hvoraf

$$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{p^k} \right\rfloor = 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor. \quad \blacksquare$$

Opgaver.

(10.1) Vis direkte, uden at benytte den kombinatoriske fortolkning af Catalan-tallene, og uden sætningen i afsnit 10.4, at $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ er et helt tal for alle hele tal $n \geq 1$.

(10.2) Vis, at Catalan-tallene tilfredsstiller rekursionen:

$$x_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} x_n \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots,$$

med begyndelsesbetingelsen: $x_0 = 1$ (det er en rekursion med ikke-konstante koefficienter).

(10.3) Ved en iskagebod sælges iskager til fast pris på 10 kr. Boden har netop åbnet, dog desværre uden byttepenge i kassen, og der er allerede en kø på 10 børn; her har 5 af børnene hver en 10-krone-mønt, og de øvrige 5 har hver en 20-krone-mønt, og skal altså have penge tilbage i forbindelse med købet. På hvor mange måder kan køen dannes så der på alle tidspunkter ved betjeningen af køen er penge nok i kassen, af den rette størrelse, til at give tilbage?

(10.4) Bestem antallet af diagonalkrydsende veje i et $n \times n$ gitter, for $n \in \mathbb{N}$. Beregn antallet for $n = 4$, og beskriv de diagonalkrydsende veje for $n = 3$.

(10.5) Bestem antallet følger af længde $n+m$ med ikke-negative partialsummer i tilfældet $n \geq m$ og n elementer $+1$ og m elementer -1 .

(10.6) Lad der, for et naturligt tal n , være givet $2n$ punkter på en cirkelperiferi; det kan gerne antages, at punkterne er ækvi-angulært fordelt (det ændrer dog ikke tælleopgaven). Det ønskes beregnet, på hvor mange måder, der kan dannes en parring af alle $2n$ punkter, altså i n par, således, at de ialt n liniestykker, der forbinder hvert af parrenes punkter indbyrdes, udgør et ikke-skærende sæt af n liniestykker.

(10.7) Bestem antallet τ_n af *trianguleringer* af en regulær n -kant, for $n = 3, 4, 5, \dots$. Enhver sådan er bestemt ved $n - 3$ *korder*, som antydet med de stiplede linier på figuren nedenfor, hvor det ses, at $\tau_3 = 1$, $\tau_4 = 2$, og $\tau_5 = 5$.



$n = 3$



$n = 4$



$n = 4$



$n = 5$



$n = 5$



$n = 5$



$n = 5$



$n = 5$

Kapitel 11

Kantfarvning

I dette kapitel diskuteres begrebet *kantfarvning af en graf*; kantfarvning drejer sig om tildeling af farver til grafens *kanter*, på en sådan måde, at alle kanter med en fælles endeknude er tildelt forskellige farver – dette kaldes en *egentlig* kantfarvning. Der findes altid sådanne farvetildelinger til kanterne i en forelagt graf, fx med en separat farve til hver kant. Det *kantkromatiske tal* for en graf G er det *mindst mulige antal farver* i en egentlig kantfarvning af G .

Det er let at angive en nedre grænse for det kantkromatiske tal udtrykt ved den *maksimale knudevalens* $\Delta(G)$ for G ; alle kanter, der har en knude af valens $\Delta(G)$ som fælles endeknude, har forskellige farver ved en egentlig kantfarvning, og derfor indgår mindst $\Delta(G)$ forskellige farver i en egentlig kantfarvning. Visse grafer *kan* kantfarves i $\Delta(G)$ farver, andre, fx kredsgrafer af ulige længde *kan ikke*.

Det er et hovedresultat om kantfarvning – *Vizings sætning*, der bevises i kapitlet – at enhver graf faktisk kan kantfarves med brug af $\Delta(G) + 1$ kantfarver, altså med én yderligere farve i forhold til det fra den maksimale knudevalens nødvendige. For en forelagt graf G vides altså, at den kan kantfarves med enten $\Delta(G)$ eller $\Delta(G) + 1$ kantfarver; der kendes imidlertid *ikke* simple kriterier for om en graf er af den første eller af den anden type.

11.1 Motivering og definitioner. Kantfarvning benyttes *ikke* primært til »dekoration« af grafer,¹ men som model for *tildeling af ressourcer*.

Eksempel. For lang tid siden blev antallet af *kampe* i en alle-mod-alle turnering mellem 12 hold bestemt, se eksemplet i afsnit 1.6. I forlængelse heraf kan der spørges, *hvor mange kampdage, der skal til for afvikling af turneringen, når hvert hold deltager i højst én kamp pr. kampdag?*

Turneringen kan beskrives via en K_{12} -graf, hvis knuder er turneringens deltagende hold, og hver af de $\binom{12}{2} = 66$ kanter er kampen mellem kantens to endeknuder (hold). Kampdagene i en turneringsplan kan *markeres* via farver på kanterne, og kravet, at hvert hold højst deltager i én kamp pr. kampdag oversættes direkte til kravet, at alle kanter (kampe) med en fælles endeknude (med ét bestemt hold som deltager) har forskellige farver (udkæmpes på forskellige dage).

Det vises i afsnit 11.3 nedenfor, at K_{12} , hvor alle knuder har valens 11, faktisk *kan* kantfarves med brug af 11 farver, og det er derfor *muligt* at afvikle turneringen på 11 kampdage! \square

Definition. En *kantfarvning* af en graf $G = (V, E)$ er en tildeling af farver til elementerne i kantmængden E ; en sådan kantfarvning kaldes **egentlig**, hvis vilkårlige to kanter, der har en fælles endeknude, altså $uv, uw \in E$, med $u, v, w \in V$ (parvis forskellige), har forskellige farver.

En farvetildeling kan specificeres ved en afbildning $\varphi : E \rightarrow \mathcal{F}$, for en passende farvemængde \mathcal{F} , fx et afsnit af de naturlige tal; det basale *kompatibilitetskrav* for en kantfarvning er, udtrykt ved φ , at $\varphi(uv) \neq \varphi(uw)$ for $u, v, w \in V$, der opfylder $v \neq w$ og $uv, uw \in E$.

Det er kun de egentlige kantfarvninger, der har interesse, og ofte »glemmes/underforstås« glosen egentlig. Alle tomme grafer, altså grafer uden kanter, kan kantfarves med den *tomme farvning* (uden farver). Hver ikke-tom graf har (uendelig mange) egentlige kantfarvninger. Et naturligt spørgsmål i forbindelse med kantfarvning er, *hvor få farver en grafs kanter kan farves med?*

¹Og heller ikke til farvning af I. Kant (1724–1804); jeg burde kunne holde mig fra den slags brandere – fy!

Definition. Det mindste antal farver i en egentlig kantfarvning af en graf $G = (V, E)$ kaldes det **kantkromatiske tal** for G , og det betegnes $\chi'(G)$ (χ er et lille græsk khi).

For en given graf $G = (V, E)$ består et bevis for, at $\chi'(G) = k$, for et naturligt tal k , af to dele: (1) et argument for, at der findes en kantfarvning af G med brug af k farver, typisk i form af en *konkret* kantfarvning af G , og (2) et argument for, at der *ikke* findes kantfarvninger af G med $k - 1$ eller færre farver; denne del kan være ganske uoverskuelig, da jo i princippet alle mulige farvningsforsøg med $k - 1$ farver skal kontrolleres, og vises, *ikke* at kunne fuldføres.

Observation. For en graf $G = (V, E)$ gælder, at enhver egentlig kantfarvning omfatter mindst $\Delta(G)$ farver, hvor $\Delta(G)$ betegner den maksimale knudevalens i G (Δ er et stort græsk delta).

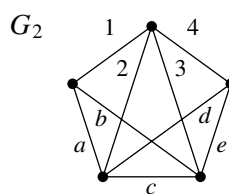
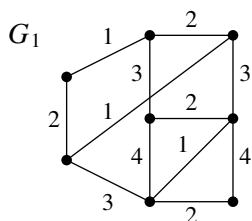
Bevis. Dette er bemærket i indledningen: Med $v \in V$ valgt som en knude af valens $k = \Delta(G)$ gælder, at kanterne med v som endeknude har forskellige farver ved en egentlig kantfarvning af G ; altså indgår der mindst k forskellige farver i en egentlig kantfarvning. ■

11.2 Eksempler på kantfarvning og kantkromatiske tal. (1) En vejgraf P_n med n knuder, altså af længde $n - 1$, kan kantfarves med 0 farver hvis $n = 1$, med 1 farve hvis $n = 2$, og med 2 farver, der benyttes *skiftevis*, hvis $n > 2$. I alle tilfælde er det kantkromatiske tal lig den maksimale knudevalens; se også (3) nedenfor.

(2) For en kredsgraf C_n er den maksimale knudevalens 2, endda med samme valens i alle knuder. En *reds af lige længde* kan kantfarves med 2 farver, der benyttes *skiftevis*. En *reds af ulige længde* kan derimod *ikke* kantfarves med 2 farver, *men den kan* med 3; forsøges med 2 farver, må disse nødvendigvis benyttes skiftevis, hvilket »går godt« undtagen ved farvning af den n 'te kant: da den første og den $(n - 1)$ 'te kant har hver sin farve – fordi n er ulige, og derfor $n - 1$ er lige – kræver en egentlig farvning en ny tredje farve til den n 'te kant. Altså gælder $\chi'(C_n) = 2 = \Delta(C_n)$ for n lige, og $\chi'(C_n) = 3 = \Delta(C_n) + 1$ for n ulige.

(3) Et træ T er bipartit, og ifølge Königs sætning (afsnit 11.5) gælder: $\chi'(T) = \Delta(T)$.

(4) Grafen G_1 til venstre (nedenfor) har maksimal knudevalens $\Delta(G_1) = 4$, og da den kan kantfarves med 4 farver som skitseret (farvenavnene er: 1, 2, 3, 4), har den kantkromatisk tal 4.



(5) Grafen G_2 til højre, der er af typen » K_5 med en kant fjernet«, har ligeledes maksimal knudevalens $\Delta(G_2) = 4$, men G_2 kan *ikke* kantfarves i 4 farver; argumentet er desværre lidt rodet. Antag, at der foreligger en egentlig kantfarvning med kun 4 farver; denne bruger 4 forskellige farver til de 4 kanter, der har topknuden som endeknude, fx farverne 1, 2, 3, 4, som antydte. Lad os forfølge de øvrige kantes farver! Kanten mærket b er enten farvet $b = 2$ eller $b = 4$. Hvis $b = 2$, så gælder, at $e = 1$, og derfor $d = 3$ og $c = 4$, men så kan kanten a ikke være farvet med én af farverne 1, 2, 3, 4 (foroven skal 1, 2 undgås, og fornedet skal 3, 4 undgås). Hvis derimod $b = 4$ gælder på samme måde, at $a = 3$, $c = 1$ og $e = 2$, men så kan d ikke være farvet med én af farverne 1, 2, 3, 4, (i øverste højre endeknude skal 2, 4 undgås, og i nederste venstre endeknude skal 1, 3 undgås). Analyserne viser i øvrigt, at med en femte farve til rådighed ville kantfarvningen kunne gennemføres, altså: $\chi'(G_2) = 5 = \Delta(G_2) + 1$. □

11.3 Kantfarvning af komplette grafer. I dette afsnit bestemmes de kantkromatiske tal for de komplette grafer K_n . Forinden er det dog nyttigt at gøre en generel overvejelse:

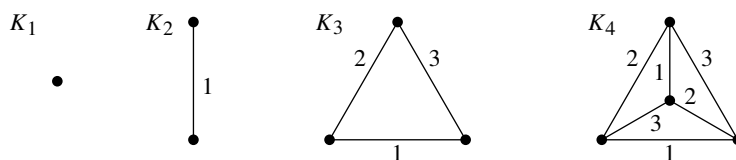
Lemma. For hver egentlig kantfarvning af en graf $G = (V, E)$, og hver farve, er antallet af kanter med denne farve højst $|V|/2$, og dermed, hvis $|V|$ er ulige, højst $(|V| - 1)/2$.

Bevis. Argumentet benytter skuffeprincippet. Knuderne spiller rollen af *kategorier* eller skuffer, og kanterne med den betragtede farve tænkes »skåret midtover«, og hver halvkant (disse er *objekterne*) kategoriseres efter den tilsvarende endeknude. Er der k kanter med den pågældende farve, er der altså $2k$ objekter og $|V|$ kategorier; at kantfarvningen er egentlig betyder, at hver kategori rummer højst 1 halvkant, hvoraf: $2k \leq |V|$ som påstået. Da antallet af kanter med en bestemt farve er et helt tal, følger den skærpede ulighed for $|V|$ ulige. ■

Bemærkning. Med lemmaet til rådighed er den kedelige gennemgang af successiv tildeling af kantfarver i grafen G_2 , eksempel (5), afsnit 11.2, faktisk overflødig, og det er tillige klart, hvad der *forhindrer* kantfarvning af grafen G_2 i $\Delta(G_2) = 4$ farver. Grafen har 9 kanter, og da hver farve i en egentlig kantfarvning kan benyttes på højst 2 kanter (der er jo 5 knuder) kan der med 4 farver højst farves 8 kanter (ved en egentlig kantfarvning)! □

For hvert naturligt tal n har den komplette graf K_n med n knuder maksimal knudevalens $\Delta(K_n) = n - 1$; det kantkromatiske tal $\chi'(K_n)$ vises nedenfor at være den maksimale knudevalens $\Delta(K_n)$ for n lige, og $\Delta(K_n) + 1$, altså den maksimale knudevalens plus 1, for n ulige, på nær for den tomme graf K_1 , hvor: $\chi'(K_1) = \Delta(K_1) = 0$ (ingen kanter skal tildeles en farve).

Dette er nærmest hovedregning for de første små værdier $n = 1, 2, 3, 4$.



Her er $K_3 = C_3$ og kræver altså 3 kantfarver, fx som vist ovenfor; tegningen af K_4 , til højre, fortolker K_4 -grafens som en K_3 (»ydertrekanten«) med hver af dennes knuder forbundet til en fjerde knude (»centerknuden«). kantfarvningen af ydertrekanten kan suppleres til en kantfarvning af K_4 ved at farve hver kant fra centerknuden med farven for den »modstående« kant fra ydertrekanten. Dette gøres præcist nedenfor.

Sætning. Det kantkromatiske tal for de komplette grafer er givet ved:

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} 0 & \text{for } n = 1 \text{ (altså } \chi'(K_n) = \Delta(K_1)), \\ n - 1 & \text{for } n \text{ lige (altså } \chi'(K_n) = \Delta(K_n)), \\ n & \text{for } n \text{ ulige, og } n > 1 \text{ (altså } \chi'(K_n) = \Delta(K_n) + 1). \end{cases}$$

Bevis. Påstanden er godtgjort for $n = 1, 2, 3, 4$. Betragt først tilfældet n ulige, og $n > 1$. Grafen K_n har $\binom{n}{2} = n(n - 1)/2$ kanter (10 kanter for $n = 5$). I en vilkårlig egentlig kantfarvning har derfor højst $(n - 1)/2$ kanter samme farve (lemmaet), og derfor er det kantkromatiske tal $\geq n$. Det drejer sig altså om at angive en kantfarvning af K_n , for n ulige (og $n \geq 3$) i n farver. Det samlede kantantal er $n(n - 1)/2$, og derfor er der i en eventuel egentlig kantfarvning af K_n i n farver, præcis $(n - 1)/2$ kanter i hver af de n farver. At en sådan findes vises med en »tegning«.

Grafen K_n tegnes med de n knuder anbragt ækvidistant på en cirkelperiferi, og de $n(n - 1)/2$ kanter deles på naturlig måde i n parallelbunder, hvor kanterne fra hvert parallelbunt farves med samme farve: hver af de n yderkanter bestemmer et sådant parallelbunt, nemlig bestående af de med yderkanten præcis $(n - 1)/2$ parallelle kanter (inklusive yderkanten selv). Den eneste knude, der ikke ligger på en kant tilhørende et givet parallelbunt er den kanten direkte modstående knude; med udgangspunkt i en af knuderne bestemmes parallelbuntet ved »korden« mellem knudens to »naboknuder« i den cirkulære konfiguration; den næste kant i parallelbuntet forbinder næstna-

boknuderne (hver sin vej rundt på cirkelperiferien), osv. Figuren til venstre nedenfor illustrerer tilfældet $n = 5$; forklaringen gælder for alle ulige $n \geq 3$.



Tilfældet n lige klares, se figuren til højre, fra den ovenfor beskrevne kantfarvning af K_{n-1} i $n-1$ farver, på følgende måde. Hver af de $n-1$ farver forekommer på præcis $((n-1)-1)/2$ kanter, og hver farve »rører« dermed $n-2$ af de $n-1$ knuder i K_{n-1} , nemlig alle knuderne på nær den til *yderkanten* med den pågældende farve *modstående* knude. Den fulde K_n -graf opfattes som en K_{n-1} med en ekstra »midterknude«, der er kantforbundet til alle knuder i K_{n-1} -delgrafen. Hver af disse $n-1$ kanter til midterknuden farves nu blot med den af de $n-1$ farver, der *ikke* forekommer på kanter til den pågældende kants anden endeknude, i kantfarvningen af K_{n-1} grafen. ■

11.4 Farveombytning. Flere af de følgende argumenter benytter et vigtigt trick, der på basis af én egentlig kantfarvning af en graf definerer, med den samme farvemængde, en anden egentlig kantfarvning, som har en for det aktuelle formål bedre udnyttelse af de givne farver.

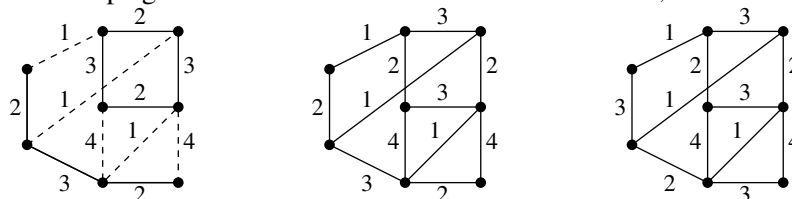
Lad $G = (V, E)$ være en graf, med en given egentlig kantfarvning i mindst 2 farver, herunder »rød« og »hvid«. I delgrafen $G' = (V, E')$ af G , bestemt ved knudemængden V og alle de kanter, der er enten røde eller hvide, har alle knuder valens 0, 1, 2, nemlig valens 0 for knuder, hvortil der ingen røde og ingen hvide kanter går, valens 1 for knuder, hvortil 1 rød, eller 1 hvid kant går, men ikke kanter af begge farver, og valens 2 for knuder, hvortil, der går præcis 1 rød og 1 hvid kant.

En sammenhængskomponent af delgrafen G' er dermed *enten* en isoleret knude, *eller* en vej, *eller* en kreds. En isoleret knude i G' er *ikke* endeknude for nogen rød, og heller ingen hvid kant i G ; en sammenhængskomponent af formen vej har kanter, der skiftevis er røde og hvide, og endeknuderne på vejen er endeknuder for en hvid, men ingen røde kanter, eller omvendt; en sammenhængskomponent af formen kreds har ligeledes kanter, der skiftevis er røde og hvide, og specielt er *længden* af sådanne kredse *lige*. Med dette *setup* gælder:

*Vælges en vilkårlig sammenhængskomponent af G' og foretages i denne ombytningen, der gør alle hvide kanter røde, og alle røde kanter hvide, medens alle øvrige kanter beholder deres kantfarve fra den givne kantfarvning af G , så fås en egentlig kantfarvning af G ; denne kantfarvning af G siges at være dannet ved **farveombytning** i den valgte sammenhængskomponent.*

Dette er – ved nærmere eftertanke – næsten umiddelbart. Kun kanter til knuder i den valgte sammenhængskomponent af G' ændrer farve. En endeknude i en sammenhængskomponent af type vej, der er endeknude for en rød kant, men ingen hvid kant (i den givne kantfarvning), er efter rød/hvid-skiftet endeknude for præcis 1 hvid kant (og tilsvarende med en endeknude for en hvid kant); en knude i en sammenhængskomponent af type kreds, og de knuder i en ikke-triviel sammenhængskomponent af type vej, der ikke er vejendeknuder, er endeknude for præcis 1 rød, og præcis 1 hvid kant, både før og efter rød/hvid-skiftet.

Eksempel. I eksempelgrafen til venstre er kanterne med farverne 2, 3 vist fuldt optrukne.



Der er to sammenhængskomponenter, en kreds øverst til højre af længde 4, og en vej af længde 4,

3 nederst til venstre. Midterfiguren viser resultatet af farveskiftet $2/3$ i kredskomponenten, og figuren til højre resultatet af farveskiftet $2/3$ i begge sammenhængskomponenter. \square

11.5 Kantfarvning af bipartite grafer – Königs sætning. Medens de komplette grafer har kantkromatisk tal, der enten er den maksimale knudevalens $\Delta(G)$, eller $\Delta(G) + 1$ (i det væsentlige afhængigt af pariteten af knudeantallet), udgør de *bipartite grafer* en klasse af grafer, der alle har kantkromatisk tal lig den maksimale knudevalens. Dette resultat kaldes *Königs sætning*:

Sætning. For enhver bipartit graf $G = (V, E)$ gælder: $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Bevis. Induktion efter antallet $|E|$ af kanter, hvor induktionens start, altså tilfældet $|E| = 0$ er klart: den maksimale knudevalens er 0, og der er ingen kanter at farve, så 0 farver er nok.

Lad nu $G = (V_1, E, V_2)$ være en bipartit graf, med knudeopdeling $V = V_1 \cup V_2$ og $|E| > 0$, og maksimal knudevalens, fx d , og antag – dette er induktionsantagelsen – at alle bipartite grafer med færre end $|E|$ kanter har en egentlig kantfarvning i et antal farver, der er lig den maksimale knudevalens. Der findes en kant i G ; lad en sådan være valgt, fx af formen vw , med $v \in V_1$ og $w \in V_2$. Grafen G' , der fås af G ved at fjerne kanten vw , altså $G' = (V, E \setminus \{vw\})$, er bipartit; knudeopdelingen $V = V_1 \cup V_2$ er en todeling relativt til de resterende kanter; videre har G' maksimal knudevalens $\leq d$, og den har færre kanter end G , nemlig præcis $|E| - 1$ kanter.

Derfor har G' en egentlig kantfarvning i d farver (det er dog ikke sikkert, at alle d farver benyttes); nu vælges og fastholdes en sådan kantfarvning af G' . Denne kantfarvning af G' kan modificeres til en egentlig kantfarvning af G . Det drejer sig – i det væsentlige – om at farve kanten vw , uden at inddrage »nye« farver. Da både v og w har valens $\leq d$ (i grafen G), altså valens $\leq d - 1$ i G' , forekommer der, ved kantfarvningen af G' , højst $d - 1$ forskellige farver på kanterne til v , og tilsvarende, højst $d - 1$ forskellige farver på kanterne til w . Der skelnes mellem to typer situationer.

A. Der findes 1 farve blandt de d mulige, som ikke forekommer på nogen kanter i G' til v , og heller ikke forekommer på nogen kanter i G' til w ; i så fald farves kanten vw med denne farve, hvilket sammen med kantfarvningen af G' fastlægger en egentlig kantfarvning af G .

B. Alle farver, der er »ubenyttede« i v »forekommer« på kanter til w , og tilsvarende, alle farver, der er »ubenyttede« i w »forekommer« på kanter til v (»ubenyttet«, og »forekommer«, er relativt til kantfarvningen af G'). I denne situation skal der arbejdes lidt mere: Antag, fx, at der ved den foreliggende egentlige kantfarvning af G' ikke er røde kanter til v , men der er en rød kant til w , og tilsvarende, at ingen kanter til w er hvide, men der er en hvid kant til v .

Betragt nu den sammenhængskomponent af G' , der indeholder v , og består af hvide og røde kanter. Da der ikke går en rød kant til v er denne sammenhængskomponent af formen en vej, med v som ene endeknude. Denne vej består af kanter, der skiftevis er hvide og røde, og begynder med en hvid kant fra v , og bipartitheden sikrer, at knuderne på vejen skiftevis tilhører V_1 og V_2 ; hvis længden af vejen er lige tilhører vejens anden endeknude V_1 , og specielt er w ikke en knude på denne vej (den ville nemlig være en indre knude på vejen, hvilket ikke er muligt, da der ikke går en hvid kant til w); hvis længden af vejen er ulige ender vejen i en knude i V_2 , via en hvid kant, men den kan ikke ende i w , da der ikke går en hvid kant til w .

Farveskiftet rød/hvid udført i den betragtede sammenhængskomponent af G' giver en egentlig kantfarvning af G' ; kanterne i G' til w bevarer deres farver, hvorimod den hvide kant med endeknude v bliver rød, og de (eventuelle) øvrige kanter til v bevarer deres farver, hvorefter farven hvid er ledig i både v og w ; nu kan farven hvid derfor benyttes på kanten vw , hvilket sammen med den modificerede kantfarvning af kanterne i G' giver en egentlig kantfarvning af G . \blacksquare

11.6 Farvelemma. Farveombytningsidéen er afgørende i beviset for Vizings sætning, se næste afsnit. Den udkrystalliseres i et *lemma*, der faktisk gør det meste af arbejdet. Udsagnet i lemmaet

er ganske kompliceret, og formuleringen af påstanden derfor (desværre!) noget omstændelig, og det anbefales at gennemarbejde det efterfølgende eksempel, i forbindelse med såvel formulering som bevis.

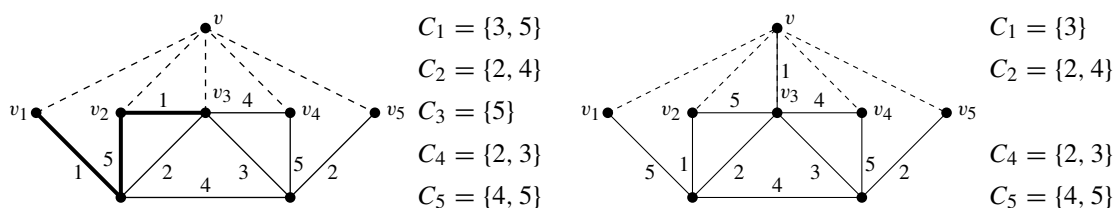
Lemma. Lad $G = (V, E)$ være en graf, og lad D være et helt tal $D \geq \Delta(G)$. Lad $v \in V$ være en knude i G , og betragt et sæt af r kanter e_1, e_2, \dots, e_r , der alle har v som ene endeknude; disse kanter har dermed formen $e_i = vv_i$ for passende knuder $v_1, v_2, \dots, v_r \in V$.

Antag nu, at hjælpegrafens $G' = (V, E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_r\})$, altså grafen G , hvorfra alle kanterne e_1, e_2, \dots, e_r er fjernede, har en egentlig kantfarvning med brug af D farver, på en sådan måde, at der findes 1 blandt de D farver, der ikke forekommer på kanter til v , og heller ikke på kanter til v_1 , og for hver af de øvrige knuder v_i , for $i = 2, 3, \dots, r$, at der findes 2 blandt de D farver, disse 2 farver kan afhænge af i , der ikke forekommer på kanter til v , og heller ikke på kanter til v_i . (Her er tale om kanter, og deres farver i kantfarvningen af hjælpegrafens G' .)

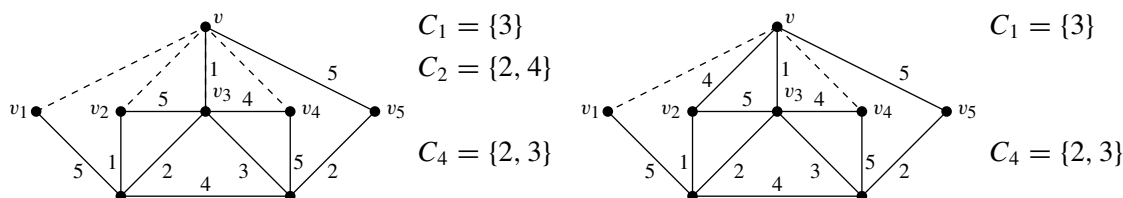
Så har grafen G en egentlig kantfarvning med brug af D farver.

Inden beviset er det nyttigt i et eksempel at se, hvad der foregår!

Eksempel. Grafen her nedenfor til venstre er delvist kantfarvet med farverne 1, 2, 3, 4, 5; topknuden v har kanter til v_1, v_2, v_3, v_4 og v_5 og det drejer sig om at farve disse 5 kanter; til højre for grafen er anført »ledighedsmængder«, dvs. for hver af knuderne v_i et valg af farver blandt de 5, bestående af farver, der er »ledige« i v og den pågældende knude; det ses, at der er én ledig farve for én af knuderne (her knuden v_3), og 2 ledige farver for hver af de øvrige knuder.



Med henvisning til beviset for lemmaet ses, at farveopgaven er af den »svære« type: alle de i undtagelsesmængderne nævnte farver forekommer i 2 eller flere af disse. Videre er farve 1 den eneste, der ikke forekommer i nogen af undtagelsesmængderne, og derfor ses nærmere på farverne 1 og 5, og 1/5-komponenten ud fra v_3 (knuden med singletonmængde). Denne komponent er en vej fra v_3 gennem v_2 og endende i v_1 (vist tyk). Efter 1/5-farveskift langs denne vej kan vv_3 farves med farve 1, hvorefter farve 5 fjernes fra C_1 og C_3 udgår; herefter er situationen som vist på figuren ovenfor til højre. Denne er af den »lette« type: der findes én blandt de i undtagelsesmængderne nævnte farver, der kun forekommer i én mængde, nemlig farve 5 i C_5 . Derfor farves kanten vv_5 umiddelbart med farve 5, hvorefter situationen er som vist her til venstre:



Systemet af undtagelsesmængder er her igen af den lette type: En af de i undtagelsesmængderne nævnte farver, nemlig farve 4, forekommer kun i én af mængderne, nemlig C_2 , og derfor tildeles kanten vv_2 direkte farve 4, mængde C_2 udgår, og situationen er nu som vist ovenfor til venstre:

Resten er hovedregning: først får kanten vv_4 farve 2, der kun forekommer én gang som undtagelsesfarve, og sluttelig gives kanten vv_1 farve 3, der ligeledes – på nuværende tidspunkt i processen – er en kun én gang forekommende undtagelsesfarve. \square

Bevis for lemmaet. Der benyttes induktion efter r , antallet af endnu ikke farvede kanter i G ; for $r = 1$ vides ifølge forudsætningen, at hjælpegraf $G' = (V, E \setminus \{e_1\})$ kan kantfarves med D farver, på en sådan måde, at 1 af de D farver *ikke* benyttes på kanter til v og v_1 , og suppleres en sådan kantfarvning af G' med en farvning af kanten $e_1 = vv_1$ i en farve, der ikke allerede er benyttet på kanter til v og v_1 , fås naturligvis en egentlig kantfarvning af G .

Lad nu G være en given graf, der har en delvis kantfarvning, med $r > 1$ endnu ikke farvede kanter, som opfylder betingelserne i lemmaet, og antag – dette er induktionsantagelsen – at alle grafer, der er delvist kantfarvede i D farver, hvor kantfarvningen opfylder betingelserne i lemmaet, og har færre end r ikke-farvede kanter, kan færdigkantfarves i D farver. Det drejer sig om at tildele en farve, valgt blandt de D , til én af kanterne e_1, e_2, \dots, e_r , fx e_i , som sammen med kantfarvningen af G' , eventuelt i modificeret form, giver en (egentlig) kantfarvning af grafen $G' \cup e_i$, og på en sådan måde, at undtagelsesfarveantallene i den reducerede situation opfylder betingelserne i lemmaet. (Disse er præcist, at der for én af de ikke-farvede kanter er 1 »ledig« farve i kantens to ender, og at der for de øvrige kanter er 2 »ledige« farver i kantens to ender; en passende omnummerering af knuderne fører så til situationen beskrevet i lemmaet.)

Betragt nu en kantfarvning af G' , i D farver, og lad der være valgt et system C_1, C_2, \dots, C_r af ledige farver som beskrevet i lemmaet; dette holdes fast i argumentet for induktionsskridtet.

$C_1 = \{1 \text{ farve, der er ledig i enderne af } e_1\},$

$C_2 = \{2 \text{ farver, der er ledige i enderne af } e_2\},$

\vdots

$C_r = \{2 \text{ farver, der er ledige i enderne af } e_r\}.$

Elementerne i disse mængder er farver valgt blandt de D . Der er nu to typer af situationer:

A. Der findes 1 farve, blandt elementerne i $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$, der forekommer i præcis én af mængderne, altså er en valgt-og-fastholdt ledig farve for præcis én af kanterne, eller

B. Hver farve blandt elementerne i $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$, forekommer i mindst to af mængderne C_i , er altså en valgt-og-fastholdt ledig farve for mindst to af kanterne.

Den første type situation er let at viderefølge: Lad farve a være en ledig farve, der kun forekommer i ledighedsmængden C_j . Sammen med farvningen af kanterne i G' giver tildeling af farve a til kanten $e_j = vv_j$ en egentlig kantfarvning af $G' \cup e_j$, der opfylder betingelserne i lemmaet; hvis $j > 1$ fjernes blot C_j , og de resterende ledighedsmængder benyttes direkte; ellers har alle de resterende ledighedsmængder to elementer, og fra en vilkårlig af dem fjernes et vilkårligt valgt element (farve).

Den anden type situation er mere krævende. Her forekommer hvert element i $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$ i to eller flere af mængderne C_i , og bruges en ledig farve direkte påvirkes jo alle de ledigmængder, hvori den pågældende farve indgår. Men forudsætningen betyder på den anden side, at der samlet i $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$ forekommer højst $r - 1$ forskellige farver (med r eller flere forskellige farver, der hver forekommer som ledig farve for to eller flere kanter, er der, med gentagelser, $2r$ eller flere ledige farver, men der er, med gentagelser, præcis $2r - 1$).

Da D er forudsat $\geq \Delta(G)$ er der højst $D - r$ allerede farvede kanter til knude v (ved kantfarvningen af G'), og altså er der r eller flere farver blandt de D , der *ikke* forekommer på kanter til v ved kantfarvningen af G' . Derfor findes en farve, blandt de D , fx *rød*, der dels ikke er benyttet på allerede farvede kanter til v , dels ikke tilhører $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$ (hvor der samlet er $r - 1$ eller færre forskellige farver).

Hvis farven rød er ledig også i knude v_1 , dette er jo muligt, C_1 er blot en valgt og fastholdt ledig farve i v_1 , og der kan sagtens være andre farver, der er ledige i v_1 , benyttes farven rød på kanten $e_1 = vv_1$, og en vilkårlig valgt af de resterende farveledigmængder reduceres til 1 farve på samme måde som i slutningen af et type A skridt.

Derfor betragtes nu tilfældet, hvor farven rød forekommer på en allerede farvet kant til v_1 ; den i mængden C_1 nævnte ledige farve kaldes *hvid*. Det er planen at udføre et rød/hvid-farveskift i den rød/hvide-sammenhængskomponent af G' , der udgår fra v_1 ; dette vil gøre den røde kant til v_1 hvid, og derfor gøre rød mulig som kantfarve til kanten $e_1 = vv_1$. Det må dog sikres, at dette rød/hvid-farveskift, der naturligvis kan påvirke ledighedsmængderne C_2, \dots, C_r , ikke forhindrer, at induktionen kan fortsætte. Før farveskift og farvning af e_1 er ingen kanter til v rød og ingen kant er hvid (dette ligger i valget af rød som ledig farve i v , og hvid som element af C_1). Dette betyder, at v *ikke* ligger i den rød/hvide-sammenhængskomponent af G' , der udgår fra v_1 , og farveskiftet påvirker derfor ikke, hvilke farver, der er ledige i v -enden af kanterne e_2, \dots, e_r .

Den rød/hvide-sammenhængskomponent af G' , der udgår fra v_1 , er en vej bestående af skiftevis røde og hvide kanter, og den kan indeholde visse af knuderne v_2, \dots, v_r . Hvis v_i er *gennemgangsknude* på denne vej, er der altså både en rød og en hvid kant til v_i , og specielt er hvid *ikke* en af de i C_i nævnte ledige farver. Rød er en farve der *ikke* forekommer i den samlede ledighedsmængde $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$, og derfor kan C_i benyttes som ledighedsmængde for v_i også efter det rød/hvide-farveskift. Hvis v_i derimod er *endeknude* på vejen er der enten 1 rød kant til v_i men ingen hvid kant til v_i , eller omvendt. I det første tilfælde skal derfor hvid fjernes fra C_i som ledighedsfarve, i det andet er C_i fortsat en korrekt ledighedsmængde for v_i , da rød slet ikke forekommer som ledighedsfarve i den samlede ledighedsmængde $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$; her kan altså C_2, \dots, C_r benyttes efter, at en vilkårlig af disse er blevet reduceret til 1 ledighedsfarve på vilkårlig måde. ■

11.7 Vizings sætning. Det er efter den omfattende forberedelse i farvelemmaet næsten umiddelbart at bevise hovedresultatet om kantfarvning, nemlig *Vizings sætning*.

Sætning. *For alle grafer $G = (V, E)$ er det kantkromatiske tal $\chi'(G)$ enten den maksimale knudevalens $\Delta(G)$, eller den maksimale knudevalens plus 1, altså: $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Bevis. Induktion efter antallet af kanter. Hvis $|E| = 0$ er den maksimale knudevalens naturligvis $\Delta(G) = 0$, og der er ingen kanter at farve, altså $\chi'(G) = 0$.

Herefter betragtes en graf $G = (V, E)$, der har kanter, og det antages – det er induktionsantagelsen – at alle grafer med færre end $|E|$ kanter *kan* kantfarves i højst $\Delta(G) + 1$ farver. Grafen G kantfarves nu på følgende måde: Lad $v \in V$ være en knude med valens $\Delta(G)$, og lad G' betegne hjælpegrafen, der fås fra G ved at fjerne samtlige kanter med v som ene endeknude, altså $G' = (V, E \setminus \{vv_1, vv_2, \dots, vv_r\})$, hvor $r = \Delta(G)$, og v_1, v_2, \dots, v_r er de r med v kantforbundne knuder. Grafen G' har naturligvis færre kanter end G ($< |E|$), og ligeledes en maksimal knudevalens $\Delta(G') \leq \Delta(G)$; ifølge induktionsantagelsen har G' derfor en egentlig kantfarvning i $\Delta(G) + 1$ farver (måske endda færre farver).

Hver egentlig kantfarvning af G' kan ved brug af farvelemmaet suppleres til en fuld egentlig kantfarvning af G ; hertil skal det blot kontrolleres, at der i en egentlig kantfarvning af G' er et passende antal ikke-benyttede farver i enderne af de midlertidigt fjernede kanter vv_1, vv_2, \dots, vv_r , men dette er opfyldt: Der er ingen kanter til v i grafen G' og derfor ingen farver, der skal undgås i v -enden af disse kanter. Hver af knuderne v_1, v_2, \dots, v_r har, da den maksimale knudevalens er r , højst $r - 1$ allerede – ved kantfarvningen af G' – farvede kanter, og da der kan bruges ialt $r + 1$ forskellige farver, er der for hver af disse knuder mindst 2 af de $r + 1$ farver, der *ikke* forekommer på allerede farvede kanter til knuden, men dette er faktisk mere end krævet i farvelemmaet. ■

11.8 Grafer af klasse 1 og klasse 2. På basis af Vizings sætning deles mængden af grafer i to klasser, den ene bestående af de grafer $G = (V, E)$, for hvilke det kantkromatiske tal er lig den maksimale knudevalens, og den anden klasse omfattende de øvrige grafer, hvor altså (Vizings

sætning) det kantkromatiske tal er lig den maksimale knudevalens plus 1. Der benyttes følgende terminologi.

Definition.² En graf $G = (V, E)$ siges at være af **klasse 1**, hvis $\chi'(G) = \Delta(G)$, og i modsat fald at være af **klasse 2**, hvor altså $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Bemærkning. Det kan måske forekomme sært at interessere sig specielt for grafers kantkromatiske tal, og især for om $\Delta(G)$ farver er nok til en egentlig kantfarvning (graf af klasse 1), eller om $\Delta(G) + 1$ farver er nødvendige (graf af klasse 2).

Der er imidlertid en forbindelse³ mellem kantfarvning og det berømte 4-farveproblem, om et »landkort« altid kan farves med 4 farver. Uden at komme ind på detaljer nævnes, at dette problem kan omformuleres til, om alle grafer for hvilke alle knuder har valens 3 (sådanne kaldes *kubiske grafer*), med den yderligere egenskab, at kunne tegnes i planen uden krydsende kanter, har kantkromatisk tal = 3, altså om alle sådanne grafer er af klasse 1; en graf med den nævnte egenskab, at kunne tegnes i planen uden krydsende kanter, kaldes en **planar graf**. \square

Eksempel. Der er ialt 208 typer af grafer med op til 6 knuder, hvoraf 143 sammenhængende. Af disse er de fleste af klasse 1, har altså kantkromatisk tal lig den maksimale knudevalens $\Delta(G)$. De nedenfor viste 8 grafer er de sammenhængende grafer, med op til 6 knuder, af klasse 2.



De første 5 kræver $\Delta(G) + 1$ farver i en egentlig kantfarvning, fx med henvisning til lemmaet i afsnit 11.3; og G_6 er en simpel variation på G_3 : der er til G_3 føjet en knude og en kant til den tilføjede knude fra en knude af mindre end maksimal valens; tilsvarende fås G_7 fra G_4 ved at føje en knude og en kant til den fra en knude af mindre end maksimal valens; og G_8 fås ved at forbinde de to knuder, der har valens 3, i G_4 , med en ekstra knude. \square

Opgaver.

(11.1) Lad $G_i = (V_i, E_i)$, for $i = 1, 2$, være *sammenhængende* grafer, hvor knudemængderne V_1 og V_2 er disjunkte, altså $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, og betragt grafen $G = (V, E)$, hvor $V = V_1 \cup V_2$ og $E = E_1 \cup E_2$. Diskuter maksimal knudevalens, kantkromatiske tal, og klasse 1/klasse 2 forholdene for G sammenlignet med G_1 og G_2 .

(11.2) Gør rede for, at i enhver egentlig kantfarvning af K_6 i 5 farver er der præcis 3 kanter med hver farve, og hver knude er endeknude for 5 kanter med hver sin af de 5 farver. Vis videre, at for vilkårlige 2 af de 5 farver danner kanterne med disse 2 farver en kreds af længde 6.

(11.3) Vis, at en graf G , der er kubisk (eller 3-regulær, dvs. alle knuder har valens 3), og har en Hamilton-kreds, har kantkromatisk tal: $\chi'(G) = \Delta(G) = 3$ (den er altså af klasse 1).

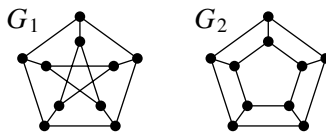
(11.4) Vis, at en kantfarvning af C_5 i 3 farver, med passende farvenavne og kredsstart, er af formen 1 – 2 – 1 – 2 – 3 på de 5 kanter.

(11.5) Angiv en kantfarvning af K_5 med 5 farver, hvor farverne *ikke* er fastlagt ved parallelbundtmetoden fra teksten. Vis, at ved nærmere eftersyn er der faktisk alligevel tale om en parallelbundt-kantfarvning (hvad kan dette betyde?). Vis, at dette *ikke* er et tilfælde, altså, at enhver kantfarvning af K_5 med 5 farver er en (eventuelt delvis skjult) parallelbundt-kantfarvning.

²Gloserne er ikke i den grad informative.

³Hvorvidt dette gør interessen mindre sær lades usagt!

(11.6) Bestem for hver af nedenstående grafer det kantkromatiske tal.



Vis, at G_1 (det er Petersen grafen) *ikke* har en Hamilton-kreds, og angiv en Hamilton-kreds for grafen G_2 til højre. Er de to grafer isomorfe?

(11.7) Bestem det kantkromatiske tal for alle sammenhængende grafer med op til (og med) 5 knuder.

(11.8) Lad $G = (V, E)$ være en graf, og antag, at den maksimale knudevalens $\Delta(G)$ i G opfylder uligheden: $\Delta(G) \cdot \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor < |E|$ (hvor $\lfloor x \rfloor$, for $x \in \mathbb{R}$, betegner det største hele tal $\leq x$).

(a) Vis, at G er af klasse 2.

(b) Vis videre, at $|V|$ er ulige, og giv et eksempel på en sådan graf.

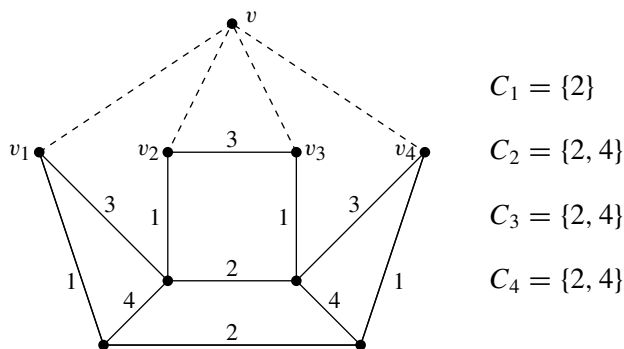
(11.9) Lad $G = (V, E)$ betegne en graf, hvor alle knuder på nær præcis én har valens d , og antag, at det kantkromatiske tal for G er d , altså $\chi'(G) = d$.

(a) Vis, at $|V|$ er ulige.

(b) Vis, at G har en isoleret knude, altså en knude v af valens $\delta_v = 0$.

(11.10) Lad G være en sammenhængende graf, hvor alle knuder har valens d , og hvori der findes en knude v , således, at grafen med v og alle kanter til v fjernede, er ikke-sammenhængende. Vis, for det kantkromatiske tal, at $\chi'(G) = d + 1$ (altså, at G er af klasse 2).

(11.11) Betragt nedenstående graf, der på nær kanterne til knude v øverst (disse kanter er vist stiplede) er kantfarvet med brug af farverne 1, 2, 3, 4, og til højre er angivet et sæt af ledige farver på samme måde som i farvelemmæet i afsnit 11.6. Gennemfør en færdigfarvning af grafen med algoritmen givet i beviset for farvelemmæet.



Kapitel 12

Mere om sammenhæng mm.

En sammenhængende graf kan være mere eller mindre sammenhængende, i den forstand, at visse kanter kan fjernes, så de resterende kanter er nok til at sikre vejforbindelse mellem vilkårlige to knuder, eller en eller flere knuder kan fjernes – og alle kanterne til dem – så der i restgrafen fortsat findes en vejforbindelse mellem vilkårlige to knuder.

For en graf, der tjener som model for et kommunikationsnetværk, er graden af sammenhæng udtryk for netværkets *robusthed*: Er kommunikationsmulighederne fortsat til stede efter *bortfald* af en knude, eller af en kant? En knudes bortfald svarer til, at et kommunikationsknudepunkt (en maskine) »går ned«; dette vil naturligvis afskære den pågældende knude (maskine) fra at kommunikere, men knuden kan også være afgørende for den indbyrdes kommunikation mellem andre knuder. En kants bortfald svarer til, at en kommunikationslinie *afskæres*, men ofte er netværket designet, så vilkårlige knuder kan kommunikere uden brug af en bestemt af kanterne.

Det viser sig nyttigt at kunne beskrive, endda ligefrem *måle*, en sammenhængende grafs *grad af sammenhæng* (engelsk: *connectivity*) dels via antallet af *knuder*, der kan fjernes (med de kanter, der går til dem) uden tab af sammenhæng, dels via antallet af *kanter*, der kan fjernes uden tab af sammenhæng. Hovedformålet i kapitlet er at forberede beviset for Brooks' sætning i næste kapitel via analysen af knudesammenhæng i afsnit 12.1 og 12.3.

12.1 Knudesammenhæng. Formålet i det følgende er primært at opbygge en basal *intuition* for knuders og kanters bidrag til en grafs *grad af sammenhæng*. Begreberne er desværre lidt rodede, da de skal tage hensyn til undtagelsestilfælde, især for grafer med få knuder.

En graf skal have mindst 2 knuder for at fjernelse af én knude efterlader en graf; den eneste sammenhængende graf med 2 knuder (som nedenstående definition vedrører) er K_2 , og fjernelse af en af knuderne heri giver den trivielle graf, der er sammenhængende:

Definition 1. For en sammenhængende graf $G = (V, E)$, med $|V| \geq 2$, kaldes en knude $u \in V$ en **snitknude** i G , hvis grafen $G' = (V \setminus \{u\}, E \setminus \{\text{kanterne til } u\})$, altså grafen, som fås fra G ved at fjerne u og kanterne, der har u som ene endeknude, er ikke-sammenhængende.

Eksempel 1. (a) For en komplet graf $G = K_n$, med $n \geq 2$ knuder, vil fjernelse af en vilkårlig knude, og kanterne til den, efterlade en K_{n-1} , der jo er sammenhængende, og $G = K_n$, med $n \geq 2$, har således *ingen* snitknuder.

(b) Et træ med 2 knuder er K_2 , og i et træ $T = (V, E)$ med $|V| \geq 3$ er en knude $u \in V$ en snitknude hvis og kun hvis den har valens $\delta_u > 1$. Fjernes en knude af valens 1 fra et træ, og kanten til den pågældende knude, fås et træ, specielt en sammenhængende graf. En knude $u \in V$ af valens > 1 har to forskellige naboknuder, fx v og w , og den entydigt bestemte vej, der forbinder v og w i træet T går gennem u , hvilket medfører, at v og w tilhører hver sin sammenhængskomponent af restgrafen T' , der fås ved fjernelse af u og kanterne til u .

(c) Ingen knude i en kredsgraf $C = (V, E)$ er snitknude; vilkårlige forskellige knuder i en kreds er nemlig forbundet med to veje (hver sin vej rundt i kredsen), og fjernelse af en enkelt knude fra kredsen ødelægger kun den ene af disse veje. \square

Successiv fjernelse af knuder fra en K_n fører ikke til en ikke-sammenhængende graf, men processen stopper på naturlig måde, når den trivielle graf K_1 nås.

En sammenhængende graf, der ikke er komplet, har 3 eller flere knuder, og der findes knuder u, v i grafen, der ikke er kantforbundne; dermed vil fjernelse af *samtlig*e knuder (og kanterne til dem) på nær u og v producere en ikke-sammenhængende graf, nemlig med knuderne u, v og tom kantmængde. Som nævnt er det primært for grafer med 3 eller flere knuder, at de detaljerede sammenhængsbegreber i de følgende afsnit har relevans.

Definition 2. Lad $G = (V, E)$ være en sammenhængende graf. En ægte delmængde $S \subseteq V$ af knudemængden kaldes en **snitmængde i G** , eller en **adskillende mængde af knuder for G** , hvis delgraf af G , med knudemængde V og kantmængde $E \setminus \{\text{kanterne til knuder i } S\}$ er ikke-sammenhængende. (Denne delgraf, med knudemængde S , og hvis kantmængde er de kanter fra E , der forbinder to knuder i S , kaldes den af **knudemængden $V \setminus S$ udspændte delgraf af G** .)

Som allerede bemærket har ingen af de komplette grafer snitmængder, hvorimod der for alle ikke-komplette grafer med 3 eller flere knuder eksisterer mindst én snitmængde. Som mål for grafens *grad af sammenhæng* tages det mindste antal knuder i en eventuel snitmængde.

Definition 3. En sammenhængende graf $G = (V, E)$, der har en snitmængde, siges at være **k -sammenhængende**, for et naturligt tal k , hvis hver snitmængde i G omfatter k eller flere knuder, og **graden af sammenhæng** for grafen G , der betegnes $\kappa(G)$, er den minimale størrelse, dvs. antal knuder, af en snitmængde i G . For de komplette grafer er det praktisk at sætte $\kappa(K_n) := n - 1$, selvom disse grafer ikke har en snitmængde.

For en ikke-sammenhængende graf $G = (V, E)$ udgør den tomme mængde af knuder en snitmængde af G , og tilsvarende siges, at en ikke-sammenhængende graf er 0-sammenhængende, og vi sætter $\kappa(G) = 0$, når G er ikke-sammenhængende.

Dermed er for alle grafer G (ikke nødvendigt at forudsætte 2 eller flere knuder) tallet $\kappa(G)$ det mindste hele tal $k \geq 0$, så der findes et (eventuelt tomt) knudesnit på k knuder, eller så fjernelse af k knuder reducerer grafen til den trivielle graf K_1 . For sammenhængende grafer, også med få knuder, kan graden af sammenhæng $\kappa(G)$ direkte udtrykkes ved størrelsen af knudemængder:

Observation. For en sammenhængende graf G , med 2 eller flere knuder, er $\kappa(G)$ det mindste hele tal k så restgraf af fjernelse af vilkårlige $k - 1$ knuder, med deres kanter, er en sammenhængende graf, eventuelt en 1-knude graf (altså en K_1).

Eksempel 2. (a) For kredsgrafer gælder: $\kappa(C_n) = 2$ (her er $n \geq 3$). For $n = 3$ er jo $C_3 = K_3$, der findes ingen snitmængde, men fjernelse af 2 knuder reducerer grafen til en K_1 . For $n \geq 4$ er der snitmængder i C_n , men ingen enkelt knude udgør en sådan, altså $\kappa(C_n) \geq 2$, og da hver delmængde bestående af 2 knuder, der ikke er naboknuder på C_n -graf, faktisk er en snitmængde, gælder $\kappa(C_n) = 2$. (En perlekæde, med 4 eller flere perler, falder i 2 dele, hvis der fjernes 2 perler som ikke er naboperler, men forbliver i én del, hvis to naboperler fjernes.)

(b) For et træ T , med 2 eller flere knuder, gælder: $\kappa(T) = 1$.

(c) For de komplet-bipartite grafer gælder: $\kappa(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$, for $m, n \geq 2$, da en snitmængde må omfatte alle knuder i én af todelingsmængderne. \square

12.2 Kantsammenhæng. Successiv fjernelse af kanter¹ fra en graf er en mere fleksibel mekanisme til reduktion af sammenhæng end fjernelse af knuder, dels fordi kanter kan fjernes *enkeltvis*, dels fordi alle knuderne forbliver i grafen.

Definitioner. Lad $G = (V, E)$ være en sammenhængende graf med 2 eller flere knuder. En delmængde $F \subseteq E$ af mængden af kanter kaldes en **adskillende kantmængde** såfremt grafen med knudemængde V og kantmængde $E \setminus F$ er ikke-sammenhængende.

¹Dette afsnit er ret »teknisk«, og det kan – på nær glosen *snitkant* – uden ulemper for det følgende springes over!

En kant $e \in E$, for hvilken singleton-kantmængden $\{e\}$ er en adskillende kantmængde, kaldes en **snitkant**, eller en **bro**, i G .

Grafen G siges at være **k -kantsammenhængende**, for et naturligt tal k , hvis hver adskillende kantmængde består af k eller flere kanter, og dens **grad af kantsammenhæng**, der betegnes $\kappa'(G)$, er det mindste tal k , for hvilket der findes en adskillende kantmængde på k kanter, eller hermed ensbetydende, det største k så G er k -kantsammenhængende.

For en ikke-sammenhængende graf G er den tomme mængde af kanter en adskillende kantmængde, og tilsvarende sættes $\kappa'(G) = 0$, for en sådan graf G . Den trivielle graf G (med en enkelt knude, og ingen kanter) er sammenhængende, men det er praktisk også at sætte $\kappa'(G) = 0$ for denne graf (det svarer i det mindste til konventionen $\kappa(K_1) = 0$).

Eksempler. (a) For en graf med 2 eller flere knuder udgør samtlige kanter til en vilkårligt valgt knude en adskillende kantmængde. Specielt er kanten til en knude af valens 1 en snitkant.

(b) Ingen af kanterne i en kredsgraf er en snitkant.

(c) Hver kant i et træ (med 2 eller flere knuder) er en snitkant. \square

En adskillende kantmængde kan fås ved at dele knudemængden V i to dele, S og $\bar{S} = V \setminus S$, hvor S er en ikke-tom ægte delmængde af V , og betragte samtlige kanter fra en knude i S til en knude i \bar{S} ; en kantmængde af denne form er en adskillende kantmængde, og den betegnes $[S, \bar{S}]$ (den består altså af alle kanter i grafen mellem en knude i S og en knude i $\bar{S} = V \setminus S$).

Ikke alle adskillende kantmængder har denne form $[S, \bar{S}]$, for en ikke-tom ægte delmængde S af knudemængden; samlingen bestående af de tre kanter i en K_3 (eller C_3) er adskillende, men er ikke af formen $[S, \bar{S}]$ (for nogen delmængde S af knudemængden). Hvis $|V| \geq 2$ så har enhver minimal adskillende kantmængde $F \subseteq E$ formen $[S, \bar{S}]$: Når G med kanterne F fjernede har to eller flere sammenhængskomponenter, så tilhører alle kanter, der kun har én endeknude i en af disse komponenter, fx med knudemængde H , mængden F af fjernede kanter, og den adskillende kantmængde $[H, \bar{H}]$ er derfor indeholdt i F , og minimaliteten af F sikrer, at $F = [H, \bar{H}]$.

De to mål $\kappa(G)$ og $\kappa'(G)$ for graden af en grafs sammenhæng er beslægtede, men normalt ikke sammenfaldende. Der gælder dog en ulighed mellem dem, $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$, og begge er højst grafens minimale knudevalens, der betegnes $\delta(G)$.

Sætning. For enhver graf G gælder: $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Bevis. Hvis G er ikke-sammenhængende, eller hvis G er triviel, gælder $\kappa'(G) = \kappa(G) = 0$, altså den påståede ulighed. I det følgende betragtes derfor en sammenhængende ikke-triviel graf G , hvor altså $\delta(G) > 0$.

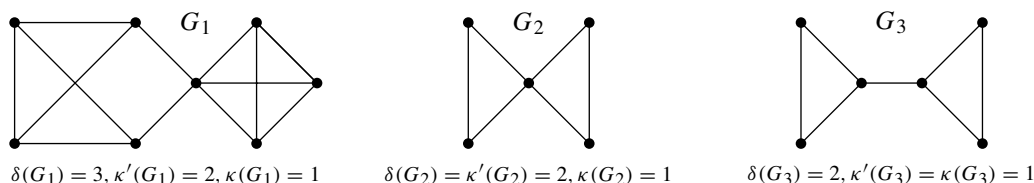
Uligheden $\kappa'(G) \leq \delta(G)$ er næsten umiddelbar: Lad nemlig u være en knude af minimal valens $k = \delta(G) > 0$; mængden af kanter, hvis ene endeknude er u , er da en adskillende kantmængde, bestående af k kanter, altså gælder: $\kappa'(G) \leq k$.

For uligheden $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ bemærkes først, at $\kappa(G) \leq |V|$ (dette er klart for alle ikke-komplette grafer, og $\kappa(K_n) = n - 1$ ifølge definitionen). For $|V| > 1$ betragtes en minimal adskillende kantmængde, der som nævnt har formen $[S, \bar{S}]$, for en passende ægte ikke-tom delmængde $S \subseteq V$, der består af $k := \kappa'(G)$ kanter. Hvis hver knude i S er kantforbundet til enhver knude i \bar{S} , gælder $k \geq |S| \cdot |\bar{S}| \geq |V| - 1$, og uligheden er opfyldt (uligheden: $m(n - m) \geq n - 1$ for $m = 1, 2, \dots, n - 1$).

Derfor betragtes tilfældet, hvor der findes $u \in S$ og $v \in \bar{S}$ som ikke er kantforbundne, altså $uv \notin E$. Det drejer sig om at finde en knudemængde på højst k knuder, der adskiller G . Hertil defineres knudemængden T på følgende måde: dels bestående af de knuder i \bar{S} , der er kantforbundne med u , dels de knuder fra $S \setminus \{u\}$ der er kantforbundne til knuder i \bar{S} . Denne knudemængde er et knudesnit, der efterlader u og v i hver sin komponent; endvidere består T af højst k knuder, nemlig højst én for hver kant i kantmængden $[S, \bar{S}]$.

(Idéen er i det væsentlige, at definere et knudesnit ved at vælge én endeknude fra hver kant i $[S, \bar{S}]$; det må dog gøres omhyggeligt, så det sikres at restgrafene *ikke* er sammenhængende, hvilket kunne indtræffe, fx hvis den ene komponent, der fås, når kantmængden $[S, \bar{S}]$ fjernes, består af netop én endeknude fra hver kant.) ■

Eksempler. Der gælder *ikke i almindelighed* lighedstegn i ulighederne i sætningen:



De sammenhængende grafer G_1, G_2, G_3 ovenfor har de anførte værdier af δ, κ' og κ . I G_1 og G_2 er kun midterknuden snitknude, i G_3 er begge endeknuderne på midterkanten snitknuder. I G_1 udgør de to kanter fra venstre til midterknuden en adskillende kantmængde, og alle andre adskillende kantmængder omfatter 3 eller flere kanter. I G_2 udgør to kanter til samme knude en adskillende kantmængde, pånær, hvis de er valgt på hver side af midterknuden, og der er ingen snitkanter i G_2 . I G_3 er kanten mellem de to midterknuder en snitkant. □

12.3 Blokke og blok/snitknude-grafen for en graf. Lad $G = (V, E)$ være en sammenhængende graf med en snitknude v . Fjernelse af v , og kanterne til v , giver en ikke-sammenhængende graf, og dermed en klassesdeling af $V \setminus \{v\}$, specielt af de knuder i G , der er kantforbundne til v , svarende til hvilken komponent af $G' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{\text{kanter til } v\})$, knuden tilhører. I flere forbindelser er der brug for at betragte delgrafer af formen: en sammenhængskomponent af G' suppleret med v , og de kanter, der i G forbinder v med knuder i den pågældende komponent af G' .

Dette synspunkt kan videreføres: Svarende til opdelingen af en graf i komponenter, altså maksimale sammenhængende delgrafer, giver opdeling af en sammenhængende graf (med en snitknude) i maksimale delgrafer uden snitknuder en nyttig strukturering af grafen.

Definition. Lad G være en sammenhængende graf med 2 eller flere knuder. En **blok** af G er en maksimal sammenhængende delgraf af G , der ikke har en snitknude. Hvis G ikke har en snitknude, så er G selv en blok.

En kant (med dens endeknuder) udgør en blok hvis og kun hvis den er en snitkant. For et træ er blokkene præcis kanterne (med deres endeknuder). Hvis en blok har 3 eller flere knuder er den 2-sammenhængende. Blokkene i en sammenhængende graf med 2 eller flere knuder, er dels dens snitkanter, dels dens maksimale 2-sammenhængende delgrafer. En kant, der indgår i en kreds, danner (med dens endeknuder) *ikke* en blok; kredsen udgør nemlig en sammenhængende delgraf uden en snitknude, og derfor tilhører alle kredsens kanter samme blok.

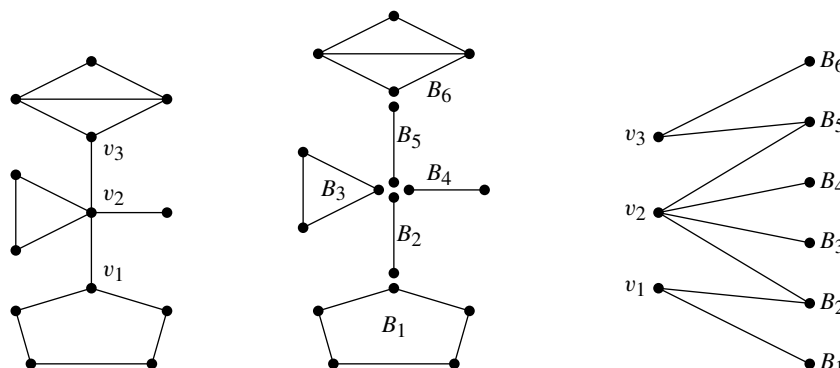
Lemma. Lad G være en sammenhængende graf med 2 eller flere knuder. To forskellige blokke i G har højst én knude fælles, og denne er i så fald en snitknude.

Bevis. Lad B_1 og B_2 være blokke af G , med 2 fælles knuder. Lad x være en vilkårlig knude i $B_1 \cup B_2$, og lad $y \in B_1 \cap B_2$ være en fælles knude så $y \neq x$; fjernelse af x fra B_i fører *ikke* til en ikke-sammenhængende delgraf, og derfor er enhver knude $\neq x$ i B_i forbundet til y via en vej i B_i , der *ikke* benytter x . Derfor er $(B_1 \cup B_2) - x$ sammenhængende, og $B_1 \cup B_2$ altså en delgraf, der *ikke* har en snitknude, hvilket medfører, at $B_1 = B_1 \cup B_2 = B_2$, da B_1 og B_2 er maksimale sammenhængende delgrafer uden snitknuder. Den sidste påstand er ligeledes en følge af blokkes maksimalitet (som sammenhængende delgrafer uden snitknuder). ■

Lemmaet viser, at blokkene af G definerer en klassesdeling af kanterne for G . Denne inddeling kan beskrives nærmere via en afledt graf:

Definition. Lad G være en sammenhængende graf med en snitknude. Den bipartite graf $bs(G)$, hvis ene knudemængde er blokkene for G , og hvis anden knudemængde er snitknuderne for G , og hvor en blok B er kantforbundet med en snitknude v , i grafen $bs(G)$, hvis snitknuden tilhører blokken, kaldes **blok/snitknude-grafen** for G .

Eksempel. Grafen nedenfor til venstre har den yderst til højre viste blok/snitknude-graf.



På tegningen til venstre er de 3 snitknuder betegnet v_1, v_2, v_3 , og tegningen i midten viser opdelingen af grafen i 6 blokke, betegnet B_1, B_2, \dots, B_6 , hvor hver snitknude er givet en separat kopi for hver af de blokke den tilhører. Tegningen til højre illustrerer den tilhørende bipartite blok/snitknude-graf. \square

Sætning. Blok/snitknude-grafen $bs(G)$ for en sammenhængende graf G med en snitknude er et træ.

Bevis. Dels er $bs(G)$ nemlig sammenhængende: vilkårlige to forskellige knuder u, v i $bs(G)$ (altså blokke eller snitknuder i G) er vejforbundne. I den følgende konstruktion antages, at u er en blok og v er en snitknude; for tilfældet af to blokke, eller to snitknuder, skal konstruktionen modificeres en smule. Lad v_1 betegne en vilkårligt valgt knude af blokken u . Der findes en vej fra v_1 til v (i G), fx af formen: $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n = v$. Ved heri at erstatte, 1) alle knuder indtil, men ikke med, den sidste snitknude på vejen, der tilhører startblokken, med u , 2) hvert segment af ikke-snitknuder med den blok som de pågældende knuder tilhører, og 3) hvert par v_i, v_{i+1} af to på hinanden følgende snitknuder i vejen, med v_i, b, v_{i+1} , hvor b betegner den blok som v_i, v_{i+1} tilhører, fås en vej i $bs(G)$ fra u til v .

Videre har $bs(G)$ ingen kredse: en sekvens $B_1, v_1, B_2, v_2, \dots, B_n, v_n$ af skiftevis blokke B_i og snitknuder v_i , hvori vilkårlige to på hinanden følgende, og også v_n og B_1 , er forbundne i blok/snitknude-grafen, er ikke mulig, da der i så fald ville fås en kreds i G ved at erstatte hver af blokkene B_i med en vej mellem snitknuderne v_{i-1} og v_i , for $i = 2, 3, \dots, n$, og mellem v_1 og v_n for $i = 1$. Som bemærket ovenfor, er hver (eventuel) kreds i G helt indeholdt i en blok. \blacksquare

Dette medfører specielt, at blok/snitknude-grafen for en vilkårlig sammenhængende, men ikke 2-sammenhængende graf er et ikke-trivielt træ, og derfor har mindst 2 knuder af valens 1 (bladblokke). (Alle de til snitknuder svarende knuder er indre knuder i træet!) Dette er en vigtig ingrediens i beviset for hovedsætningen om knudefarvning i næste kapitel.

12.4 Regulære grafer. I en række forbindelser mødes grafer, hvor alle knuder har samme valens, og det er praktisk at have en kort betegnelse for sådanne grafer.

Definition. En graf $G = (V, E)$ kaldes k -**regulær**, for et ikke-negativt helt tal k , såfremt alle knuder $u \in V$ har valens $\delta_u = k$.

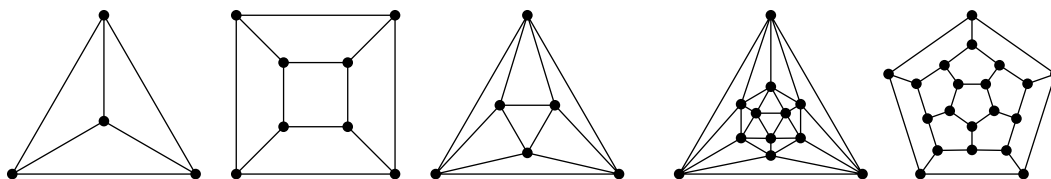
Eksempler 1. (a) En 0-regulær graf har ingen kanter, og den er altså tom.

(b) En 1-regulær graf $G = (V, E)$ består af et antal »løse« kanter, og der gælder $|V| = 2|E|$, specielt har den et lige antal knuder, og den eneste 1-regulære sammenhængende graf er K_2 .

(c) En 2-regulær graf har 3 eller flere knuder, og den er foreningsmængde af én eller flere kredsgrafer. (Dette indses via et spadsereargument.) En sammenhængende 2-regulær graf er dermed en kreds C_n , for et naturligt tal $n \geq 3$.

(d) For hver naturligt tal n er den komplette graf K_n med n knuder $(n - 1)$ -regulær.

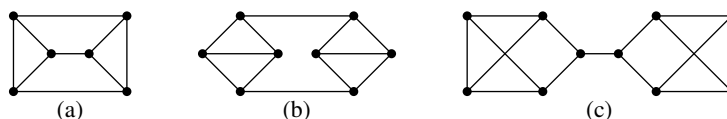
Eksempler 2. Tegningerne nedenfor viser graferne for de 5 *platoniske legemer*, dvs. de mulige *regulære polyedre* i rummet. Disse grafers knuder svarer til hjørnerne i de pågældende rumlige legemer, kanterne svarer til legemernes kanter, medens områderne i *tegneplanen* afgrænset af kanterne svarer til legemernes sideflader, dog med én af disse sideflader repræsenteret af det af samtlige kanter afgrænsede område (eller området udenfor grafen).



Den første er *tetraeder*-graf, med 4 knuder og 6 kanter; den er jo en K_4 . Den næste er *hexaeder*-graf, med 8 knuder og 12 kanter; den er bipartit. Midtergraf kaldes *octaeder*-graf, med 6 knuder og 12 kanter. Den fjerde er *icosaeder*-graf, med 12 knuder og 30 kanter. Den sidste er *dodekaeder*-graf, med 20 knuder og 30 kanter. De græske talord henviser til antallet af områder: tetra 4, hexa 6, octa 8, ikosa 20, og dodeka 12. \square

Opgaver

(12.1) Bestem for hver af nedenstående grafer G de tre størrelser: $\delta(G)$, $\kappa'(G)$, $\kappa(G)$, og angiv samtlige minimale knudesnit, og samtlige minimale kantsnit.



(12.2) Undersøg om der findes grafer, der er lig med, mere præcist er isomorfe med, deres blok/snitknode-graf.

(12.3) Vis, for en sammenhængende graf $G = (V, E)$, at antallet af snitknode er $\leq |V| - 2$.

(12.4) Vis, at en snitknode v , der tilhører en kreds, har valens $\delta_v > 2$.

(12.5) Hvilke grafer har et antal snitknode = $|V| - 2$?

(12.6) Bestem graderne af sammenhæng for Petersen-grafen.

(12.7) Angiv samtlige 3-regulære grafer, og samtlige 4-regulære grafer, med 6 knuder

(12.8) Bestem blok/snitknode-grafen for en 3-kreds, med en »strit«-kant monteret i hvert af de 3 hjørner.

Kapitel 13

Knudefarvning

I dette kapitel introduceres begrebet *knudefarvning*, der ligesom kantfarvning spiller en rolle for afklaringen af *4-farveproblemet*. Efter at have bevist et klassisk resultat om knudefarvning – *Brooks' sætning* – vises, at antallet af knudefarvninger af en graf med et givet antal farver k til rådighed, er et polynomium i k ; dette polynomium, der kaldes det *kromatiske polynomium* for grafen, rummer vigtig information om grafen, og det kan beregnes med en simpel *algoritme*.

13.1 Motivering – definitioner. Farvning af *knuderne* i en graf bruges (ligesom farvning af kanterne, se kapitel 11) som model for ressourceallokering. Til indledning et eksempel:

Eksempel. Antag, at en forelagt graf $G = (V, E)$ beskriver en *skemalægningsituation*, hvor mængden V af knuder kunne være *kurser*, og kanterne registrerer *deltagerbånd*, præcist med en kant mellem to kurser hvis og kun hvis de to kurser har en eller flere fælles deltagere, og derfor skal afholdes på disjunkte tidspunkter. Et naturligt spørgsmål i en sådan situation er, *hvor få tidspunkter skal der til for en kursusafholdelse, der respekterer deltagerbåndene?* Med farver i rollen af tidspunkter kan spørgsmålet formuleres som et farvningsproblem: *hvor få farver skal benyttes ved en farvning af knuderne i G , der giver kantforbundne knuder forskellige farver?*

Definition. En *knudefarvning* af en graf $G = (V, E)$ er en tildeling af farver til elementerne i knudemængden V ; en sådan knudefarvning siges at være **egentlig**, hvis vilkårlige to kantforbundne knuder $u, v \in V$, altså med $uv \in E$, har forskellig farve.

Det er næppe umagen værd at være meget formel hvad angår farver, og knudefarvning: farver er elementer i en farvemængde \mathcal{F} , typisk et afsnit af den naturlige talrække, og en knudefarvning er en afbildning $\varphi : V \rightarrow \mathcal{F}$ af grafens knudemængde V ind i \mathcal{F} , hvor $\varphi(v)$ er den til $v \in V$ givne farve. I praksis foregår knudefarvning af en graf – givet ved en tegning – ved at skrive farvenavne, eller farvenumre, ved grafens knuder. En knudefarvning bestemt ved en afbildning φ som ovenfor er egentlig, hvis $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ for alle $u, v \in V$, der opfylder $uv \in E$.

Det er kun egentlige knudefarvninger, der har interesse, og ofte glemmes/underforstås adjektivet *egentlig*. Det er klart, at der for en vilkårlig graf $G = (V, E)$ findes egentlige knudefarvninger: knudemængden V er jo endelig, og om ikke på anden måde fås en egentlig knudefarvning ved at give separate (forskellige) farver til knuderne. Den tomme graf (med knudemængde V), altså grafen uden kanter, kan naturligvis farves (egentligt) ved brug af en enkelt farve. En graf med kanter kræver mindst 2 farver i en knudefarvning. Et naturligt spørgsmål i forbindelse med (egentlige) knudefarvninger er, *hvor få farver en grafs knuder kan farves med?*

Definition. Det mindste antal farver i en egentlig knudefarvning af en graf $G = (V, E)$ kaldes det **kromatiske tal**, eller det **knudekromatiske tal**, for G , og det betegnes $\chi(G)$.

For en forelagt graf G består et bevis for, at $\chi(G) = k$, for et naturligt tal k , af to dele:

(1) et argument for, at der findes en egentlig knudefarvning af G med brug af k farver, typisk i form af en *konkret* knudefarvning af G , og

(2) et argument for, at der *ikke* findes en egentlig knudefarvning af G med $k - 1$ eller færre farver; denne del kan være ganske uoverskuelig, da jo i princippet alle mulige *farvningsforsøg* med $k - 1$ farver skal kontrolleres, og for hvert sådant godtgøres, at det *nødvendigvis* må mislykkes.

13.2 Eksempler på knudefarvning og kromatiske tal. (1) De *komplette grafer*. For et naturligt tal n har den komplette graf K_n med n knuder kromatisk tal $\chi(K_n) = n$. Da vilkårlige forskellige knuder u, v i K_n er kantforbundne, og derfor alle knuder i en egentlig knudefarvning af K_n har forskellige farver, skal der bruges mindst n farver, hvilket på den anden side, for en vilkårlig graf med n knuder, er nok til en egentlig knudefarvning.

(2) En graf $G = (V, E)$, der kan knudefarves med én farve, altså for hvilken $\chi(G) = 1$, har en tom kantmængde.

(3) *Kredse*. En kreds C_n bestående af et *lige* antal knuder (og kanter), kan knudefarves med 2 farver, men ikke med 1 farve (ifølge (2)). En egentlig knudefarvning i 2 farver fås ved simpelthen at lade de 2 farver alternere – bruges skiftevis – langs kredsen.

En kreds C_n bestående af et *ulige* antal knuder (og kanter), altså $n = 2m + 1$ for et naturligt tal m , kan knudefarves med 3 farver, men ikke med 2 farver, og har derfor kromatisk tal $= 3$. Betegnes knuderne $v_1, v_2, \dots, v_{2m+1}$, så kredsens kanter er $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{2m}v_{2m+1}, v_{2m+1}v_1$, så kan knuderne v_1, v_2, \dots, v_{2m} farves med 2 farver, blot ved at lade farverne alternere, dvs. farve 1, hvis knudens indeks er ulige, og farve 2, hvis knudens indeks er lige; denne farvning kan imidlertid kun udvides til en egentlig knudefarvning af alle kredsens knuder, ved brug af en ekstra tredje farve til knude v_{2m+1} , der jo er forbundet med såvel knude v_{2m} og knude v_1 , der har hver sin af de 2 første farver. Altså:

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{for } n \text{ lige,} \\ 3 & \text{for } n \text{ ulige.} \end{cases}$$

(4) En graf, der har kanter, er bipartit hvis og kun hvis dens kromatiske tal er 2.

Bevis. Antag først, at grafen er bipartit. Farves knuderne i den ene todelingsmængde med farve 1 og knuderne i den anden med farve 2 fås en egentlig knudefarvning, da alle kanter har endeknuder i hver sin todelingsmængde. Hvis omvendt grafen kan knudefarves med 2 farver fås en knudetdeling, der respekterer kanterne, ved at dele knuderne efter farven; med denne knudeopdeling har en vilkårlig kant endeknuder i forskellige dele på grund af knudefarvningen. ■

Det følger, at alle træer, pånær det tomme, og specielt alle vejgrafer, har kromatisk tal $= 2$; disse grafer er jo bipartite.

(5) Hvis en graf H er delgraf af G så gælder: $\chi(H) \leq \chi(G)$. Dette er klart, da en egentlig knudefarvning af G ved *restriktion* (brug samme farve på en knude fra H som den blev givet opfattet som knude i G ; enhver kant mellem 2 knuder i H er jo også kant i G) giver en egentlig knudefarvning af H . Som typisk anvendelse af denne observation nævnes, at en graf G , der har en delgraf af *type* K_n , for et naturligt tal n , har kromatisk tal $\chi(G) \geq n$; en graf, der indeholder en K_3 (en 3-kreds), dvs. 3 knuder u, v, w med kanterne uv, uw og vw , har kromatisk tal ≥ 3 . Tilsvarende er det kromatiske tal ≥ 3 for en graf, der indeholder en kreds af ulige længde.

(6) Et *hjul* G med $n \geq 3$ eger har $\chi(G) = 3$, når n er *lige*, og $\chi(G) = 4$, når n er *ulige*. Fælgknuderne kan når n er lige farves egentligt med 2 farver, og en tredje farve er nødvendig til navknuden, der sammen med 2 på hinanden følgende fælgknuder danner en K_3 . Når n er ulige udgør fælgen en kreds af ulige længde, og den kan derfor farves egentligt med 3 farver, men ikke med 2; navknuden er forbundet til alle fælgknuderne og kan derfor ikke farves med disses farver.

(7) I en graf G med 2 eller flere sammenhængskomponenter kan knuderne i hver sådan knudefarves uafhængigt af knuderne i enhver anden sammenhængskomponent, og derfor gælder, hvis G_1, G_2, \dots, G_m betegner komponenterne

$$\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \dots, \chi(G_m)\}.$$

(8) En permutation af farverne i en egentlig knudefarvning giver en egentlig knudefarvning. □

13.3 Brooks' sætning – opvarmning. Eksemplerne ovenfor antyder en forbindelse mellem knudekromatisk tal $\chi(G)$ og maksimal knudevalens, som betegnes $\Delta(G)$, for en graf G ; denne forbindelse er dog noget mere sofistikeret end den forbindelse mellem kantkromatisk tal $\chi'(G)$ og maksimal knudevalens, der udtrykkes af *Vizings sætning*, se kapitel 11.

I almindelighed er $\chi(G) \leq \Delta(G)$, og uligheden her er ofte opfyldt med skarpt ulighedstegn, endda med $\chi(G)$ meget mindre end $\Delta(G)$, som fx for et hjul med mange eger. Der er dog to familier af undtagelsesgrafer, dels *komplette grafer*, dels *kredse af ulige længde*, hvis knudekromatiske tal er $= \Delta(G) + 1$. Det præcise resultat skyldes *Brooks* (1941):

Sætning. *Lad $G = (V, E)$ være en sammenhængende graf. Hvis $G = K_n$ for et naturligt tal n , hvor $\Delta(K_n) = n - 1$, eller hvis $G = C_n$, for et ulige naturligt tal $n \geq 3$, hvor $\Delta(C_n) = 2$, så gælder $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. I alle andre tilfælde gælder: $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Knudefarvning af en graf kan som nævnt foregå i hver sammenhængskomponent af grafen uafhængigt af knudefarvningen i andre sammenhængskomponenter. Forudsætningen, at den forelagte graf er sammenhængende, tjener til det præcise udsagn, at der kun er de to nævnte klasser af undtagelsesgrafer.

Der er i tidens løb givet adskillige beviser for Brooks' sætning – naturligvis ikke for at være ekstra sikker på rigtigheden af påstanden – men med forskellig teoretisk fundering. Næste afsnit gennemgår et bevis, hvis hovedstruktur skyldes *Lovász* (1975). Her gives diverse »opvarmning«, der – det håber jeg – hjælper til at se, »hvad sagen drejer sig om«!

For de komplette grafer, og for kredse uanset lige/ulige længde, er knudefarvning afklaret ovenfor. Det drejer sig derfor om at indse, at en forelagt *sammenhængende* graf, der *ikke* er komplet, og *heller ikke* er en kreds, kan knudefarves med $\Delta(G)$ (eller færre) farver. Argumentet for dette er næsten en *opskrift* på konkret udførelse af en knudefarvning. Lad os prøve at se »hvor svært det kan være«! Den første indskydelse er vel at forsøge at farve knuderne fra en ende af, ved så vidt muligt at sørge for, at der i hvert skridt, for hver næste knude $v \in V$, er en ledig farve, dvs. en farve, der ikke er benyttet på allerede farvede naboknuder til v . Dette kan for visse grafer gøres nogenlunde let med $\Delta(G)$ farver.

Lemma. *En sammenhængende graf $G = (V, E)$, for hvilken der findes en knude $u \in V$, hvis valens er $< \Delta(G)$ (grafens er dermed hverken en kreds eller en komplet graf) har en egentlig knudefarvning i $\Delta(G)$ farver.*

Bevis. Lad $u \in V$ være valgt af valens $< \Delta(G)$. Idet $n = |V|$ betegner antallet af knuder indiceres disse knuder u_1, u_2, \dots, u_n , med $u_n = u$, efter aftagende afstand til knude u (afstanden fra $v \in V$ til u er længden af en korteste vej mellem u og v ; en sådan eksisterer fordi grafen er sammenhængende); u_1 er således en knude af maksimal afstand til u ; u_2 en knude af maksimal afstand til u blandt de resterende. I tilfælde hvor flere knuder har samme afstand til u vælges blot én af dem. Den afgørende egenskab ved en sådan indicering er, at hver knude u_i , for $i < n$, har en højere indiceret naboknude, fx den foregående knude på vejen fra u_i tilbage mod u .

Nu farves efter den valgte indicering. For $i = 1, 2, \dots, n - 1$ vælges en farve til u_i blandt de $\Delta(G)$ mulige; da valensen af u_i er $\leq \Delta(G)$, og da u_i er forbundet med mindst én knude af højere indeks (som derfor endnu ikke er tildelt en farve) er højst $\Delta(G) - 1$ af farverne benyttet på allerede farvede naboknuder til u_i , og der er således mindst én ledig farve (ledig i henseende til, at kantforbundne knuder tildeles forskellige farver); denne farve benyttes på u_i . Således farves u_1, u_2, \dots, u_{n-1} ; valget af knude $u_n = u$, som en knude af valens $< \Delta(G)$ sikrer på tilsvarende måde, at der er en ledig farve til u_n . ■

Bemærkning. Farvningsmetoden i lemmaet ovenfor er et eksempel på en såkaldt »grådig« algoritme; denne betegnelse henviser til, at der i hvert skridt vælges den første ledige farve, uden at tage hensyn til eventuelle besværligheder for fremtidige farvevalg – disse er dog imødegået via

det indledende valg af knude som udgangspunkt for indiceringen. På samme grådige måde fås, via en indicering efter aftagende afstand til en *vilkårlig* knude i G :

Enhver sammenhængende graf G har en egentlig knudefarvning i $\Delta(G) + 1$ farver.

Tricket i lemmaet, at knudefarve hen mod en knude af valens $< \Delta(G)$, tager højde for det problem, der opstår »når man maler sig op i en krog«. En tilsvarende idé bærer beviset generelt.

13.4 Brooks' sætning – bevis. Beviset for Brooks' sætning, der følger nedenfor, er i princippet en anvisning til udførelse af en egentlig knudefarvning.

En vigtig egenskab ved kredse, og komplette grafer med 3 eller flere knuder, er, at ingen enkelt knude »bærer« grafens sammenhæng. Mere præcist: ved at fjerne en enkelt knude, og kanterne til den, fra en sådan graf, efterlades en sammenhængende restgraf. Beviset forgrener sig efter den forelagte grafs grad af sammenhæng, og på grund af lemmaet i det foregående afsnit, er det blot tilfældet af *regulære* grafer (alle knuder har samme valens $= \Delta(G)$), der mangler behandling.

Hovedidéen i beviset er en skærpelse af den grådige knudefarvningsmetode fra lemmaet. For en regulær graf er det naturligvis *umuligt* at finde en knude af valens $< \Delta(G)$, men i mange tilfælde (tilstrækkeligt mange) findes en lige så nyttig erstatning.

Lemma. *En sammenhængende graf $G = (V, E)$, for hvilken der findes tre forskellige knuder $u, w, v \in V$, der opfylder de to betingelser:*

a) *knuden w har kanter til både u og v , men u og v er ikke kant-forbundne, og*

b) *restgraften $G' = (V \setminus \{u, v\}, E \setminus \{\text{kanter til } u, v\})$ er sammenhængende,*

har en egentlig knudefarvning i $\Delta(G)$ farver.

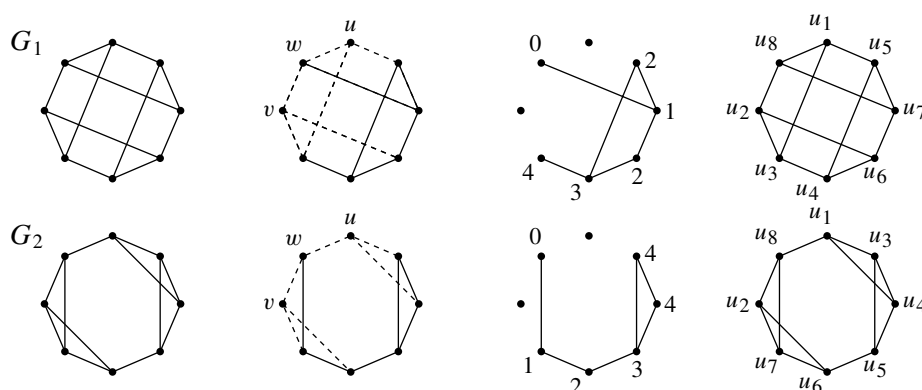
Bevis. Lad $u, w, v \in V$ være valgt så betingelserne a) og b) er opfyldt. Knuderne i grafen indiceres $u_1, u_2, \dots, u_n = w$, hvor n er antallet af knuder, på følgende måde. De første to er de valgte naboknuder til w , fx $u_1 = u$ og $u_2 = v$; de øvrige knuder indiceres efter *aftagende afstand* til knude w , men vel at mærke: afstand målt i den sammenhængende graf G' , hvor knuderne u og v , samt kanterne til u, v er fjernede fra G (afstanden er længden af en korteste vej mellem de to knuder; grafen G' er sammenhængende som følge af valget af u, v, w); u_3 er således en knude af maksimal afstand til w (i G'); u_4 en knude af maksimal afstand (i G') til w blandt de resterende. I tilfælde hvor flere knuder har samme afstand til w vælges blot én af dem. Den afgørende egenskab ved en sådan indicering er, at der for hver knude u_i , hvor $i < n$, findes en højere indiceret naboknude, fx den foregående knude på vejen fra u_i tilbage mod w gennem grafen G' (dette gælder også for u_1 og u_2).

Nu farves i knuderne i G i den valgte knuderækkefølge (grafene G' bruges ikke mere), og der startes med tricket. Ifølge valget af u, v, w er $u_1 = u$ og $u_2 = v$ ikke kantforbundne, og de tildeles begge farve 1. For $i = 3, 4, \dots, n - 1$ vælges den »første« ledige farve til u_i blandt de $\Delta(G)$ mulige; da valensen af u_i er $= \Delta(G)$, og da u_i er forbundet med mindst én knude af højere indeks (denne har derfor endnu ikke fået tildelt en farve) er højst $\Delta(G) - 1$ af farverne benyttet på allerede farvede naboknuder til u_i , og der er således mindst én ledig farve (ledig i henseende til, at kantforbundne knuder tildeles forskellige farver); denne farve benyttes på u_i . Således farves u_1, u_2, \dots, u_{n-1} ; valget af samme farve til de to naboknuder til knude $u_n = w$ sikrer på tilsvarende måde, at der er en ledig farve til u_n . ■

Pointen i lemmaet er, at en knude w med to naboer, der *ikke* er indbyrdes kantforbundne, udgør en »krog«, hvortil der uden problemer kan males op med brug af $\Delta(G)$ knudefarver. Det tilrådes at gennemarbejde nogle substantielle eksempler på knudefarvning under brug af metoden i lemmaet. Her er et par simple eksempelgrafer (flere følger beviset for Brooks' sætning).

Eksempel 1. Tegneserien viser, fra venstre mod højre, en 3-regulær graf G_1 , med 8 knuder, de kanter (vist stiplede), der skal fjernes fra G_1 for at give delgraften G' , efter valg af et triplet u, w, v ,

der opfylder betingelserne fra lemmaet, grafen G' med knudernes afstand til w angivet, og sidst den tilsvarende indicering af knuderne i G_1 , der benyttes til successiv knudefarvning.



Den anden billedserie viser et eksempel mere på en 3-regulær graf G_2 , med 8 knuder, og tilsvarende behandling. \square

Bevis for Brooks' sætning. Lad nu $G = (V, E)$ være en sammenhængende og regulær graf, der ikke er en kreds og heller ikke er en komplet graf. Dette medfører specielt, at valensen af knuderne i G , altså $\Delta(G)$, opfylder $\Delta(G) \geq 3$.

Tilfælde 1. Antag yderligere om G , at der findes en snitknude, dvs. en knude $v \in V$, hvis fjernelse (med de kanter, der har den som endeknude) giver en ikke-sammenhængende graf G' .

Der konstrueres en række delgrafer af G , hver bestående af en sammenhængskomponent af G' , suppleret med de kanter, der går fra den pågældende sammenhængskomponent af G' til snitknuden v , samt en »kopi« af v for hver sammenhængskomponent (se eksemplet nedenfor); disse hjælpegrafer er ikke regulære: valensen af kopien af v har lavere valens end de andre knuder; derfor kan hver af hjælpegraferne farves (egentligt) med brug af $\Delta(G)$ farver, via lemmaet i det foregående afsnit, og knudefarvningerne af delgraferne kan tilrettelægges, eventuelt via en permutation af farverne, så kopien af v tildeles samme farve i alle hjælpegraffarvningerne, der derfor sammenstykker til en egentlig knudefarvning af den givne graf med $\Delta(G)$ farver.

Tilfælde 2. Her antages grafen G at være 2-sammenhængende, men ikke 3-sammenhængende; der findes derfor et knudesnit i G på to knuder, og w vælges som en knude, hvortil der findes en anden knude w' , som sammen med w udgør et knudesnit i G . Nu betragtes den sammenhængende hjælpegraf: $G' = (V \setminus \{w\}, E \setminus \{\text{kanter til } w\})$, altså G med w , og kanterne til w , fjernede.

Blok/snitknude-grafen for G' er et ikke-trivielt træ, derfor med mindst to knuder af valens 1, altså »bladblokke« (disse har præcis en snitknude), der hver indeholder mindst én knude (forskellig fra blokkens snitknude), som er kantforbundet til w i den oprindelige graf. (Hvis ingen knude i en endeblok er kantforbundet til w i G er bladblokkens snitknude (i G') faktisk snitknude i G , hvilket er umuligt da G er 2-sammenhængende.) Nu vælges u og v som naboknuder til w i to forskellige endeblokke i blok/snitknude-grafen, og dermed er u, w, v et tripel, der opfylder betingelserne a) og b) fra lemmaet. At restgrafen efter fjernelse af u, v , og kanterne til u, v er sammenhængende følger af, at valensen af w er ≥ 3 .

Lemmaet giver dermed den ønskede egentlige knudefarvning af G i $\Delta(G)$ farver.

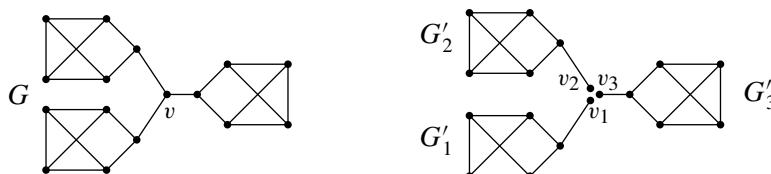
Tilfælde 3. Grafen antages her 3-knudesammenhængende, altså med egenskaben, at restgrafen efter fjernelse af vilkårlige to (forskellige) knuder er sammenhængende. I så fald findes tre knuder u, v, w i grafen, som opfylder betingelserne a) og b) fra lemmaet.

Lad nemlig u, v' være valgt så $uv' \notin E$ (grafens er ikke komplet), og vælg en korteste vej fra u til v' (G er sammenhængende); en sådan vej har længde ≥ 2 , og betegner u, w, v de tre første knuder på vejen gælder, at $uw, wv \in E$ og $uv \notin E$ (hvis u og v er kantforbundne findes en kortere

vej fra u til v' , nemlig den, der »springer over« w). Videre er restgrafen dannet ved fjernelse af u , v , og kanterne til u , v , sammenhængende, fordi G er forudsat 3-sammenhængende.

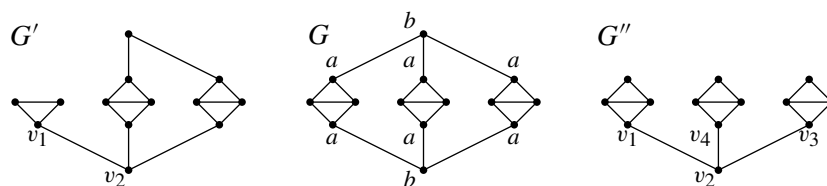
Lemmat giver dermed igen den ønskede egentlige knudefarvning af G i $\Delta(G)$ farver. ■

Eksempel 2. Eksemplerne her illustrerer fremgangsmåden i beviset for tilfældene 1 og 2 (eksempelgrafen G_1 i det foregående eksempel 1 belyser tilfælde 3, og grafen G_2 i eksempel 1 er et yderligere eksempel på tilfælde 2). Grafen G nedenfor til venstre er 3-regulær, og den har en snitknode (faktisk har den 4 sådanne). Vælges én af dem, v , som udgangsknode for konstruktionen for tilfælde 1 fås de tre delgrafer G'_1 , G'_2 , og G'_3 vist til højre



Nedenstående graf G (i midten) er 3-regulær, og 2-sammenhængende, men *ikke* 3-sammenhængende. Kandidaterne for valget af en knude w , der sammen med en anden knude udgør et 2-knudesnit, er de 6 knuder mærket a , og de 2 knuder mærket b .

Konstruktionen forløber som vist til venstre når den første a -knode tages som udgangsknode w , medens konstruktionen baseret på den øverste b -knode (som w) er vist til højre.



Grafen G' til venstre har en blok/snitknode-graf med de to snitknuder v_1 , v_2 og tre blokke, » K_2 -grafen bestemt ved v_1 , v_2 «, »trekanten over v_1 « inklusiv knuden v_1 , og »knuder og kanter i højre side over v_2 « inklusive knuden v_2 ; de to sidstnævnte blokke er bladblokkene.

Grafen G'' til højre har en blok/snitknode-graf med de fire snitknuder v_1 , v_2 , v_3 , v_4 og seks blokke, dels tre » K_2 -grafer« bestemt ved v_1 , v_2 , henholdsvis v_2 , v_4 , og v_2 , v_3 , dels de tre »firkant med diagonal« over snitknuderne v_1 , henholdsvis v_4 , og v_3 , disse tre inklusive snitknuderne; de tre sidstnævnte blokke er bladblokkene. □

13.5 Antal knudefarvninger med k farver. I de følgende afsnit anlægges et nyt synspunkt på knudefarvning. I stedet for at spørge om antallet af farver en egentlig knudefarvning har behov for, spørges nu om, givet et antal, fx k farver (k et helt tal ≥ 0), *hvor mange forskellige egentlige knudefarvninger af den forelagte graf kan udføres med disse k farver til rådighed?* Det kræves *ikke*, at alle k farver indgår i knudefarvningen, dvs. optræder som knudefarver. En K_2 -graf, dvs. en graf med 2 knuder, og kanten mellem dem, kan med k farver knudefarves på $k(k-1)$ måder, nemlig den ene knude på k måder, og for hver af disse, den anden knude på $k-1$ måder.

Hovedresultatet er, at for hver graf G findes et *polynomium* $p_G(x)$, der her fungerer som et beregningsudtryk knyttet til grafen G , således, at *antallet* af knudefarvninger af G med brug af k farver, er værdien $p_G(k)$ af polynomiet i tallet k . Vi starter med at undersøge knudefarvningsantallet for nogle konkrete grafer.

Lemma. For hvert helt tal $k \geq 0$ er antallet af egentlige knudefarvninger af den komplette graf K_n , med k farver til rådighed, k i n 'te faldende, altså $k^n = k(k-1)(k-2) \dots (k-n+1)$.

Bevis. Idet v_1, v_2, \dots, v_n betegner knuderne i K_n er der med ialt k farver til rådighed, k muligheder for valg af farve til v_1 , og for hver af disse er der $k-1$ muligheder for valg af farve til v_2 ; da

der er en kant mellem v_1 og v_2 skal disse knuder farves forskelligt (i en egentlig knudefarvning). For hver af de $k(k-1)$ mulige farvninger af v_1, v_2 er der $k-2$ muligheder for valg af farve til v_3 , fordi v_3 er forbundet til såvel v_1 som til v_2 , der er indbyrdes forbundne og derfor har forskellige farver. Således fortsættes: For $j < n$ er der $k(k-1) \dots (k-j+1)$ farvninger af v_1, v_2, \dots, v_j , og for hver af disse er der $k-j$ muligheder for valg af farve til v_{j+1} ; farven til v_{j+1} skal være forskellig fra farverne på alle de j »allerede farvede« knuder, der har forskellige farver. ■

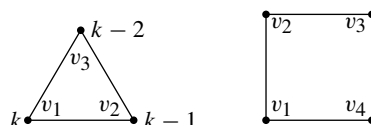
Observation. Lad n være et naturligt tal. For hvert helt tal $k \geq 0$ er antallet af egentlige knudefarvninger af et træ med n knuder, med k farver til rådighed, $k(k-1)^{n-1}$.

Bevis. Dette vises ved induktion efter n . Et træ med $n = 1$ knude kan med k farver knudefarves på k måder som påstået.

Betragt nu et træ T med $n > 1$ knuder, og antag – dette er induktionsantagelsen – at alle træer med $n-1$ knuder, med k farver til rådighed, kan knudefarves på $k(k-1)^{(n-1)-1}$ måder. Da T er et træ med 2 eller flere knuder så findes en knude i T , der har valens 1; lad u betegne en sådan knude. Ved at fjerne knuden u , og kanten uv ($v \in V$), med u som ene endeknude, fra træet T , fås (dette trick er benyttet mange gange) et træ T' , med $n-1$ knuder. Enhver af de $k(k-1)^{(n-1)-1} = k(k-1)^{n-2}$ egentlige knudefarvninger af T' med k farver til rådighed (induktionsantagelsen) kan *udvides* til en egentlig knudefarvning af T ved at farve u med en fra farven i v forskellig farve, altså på $k-1$ måder, hvilket giver påstanden. ■

For såvel de komplette grafer som for træer kan knudefarvningen foretages »fra en ende af«: fra en vilkårlig (tilfældet K_n), eller en passende (for træer), valgt rækkefølge af knuderne kan antallet af farvemuligheder ved skridtvis farvning let overskues. Dette er imidlertid *ikke* tilfældet i almindelighed.

Eksempel. Ved konkret knudefarvning af en graf er det ofte en hjælp at »mærke« knuderne med antallet af farvemuligheder ved en passende skridtvis farvetildeling. Figuren til venstre viser dette for $C_3 = K_3$, der omfattes af lemmaet ovenfor: antallet af knudefarvninger med k farver er produktet af k -udtrykkene anført ved knuderne, altså her: $k(k-1)(k-2)$.

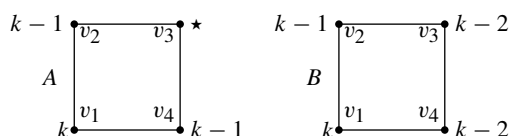


Den tilsvarende idé til knudefarvning møder vanskeligheder for C_4 -graften vist til højre. Ganske vist kan det siges, at der er k muligheder for farvning af v_1 , for hver af disse, $k-1$ muligheder for v_2 , for hver af disse $k(k-1)$ muligheder for farvning af v_1 og v_2 , $k-1$ muligheder for v_3 ; men *nu går det galt!* Antallet af farvningsmuligheder af v_4 *afhænger* nemlig af om v_1 og v_3 har samme farve (i så fald er der $k-1$ muligheder for farve til v_4), eller om v_1 og v_3 har forskellige farver (i så fald er der $k-2$ muligheder for farve til v_4).

En mere robust optælling af farvningsmulighederne, der faktisk udgør princippet i beviset for sætningen nedenfor, fås ved at basere optællingen på en typedeling af de egentlige knudefarvninger i to typer: den første type knudefarvninger af C_4 benytter samme farve på v_1 og v_3 (to ikke forbundne knuder), medens den anden type tildeler to forskellige farver til v_1 og v_3 . Det er klart, at denne opdeling giver en disjunkt deling af samtlige knudefarvninger, og summen af antallene for de to typer er derfor det søgte antal; antallet af farvninger af hver af de to typer kan nogenlunde let findes ved at overveje antal farvemuligheder i hver knude, og multiplicere disse.

Figuren A til venstre illustrerer optællingen for knudefarvninger af den første type. Med k muligheder for farve til v_1 (og implicit dermed også til v_3 , markeret med \star), er der for hver af disse, $k-1$ muligheder i v_2 , og for hver af de $k(k-1)$ muligheder for v_1, v_2 og v_3 , er der $k-1$

muligheder for v_4 (hvor kun den ene farve, der er benyttet på v_1 og v_3 , er ikke-anvendelig). Antallet af knudefarvninger af den første type er derfor produktet: $k(k-1)(k-1)$.



Optællingen af knudefarvninger af den anden type foregår som skitseret på figuren B til højre. Med k muligheder for farve til v_1 , og for hver af disse, $k-1$ muligheder for farve til v_2 ; for hver af de $k(k-1)$ muligheder af farver til v_1, v_2 er der netop $k-2$ farvemuligheder for v_3 , fordi såvel farven benyttet i v_2 , som farven i v_1 skal undgås (den første på grund af kanten v_2v_3 , den anden fordi der her tælles knudefarvninger af den anden type, hvor v_1 og v_3 har forskellige farver); tilsvarende er der nu for hver af de $k(k-1)(k-2)$ farvninger af v_1, v_2, v_3 , præcis $k-2$ muligheder for farve til v_4 . Farverne benyttet i knuderne v_1 og v_3 , der i den aktuelle optælling er forskellige, skal begge undgås. Antallet af knudefarvninger af den anden type er derfor: $k(k-1)(k-2)(k-2)$.

Samlet er antallet af knudefarvninger af C_4 med k farver til rådighed altså:

$$k(k-1)(k-1) + k(k-1)(k-2)(k-2) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3). \quad \square$$

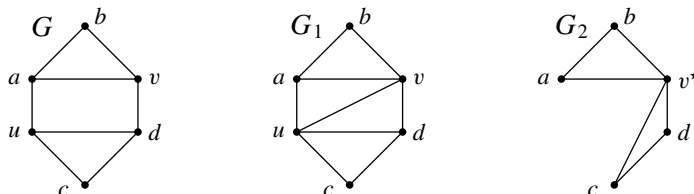
13.6 Kanttilføjelse og knudesammentrækning. I alle de hidtil betragtede situationer er antallet af knudefarvninger af den forelagte graf, med k farver til rådighed, lig med værdien i tallet k af et fra grafen beregnet *polynomium*. Dette gælder generelt, se sætningen i næste afsnit, men inden dette resultat bevises, indføres en abstrakt konstruktion, der i »strømlinet« form svarer til tællemetoden i C_4 -eksemplet ovenfor.

En graf $G = (V, E)$, der **ikke** er den komplette graf på sin knudemængde, giver for hvert valg af **to knuder** $u, v \in V$ ($u \neq v$), **der ikke er kantforbundne**, anledning til **to afledte grafer**.

Den ene er G med **kanten uv tilføjet**, altså $G_1 = (V, E \cup \{uv\})$.

Den anden fås af G ved at **sammentrække knuderne u og v** ; dens knudemængde kan beskrives $(V \setminus \{u, v\}) \cup \{v^*\}$, altså med u og v fjernede og erstattet af en enkelt knude v^* , der **fungerer som den knude u og v sammentrækkes i**, og dens kantmængde består dels af kanterne fra E , der ikke har u eller v som endeknude, dels af kanter wv^* for hver knude $w \in V \setminus \{u, v\}$, der i G er kantforbundet til enten u eller v , eller til begge.

Eksempel. Grafen $G = (V, E)$ vist nedenfor til venstre har knudemængde a, b, c, d, u, v , og knuderne u og v er ikke kantforbundne.



Den første afledte graf G_1 er vist i midten: den fås ved at tilføje kanten uv . Den anden afledte graf G_2 er vist til højre; den har den »nye« knude v^* på samme relative plads som v i G (og man kan tænke på v^* som en ny udgave af v). Kanterne i G_2 mellem to af de oprindelige knuder fra G er som i G , dvs. kanterne ab, cd , og kanterne i G_2 med v^* ($= v = u$) som endeknude er af formen wv^* , hvor wv , eller wu (eller begge) er kanter i G . Med en »lidt barnlig« – men, det håber jeg, suggestiv – formulering, kan G_2 beskrives som resultatet af at flytte u oven i v , og trække kanterne i G til u over som kanter til v (med »elastiske« kanter); dette kan give **dobbeltkanter**, fx giver kanterne au, av i G begge kanten av^* i G_2 , og tilsvarende giver ud, vd begge v^*d ; med »de elastiske kanter« opfattes eventuelle dobbeltkanter til v^* blot som en enkelt kant! \square

Pointen med denne konstruktion er at kunne opdele egentlige knudefarvninger af G i to typer, for separat optælling: dels knudefarvninger, hvor u og v har forskellige farver, dels sådanne, hvor u og v har samme farve. Hver egentlig knudefarvning af den første type bestemmer (den er!) en egentlig knudefarvning af G_1 (kravet til egentlighed er jo, at kantforbundne knuder har forskellige farver: dette er givet for alle andre knudepar end u, v , fordi knudefarvningen af G er egentlig, og gælder også for u, v , fordi der betragtes en knudefarvning af G , hvor u og v har forskellige farver); omvendt bestemmer enhver egentlig knudefarvning af G_1 en egentlig knudefarvning af G (samme farvetilordning): dette er klart. Hver egentlig knudefarvning af G af den anden type, hvor altså u og v har samme farve bestemmer (se bort fra den fælles farve på u og v , og benyt denne farve på v^*) en egentlig knudefarvning af G_2 ; omvendt fås fra en given egentlig knudefarvning af G_2 en egentlig knudefarvning af G , hvor u og v har samme farve, altså af den anden type (her benyttes farverne fra alle andre knuder end v^* direkte på de tilsvarende knuder i G , medens farven fra v^* benyttes på såvel u som v , hvilket *ikke* ødelægger egentlighed).

13.7 Kromatisk polynomium. På forhånd er det ikke klart, at antallet af knudefarvninger af en forelagt graf G er givet ved et beregningsudtryk af polynomiumsform. Men:

Sætning. Lad $G = (V, E)$ være en graf. Der findes et polynomium $p_G(x)$, så antallet af egentlige knudefarvninger af G , med k farver til rådighed er givet ved: $p_G(k)$, for hele ikke-negative tal k . (Betegnelsen $p_G(x)$ skal minde om, at dette polynomium afhænger af grafen G .)

Bevis. Der benyttes induktion med en lidt usædvanlig induktionsparameter. Lad $n = |V|$ være antallet af knuder i G ; antallet af kanter, $|E|$, opfylder så ulighederne: $0 \leq |E| \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, og induktionen føres efter, hvor mange kanter G mangler i at være den komplette graf på sin knudemængde; dette antal er givet ved størrelsen $m := \binom{n}{2} - |E|$, der altså ligger mellem 0 (for den komplette graf på de n knuder) og $\binom{n}{2}$ (for den tomme graf på de n knuder).

Ydermere er der tale om en form for induktion, hvor induktionspåstanden udtaler sig om *alle* grafer, altså uanset antallet af knuder, nemlig, at antallet af knudefarvninger med k farver til rådighed ($k \geq 0$ helt tal) er et polynomium i k . Undervejs i argumentet udnyttes denne påstand for diverse afledte grafer, med andre knudeantal og andre kantantal.

Induktionens start. Ifølge lemmaet i afsnit 13.5 gælder for de komplette grafer, med n knuder, at antallet af knudefarvninger i k farver er k^n , der jo er et polynomium i k (for ethvert naturligt tal n). Dermed gælder for alle naturlige tal n , og for $m = 0$, at en graf med n knuder, med et kantantal, der opfylder $0 = \binom{n}{2} - |E|$, at antallet af knudefarvninger i k farver er et polynomium i k .

Betragt nu en graf $G = (V, E)$ med $n = |V|$ knuder, og kantantal $|E|$ så $m = \binom{n}{2} - |E| > 0$. Induktionsantagelsen er følgende:

For enhver graf $H = (W, F)$ hvis antal kanter $|F|$ opfylder $\binom{|W|}{2} - |F| < m$ gælder, at antallet af knudefarvninger af H med k farver til rådighed er et polynomium $p_H(x)$ udregnet i k .

Antagelsen om G , at den *ikke* er den komplette graf på sin knudemængde, giver, at der findes knuder, fx $u, v \in V$, som *ikke* er kantforbundne. Disse benyttes som udgangspunkt for konstruktionen af de to afledte grafer som i afsnit 13.6, og G_1 betegner den afledte graf hvor kanten uv mellem u og v er tilføjet, medens G_2 betegner den afledte graf med u og v trukket sammen.

Der er som nævnt en bijektiv korrespondance mellem egentlige knudefarvninger af G , hvor u og v har forskellige farver, og egentlige knudefarvninger af den afledte graf G_1 , og tilsvarende en bijektiv korrespondance mellem egentlige knudefarvninger af G , hvor u og v har samme farve, og egentlige knudefarvninger af den afledte graf G_2 .

Det er klart, at grafen G_1 mangler $m - 1$ kanter i at være den komplette graf på sin knudemængde; derfor giver induktionsantagelsen, at antallet af egentlige knudefarvninger af G_1 med k farver til rådighed, er af formen $p_{G_1}(k)$, for et polynomium $p_{G_1}(x)$.

Også grafen G_2 mangler færre ($<$) end m kanter i at være den komplette graf på sin knudemængde (der består af $n - 1$ knuder). Dette kræver dog et argument: betragt to forskellige knuder w, w' i G_2 , og antag, at de ikke er kantforbundne i G_2 ; så er de tilsvarende knuder heller ikke kantforbundne i G (hvis den ene af disse knuder er v^* svarer der til den ene manglende kant i G_2 faktisk to manglende kanter i G); desuden er heller ikke u og v kantforbundne i G . Dermed er der for hver manglende kant i G_2 mindst én manglende kant i G , og tillige mangler også forbindelsen mellem u og v . Derfor giver induktionsantagelsen også i dette tilfælde, at antallet af egentlige knudefarvninger af G_2 med k farver til rådighed, er af formen $p_{G_2}(k)$, for et polynomium $p_{G_2}(x)$.

Sammenfattende er antallet af knudefarvninger af G med k farver til rådighed summen af de to polynomiumsudtryk: $p_{G_1}(k)$ og $p_{G_2}(k)$, altså selv et polynomiumsudtryk som påstået. ■

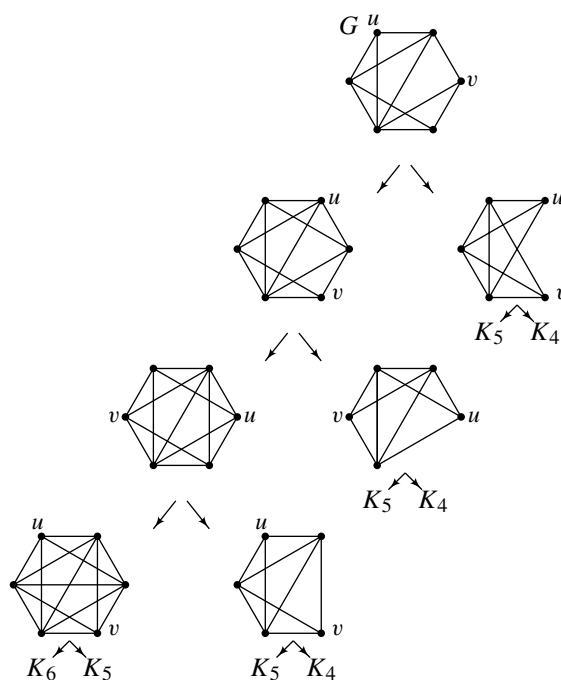
Definition. Polynomiet $p_G(x)$, hvor $p_G(k)$ for hele tal $k \geq 0$ angiver antallet af egentlige knudefarvninger af G med k farver til rådighed, kaldes det **kromatiske polynomium** for G .

Bemærkning. For en given graf G har det kromatiske polynomium $p_G(k)$ heltalskoefficienter (overvej!), og det rummer diverse information om G (opgaverne til kapitlet giver mange eksempler). Den mest nærliggende oplysning om G , der kan aflæses fra $p_G(k)$, er vel det knudekromatiske tal $\chi(G)$, som simpelthen er det mindste positive hele tal k , for hvilket $p_G(k) > 0$. Det kromatiske polynomium for en graf er dog *ikke stærkt nok* til at fastlægge grafen (pånær *isomorfi*); ovenfor blev det kromatiske polynomium for træer beregnet, og resultatet er det samme for træer med samme antal knuder (og for $n \geq 4$ er ikke alle træer med n knuder isomorfe). □

13.8 Algoritme for beregning af kromatisk polynomium. Den konstruktion, der ligger til grund for induktionsskridtet i beviset for sætningen i afsnit 13.7, kan udmøntes til en *beregningsalgoritme*. Med en graf G som input produceres i et første skridt to grafer, der enten er komplette, eller er grafer, der er »mere« komplette end G , og som »erstatte« den givne graf; de ikke-komplette grafer blandt de producerede underkastes hver for sig samme proces, og erstattes af de resulterende grafer, og således fortsættes til alle erstatningsgrafer er komplette, hvorfra det er let at udregne det kromatiske polynomium for den givne graf som summen af de kromatiske polynomier for erstatningsgraferne. Metoden illustreres med et eksempel.

Eksempel 1. Grafen G øverst har 6 knuder og 11 kanter. Den giver anledning til de to grafer vist i niveauet under, baseret på de valgte knuder markeret u, v . Hver af graferne i niveau 2 behandles på tilsvarende måde, på basis af disse grafers valgte knuder (ligeledes kaldt u, v).

Processen fortsættes; når der i ét niveau opstår en graf, der kun mangler en enkelt kant i at være den komplette graf på sin knudemængde, fx med m knuder, er det næste (og sidste) skridt for den pågældende graf klart: der produceres en K_m og en K_{m-1} , og på tegningen er dette blot markeret via disse grafers betegnelser.



Sammenfattende giver processen for grafen G én K_6 -graf, fire K_5 -grafer, og tre K_4 -grafer, og det kromatiske polynomium er dermed summen af de tilsvarende kromatiske polynomier, altså:

$$\begin{aligned} p_G(k) &= p_{K_6}(k) + 4p_{K_5}(k) + 3p_{K_4}(k) \\ &= k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5) + 4k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) \\ &\quad + 3k(k-1)(k-2)(k-3) \\ &= k(k-1)(k-2)(k-3)(k^2 - 5k + 7). \end{aligned}$$

Ved indsætning af $k = 1, 2, 3, \dots$ ses, at $p_G(k) = 0$ for $k = 1, 2, 3$, men $p_G(4) = 72$, og det kromatiske tal er derfor $\chi(G) = 4$. \square

Bemærkninger. 1. Algoritmen udfører næsten »aritmetik« med graferne, som fx ovenfor, hvor algoritmen producerede: én K_6 -graf, fire K_5 -grafer, og tre K_4 -grafer.

2. På basis af den forelagte grafs knudeantal og kantantal er det let at forudberegne i hvor mange niveauer algoritmen/processen forgrener sig.

3. Det er vigtigt (pinefulde erfaringer!) at udføre tegningerne omhyggeligt, især at bevare knudernes relative placering fra en graf til dens afledte grafer. Endvidere kan farver være til hjælp!

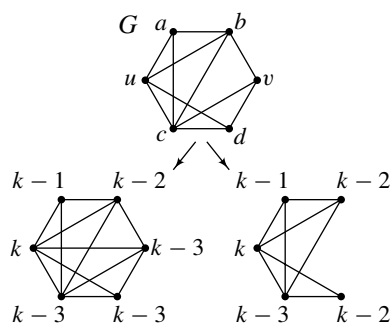
4. De kromatiske polynomier for de grafer, der opstår i processen, har typisk produktform (dalende faktoriel i variabelen k), og denne faktorisering er en vigtig ekstra viden om de pågældende polynomier, som *ikke* bør slettes ved at udmultiplisere disse dalende faktorieller.

5. Med øvelse kan der foretages diverse *kortslutninger* i processen, som på tegningen ovenfor, hvor en graf af formen »en K_m på nær en kant« direkte blev færdigbehandlet (til $K_m + K_{m-1}$). Det kan således være nyttigt én gang for alle at have overvejet, hvad en graf af formen »en K_m på nær to kanter« færdigbehandles til (NB. der er to muligheder for en sådan graf!).

6. Algoritmen kan udføres næsten i blinde, ved at basere det næste skridt på to vilkårligt valgte ikke-kantforbundne knuder u, v . I mange tilfælde kan der dog spares en del arbejde ved at vælge knuderne u, v med omtanke! Opstår der som mellemresultat i processen en graf, hvis kromatiske polynomium direkte kan bestemmes, kræver denne graf *ikke* algoritmisk viderebehandling. Det afgørende for dette er, at der findes en rækkefølge af knuderne så det ved en successiv tildelig af knudefarver i hvert skridt – på grund af grafens kanter – vides, at alle tidligere farvede knuder, som den aktuelle knude er forbundet til, har forskellige farver. Se eksemplet nedenfor. \square

Eksempel 2. Med grafen G fra det foregående eksempel vælges nu de to knuder u, v som udgangspunkt; de er markeret på den øverste figur.

Beregningen af de kromatiske polynomier sker via successiv knudefarvning. Ved hver knude er anført antallet af knudefarver på samme måde som tidligere. Knuderne u, a, b, c udspænder en K_4 , hvor de enkelte knuder kan farves med de angivne farveantal.

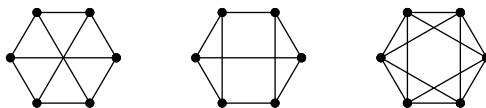


I grafen til venstre farves nu knuden v . For hver af de k^4 egentlige knudefarvninger af K_4 delgraf på u, a, b, c , er der $k-3$ mulige farver for v (alle de allerede farvede knuder u, b, c har forskellige farver), og for hver af $k^4(k-3)$ farvninger af u, a, b, c er der $k-3$ muligheder for farve til knude d (alle de allerede farvede knuder u, v, c har forskellige farver). I grafen til højre fås tilsvarende $k^4(k-2)$ farvninger, og dermed er det kromatiske polynomium for G , som før:

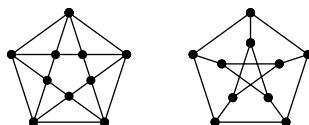
$$p_G(k) = k^4(k-3)^2 + k^4(k-2) = k(k-1)(k-2)(k-3)(k^2 - 5k + 7). \quad \square$$

Opgaver

(13.1) Bestem for hver af nedenstående tre grafer den maksimale knudevalens $\Delta(G)$ og det kromatiske tal $\chi(G)$, og angiv for hver graf en knudefarvning i $\chi(G)$ farver; diskutér resultaterne.



(13.2) Bestem for hver af nedenstående grafer den maksimale knudevalens $\Delta(G)$ og det kromatiske tal $\chi(G)$, og angiv for hver en knudefarvning i $\chi(G)$ farver; diskutér resultaterne.



(13.3) Bestem de kromatiske polynomier for alle grafer med ≤ 3 knuder.

(13.4) Vis, at isomorfe grafer har samme kromatisk polynomium. Kan det omvendt sluttes, at to grafer, der har samme kromatisk polynomium, er isomorfe.

(13.5) Lad $G = (V, E)$ være en graf for hvilken $|E| > 0$. Find summen af koefficienterne i det kromatiske polynomium $p_G(k)$ for G .

(13.6) Vis, at konstantleddet i et kromatisk polynomium er $= 0$.

Vis, at det kromatiske polynomium for en graf er produktet af de kromatiske polynomier for grafens sammenhængskomponenter.

(13.7) Vis at det kromatiske polynomium for en graf $G = (V, E)$ er *normeret*, dvs. koefficienten til højstegradsleddet er $= 1$, og har grad $|V|$, altså antallet af knuder i G .

(13.8) [Mini projekt!] Lad p_G betegne det kromatiske polynomium for grafen $G = (V, E)$, der antages at have $n := |V|$ knuder, $q := |E|$ kanter, og $r \geq 1$ sammenhængskomponenter.

Vis, at p_G har formen:

$$p_G(k) = a_n k^n - a_{n-1} k^{n-1} + \dots + (-1)^{n-j} a_j k^j + \dots + (-1)^{n-r} a_r k^r. \quad (13.1)$$

hvor $a_n = 1$, $a_{n-1} = q$, og de øvrige konstanter $a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_r$ alle er positive hele tal, altså > 0 , og hvor koefficienterne til leddene af grad $0, 1, \dots, r-1$ er $= 0$.

(13.9) Vis, at C_n , for $n \geq 3$, har kromatisk polynomium: $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

(13.10) Vis, at en graf med kromatisk polynomium $k(k-1)^m$ er et træ med $m+1$ knuder.

Kapitel 14

Bryllupssætningen

Emnet for kapitlet er den såkaldte *bryllupssætning*, der giver en nødvendig og tilstrækkelig betingelse, i form af en serie af *antalsuligheder*, for eksistens af en pardannelse af alle elementer fra en mængde A , med elementer fra en mængde B ; det er underforstået, at pardannelsen er injektiv, dvs. at forskellige elementer fra A får tilordnet forskellige elementer fra B , og *pointen*, eller *problemet* er, at pardannelsen desuden skal opfylde diverse givne *kompatibilitetsbetingelser*.

Det ved første øjekast simple resultat – denne opfattelse holder dog næppe for en nærmere prøve – er i essentielt ækvivalente varianter opdaget adskillige gange, således fx af *Dénes König* (1916), og *Philip Hall* (1935), og resultatet kan derfor mødes under flere navne, dog nok hyppigst under det sidstnævnte; nedenfor omtales resultatet som *bryllupssætningen*, og den nødvendige og tilstrækkelige betingelse kaldes *Halls betingelse*.

14.1 Indledning. Bryllupssætningen har mange anvendelser, og i det følgende formuleres den i flere ikklædninger. Den nok mest suggestive – det er selvsagt en smagssag – formulering¹ er følgende: Der er givet en samling af *piger*, hvor hver pige har en *drengbekendtskabskreds*, dvs. en samling *dreng*, som den pågældende pige *kender*. *Er det i en sådan situation muligt at lave et bryllup for alle pigerne?*, eller mere præcist, er det muligt at arrangere et valg af dreng til pigerne på en sådan måde, at hver valgt dreng vælges af én pige, som kender den pågældende dreng? (Det er underforstået, at af flere forskellige piger, der kender den samme dreng, kan *højst én af pigerne* vælge den pågældende dreng.)

Der er vel egentlig tale om en slags bunkebryllup; i en mindre højtidelig formulering kan der spørges: *Er det muligt at arrangere en pardans for alle pigerne, som opfylder, at hver pige danser med en dreng fra den pågældende piges drengbekendtskabskreds?*

I en matematisk indpakning er samlingen af piger en *endelig og ikke-tom mængde* P , og for hver pige $p \in P$ er denne piges drengbekendtskabskreds en *endelig mængde* D_p . Samtlige tilrådighed-stående dreng er således foreningsmængden $D = \cup_{p \in P} D_p$, og et *bunkebryllup*, eller *pardans*, for alle pigerne, af den ønskede type, er en *injektiv afbildning*, $\beta : P \rightarrow D$, som opfylder *betingelsen*, at $\beta(p) \in D_p$, for alle $p \in P$. (At denne *bryllupsafbildning* β er injektiv sikrer monogamitet, medens *kompatibilitetsbetingelsen* $\beta(p) \in D_p$, for $p \in P$, sørger for, at hver pige p vælger/tildeles en dreng fra den pågældende piges drengbekendtskabskreds D_p .)

Observation. Hvis der med ovenstående betegnelser findes en injektiv afbildning β af P ind i D , som opfylder betingelsen, $\beta(p) \in D_p$, for $p \in P$, så gælder for enhver delmængde $Q \subseteq P$, at $|\cup_{p \in Q} D_p| \geq |Q|$. (I pige/dreng-terminologi: den samlede drengbekendtskabskreds for hver delmængde Q af piger omfatter mindst så mange dreng som der er piger i Q .)

Bevis. For den tomme delmængde af P er antalsuligheden i observationen trivielt opfyldt; lad derfor $Q \subseteq P$ være en ikke-tom delmængde. Restriktionen af β til mængden Q er naturligvis injektiv, fordi β selv er injektiv, og derfor gælder: $|Q| = |\beta(Q)|$; idet betingelsen $\beta(p) \in D_p$, for $p \in P$, giver, at $\beta(Q) \subseteq \cup_{p \in Q} D_p$, følger den påståede ulighed. (Ved et bunkebryllup, der opfylder betingelsen, kender hver pige sin *tildelte* dreng, og da alle tildelte dreng er indbyrdes

¹Det er ganske uklart for mig om denne formulering er *politisk korrekt!*

forskellige omfatter den samlede drengbekendtskabskreds for en samling Q af piger mindst de til de pågældende piger tildelte drenge, altså ikke færre end $|Q|$ drenge.) ■

Det viser sig, at ulighederne i observationen ovenfor, der som godt gjort *nødvendigvis* er opfyldte, hvis der eksisterer et bunkebryllup som opfylder kompatibilitetsbetingelserne, tillige er *tilstrækkelige* for eksistens af et sådant bunkebryllup. Det kan således eftervises, at der findes et bunkebryllup *uden* at prøve sig frem ved at gennemgå samtlige a priori mulige tildelinger, og enten finde én, der fungerer, eller, efter at have afprøvet alle muligheder, konstatere, at ingen fungerer. Der er dog en enkelt ulempe: det er et *meget stort* antal uligheder, der skal verificeres (når n er stor), nemlig præcis $2^n - 1$ uligheder, hvis samlingen af piger omfatter $n = |P|$ piger.

At disse uligheder er »relevante« for eksistens af et bunkebryllup er måske uklart, men for delmængder Q med en enkelt pige, fås, at $|D_p| \geq 1$, altså, at alle drengbekendtskabskredse er ikke-tomme; for $Q = P$ fås, at $|\cup_{p \in P} D_p| \geq |P|$, altså, at der samlet er mindst lige så mange drenge som piger. Begge disse krav er naturligvis opfyldt hvis et bunkebryllup er muligt!

14.2 Halls betingelse og opvarmningseksempler. Senere i kapitlet gives andre formuleringer af bryllupsproblemstillingen, men først præciseres bryllupsproblemet *matematisk*.

Definitioner. En **bryllupssituation**, der betegnes $(P, (D_p)_{p \in P})$, er et par bestående af en endelig ikke-tom mængde P og et system $(D_p)_{p \in P}$ af endelige mængder, dvs. for hvert $p \in P$ en endelig mængde D_p . (Elementerne af P kaldes »piger«, og elementerne af hver D_p kaldes »drenge«, og D_p siges at udgøre »drengbekendtskabskredsen« for $p \in P$.)

Et **bryllup** for en bryllupssituation $(P, (D_p)_{p \in P})$ er en delmængde af mængden $\cup_{p \in P} D_p$ på $|P|$ elementer og en bijektiv tilordning af disse til elementerne fra P , der opfylder, at hvert $p \in P$ tilordnes et element fra D_p . (Glossen »bunkebryllup« er som nævnt mere dækkende.)

Eksempler. (a) Med mængden $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ og tilhørende mængdesystem $(D_p)_{p \in P}$:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{1', 2', 3'\}, & D_2 &= \{2', 3'\}, & D_3 &= \{3', 5', 7'\}, \\ D_4 &= \{1', 2'\}, & D_5 &= \{1', 2', 3'\}, & D_6 &= \{4', 5', 6'\}, \end{aligned}$$

kan man efter nogen afprøvning indse, at der *ikke findes* et bryllup; de 4 piger $\{1, 2, 4, 5\}$ kender tilsammen præcis de 3 drenge $\{1', 2', 3'\}$, og kan derfor *ikke alle* tildeles en dreng, hver valgt i den pågældende piges bekendtskabskreds, således, at ingen af de valgte drenge er valgt af to eller flere forskellige piger, jf. observationen i afsnit 14.1.

(b) Med mængden $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ og tilhørende mængdesystem givet her:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{1', 3'\}, & D_2 &= \{2', 3'\}, & D_3 &= \{1', 3', 4', 5'\}, \\ D_4 &= \{2', 4', 6', 7'\}, & D_5 &= \{1', 5'\}, & D_6 &= \{1', 2'\}, \end{aligned}$$

kan man efter nogen afprøvning indse, at et bryllup *er muligt*; således er tilordningen:

$$1 \longleftrightarrow 3', \quad 2 \longleftrightarrow 2', \quad 3 \longleftrightarrow 4', \quad 4 \longleftrightarrow 6', \quad 5 \longleftrightarrow 5', \quad 6 \longleftrightarrow 1',$$

én blandt flere, der opfylder såvel bijektivitetskravet som kravet, at hver pige får tildelt en dreng fra den pågældendes bekendtskabskreds. □

Definition. En bryllupssituation $(P, (D_p)_{p \in P})$ siges at opfylde **Halls betingelse**, såfremt

$$|\cup_{p \in Q} D_p| \geq |Q|, \quad \text{for alle delmængder } Q \subseteq P. \quad (14.1)$$

(Igen, med dreng/pige-terminologi: den samlede drengbekendtskabskreds for hver delmængde Q af piger omfatter mindst så mange drenge som der er piger i Q .)

Som allerede nævnt findes der i en forelagt bryllupssituation, der opfylder Halls betingelse, et bryllup: beviset for dette gives i næste afsnit. Det er afgørende at forstå indholdet af Halls betingelse. Er der fx n piger i en forelagt bryllupssituation kræver Halls betingelse ialt $2^n - 1$

uligheder opfyldt, nemlig, for hver ikke-tom delmængde Q af pigerne, at den samlede drengbekendtskabskreds for pigerne i Q omfatter mindst så mange drenge som der er piger i Q . Disse uligheder – de kan kaldes *delbetingelser* – falder naturligt i n grupper, efter hvor mange piger delmængden Q består af; der er således ialt $\binom{n}{k}$ delbetingelser for pigedelmængder omfattende k piger ($k = 1, 2, \dots, n$). (Passer dette med det anførte samlede antal uligheder?)

Eksempler – fortsat. For bryllupssituationen i eksempel (a) er alle $\binom{6}{1} = 6$ betingelser for 1-pige-delmængder, og alle $\binom{6}{2} = 15$ betingelser for 2-pige-delmængder, klart opfyldte, da hver af drengbekendtskabskredsene er på 2 eller flere drenge. Ligeledes er alle $\binom{6}{3} = 20$ betingelser for 3-pige-delmængder opfyldte, fordi af vilkårlige 3 blandt de 6 piger har mindst én en drengbekendtskabskreds på 3 drenge, og deres samlede drengbekendtskabskreds er derfor også på 3 eller flere. Af de $\binom{6}{4} = 15$ betingelser for 4-pige-delmængder er alle – på nær den i den tidligere omtale nævnte – opfyldte, fx fordi en sådan delmængde enten omfatter pige 3 eller pige 6, og derfor har en samlet drengbekendtskabskreds på 3 drenge udover drengen $2'$, der er kendt af hver af pigerne 1, 2, 4, 5. De $\binom{6}{5} = 6$ betingelser for 5-pige-delmængder er alle opfyldte, fordi enhver sådan delmængde omfatter enten pige 3 eller pige 6, samt piger, hvis samlede drengbekendtskabskreds omfatter drengene $\{1', 2', 3'\}$. Den samlede bekendtskabskreds for alle 6 piger er på 7 drenge.

Sammenfattende er således 62 af de ialt 63 delbetingelser opfyldte, men den ene, der ikke er opfyldt, forhindrer som allerede godtgjort, at bryllupssituationen tillader et bryllup.

(b) For bryllupssituationen i det andet eksempel, er det klart, at alle delbetingelser med 1 og 2 piger er opfyldte (hver drengbekendtskabskreds er på 2 eller flere drenge). Videre er der kun fire »problematiske« 3-pige-delmængder, nemlig med 3 piger valgt blandt $\{1, 2, 5, 6\}$ (pigerne med drengbekendtskabskredse på 2); her er betingelsen for pigerne $\{1, 2, 6\}$ opfyldt, men tæt på at bryde sammen (den samlede bekendtskabskreds er på 3 drenge), de øvrige valg giver en samlet drengbekendtskabskreds på 4. Af 4-pige-delmængderne er kun $\{1, 2, 5, 6\}$ »problematiske«, men betingelsen er opfyldt, da disse pigers samlede drengbekendtskabskreds er på 4 drenge. Også 5-pige-betingelserne er opfyldte, da hvert valg af 5 blandt de 6 piger må omfatte enten pige 3 eller pige 4, eller begge, og alle kombinationer let ses at give samlede drengbekendtskabskredse på mindst 5 drenge. Endelig er betingelsen for alle 6 piger klart opfyldt, da der er 7 drenge i den samlede drengbekendtskabskreds for alle 6 piger. \square

14.3 Bryllupssætningen. Observationen i afsnit 14.1 kan udtrykkes, at Halls betingelse er *nødvendig* for eksistens af et bryllup i en given bryllupssituation. Det skal nu godtgøres, at Halls betingelse tillige er *tilstrækkelig* til at sikre eksistens af et bryllup for en bryllupssituation.

Sætning. En bryllupssituation $(P, (D_p)_{p \in P})$ tillader et bryllup, hvis og kun hvis den opfylder Halls betingelse.

Inden beviset for *hvis-delen* – den endnu ikke viste del – er det nyttigt at se nærmere på, hvordan et bryllup – hvis det findes – kan *konstrueres*. En vigtig pointe er, at det ved en *successiv tildeling* af drenge til piger undgås at tildele drenge på en måde, der udelukker andre nødvendige tildelinger, som fx, at en dreng, der »ene mand« udgør bekendtskabskredsen for én pige, tildeles en anden pige (der også kender den pågældende dreng). Dette styres med følgende begreb:

Definition. Lad $(P, (D_p)_{p \in P})$ være en bryllupssituation. En delmængde $S \subseteq P$ kaldes **kritisk**, hvis mængden $\cup_{p \in S} D_p$ består af præcis $|S|$ elementer. (Den »samlede drengbekendtskabskreds« for »pigerne« i S omfatter præcis $|S|$ »drenge«.)

En mængde S er således kritisk, hvis den til S svarende ulighed (delbetingelse) i Halls betingelse er opfyldt med lighedstegn. Hvis en bryllupssituation, som opfylder Halls betingelse, omfatter en kritisk mængde S af piger, så kan en »foreløbig« tildeling af drenge, hvor piger *udenfor* S tildeles drenge fra $\cup_{p \in S} D_p$, *umuligt* suppleres til et bryllup, der omfatter alle pigerne.

En mængde R af piger er derimod *ikke kritisk*, hvis den samlede drengbekendtskabskreds for pigerne fra R omfatter $|R| + 1$ eller flere drenge. Ved kontrol af Halls betingelse kan det fx registreres for hver mængde af piger om den er kritisk eller ej; hvis der ved denne kontrol detekteres en kritisk delmængde er en forenkling af den videre kontrol mulig (med den naturlige kontrolrækkefølge, nemlig efter voksende størrelse af pigedelmængderne).

Eksempel – fortsat. For eksempel (b) ovenfor blev det konstateret, at ingen af 1-pige-delmængderne, og heller ingen af 2-pige-delmængderne er kritiske, hvorimod 3-pige-delmængden $S = \{1, 2, 6\}$ er kritisk, da disse 3 pigers samlede drengbekendtskabskreds er $\{1', 2', 3'\}$. Den er faktisk den eneste kritiske 3-pige-delmængde.

Et eventuelt bryllup må nødvendigvis tildele drengene $\{1', 2', 3'\}$ til pigerne $\{1, 2, 6\}$ på en eller anden måde, og derfor kan der ved den videre kontrol ses bort fra såvel pigerne $\{1, 2, 6\}$ som drengene $\{1', 2', 3'\}$, dvs. restkontrollen reduceres til kontrol af den *formindskede bryllupssituation* $(R, (E_p)_{p \in R})$, hvor $R = \{3, 4, 5\}$ er *resten af pigerne*, og mængdesystemet $(E_p)_{p \in R}$ består af mængderne $E_p = D_p \setminus \{1', 2', 3'\}$, altså

$$E_3 = \{4', 5'\}, \quad E_4 = \{4', 6', 7'\}, \quad E_5 = \{5'\}.$$

Denne bryllupssituation ses let at opfylde Halls betingelse (dette kunne også konkluderes fra den tidligere undersøgelse, der kontrollerede samtlige uligheder); her er 1-pige-delmængden (i den reducerede bryllupssituation) $S = \{5\}$ kritisk, og pige 5 og dreng $5'$ kan derfor fjernes (efter »formæling«!), hvilket fører til en yderligere reduceret bryllupssituation, og således videre. På denne måde er det relativt enkelt at konstruere et (lille) bryllup. \square

Idéen fra dette eksempel kan udmøntes til et bevis for den svære del af bryllupssætningen.

Bevis for bryllupssætningen. Lad $(P, (D_p)_{p \in P})$ være en bryllupssituation, der opfylder Halls betingelse, dvs. at der for enhver delmængde $Q \subseteq P$ gælder, at $|\cup_{p \in Q} D_p| \geq |Q|$. Beviset for, at der eksisterer et bryllup føres ved induktion efter antallet $|P|$ af piger i bryllupssituationen; i induktionsskridtet udføres, i princippet, en slags konstruktion af et bryllup.

Induktionsstarten: Hvis $|P| = 1$ er Halls betingelse en enkelt ulighed, nemlig, idet $P = \{p\}$, at $|D_p| \geq |P| = 1$, altså, at $D_p \neq \emptyset$; derfor kan der laves følgende bryllup: den ene pige p tildeles en vilkårligt valgt dreng fra D_p , der jo ikke er den tomme mængde.

Induktionskridtet: Antag her, at $(P, (D_p)_{p \in P})$ omfatter mindst 2 piger, altså, at $|P| > 1$. Videre antages – dette er *induktionsantagelsen* – at alle bryllupssituationer, der opfylder Halls betingelse, og omfatter højst $|P| - 1$ piger, tillader et bryllup. Et bryllup for $(P, (D_p)_{p \in P})$ konstrueres ved at skelne mellem to typer af den givne bryllupssituation:

1. der findes ingen ikke-tom, ægte, kritisk delmængde af P , og
2. der findes en ikke-tom, ægte, kritisk delmængde af P .

Bevis for bryllupssituation af type 1: Her vælges først – vilkårligt – en pige $p_0 \in P$, og dernæst vælges – ligeledes vilkårligt – én af drengene $d_0 \in D_{p_0}$; som bemærket ved induktionsstarten er $D_p \neq \emptyset$ for alle D_p , fordi bryllupssituationen opfylder Halls betingelse, og derfor er $D_{p_0} \neq \emptyset$.

Denne tilordning af d_0 til p_0 suppleres derefter til et bryllup, der omfatter alle pigerne, ved hjælp af et bryllup for de resterende piger $P' = P \setminus \{p_0\}$ og de resterende drenge. Præcist betragtes bryllupssituationen $(P', (E_p)_{p \in P'})$ defineret ved at sætte $E_p = D_p \setminus \{d_0\}$, for $p \in P'$ (hver pige i P' har samme drengbekendtskabskreds som i den givne bryllupssituation, dog pånær, at ingen nu kender d_0). Denne hjælpebryllupssituation opfylder Halls betingelse, og omfatter færre piger end den givne.

Det sidste er klart, og at den opfylder Halls betingelse indses på følgende måde. Lad $Q \subseteq P'$ være en vilkårlig ikke-tom samling af piger fra P' (altså uden p_0); da den givne bryllupssituation

er af type 1, er Q , opfattet som delmængde af P , en ægte, og derfor ikke-kritisk pigedelmængde, og altså gælder (for de oprindelige drengbekendtskabskredse), at:

$$|\cup_{p \in Q} D_p| > |Q|. \quad (14.2)$$

Men foreningsmængden af de tilsvarende reducerede drengbekendtskabskredse fås ved blot, om nødvendigt, at fjerne d_0 fra $\cup_{p \in Q} D_p$, altså $\cup_{p \in Q} E_p = (\cup_{p \in Q} D_p) \setminus \{d_0\}$, og derfor medfører den skarpe ulighed i (14.2), at

$$|\cup_{p \in Q} E_p| \geq |\cup_{p \in Q} D_p| - 1 \geq |Q|.$$

Altså er Halls betingelse opfyldt for $(P', (E_p)_{p \in P'})$, som derfor ifølge induktionsantagelsen tillader et bryllup, der suppleret med parret (p_0, d_0) fastlægger et bryllup for $(P, (D_p)_{p \in P})$.

Bevis for bryllupssituation af type 2: Lad P' betegne en ægte, ikke-tom, kritisk delmængde af P ; om den samlede bekendtskabskreds for pigerne i P' , altså $C := \cup_{p \in P'} D_p$, gælder $|C| = |P'|$. Men $(P', (D_p)_{p \in P'})$ er en bryllupssituation – den til P' reducerede bryllupssituation – der opfylder Halls betingelse (hertil kræves kun uligheder opfyldt for delmængder af P' , og ulighederne vides opfyldt for alle delmængder af P), og omfatter færre piger end P (P' er en ægte delmængde), og den tillader derfor, ifølge induktionsantagelsen, et bryllup.

Også pigerne udenfor P' , altså pigerne $P'' = P \setminus P'$, bestemmer en reduceret bryllupssituation, nemlig $(P'', (F_p)_{p \in P''})$, hvor $F_p = D_p \setminus C$, for $p \in P''$, med færre piger end $|P|$; fra hver af de oprindelige drengbekendtskabskredse, for $p \in P''$, er fjernet drengene fra C .

Denne bryllupssituation opfylder Halls betingelse. Betragt nemlig en delmængde $Q \subseteq P''$; det skal vises, at $|\cup_{p \in Q} F_p| \geq |Q|$; men den givne bryllupssituation opfylder Halls betingelse, og derfor gælder for mængden $Q \cup P' \subseteq P$ af piger, fra den givne bryllupssituation, at

$$|\cup_{p \in Q \cup P'} D_p| \geq |Q \cup P'| = |Q| + |P'|.$$

(Ligningen til sidst følger fordi Q og P' er disjunkte.) Bidraget til $\cup_{p \in Q \cup P'} D_p$, fra pigerne i P' , altså $p \in P'$, er præcis drengene C , altså ialt $|P'|$, og da der er $|Q| + |P'|$ eller flere elementer i $\cup_{p \in Q \cup P'} D_p$ er der $|Q|$ eller flere elementer i $|\cup_{p \in Q} F_p|$; udtrykt med mængdesymboler gælder jo for de involverede mængder, at:

$$\bigcup_{p \in Q} F_p \cup \bigcup_{p \in P'} D_p = \bigcup_{p \in Q \cup P'} D_p.$$

Dermed opfylder bryllupssituationen $(P'', (F_p)_{p \in P''})$ Halls betingelse, og ifølge induktionsantagelsen tillader den derfor et bryllup på P'' , der sammen med brylluppet på den kritiske del P' fastlægger et bryllup for den givne bryllupssituation. ■

14.4 Reformulering af bryllupssætningen. Dette afsnit giver et par formuleringer – uden alt »pige/dreng«-pjattet – af bryllupssætningen. Den første er baseret på begrebet *transversal*.

Definition. Lad $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ være en (endelig) familie af endelige mængder. En *transversal* for \mathcal{A} er en delmængde af $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ på n elementer $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (i notationen ligger, at disse elementer er forskellige) således, at $x_i \in A_i$, for $i = 1, 2, \dots, n$. (Idéen er, at x_i kan benyttes til at »repræsentere« mængden A_i , for $i = 1, 2, \dots, n$.)

Sætning 1. En (endelig) familie $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ af endelige mængder har en transversal hvis og kun hvis den opfylder antalsulighederne:

$$|\cup_{i \in I} A_i| \geq |I|, \quad \text{for alle delmængder } I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}. \quad (14.3)$$

Bevis. Påstanden vises ved oversættelse af den forelagte *transversalsituation* \mathcal{A} til en *bryllupssituation* $(P, (A_i)_{i \in P})$. Mængden P af piger er $P = \{1, 2, \dots, n\}$, og for hver af pigerne $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, er den pågældende piges drengebekendtskabskreds mængden A_i . Et bryllup for $(P, (A_i)_{i \in P})$ definerer en transversal for familien $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$: som repræsentant for A_i benyttes blot, for $i = 1, 2, \dots, n$, den ved brylluppet til pige i knyttede dreng (disse er, på grund af monogami, n forskellige elementer, og bryllupskravet sikrer, at den til i knyttede dreng tilhører A_i , altså kan repræsentere A_i); omvendt giver en transversal for $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ anledning til et bryllup for $(P, (A_i)_{i \in P})$: til pige i , for $i = 1, 2, \dots, n$, knyttes blot den ved transversalen udpegede repræsentant for A_i (repræsentanterne er forskellige, hvilket sikrer monogami, og repræsentanten for A_i tilhører denne mængde, hvilket giver, at bryllupskravet er opfyldt).

Antalsulighederne (14.3) for transversalsituationen \mathcal{A} er blot ulighederne (14.1) fra Halls betingelse for den tilsvarende bryllupssituation. ■

De *kompatibilitetsbetingelser* mellem elementer fra to mængder, der fastlægger bekendtskaberne i en bryllupssituation, kan *modelleres* ved *kanterne* i en *bipartit graf* $G = (V_1, E, V_2)$. De ikke-tomme knudemængder V_1, V_2 består af piger, henholdsvis, drenge, og kantmængden E beskriver hvilke drenge $v \in V_2$, som en pige $u \in V_1$ kender: u kender v hvis og kun hvis uv er en kant, dvs. $uv \in E$. Er det muligt at lave en »pardannelse«, der til hver knude $u \in V_1$ knytter en knude $v \in V_2$, som er kantforbundet med u (og underforstået, at en knude $v \in V_2$ ved en pardannelse danner par med højst én knude $u \in V_1$)? Dette er naturligvis en variation af bryllupsproblematikken.

Definition. Lad $G = (V_1, E, V_2)$ være en bipartit graf, med knudetodeling V_1, V_2 i ikke-tomme knudemængder. En **parring af V_1 ind i V_2 i grafen G** er en injektiv afbildning $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ med egenskaben, at v og $\varphi(v)$ er kantforbundne, for alle $v \in V_1$. (En sådan injektiv afbildning kommer ud på et valg af en samling af kanter $F \subseteq E$ med egenskaben, at hver knude $u \in V_1$ er endeknude for præcis én kant fra F , og en knude $v \in V_2$ er endeknude for højst én kant fra F .)

Sætning 2. Lad $G = (V_1, E, V_2)$ være en bipartit graf, med knudetodeling V_1, V_2 i ikke-tomme knudemængder. Da findes en parring af V_1 ind i V_2 , hvis og kun hvis

$$|\{u \in V_2 \mid \text{der findes } v \in V_1, \text{ så } uv \in E\}| \geq |V|, \quad \text{for alle delmængder } V \subseteq V_2, \quad (14.4)$$

dvs. hvis det for enhver delmængde $V \subseteq V_2$ gælder, at det samlede antal knuder $v \in V_2$, der er forbundet med en (eller flere) knude(r) fra mængden V , er \geq antallet $|V|$ af knuder i V .

Bevis. Dette er en simpel konsekvens af bryllupssætningen, eller varianten fra sætning 1 (transversalsætningen). Knuderne i V_1 spiller rollen af piger, knuderne i V_2 er drenge, en knude $u \in V_1$ kender de knuder $v \in V_2$ som er kantforbundne med u . En parring af V_1 ind i V_2 er et bryllup, og antalsbetingelserne i (14.4) er præcis Halls betingelse for den tilsvarende bryllupssituation. ■

14.5 Lidt om latinske rektangler. I flere forbindelser – måske mest af underholdende karakter – mødes rektangulære, eller kvadratiske, formationer af objekter, hvor objekterne indenfor hver række er indbyrdes forskellige, og ligeledes objekterne indenfor hver søjle er indbyrdes forskellige. I en situation med ialt n slags objekter til fordeling kan det være naturligt at benytte tallene $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, eller $\{0, 1, \dots, n-1\}$, som korte »navne« for disse objekter.

Definition. Lad n, p og q være naturlige tal, så $p, q \leq n$. Et **latinsk rektangel af størrelse $p \times q$ med elementer** fra $\{1, 2, \dots, n\}$ er et $p \times q$ talskema, hvor alle elementer tilhører $\{1, 2, \dots, n\}$, og hver række består af q forskellige elementer, og hver søjle består af p forskellige elementer. Et **latinsk kvadrat af orden n , med elementer fra $\{1, 2, \dots, n\}$** , er et latinsk rektangel af størrelse $n \times n$ med elementer fra $\{1, 2, \dots, n\}$.

Eksempel. For en endelig gruppe G giver *gruppetavlen* for G anledning til et latinsk kvadrat af orden $|G|$, ved, efter valg af en indicering af elementerne i G med tallene $\{1, 2, \dots, n\}$, at erstatte hvert gruppemember med sit indeks. \square

Hver række, og hver søjle, i et latinsk kvadrat, udgør en permutation af den tilhørende objekt-mængde, og hver type objekt forekommer præcis n gange i skemaet.

Sætning. Lad n, p være naturlige tal så $p < n$, og lad L være et latinsk rektangel af størrelse $p \times n$, med elementer fra $\{1, 2, \dots, n\}$. Da findes et latinsk kvadrat af orden n , hvis p øverste rækker er L . (Hvert latinsk rektangel af størrelse $p \times n$ med elementer fra $\{1, 2, \dots, n\}$, der således har fuld bredde $= n$, kan altså udvides til et latinsk kvadrat.)

Bevis. Det er tilstrækkeligt at gøre rede for, at der findes en rækkefølge (permutation) af tallene $\{1, 2, \dots, n\}$, der sammen med de p rækker i L danner et latinsk rektangel af størrelse $(p+1) \times n$. Gentagen anvendelse heraf giver påstanden.

En sådan *ekstra række* til L bestemmes som *transversal* for en passende valgt mængdefamilie $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$. Disse mængder A_i , for $i = 1, 2, \dots, n$, dannes fra L på følgende måde:

$$A_i := \text{de tal blandt } \{1, 2, \dots, n\}, \text{ der ikke forekommer i den } i\text{'te søjle af } L.$$

Det er nemlig klart, at en eventuel transversal for \mathcal{A} benyttet som $(p+1)$ 'te række i en udvidelse af L , giver et latinsk rektangel af størrelse $(p+1) \times n$; en sådan transversal består af n indbyrdes forskellige tal, den er altså en permutation af $\{1, 2, \dots, n\}$, hvilket sikrer »latinskhed« i den ekstra række; som transversal for mængderne (A_1, A_2, \dots, A_n) sikres »latinskhed« i hver af de n søjler (søjle fra L sammen med hver søjles *repræsentant* i den tilsvarende A_i -mængde).

Hver søjle i L rummer p forskellige elementer valgt blandt $\{1, 2, \dots, n\}$ og derfor er der $n - p$ af disse elementer, der *ikke* forekommer i den pågældende søjle; dette betyder, at antallet af elementer i A_i er det samme for alle i , nemlig $|A_i| = n - p$.

Videre har mængdefamilien \mathcal{A} en vigtig egenskab, at elementerne fra $\{1, 2, \dots, n\}$ er passende »spredt ud«: hvert af tallene fra $\{1, 2, \dots, n\}$ forekommer i netop $n - p$ af mængderne i \mathcal{A} . Lad nemlig m betegne ét af tallene $\{1, 2, \dots, n\}$; hver af de p rækker i L er jo en permutation af tallene $\{1, 2, \dots, n\}$, og derfor forekommer m én gang i hver række af L , altså ialt p gange i L , altså i præcis p af søjlerne (elementerne i hver søjle er indbyrdes forskellige); derfor forekommer m *ikke* i præcis $n - p$ af søjlerne, dvs. m er element i præcis $n - p$ af A_i -mængderne.

De nævnte antalsforhold medfører, at mængdefamilien $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ opfylder Halls betingelse. For en delmængde $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ skal det godtgøres, at $|\cup_{i \in I} A_i| \geq |I|$. En liste over elementerne i $\cup_{i \in I} A_i$, hvor hvert element medtages én gang for hver A_i -mængde ($i \in I$) som det forekommer i, rummer dermed $|I| \cdot (n - p)$ elementer (talt med gentagelser), men da et tal $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ er element af præcis $n - p$ af A_i -mængderne, altså i højst $n - p$ af A_i -mængderne med indices $i \in I$, er der mindst $|I|$ forskellige tal i listen (med $r < |I|$ forskellige tal kan listen højst have længde $(n - p) \cdot r$). Dette betyder imidlertid, som påstået, at $|\cup_{i \in I} A_i| \geq |I|$, og dermed eksisterer der en transversal for $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, og derfor kan L udvides. \blacksquare

Den afgørende iagttagelse i beviset ovenfor, at *en liste af længde kq , af elementer (med gentagelser tilladt), hvor hvert element forekommer højst q gange, rummer mindst k forskellige*, er jo en variant af skuffeprincippet. Den er imidlertid nyttig og »slående«.

Eksempel: et korttrick. Lægges kortene fra et almindeligt sæt spillekort (4 farver, 13 forskellige værdier af hver farve) op i et rektangulært 4×13 skema – helt vilkårligt – så findes der et valg af ét kort fra hver søjle, således, at hver af de 13 kortværdier er repræsenteret.

Fra en sådan oplægning af de 52 spillekort i 13 kolonner, med 4 kort i hver, defineres en *transversalsituation* $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{13})$. Elementerne i mængden A_k er de blandt (op til fire forskellige af) værdierne Es, Konge, Dame, Knægt, 10, 9, \dots , 3, 2, der forekommer på kortene

i den k 'te søjle. Denne familie \mathcal{A} opfylder Halls betingelse: for et vilkårligt udpluk af, fx k , af søjlerne, er der nemlig ialt $4k$ kort i de pågældende søjler, og da hver af de 13 kortværdier forekommer præcis 4 gange i hele sættet af spillekort, og dermed højst 4 gange i de betragtede søjler, er der mindst k forskellige kortværdier i de betragtede k søjler, hvilket jo betyder, at Halls betingelse er opfyldt. En transversal for \mathcal{A} gør jobbet! \square

Opgaver

(14.1) Undersøg, hvorvidt der i hver af nedenstående to bryllupssituationer findes et bryllup:

(a) Med mængden $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ og tilhørende mængdesystem $(D_i)_{i \in P}$:

$$D_1 = \{1', 2'\}, \quad D_2 = \{1', 2', 4'\}, \quad D_3 = \{1', 2', 3'\},$$

$$D_4 = \{1', 3'\}, \quad D_5 = \{4', 5', 6'\}, \quad D_6 = \{1', 2', 5'\}.$$

(b) Med mængden $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ og tilhørende mængdesystem $(D_i)_{i \in P}$:

$$D_1 = \{1', 3', 5'\}, \quad D_2 = \{1', 3'\}, \quad D_3 = \{1', 5'\},$$

$$D_4 = \{1', 2', 3', 4', 5'\}, \quad D_5 = \{3', 5'\}, \quad D_6 = \{2', 4', 6', 7'\}.$$

(14.2) Lad $(P, (D_p)_{p \in P})$ være en bryllupssituation, med $n = |P|$ piger, og lad k være et naturligt tal, der opfylder $k \leq n$. Et *partielt bryllup af størrelse k* i $(P, (D_p)_{p \in P})$, er en delmængde $S \subseteq P$ med k elementer, altså $k = |S|$, og en injektiv afbildning β af S ind i $\cup_{p \in P} D_p$ så $\beta(s) \in D_s$, for alle $s \in S$. Vis, at der findes et partielt bryllup af størrelse k hvis og kun hvis:

$$\left| \cup_{p \in Q} D_p \right| \geq |Q| - (n - k), \quad \text{for alle delmængder } Q \subseteq P.$$

(14.3) Lad $G = (V_1, E, V_2)$ være en *bipartit k -regulær* graf, hvor k er et naturligt tal (k -regulær betyder, at alle knuder har valens k).

Vis, at de 2 todelingsknudemængder V_1 og V_2 har samme antal knuder, og at der eksisterer en parring af den ene ind i den anden, og af den anden ind i den første.

(14.4) Lad A være en $m \times n$ matrix, hvor alle elementer er enten 0 eller 1 (m, n er naturlige tal).

(a) Vis, at der findes en tilknytning af søjler i A til rækkerne i A , så forskellige rækker får tilknyttet forskellige søjler, og så hver række har et 1'tal i rækkens tilknyttede søjle, hvis og kun hvis det for alle sæt af rækker gælder, at antallet af søjler for hvilke der står et 1'tal i en eller flere af sættets rækker, er større end eller lig antallet af rækker i sættet.

(b) Vis, at hvis hver række i A indeholder mindst d 1'taller, og hver søjle indeholder højst d 1'taller, hvor $d > 0$, så findes der m 1'taller i A , så hver række har præcis ét af disse 1'taller, og hver søjle i A indeholder højst ét af de valgte 1'taller.

(14.5) Lad n være et naturligt tal. En $n \times n$ kvadratisk matrix A , hvis elementer alle er 0 eller 1, kaldes en *permutationsmatrix*, hvis hver række og hver søjle i A indeholder præcis ét 1'tal.

Vis, at en $n \times n$ kvadratisk matrix, hvis elementer alle er 0 eller 1, og for hvilken hver række og hver søjle indeholder præcis d 1'taller (d er et naturligt tal), er sum af d permutationsmatricer.

(14.6) Lad $n > 1$ være et naturligt tal. Vis at $n \times n$ matrixen, hvis element på plads (i, j) , for $i, j = 1, 2, \dots, n$, er restklassen bestemt ved $i + j$, regnet modulo n , er et latinsk kvadrat af orden n med elementer fra $\{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Lad k være et naturligt tal, der er primisk med n . Vis at $n \times n$ matrixen, hvis element på plads (i, j) , for $i, j = 1, 2, \dots, n$, er restklassen bestemt ved $k \cdot i + j$, regnet modulo n , er et latinsk kvadrat af orden n med elementer fra $\{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Kapitel 15

Optælling ved inklusion og eksklusion

Der er ofte behov for at bestemme antallet af objekter, der har en eller flere af et sæt af egenskaber, baseret på kendskab til antal objekter med hver af egenskaberne. Såfremt egenskaberne ikke »overlapper«, mere præcist, såfremt hvert af de betragtede objekter har højst én af egenskaberne, findes det ønskede antal direkte som summen af objektantallene for hver af egenskaberne.

Foreligger derimod en situation, hvor hvert objekt kan have et vilkårligt udvalg af egenskaberne, må beregningen kende, og tage hensyn til, antal objekter med vilkårlige delsæt af egenskaberne. For eksempel gælder for *endelige* delmængder $X, Y \subseteq U$ af en mængde U , at

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|,$$

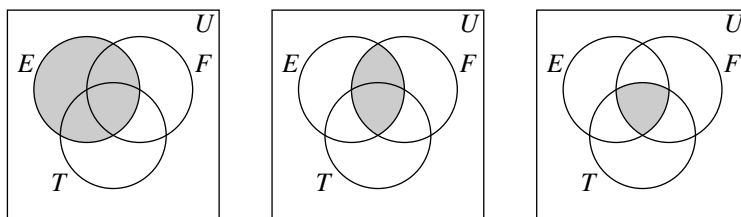
altså, at antallet af objekter med én eller begge (af to) egenskaber er summen af objektantallene for hver af egenskaberne, kompenseret ved subtraktion af antallet af objekter, der har begge egenskaber – disse objekter bliver jo talt med både i $|X|$ og i $|Y|$.

Kapitlets emne er en tælleformel, i flere varianter, der generaliserer formelen ovenfor, for antallet af elementer i en *foreningsmængde* af n mængder. Denne formel, der udnytter antallene af elementer i samtlige mulige *fællesmængder* af de givne mængder, er et beregningsudtryk, som detaljeret »holder styr på« diverse kompensationsbidrag til summen af delmængdernes elementantal. Tællemetoden kaldes derfor ofte for *optælling ved inklusion og eksklusion*.

15.1 Indledende eksempel. Lad E, F, T betegne delmængder af en (endelig) samling U af personer, der hver behersker visse, eventuelt ingen, af sprogene *engelsk* (E), *tysk* (T), og *fransk* (F). Med kendskab til antallene: $|E|$, $|F|$, $|T|$, $|E \cap F|$, $|E \cap T|$, $|F \cap T|$, og $|E \cap F \cap T|$, kan antallet $|E \cup F \cup T|$ af personer (indenfor U), der behersker ét eller flere af sprogene engelsk, fransk, og tysk, ifølge tælleformelen, der bevises i afsnit 15.2, findes via regneudtrykket:

$$|E \cup F \cup T| = |E| + |F| + |T| - |E \cap F| - |E \cap T| - |F \cap T| + |E \cap F \cap T|. \quad (15.1)$$

De tre figurer nedenfor antyder med grå områder typerne af beregningsudtrykkets led og den måde, hvorpå de svarer til kombination af egenskaber. Hvert af de tre led $|E|$, $|F|$, $|T|$ angiver antallene af objekter i de tilsvarende cirkler, der står for personer som behersker det pågældende sprog, og muligvis andre; hvert af de tre følgende led $|E \cap F|$, $|E \cap T|$, $|F \cap T|$ angiver antallene af objekter indenfor de tre linseformede områder, der omfatter personer, som behersker de pågældende to af de tre sprog, og eventuelt det tredje sprog, og det sidste led $|E \cap F \cap T|$ angiver antallet af objekter i centerområdet, der omfatter personer som behersker alle tre sprog.



De tre første led i højresiden af (15.1) tæller personerne i centerområdet tre gange, personerne i delene udenfor centerområdet i hvert af de linseformede områder to gange, og personer indenfor hver cirkel, men udenfor de linseformede områder, hver én gang. Ved subtraktion af de næste tre led i regneudtrykket kompenseres derfor dobbelttællingen i yderdelene af de linseformede områder, men derved overkompenseres der for centerområdet, hvilket gøres godt igen ved addition af det sidste led i regneudtrykket.

Uden formelen fra næste afsnit til rådighed kunne man på basis af oplysningerne successivt bestemme objektantallene i samtlige delområder: Centerområdets objektantal er direkte givet, og ud fra dette og hvert af de linseformede områders samlede objektantal findes antal objekter i hvert linseformet områdes yderdel, og sluttelig findes objektantallene i hver cirkels rest efter fjernelse af de linseformede dele (inklusive centerområdet). Er de konkrete antal, for eksempel:

$$\begin{aligned} |E| &= 18, & |F| &= 9, & |T| &= 12, \\ |E \cap F| &= 6, & |E \cap T| &= 5, & |F \cap T| &= 5, \text{ og} \\ |E \cap F \cap T| &= 2, \end{aligned}$$

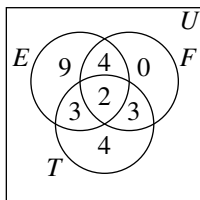
så findes antal personer i yderdelene af de linseformede områder til:

$$\begin{aligned} |E \cap F \cap T^c| &= |E \cap F| - |E \cap F \cap T| = 6 - 2 = 4, \\ |E \cap T \cap F^c| &= |E \cap T| - |E \cap F \cap T| = 5 - 2 = 3, \text{ og} \\ |F \cap T \cap E^c| &= |F \cap T| - |F \cap T \cap E| = 5 - 2 = 3, \end{aligned}$$

og derefter antal personer i cirklerens restområder:

$$\begin{aligned} |E| - |E \cap F \cap T^c| - |E \cap T \cap F^c| - |E \cap F \cap T| &= 18 - 4 - 3 - 2 = 9, \\ |F| - |E \cap F \cap T^c| - |F \cap T \cap E^c| - |E \cap F \cap T| &= 9 - 4 - 3 - 2 = 0, \text{ og} \\ |T| - |T \cap E \cap F^c| - |F \cap T \cap E^c| - |E \cap F \cap T| &= 12 - 3 - 3 - 2 = 4. \end{aligned}$$

Dette giver de på figuren her anførte objektantal i hvert af de syv delområder:



Ved sammentælling af delområdernes objektantal bestemmes antallet af personer, der behersker et eller flere af de tre sprog til: $9 + 0 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 = 25$. Dette stemmer med, at regneudtrykket (15.1) giver: $|E \cup F \cup T| = 18 + 9 + 12 - 6 - 5 - 5 + 2 = 25$. \square

15.2 Formelen for optælling ved inklusion og eksklusion. Det første hovedresultat er en generel og systematisk formel til bestemmelse af antallet af objekter med én eller flere egenskaber blandt et givet sæt af egenskaber – analogt til beregningen ved »håndkraft« i eksemplet ovenfor. Formuleringen er desværre ikke helt simpel.

Lad der være givet en endelig mængde U af objekter, og et sæt af n ($n \geq 2$) mulige egenskaber $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ for objekterne i U . For $i = 1, 2, \dots, n$ betegner A_i delmængden af U bestående af objekter med den i 'te egenskab, altså egenskaben \mathcal{E}_i . Det antages, at for hvert sæt af r af egenskaberne, hvor $1 \leq r \leq n$, fx givet ved de indbyrdes forskellige numre i_1, i_2, \dots, i_r , er antallet $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}|$ af objekter med disse egenskaber kendt: dette antal betegnes $N(i_1, i_2, \dots, i_r)$. Det er afgørende at forstå betydningen af tallet $N(i_1, i_2, \dots, i_r)$ som antallet af objekter med egenskaberne $\mathcal{E}_{i_1}, \mathcal{E}_{i_2}, \dots, \mathcal{E}_{i_r}$ (og eventuelt flere); med et barnligt billede: $N(i_1, i_2, \dots, i_r)$ er antallet af objekter, der markerer som svar på opfordringen: »Objekter med egenskaberne $\mathcal{E}_{i_1}, \mathcal{E}_{i_2}, \dots, \mathcal{E}_{i_r}$ bedes række hånden op!«

Der er således for hver ikke-tom delmængde $\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ givet et antal, altså ialt $2^n - 1$ antal, da der er $2^n - 1$ sådanne delmængder. Med disse betegnelser gælder:

Sætning. Antallet af objekter fra U , der har én eller flere af egenskaberne $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ er givet ved beregningsudtrykket nedenfor (summen af alle led nedenfor til venstre med de anførte fortegn; parenteserne til højre indeholder »kommentarer«):

$$\begin{aligned}
 & N(1) + N(2) + \dots + N(n) && (n \text{ led med fortegn } +) && (15.2) \\
 & - (N(1, 2) + N(1, 3) + \dots + N(n-1, n)) && \binom{n}{2} \text{ led med fortegn } - && \\
 & + (N(1, 2, 3) + \dots + N(n-2, n-1, n)) && \binom{n}{3} \text{ led med fortegn } + && \\
 & \dots && && \\
 & + (-1)^{r-1} (N(1, 2, \dots, r) + \dots + N(n-r+1, \dots, n)) && \binom{n}{r} \text{ led med fortegn } (-1)^{r-1} && \\
 & \dots && && \\
 & (-1)^{n-1} N(1, 2, \dots, n) && (1 \text{ led med fortegn } (-1)^{n-1}) &&
 \end{aligned}$$

(Det er en sum af ialt $2^n - 1$ led, som beskrevet i kommentarerne til højre; skrives leddene som vist i n rækker er leddene i den r 'te række alle de $\binom{n}{r}$ egenskabsantal $N(i_1, i_2, \dots, i_r)$ for r egenskaber, og de optræder i summen med fortegnet $(-1)^{r-1}$.)

Bevis. Formelen vises ved at kontrollere, at et objekt fra U , der ikke har nogle af egenskaberne ikke påvirker summen, medens et objekt, der har en eller flere af egenskaberne $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ bidrager med præcis 1 til summen. Dette løse udsagn skal forstås med »god vilje«. Det er måske en hjælp at forestille sig, at objekterne fra U undersøges ét efter ét, eller, at det på basis af en tællesituation, hvor formelen er korrekt, udledes, at formelen også er korrekt efter tilføjelse af et enkelt element.

Et objekt, der ikke har nogle af egenskaberne $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ tælles slet ikke af de $2^n - 1$ tællestørrelser $N(\cdot, \dots, \cdot)$, og bidrager derfor med 0 til summen.

Et bestemt objekt x med en eller flere af egenskaberne $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ har et bestemt sæt af egenskaberne, fx de r egenskaber: $\mathcal{E}_{i_1}, \mathcal{E}_{i_2}, \dots, \mathcal{E}_{i_r}$ (og ikke andre), altså svarende til indekssættet $\{i_1, \dots, i_r\}$. Dermed kan bidraget fra x til tællestørrelserne gøres op. Blandt de n led i udtrykets første række er objektet x talt med af tællestørrelsen $N(j)$ præcis for de j som opfylder $j \in \{i_1, \dots, i_r\}$, altså ialt $r = \binom{r}{1}$ gange. Blandt de $\binom{n}{2}$ led i anden række er x talt med i tællestørrelsen $N(j, k)$ netop når j, k er forskellige og opfylder $j, k \in \{i_1, \dots, i_r\}$, altså ialt $\binom{r}{2}$ gange. Og således videre. I den m 'te række, når $m \leq r$, tælles x med i netop de $\binom{r}{m}$ led, hvor alle m egenskabsindices tilhører $\{i_1, \dots, i_r\}$. Specielt i den r 'te række tælles x med i præcis 1 led, nemlig af tællestørrelsen $N(i_1, \dots, i_r)$. I de følgende rækker, med numre $m = r+1, \dots, n$ (hvis der er sådanne) tælles x ikke med, da uanset valg af m blandt egenskaberne, x ikke har dem alle.

Det samlede bidrag b til beregningsudtrykket fra x kan derfor gøres op, idet bidraget fra den m 'te række er $\binom{r}{m}$, for $m = 1, 2, \dots, r$, altså, når der tages hensyn til fortegn:

$$\begin{aligned}
 b &= \binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \dots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r} \\
 &= \binom{r}{0} - \binom{r}{0} + \binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \dots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r} \\
 &= 1 - \left(\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \dots + (-1)^r \binom{r}{r} \right) \\
 &= 1 - (1 + (-1))^r = 1,
 \end{aligned}$$

hvor den næstsidste identitet følger af binomialformlen. ■

Hvis det samlede antal af objekter i U er kendt, så kan formelen fra sætningen bruges til at bestemme antallet af objekter fra U , der *ikke har* nogle af egenskaberne $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ (ikke én eneste), ved subtraktion. Denne udgave af resultatet formuleres i korollaret nedenfor. Ved anvendelser kan det være praktisk at slå tællestørrelserne sammen efter antallet af egenskaber de tæller. I videreførelse af betegnelserne ovenfor defineres antallene $N_0, N_1, N_2, \dots, N_n$ ved

$$\begin{aligned} N_0 &= |U|, \quad (\text{når dette antal er kendt}), \\ N_1 &= N(1) + N(2) + \dots + N(n), \\ N_2 &= N(1, 2) + N(1, 3) + \dots + N(n-1, n), \\ &\dots \\ N_r &= N(1, 2, \dots, r) + \dots + N(n-r+1, \dots, n), \\ &\dots \\ N_n &= N(1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

(Hvor mange led indgår, for $r = 1, 2, \dots, n$, i summen til beregning af N_r ?)

Korollar. Med betegnelserne indført ovenfor gælder, at antallet af objekter fra U , der ikke har nogle af egenskaberne $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$, altså antallet af objekter tilhørende overskudsmængden $U \setminus (\bigcup_{i=1,2,\dots,n} A_i)$, er givet ved:

$$N_0 - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^r N_r + \dots + (-1)^n N_n. \quad (15.3)$$

Bevis. Dette følger af sætningen ved subtraktion. ■

15.3 Anvendelser. Her følger et par eksempler på optælling ved inklusion og eksklusion.

Eksempel 1. Det ønskes bestemt, hvor mange af tallene $2, 3, \dots, 1000$, der har formen x^k , for hele tal $x, k \geq 2$, altså er kvadrattal, kubiktal, 4. potenser, osv.

Mængden U af objekter, indenfor hvilken der tælles, er tallene $2, 3, \dots, 1000$, og der benyttes egenskaber $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \dots$, hvor et tal n har egenskaben \mathcal{E}_k , hvis $n = x^k$ for et helt tal $x \geq 2$, altså, hvis n er en k 'te potens. Da $2^{10} = 1024 > 1000$ er kun egenskaberne \mathcal{E}_k , for $k = 2, 3, \dots, 9$, relevante for objekterne i U . Med betegnelser som i sætningen er det søgte antal:

$$\begin{aligned} &N(2) + N(3) + \dots + N(9) \\ &- (N(2, 3) + N(2, 4) + \dots + N(8, 9)) \\ &+ (N(2, 3, 4) + \dots + N(7, 8, 9)) \\ &\dots \\ &- N(2, \dots, 9) \end{aligned}$$

Hver af tællestørrelserne $N(\cdot)$ findes nogenlunde let: Antallet af positive kvadrattal, inklusive 1, der er mindre end et tal M er jo $\lfloor \sqrt{M} \rfloor$, og derfor er $N(2) = \lfloor \sqrt{1000} \rfloor - 1$; tilsvarende er $N(m) = \lfloor \sqrt[m]{1000} \rfloor - 1$, for $m = 3, \dots, 9$, hvilket giver værdierne:

m	2	3	4	5	6	7	8	9
$N(m)$	30	9	4	2	2	1	1	1

Tællestørrelserne for 2 og flere egenskaber kan findes ved at bemærke, idet $\text{mfm}(j, k)$ betegner det *mindste fælles multiplum* af j og k , at, for eksempel, $N(j, k) = N(\text{mfm}(j, k))$; betegner m tallet $\text{mfm}(j, k)$ er det klart, at et tal af formen x^m er såvel en j 'te potens som en k 'te potens;

og omvendt er et tal som er både en j 'te potens og en k 'te potens en m 'te potens. Tilsvarende gælder for et vilkårligt sæt af egenskaber, at $N(i_1, \dots, i_r) = N(\text{mfm}(i_1, \dots, i_r))$ (se også opgave 15.2). Alle andre end nedenstående fleregenskabsantal er 0, fordi det tilsvarende mindste fælles multiplum er 10 eller mere:

$$\begin{aligned} N(2, 3) &= N(2, 6) = N(3, 6) = N(2, 3, 6) = N(6), & N(2, 4) &= N(4), \\ N(3, 9) &= N(9), & N(2, 8) &= N(4, 8) = N(2, 4, 8) = N(8). \end{aligned}$$

Det søgte antal er derfor:

$$30 + 9 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 - (2 + 4 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1) + (2 + 1) = 40. \quad \square$$

Bemærkning. Ved optælling via inklusion og eksklusion, der i sagens natur er noget involveret, og derfor kræver en del »overhead« i form af betegnelser og diverse hjælpeovervejelser, bør det på forhånd vurderes om besværet ved at sætte maskineriet op med notation mv. kompenseres af fordelene ved en mere »robust« optælling end en direkte manuel optælling.

I den forelagte tællesituation: Optælling af rene potenstal mellem 2 og 1000, kan opgaven løses ved at gennemgå – eller er det løbe? – kvadrattal, kubiktal, 4. potenser og således videre, op til 9. potenser (den mindste 10. potens er jo 1024, som er > 1000), og undervejs kun tælle tal, der *ikke* er mødt tidligere, fx ved at sætte gengangere i parentes. Først de 30 kvadrattal: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961; herefter 7 nye kubiktal: 8, 27, (64), 125, 216, 343, 512, (729), 1000; alle 4. potenser er gengangere: (16), (81), (256), (625); begge 5. potenser er nye: 32, 243; begge 6. potenser er gengangere: (64), (729); den ene 7. potens: 128 er ny; både den ene 8. potens: (256), og den ene 9. potens: (512) er set før; altså ialt $30 + 7 + 2 + 1 = 40$.

Var opgaven i stedet at tælle de rene potenstal mellem 2 og 100 giver den tilsvarende fremgangsmåde de 9 kvadrattal: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100; derefter 2 nye kubiktal: 8, 27, (64), medens begge 4. potenser: (16), (81) er gengangere, og 1 ny 5. potens: 32, medens den ene 6. potens: (64) er set før; altså ialt $9 + 2 + 1 = 12$. \square

Eksempel 2. For et givet naturligt tal m skal antallet af primiske restklasser modulo m , altså antallet af med m primiske tal blandt $0, 1, \dots, m - 1$, bestemmes. Dette antal er værdien $\varphi(m)$ af Eulers φ -funktion i tallet m , se TAL 6.11 og TAL 6.15 i Algebrabogen.

Optællingen foregår via inklusion og eksklusion i varianten fra korollaret: mængden af objekter er tallene $0, 1, \dots, m - 1$, hvis elementantal er m , og de benyttede egenskaber svarer til de primtal p , der går op i m , én eller flere gange. Lad derfor p_1, p_2, \dots, p_n betegne de forskellige primdivisorer i m ; et tal k blandt $0, 1, \dots, m - 1$ siges at have egenskaben \mathcal{E}_i , for et $i = 1, 2, \dots, n$, hvis $p_i | k$. Dermed gælder, at et tal $k \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ er primisk med m hvis og kun hvis det *ikke* besidder nogle – én eller flere – af disse egenskaber. Ved inklusion og eksklusion fås derfor, med standardbetegnelserne:

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= m - (N(1) + N(2) + \dots + N(n)) \\ &\quad + (N(1, 2) + N(1, 3) + \dots + N(n - 1, n)) \\ &\quad - (N(1, 2, 3) + \dots + N(n - 2, n - 1, n)) \\ &\quad \dots \\ &\quad (-1)^n N(1, \dots, n). \end{aligned}$$

Her er det let at finde tællestørrelserne: $N(i)$ er jo antallet af tal fra $\{0, 1, \dots, m - 1\}$, der er delelige med p_i , altså $\frac{m}{p_i}$; tilsvarende gælder for et vilkårligt sæt af r af egenskaberne, fx bestemt ved primtallene $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}$, at $N(i_1, i_2, \dots, i_r)$ er antallet af tal fra $\{0, 1, \dots, m - 1\}$, der er delelige med alle primtallene: $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}$, og dette er antal er jo $\frac{m}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_r}}$.

Indsættes disse værdier i udtrykket fås:

$$\begin{aligned}\varphi(m) &= m - \left(\frac{m}{p_1} + \frac{m}{p_2} + \dots + \frac{m}{p_n}\right) \\ &\quad + \left(\frac{m}{p_1 p_2} + \frac{m}{p_1 p_3} + \dots + \frac{m}{p_{n-1} p_n}\right) \\ &\quad - \left(\frac{m}{p_1 p_2 p_3} + \dots + \frac{m}{p_{n-2} p_{n-1} p_n}\right) \\ &\quad \dots \\ &\quad (-1)^n \frac{m}{p_1 p_2 \dots p_n} \\ &= m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).\end{aligned}$$

(Efter en del omordning. Det er måske lettere at regne tilbage, altså konstatere, at ved at udføre multiplikationen i det sidst anførte udtryk, og skrive alle led på nær det første som brøker, fås netop samtlige 2^n led, med korrekte fortegn, i det foregående udtryk!) \square

15.4 Antal løsninger til visse heltalsligninger (fortsat). For lang, lang tid siden blev antallet af løsninger til visse heltalsligninger bestemt som binomialkoefficienter, se afsnit 3.6.

Dengang var det afgørende, at det drejede sig om løsninger i ikke-negative hele tal; med brug af optælling ved inklusion og eksklusion er det nogenlunde let at bestemme antallet af løsninger, hvor de ubekendte opfylder tosidede uligheder. Metoden fremgår af følgende eksempel.

Eksempel. Antallet af sæt af løsninger (x_1, x_2, x_3) i hele tal x_i til ligningen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20,$$

som opfylder ulighederne:

$$1 \leq x_1 \leq 5, \quad 2 \leq x_2 \leq 7, \quad \text{og} \quad 3 \leq x_3 \leq 9,$$

ønskes beregnet.

Antallet bestemmes i to skridt. Første skridt er en slags normalisering af de nedre grænser. Med nye variable (y_1, y_2, y_3) , der blot er translaterede udgaver af de givne: $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 - 2$, og $y_3 = x_3 - 3$, og den tilsvarende modificerede højreside i ligningen, er det søgte antal det samme som antallet af løsningssæt (y_1, y_2, y_3) til ligningen $y_1 + y_2 + y_3 = 14$, der opfylder ulighederne:

$$0 \leq y_1 \leq 4, \quad 0 \leq y_2 \leq 5, \quad \text{og} \quad 0 \leq y_3 \leq 6.$$

Her er det umiddelbart – med brug af resultatet fra afsnit 3.6 – at bestemme antallet af løsninger (y_1, y_2, y_3) i ikke-negative tal y_i , altså antallet af løsninger, hvor der *ikke tages hensyn til* de øvre grænser! Dette antal er binomialkoefficienten: $\binom{14+2}{2} = 120$.

Andet skridt *inddrager de øvre grænser* på raffineret måde! For mængden U af løsninger (y_1, y_2, y_3) i ikke-negative hele tal y_i til ligningen $y_1 + y_2 + y_3 = 14$ indføres 3 egenskaber, og de tilsvarende mængder af løsninger betegnes A_1, A_2 og A_3 . En løsning (y_1, y_2, y_3) har den i 'te egenskab, eller tilhører A_i , hvis den i 'te koordinat *ikke opfylder* den tilsvarende øvre ulighed, altså hvis $y_1 \geq 5$ (for $i = 1$), eller $y_2 \geq 6$ (for $i = 2$), eller $y_3 \geq 7$ (for $i = 3$).

Antallet af løsninger tilhørende A_i bestemmes – som i første skridt – ved at renormalisere hver af koordinaterne (én efter én), og man finder: $|A_1| = \binom{9+2}{2} = 55$, $|A_2| = \binom{8+2}{2} = 45$, og $|A_3| = \binom{7+2}{2} = 36$. Antallene af løsninger med to af egenskaberne findes på tilsvarende måde ved parvis renormalisering af koordinaterne: $|A_1 \cap A_2| = \binom{3+2}{2} = 10$, $|A_1 \cap A_3| = \binom{2+2}{2} = 6$, og $|A_2 \cap A_3| = \binom{1+2}{2} = 3$. Sluttelig ses, at $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ fordi $5 + 6 + 7 = 18 > 14$.

Sammenfattende giver optælling ved inklusion og eksklusion, at der er:

$$120 - (55 + 45 + 36) + (10 + 6 + 3) - 0 = 3$$

løsningsæt, der opfylder de givne uligheder. (Det er faktisk: (4, 7, 9), (5, 6, 9), og (5, 7, 8).) \square

15.5 Forbedret optælling ved inklusion og eksklusion. Undervejs i argumentet for formelen for optælling via inklusion og eksklusion blev det udnyttet, hvordan et objekt med præcis r af de betragtede egenskaber bidrager til det store sumudtryk. Denne detaljerede information indgår ikke direkte i formelen, og går dermed på en måde tabt; i det følgende vises, hvordan den kan gøres eksplicit i formler, der generaliserer (15.2) og (15.3).

Eksempel 1. For det i afsnit 15.1 diskuterede eksempel er de sammenfattende antal N_i , der blev defineret i afsnit 15.2, summer af de givne tællestørrelser:

$$N_1 = |E| + |F| + |T| = 18 + 9 + 12 = 39,$$

$$N_2 = |E \cap F| + |E \cap T| + |F \cap T| = 6 + 5 + 5 = 16, \text{ og}$$

$$N_3 = |E \cap F \cap T| = 2.$$

Ved den direkte manuelle optælling blev implicit antallene af personer med hvert muligt mønster af sprogkunderskab bestemte. Idet e_i , for $i = 1, 2, 3$, betegner antallet af personer, der behersker præcis i af de 3 sprog, kan de fundne antal (se tegningen) sammenfattes til:

$$e_1 = 9 + 0 + 4 = 13,$$

$$e_2 = 4 + 3 + 3 = 10, \text{ og}$$

$$e_3 = 2.$$

Der består en tilsyneladende mystisk relation mellem de to talsæt (N_1, N_2, N_3) og (e_1, e_2, e_3). Ved nærmere eftersyn forsvinder mystikken dog, og erstattes af indsigt i, hvad der er på færde ved optælling via inklusion og eksklusion (især hvilken rolle binomialformelen spiller). Dette finder et særlig klart udtryk via to polynomier: Idet $n(x)$ betegner polynomiet, hvor N_k er koefficient til x^k , og $e(x)$ tilsvarende er polynomiet, hvor e_k er koefficient til x^k , gælder:

$$n(x) = 2x^3 + 16x^2 + 39x, \quad \text{og} \quad e(x) = 2x^3 + 10x^2 + 13x.$$

Ved at erstatte x med $x + 1$ i udtrykket for $e(x)$ fås via binomialformelen:

$$\begin{aligned} e(x+1) &= 2(x+1)^3 + 10(x+1)^2 + 13(x+1) \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 + 10x^2 + 20x + 10 + 13x + 13 \\ &= 2x^3 + 16x^2 + 39x + 25 = n(x) + 25. \end{aligned}$$

Resultatet er polynomiet $n(x)$, dog med konstantled = 25, der er det samlede antal personer. \square

Det er fristende at forfølge – og forsøge at forstå – disse sammentræf! Antag som i afsnit 15.2 givet en mængde U af objekter, og et sæt $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ af egenskaber; hvert objekt i U enten *har* eller *har ikke*, egenskaben \mathcal{E}_i , og som før er alle tællestørrelserne $N(i_1, i_2, \dots, i_r)$ kendte, i det mindste i form af de sammenfattende tællestørrelser N_r . Som noget nyt (og ligesom i korollaret) tænkes også antallet af objekter i U kendt, betegnet N_0 . I analogi med eksemplet indføres et sæt (e_0, e_1, \dots, e_n) af – indtil videre ukendte – antal, hvor e_k , for $k = 0, 1, 2, \dots, n$, betegner *antallet af objekter fra U , der har eksakt k af de betragtede egenskaber*. Da hvert objekt i U har et bestemt antal af egenskaberne $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$, gælder, at:

$$N_0 = e_0 + e_1 + \dots + e_n.$$

Der er mange andre identiteter mellem (N_0, N_1, \dots, N_n) og (e_0, e_1, \dots, e_n) , og de kan sammenfattes »elegantly« via polynomierne $n(x)$ og $e(x)$, der har disse talsæt som koefficienter, altså

$$n(x) = \sum_{k=0}^n N_k x^k, \quad \text{og} \quad e(x) = \sum_{k=0}^n e_k x^k.$$

Sætning. Med disse betegnelser gælder: $n(x) = e(x + 1)$.

Bevis. Sættet af sammenfattende tællestørrelser (N_0, N_1, \dots, N_n) kan udtrykkes ved sættet af eksakte tællestørrelser (e_0, e_1, \dots, e_n) via nedenstående ligning:

$$N_r = \sum_{t=r}^n \binom{t}{r} e_t, \quad \text{for } r = 0, 1, \dots, n.$$

Dette fås ved, for et givet r at gå efter, hvordan et objekt med et bestemt antal t af egenskaberne bidrager til N_r . Blandt objekter med præcis s af egenskaberne, hvor $s < r$, bidrager ingen til N_r . Hvert objekt, der har præcis s af egenskaberne, hvor $s \geq r$, tælles af $N(i_1, \dots, i_r)$ hvis og kun hvis det har egenskaberne $\mathcal{E}_{i_1}, \dots, \mathcal{E}_{i_r}$, hvilket er tilfældet $\binom{s}{r}$ gange, og dermed bidrager hvert sådant objekt til N_r ialt $\binom{s}{r}$ gange. (Denne overvejelse svarer til den »centrale« optælling i beviset for tælleformelen (15.2).)

Herefter er det let at udtrykke polynomiet $n(\cdot)$ ved polynomiet $e(\cdot)$,

$$\begin{aligned} n(x) &= \sum_{k=0}^n N_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{t=k}^n \binom{t}{k} e_t \right) x^k \\ &= \sum_{t=0}^n e_t \left(\sum_{k=0}^t \binom{t}{k} x^k \right) \\ &= \sum_{t=0}^n e_t (1+x)^t \\ &= e(1+x). \end{aligned}$$

(Den tredje identitet fås ved ombytning af rækkefølgen af de to summationer.) ■

Bemærkninger. Sætningens ligning mellem de to polynomier er faktisk *formelen for optælling ved inklusion og eksklusion*, og *en del mere*, fordi den også koder information for de eksakte objektantal. Den udtrykker, at polynomiet $e(\cdot)$ med variabelen erstattet af $x + 1$ giver $n(x)$, eller ensbetydende hermed, at polynomiet $n(\cdot)$ med variabelen erstattet med $x - 1$ giver $e(x)$, altså $e(x) = n(x - 1)$. Koefficienten til x^k i $e(x)$, det eksakte antal e_k , er altså også koefficienten til x^k i $n(x - 1)$, og kan således bestemmes fra sættet (N_0, N_1, \dots, N_n) . Sættes $x = 0$ i ligningen $e(x) = n(x - 1)$ fås:

$$e_0 = N_0 - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^n N_n,$$

der jo er tælleformelen (15.3) fra korollaret i afsnit 15.2. Også den primære tælleformel følger let: Antallet af objekter med én eller flere af egenskaberne er jo: $e_1 + e_2 + \dots + e_n$, der ved ligningen ovenfor er: $N_0 - e_0$, altså den alternerende sum:

$$N_1 - N_2 + \dots + (-1)^{n-1} N_n.$$

Men der er meget mere information til rådighed: Koefficienten til x^k i polynomiet $e(x)$, altså koefficienten til x^k i $n(x - 1)$, kan findes, idet

$$n(x - 1) = \sum_{r=0}^n N_r (x - 1)^r = \sum_{r=0}^n N_r \left(\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} x^k (-1)^{r-k} \right) = \sum_{k=0}^n x^k \left(\sum_{r=k}^n \binom{r}{k} N_r (-1)^{r-k} \right),$$

altså:

$$e_k = \sum_{r=k}^n \binom{r}{k} N_r (-1)^{r-k}. \quad (15.4)$$

En hovedpointe ved alle formlerne er, at de eksakte antal (e_0, e_1, \dots, e_n) , der kan være vanskelige at bestemme, kan udtrykkes ved »større end eller lig«-antallene fra sættet (N_0, N_1, \dots, N_n) , som i mange tilfælde er lette(re) at finde. \square

Eksempel 2. Tidligere er antallet af permutationer uden fikspunkter blevet bestemt – via en rekursion. Nu er det let at lave en fuldstændig *fikspunktsstatistik* for permutationer.

Det benyttede *tælleunivers* U har som *objekter* alle permutationer af $\{1, 2, \dots, n\}$, for et fast $n \geq 2$, og der betragtes n *egenskaber*, hvor den r 'te egenskab, for $r = 1, 2, \dots, n$, for en permutation π af $\{1, 2, \dots, n\}$ er, at r er *fikspunkt* for π , altså, at $\pi(r) = r$.

For en delmængde $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ er tællestørrelsen $N(S)$, altså antallet af permutationer, der har alle elementer af S som fikspunkter (og muligvis andre), lig antallet af permutationer af de $n - |S|$ elementer udenfor S , altså $(n - |S|)!$. Herfra kan N_r 'erne, for $r = 1, 2, \dots, n$, beregnes:

$$N_r = \sum_{|S|=r} N(S) = \sum_{|S|=r} (n - |S|)! = \binom{n}{r} (n - r)! = \frac{n!}{r!}.$$

Polynomiet $n(x)$ er derfor:

$$n(x) = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!} x^r = n! \sum_{r=0}^n \frac{x^r}{r!},$$

der, på nær faktoren $n!$, er Taylor-polynomiet af grad n for eksponentialfunktionen.

De eksakte tællestørrelser e_k kan aflæses heraf, idet e_k er koefficienten til x^k i polynomiet $n(x - 1)$, altså i polynomiet

$$n! \sum_{r=0}^n \frac{(x - 1)^r}{r!}.$$

Benyttes det færdige udtryk (15.4) for e_k fås:

$$e_k = \sum_{r=k}^n \binom{r}{k} \frac{n!}{r!} (-1)^{r-k} = \frac{n!}{k!} \sum_{r=k}^n \frac{(-1)^{r-k}}{(r-k)!}.$$

Indsættes $k = n$, og $k = n - 1$, heri fås:

$$e_n = \frac{n!}{n! 0!} = 1, \quad \text{og} \quad e_{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \right) = 0,$$

hvilket er korrekt (hvorfor?). Endvidere ses, at for alle $k \leq n - 1$ hæver leddene for $r = n - 1$ og $r = n$ hinanden. Antallet af permutationer uden fikspunkter fås for $k = 0$,

$$e_0 = n! \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{r!} = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right),$$

og i almindelighed, for $k = 0, 1, \dots, n - 2$, gælder

$$e_k = \frac{n!}{k!} \sum_{r=k}^n \frac{(-1)^{r-k}}{(r-k)!} = \frac{n!}{k!} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} \right).$$

Som taleksempel udregnes størrelserne e_i , for $n = 6$, til

j	0	1	2	3	4	5	6
e_j	265	264	135	40	15	0	1

De 135 permutationer af $\{1, 2, \dots, 6\}$, der har præcis 2 fikspunkter, er de 45 dobbeltranspositioner (type $1^2 2^2$) og de 90 fire-cykler (type $1^2 4^1$). Kontroller selv de øvrige antal! \square

Opgaver

(15.1) Overvej, hvad der kunne ske, hvis de i en tællesituation oplyste værdier for tælle størrelserne ikke er korrekte, altså enten er meddelt eller opfattet med fejl.

(15.2) Vis, at hvert positivt helt tal, der er både en j 'te potens og en k 'te potens, for naturlige tal $k, j \geq 2$, også er en m 'te potens, hvor $m = \text{mfm}(j, k)$ er mindste fælles multiplum af j og k .

(15.3) Udregn $\varphi(m)$ og angiv de primiske restklasser modulo m , for $m = 60$; og for $m = 45$.

(15.4) Lad m, n være naturlige tal.

(a) Vis, at antallet af *surjektive* afbildninger af $\{1, 2, \dots, m\}$ ind i $\{1, 2, \dots, n\}$ er givet ved:

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 1^m.$$

(b) Gør rede for, at dette antal er 0 for $n > m$, og $m!$, når $m = n$; kontroller, at regneudtrykket giver dette, for $n = 5$ og $m = 4$, samt for $m = n = 5$.

(c) Udfør en direkte optælling i situationen, hvor $m = n + 1$, og kontroller i det konkrete tilfælde: $m = 3$, og $n = 2$.

(15.5) Opstil et regneudtryk for antallet af »bridgehænder« med mindst ét kort i hver farve.

(15.6) Betragt ligningen $x_1 + x_2 + x_3 = 30$ i hele tal x_i .

(a) Find antallet af løsningssæt (x_1, x_2, x_3) for hvilke $0 \leq x_i \leq 20$, for $i = 1, 2, 3$.

(b) Find antallet af løsningssæt (x_1, x_2, x_3) for hvilke $0 \leq x_1 \leq 20$.

(c) Find antallet af løsningssæt (x_1, x_2, x_3) for hvilke $x_1 \leq 20$, $0 \leq x_2$, og $0 \leq x_3 \leq 50$.

(15.7) Lav fikspunktsstatistik for permutationer af $\{1, 2, \dots, 5\}$, og af $\{1, 2, \dots, 7\}$, og kontroller de fundne antal via direkte optælling af antal permutationer af de enkelte cykeltyper.

Kapitel 16

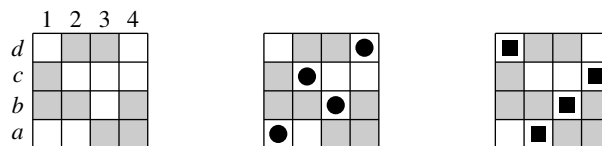
Tårnpolynomier

I mange tællesituationer er der givet to typer objekter, altså to endelige mængder X og Y , med *sammenknytninger* mellem visse par af objekter $x \in X$ og $y \in Y$; objekter og sammenknytninger kan være af utallige slags, men idéen er, at visse par (x, y) er *tilladte*, eller brugbare, mens andre er *ikke-tilladte*, eller ikke-brugbare. Et vigtigt kombinatorisk problem for en sådan tællesituation, nemlig at bestemme *hvorvidt* hvert af objekterne fra den ene mængde, fx X , kan *få tildelt*, eller *danne par med*, et objekt fra Y , der respekterer de ved sammenknytningerne givne betingelser for tilladte par, og desuden til forskellige objekter $x \in X$ knytter forskellige objekter $y \in Y$, er afklaret via *bryllupssætningen*, se kapitel 14.

Der kan mere generelt spørges om antallet af sådanne *parringer*. Emnet for kapitlet er indførelse af en *abstrakt tællemodel* til behandling af sådanne tælleopgaver. Som ofte tidligere drejer det sig om at udforme en begrebsramme, der gør det muligt at se bort fra tælleopgavens konkrete detaljer, men samtidig gør det let at argumentere robust via modellens intuitivt enkle objekter. Tællemodellen her benytter de såkaldte *tårnpolynomier*. Af de to ord antyder det første, at modellen benytter en vis – beskeden – intuition om tårnes opførsel i skak; at der er tale om polynomier henviser til, at den underliggende tælleopgave »administreres« via diverse polynomier. Alt dette er nok på nuværende tidspunkt ganske mystificerende, så det er bedre at komme i gang.

16.1 Brætter og tilladte parringer. Tællemodellen benytter en *grafisk kodning* af de *tilladte par*. Et kvadratisk, eller rektangulært, *skakbrætliggende* mønster af småkvadrater, et for hvert element (x, y) i produktet $X \times Y$, koder via en hvid, henholdsvis grå, markering af hvert småkvadrat, hvorvidt det tilsvarende par er tilladt – et hvidt felt, eller ikke-tilladt – et gråt felt.

Eksempel. Figuren til venstre viser et første simpelt bræt. Mængderne er $X = \{1, 2, 3, 4\}$, og $Y = \{a, b, c, d\}$, og brættet, der koder de tilladte par har 8 tilladte (hvide) felter, nemlig svarende til parrene: $(1, a)$, $(1, d)$, $(2, a)$, $(2, c)$, $(3, b)$, $(3, c)$, $(4, c)$, $(4, d)$.



For det meste er det blot det abstrakte bræt, der er vigtigt for tælleopgaven, og den konkrete tilordning af felter til par af objekter er delvis irrelevant; derfor udelades for det meste navne på objekter, som det er tilfældet på de to sidste figurer i eksemplet ovenfor.

Det basale spørgsmål om eksistens, og antal, af parringer fra X til Y , der respekterer de ved mønsteret af hvide/grå felter specificerede tilladte par, behandles via en skakmetafor på følgende måde: *En parring fra X til Y er et valg, for hvert element $x \in X$ af et element $y = \varphi(x) \in Y$, således, at to forskellige elementer $x, x' \in X$ tilknyttes to forskellige elementer $\varphi(x), \varphi(x') \in Y$, og således at alle par $(x, \varphi(x))$ er tilladte.* En sådan parring kan kodes via en mærkning af felterne på brættet, med præcis ét mærke i hver søjle (for hvert $x \in X$), og højst ét mærke i hver række, og på en sådan måde, at alle mærker befinder sig i hvide felter. Figuren ovenfor i midten viser, med sorte cirkler som mærker, parringen: $(1, a)$, $(2, c)$, $(3, b)$, $(4, d)$.

En sådan mærkning minder om en opstilling af skakbrikker på et skakbræt; kravet, at hver søjle indeholder præcis ét mærke, og hver række højst ét, giver association til den måde skaktårne slår på, i en situation, hvor alle brikker kæmper mod hinanden, og der derfor højst kan placeres ét tårn i hver række, og hver søjle, i en *ikke-truende konfiguration*; det er nok for en nærmere betragtning »ret langt ude«, men modellen er god til støtte for intuitionen.

Udtrykt matematisk er en *parring* fra X til Y , der respekterer brættets tilladte felter, en *injektiv afbildning* $\varphi : X \rightarrow Y$, så $\varphi(x)$, for $x \in X$, tilhører mængden $\{y \in Y \mid (x, y) \text{ er tilladt}\}$. Afbildningen φ bestemt ved midterfigurens sorte cirkler (i eksemplet) svarer til afbildningstabellen til venstre. Det egentlige spørgsmål vedrører antallet af sådanne parringer; for brættet i eksemplet viser figuren til højre, med sorte kvadrater, en anden parring; den svarer til afbildningen $\psi : X \rightarrow Y$ givet ved tabellen til højre:

x	1	2	3	4
$\varphi(x)$	a	c	b	d

x	1	2	3	4
$\psi(x)$	d	a	b	c

I det ovenstående simple eksempel er det nogenlunde let at overbevise sig om, at der er netop disse to nævnte injektive afbildninger, som respekterer brættets mønster af tilladte felter; for større mængder X og Y er det i de fleste tilfælde ganske uoverskueligt. Én af pointerne med tårnpolynomier er at støtte simple algoritmer, hvormed antallet af parringer kan beregnes.

16.2 Tårnpolynomium for et bræt. Lad der være givet et bræt B som beskrevet ovenfor; det kan gerne forudsættes at være kvadratisk, fx af størrelse $n \times n$, for et naturligt tal n (se bemærkningen nedenfor), og det afgørende ved B er dets mønster af hvide/grå felter (småkvadrater).

Definition. For et helt tal $k \geq 0$ er en *ikke-truende k -tårnkonfiguration* på et bræt en opstilling af k tårne på brættet, så hver række og hver søjle indeholder højst ét tårn. Polynomiet, af grad $\leq n$, af formen:

$$r_B(x) = 1 + r_1x + r_2x^2 + \dots + r_kx^k + \dots, \quad (16.1)$$

hvor koefficienten r_k til x^k , for $k = 1, 2, 3, \dots$, er antallet af ikke-truende k -tårnkonfigurationer på tilladte felter af brættet B , kaldes *tårnpolynomiet for brættet B* .

Koefficienten til x^0 i $r_B(x)$, altså konstantleddet $= 1$, kan også fortolkes som antallet af ikke-truende 0-tårnkonfigurationer; der er nemlig 1 sådan, den tomme, omfattende 0 tårne. Det er normalt *aldrig* værdien af tårnpolynomiet $r_B(x)$, der belyser en kombinatorisk problemstilling; derimod er organiseringen af sættet af antal $(r_0, r_1, r_2, r_3 \dots)$, hvor $r_0 = 1$, som koefficienter i polynomiet $r_B(x)$ afgørende på grund af *analogien* mellem operationer med brætter og simple manipulationer med de tilhørende tårnpolynomier; mere herom i det følgende.







Bemærkning. Brættet B kan forudsættes kvadratisk; hvis en konkret tælleopgave fører til et *ikke-kvadratisk* bræt opnås et kvadratisk bræt ved at tilføje et passende antal helt grå rækker eller søjler, og sådanne tilføjede rækker/søjler ændrer ikke koefficienterne i tårnpolynomiet, fordi de tilføjede felter ikke rummer tårne ved en tårnkonfiguration på tilladte felter.

Et bræt B og det bræt B' , der fås ved at *spejle* B om en af brættets *diagonaler* har samme tårnpolynomium; der er nemlig en bijektiv korrespondance mellem ikke-truende konfigurationer af k tårne på tilladte felter af B og ikke-truende konfigurationer af k tårne på tilladte felter af brættet B' (lad tårnene følge med under spejlingen).

Et bræt B og hvert bræt B' , der fås ved at skære B op rækkevis (eller søjlevis) og samle disse efter en permutation, med bevarelse af venstre/højre orientering (eller med bevarelse af op/ned orientering) har samme tårnpolynomium. Dette ses på samme måde som for spejling. \square

For alle brætter B på nær de allersimpleste, er det ganske tungt at beregne det tilhørende tårnpolynomium $r_B(x)$. Det er dog klart, at et bræt med udelukkende grå – ikke-tilladte – felter, uanset størrelse, har det konstante polynomium 1 som tårnpolynomium. Videre angiver førstegradsleddet, altså koefficienten til x^1 , antallet af tilladte felter på B .

Nedenfor følger tårnpolynomierne for alle – i det væsentlige forskellige – ikke-trivielle 1×1 og 2×2 brætter. Der er naturligvis ialt $4^2 = 16$ brætter af størrelse 2×2 ; med 1 gråt felt er der 4, med 2 grå er der 6, hvoraf 2 har de grå felter anbragt diagonalt, og 4 har de to grå felter i samme række eller søjle; med 3 grå felter er der 4 brætter.

					
$1 + x$	$1 + 4x + 2x^2$	$1 + 3x + x^2$	$1 + 2x + x^2$	$1 + 2x$	$1 + x$

I almindelighed er det besværligt at beregne tårnpolynomiet for et forelagt bræt B ved direkte optælling af ikke-truende k -tårnkonfigurationer, for de relevante værdier af k . Og uden en passende valgt – og fulgt – strategi for systematisk optælling går det ikke!

Eksempel. Eksplicit optælling af ikke-truende tårnkonfigurationer for det i indledningen viste bræt kunne fx foregå på følgende måde, idet de hvide felter nummereres fortløbende oppefra og mod højre som vist her:

1			2
3	4	5	
	6		
7	8		

Antallet af ikke-truende 2-tårnkonfigurationer bestemmes ved at skelne mellem placeringen af det *første* (i den valgte nummereringsrækkefølge) af de to tårne.

Med det første tårn på 1 kan det andet stå ikke-truende på: 3, 4, 5, 6, 8; dette symboliseres som $1 \rightarrow 3, 4, 5, 6, 8$ (tilsvarende i det følgende; overvej selv, at der ikke er yderligere muligheder!); $2 \rightarrow 3, 4, 6, 7, 8$; $3 \rightarrow 6, 7$; $4 \rightarrow 7, 8$; $5 \rightarrow 6, 7, 8$; $6 \rightarrow 7, 8$. Altså ialt 19 ikke-truende 2-tårnkonfigurationer. Tilsvarende tælles ikke-truende 3-tårnkonfigurationer ved at skelne mellem placeringen af de to første tårne: $(1, 3) \rightarrow 6$; $(1, 4) \rightarrow 8$; $(1, 5) \rightarrow 6, 8$; $(1, 6) \rightarrow 8$; $(2, 3) \rightarrow 6, 7$; $(2, 4) \rightarrow 7, 8$; $(2, 6) \rightarrow 7, 8$; $(3, 6) \rightarrow 7$; $(5, 6) \rightarrow 7, 8$, altså ialt 14 ikke-truende 3-tårnkonfigurationer.

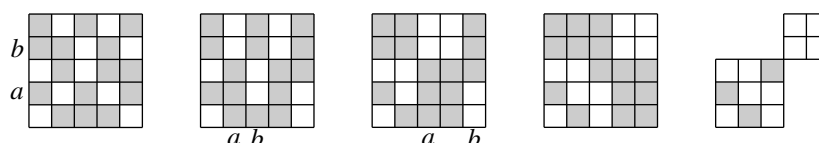
Der er 2 ikke-truende 4-tårnkonfigurationer, da der ved en sådan skal stå ét tårn i hver række og i hver søjle. Sammenfattende er tårnpolynomiet altså: $1 + 8x + 19x^2 + 14x^3 + 2x^4$. \square

16.3 Produktformelen – deling af bræt i uafhængige delbrætter. Som det foregående eksempel antyder er det for større brætter *ikke* i almindelighed muligt at beregne tårnpolynomiet ved direkte optælling! I det følgende forklares en *tårnpolynomiumsbergningsalgoritme*, der er baseret på en *rekursionsformel* (se næste afsnit), som udtrykker tårnpolynomiet for et bræt B via tårnpolynomier for to brætter, hver med færre tilladte felter end B , og derfor hver for sig med tårnpolynomier, der er lettere at beregne end tårnpolynomiet for B . Denne algoritme kombineres typisk med »turbo«-beregningsskridt, når der undervejs mødes brætter med en særlig struktur:

Definition. Lad B være et bræt. En ægte og ikke tom delmængde C af brættets rækker (eller søjler) udgør et delbræt, og de øvrige rækker (henholdsvis søjler) fra B udgør et bræt, der betegnes D . Dette par (C, D) udgør en **opdeling** af B , og det siges, at denne opdeling består af **uafhængige dele**, hvis det for vilkårlige to tårne, hvoraf det ene er anbragt på et tilladt felt fra C og det andet er anbragt på et tilladt felt fra D , gælder, at de står i forskellige rækker og i forskellige søjler.

Det er afgørende at forstå betingelsen ovenfor: Lidt mere mundret er den, at ingen række og ingen søjle har tilladte felter i begge de to dele. Det er ikke noget krav, at rækkerne, der udgør C er de k øverste, og D de $n - k$ nederste, men situationen er naturligvis bedst overskuelig, når dette er tilfældet, og enhver opdeling kan gives denne form efter *permutation* af rækkerne, hvilket jo giver et bræt med samme tårnpolynomium som det givne bræt.

Eksempel 1. Det kan være svært at få øje på en opdeling af et bræt i uafhængige delbrætter. Tegneserien nedenfor viser fra venstre mod højre, hvorledes ombytning af passende valgte søjler/rækker, mærket a , b , fører fra ét bræt til et simplere bræt vist som det næste mod højre:



Det fjerde 5×5 bræt har en opdeling i uafhængige delbrætter, fx bestående af de 2 øverste rækker, henholdsvis de 3 nederste. Til højre er vist de kvadratiske delbrætter, der fås, når rækker/søjler, med lutter grå felter, fjernes fra de to brætdele. \square

Beregningen af tårnpolynomiet for et bræt B , der kan opdeles i to uafhængige dele, forenkles via følgende observation: For et givet k er en ikke-truende k -tårnkonfiguration på B af én af ialt $k + 1$ typer (i almindelighed er mange af disse typer *umulige* på det givne bræt). Da der ingen *trusselsmuligheder* findes mellem to tårne anbragt på hver sin af de to dele, må de k tårne fordeles med et vist antal på C og de øvrige på D (altså $0 + k$, eller $1 + (k - 1)$, eller, osv. $(k - 1) + 1$, eller $k + 0$, på henholdsvis C og D). Her viser polynomiumssynspunktet sin styrke.

Beviset for sætningen nedenfor benytter den velkendte måde, hvorpå produktet af to polynomier $p(x)$ og $q(x)$ beregnes. Koefficienten til x^k i produktpolynomiet $p(x)q(x)$ er summen af alle produkter af formen $a_j \cdot b_{k-j}$, for $j = 0, 1, \dots, k$, af koefficienten a_j til x^j i polynomiet $p(x)$ med koefficienten b_{k-j} til x^{k-j} i polynomiet $q(x)$.

Sætning. Lad B være et bræt, der tillader en opdeling (C, D) i uafhængige dele. Så gælder om tårnpolynomierne for B , C , og D , produktformelen, at

$$r_B(x) = r_C(x) \cdot r_D(x).$$

Bevis. Idet $(1, c_1, c_2, \dots)$ og $(1, d_1, d_2, \dots)$ betegner koefficientsættene i $r_C(x)$ og $r_D(x)$ kan koefficienten r_k til x^k i tårnpolynomiet $r_B(x)$, dvs. antallet af ikke-truende k -tårnkonfigurationer på B , beregnes som:

$$r_k = 1 \cdot d_k + c_1 \cdot d_{k-1} + c_2 \cdot d_{k-2} + \dots + c_{k-1}d_1 + c_k \cdot 1.$$

En ikke-truende k -tårnkonfiguration på B er nemlig som nævnt af én af $k + 1$ typer: enten med alle k tårne på D og altså ingen på C , eller med $k - 1$ tårne på D og 1 tårn på C , eller med $k - 2$ tårne på D og 2 tårne på C , og således videre, sluttende med den $(k + 1)$ 'te type, hvor ingen tårne står på D og alle k tårne derfor står på C . Antallene af ikke-truende k -tårnkonfigurationer af de enkelte typer er netop produkterne i regneudtrykket ovenfor til højre: de ialt k tårne kan opstilles ikke-truende på B , med j af tårnene på C og de resterende $k - j$ på D , på ialt $c_j \cdot d_{k-j}$ måder; da intet tårn på C kan true et tårn på D , er dette antal nemlig c_j (antallet af måder, for j tårnes anbringelse på C) gange d_{k-j} (antallet af måder for $k - j$ tårnes anbringelse på D). \blacksquare

Eksempel 2. Tårnpolynomiet for et $n \times n$ bræt B_n med præcis n tilladte felter anbragt i hoveddiagonalen har følgende simple form:

$$r_{B_n}(x) = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Dette indses let direkte: vilkårlige k tårne anbragt på B_n -tilladte felter er placeret i k forskellige rækker og k forskellige søjler, og derfor uden indbyrdes »trusler«; antallet af anbringelsesmåder er derfor antallet af valg af k blandt de n rækker (søjlerne er da også fastlagte).

Produktformlen kan benyttes i et simpelt induktionsbevis. For $n = 1$ gælder, at $r_{B_1}(x) = 1 + x$, og antages induktivt, at $r_{B_m}(x) = (1 + x)^m$ for et $m \times m$ bræt (af den beskrevne beskaffenhed), finder man for et $(m + 1) \times (m + 1)$ bræt, at den øverste række er uafhængig af resten af brættet, og derfor via produktformlen: $r_{B_{m+1}}(x) = (1 + x)(1 + x)^m = (1 + x)^{m+1}$. \square

16.4 Rekursionsformlen. Den systematiske komponent i *algoritmen for beregning af tårnpolynomier* er baseret på den mest nærliggende tællemetode: For et givet bræt B fokuseres på et tilladt felt, der fx betegnes s . En ikke-truende k -tårnkonfiguration på B er da af én af to typer: enten står ét af de k tårne på feltet s , eller ingen af de k tårne står på s . For den førstnævnte type står alle øvrige $k - 1$ tårne på rækker og søjler, der *ikke* indeholder feltet s .

For at håndtere denne opdeling af tårnkonfigurationerne indføres to hjælpebrætter; det ene, der betegnes E , fås fra B ved at gråmarkere feltet s , altså gøre s til et ikke-tilladt felt, medens det andet, der betegnes F fås fra B ved at gråmarkere alle felter i den række og i den søjle, der indeholder s , altså gøre alle felter, der kan trues af et tårn på s , ikke-tilladte. Det er måske en hjælp at forestille sig brættet F som det bræt, der fås fra brættet B ved at fjerne hele den række og hele den søjle, der indeholder feltet s , som det gøres i det illustrerende eksempel efter sætningen nedenfor (hvis s er et hjørnefelt fjernes blot en yderrække og en ydersøjle; hvis s er et yderfelt, men ikke et hjørnefelt, bevirker fjernelse af rækken, eller søjlen, indeholdende s , at brættet falder i to dele, der blot samles langs det fjernede; hvis s er et indre felt på B falder brættet i fire dele, der kan tænkes samlet på tilsvarende måde).

Sætning. Med disse betegnelser gælder om tårnpolynomierne for B , E , og F , at

$$r_B(x) = r_E(x) + x \cdot r_F(x).$$

Bevis. Det drejer sig om at vise, at koefficienten til x^k er den samme i $r_E(x) + x \cdot r_F(x)$ som i $r_B(x)$, for $k = 0, 1, 2, \dots$. Dette er klart (overvej selv!) for $k = 0, 1$. Antag derfor $k > 1$. Koefficienten til x^k i $r_B(x)$ er jo antallet af ikke-truende k -tårnkonfigurationer på B , der som allerede nævnt er af to typer, og deres antal altså summen af de to typers enkeltantal.

En ikke-truende k -tårnkonfiguration på B , hvor ingen af de k tårne benytter feltet s , er naturligvis en ikke-truende k -tårnkonfiguration på E , og omvendt; mere præcist: der er en bijektiv korrespondance mellem mængden af ikke-truende k -tårnkonfigurationer på B , der *ikke* har et tårn på s , og mængden af ikke-truende k -tårnkonfigurationer på E . Derfor er antallet af disse (i begge formuleringer) koefficienten til x^k i tårnpolynomiet $r_E(x)$.

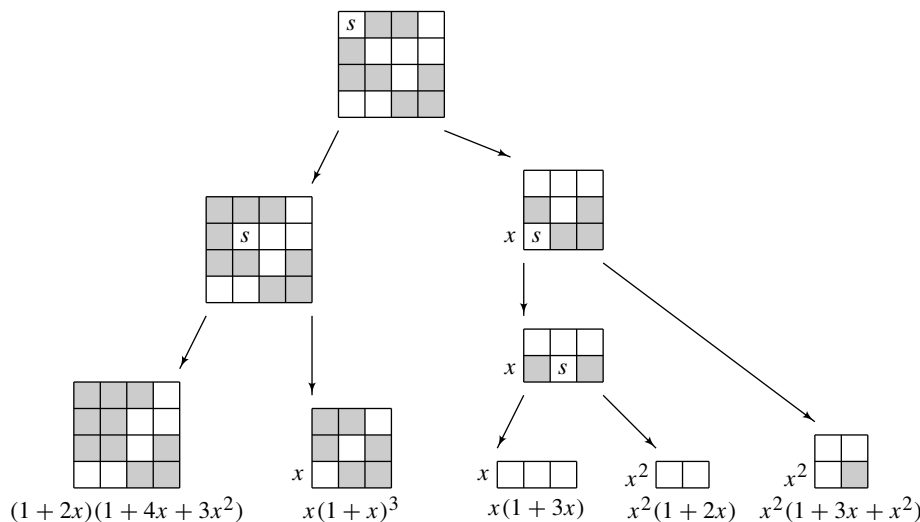
Tilsvarende er der en bijektiv korrespondance mellem mængden bestående af ikke-truende k -tårnkonfigurationer på B , der har et tårn på s , og mængden af ikke-truende $(k - 1)$ -tårnkonfigurationer på F . Denne bijektive korrespondance er bestemt ved for en ikke-truende k -tårnkonfiguration på B , med et tårn på s , at fjerne tårnet på s , hvilket giver en ikke-truende $(k - 1)$ -tårnkonfiguration på F ; omvendt, fra en ikke-truende $(k - 1)$ -tårnkonfiguration på F , fås en ikke-truende k -tårnkonfiguration på B , der har et tårn på s , ved at »opstille« et tårn på s ; derved dannes *ikke* en situation hvor to tårne på B står i samme række eller samme søjle: på brættet F er jo alle felter i rækken, og i søjlen, med feltet s , grå, og derfor står der ved en ikke-truende $(k - 1)$ -tårnkonfiguration på F intet tårn i den pågældende række, og intet tårn i den pågældende søjle.

Sammenfattende er derfor antallet af ikke-truende k -tårnkonfigurationer på B , med et tårn på feltet s , altså antallet af ikke-truende $(k - 1)$ -tårnkonfigurationer på F , der jo netop er koefficienten til x^{k-1} i tårnpolynomiet $r_F(x)$ for F ; koefficienten til x^{k-1} i polynomiet $r_F(x)$ er naturligvis lig med koefficienten til x^k i polynomiet $x \cdot r_F(x)$, hvilket giver påstanden. \blacksquare

Eksempel 1. Tårnpolynomiet for et $n \times n$ bræt B_n med præcis n tilladte felter anbragt i hoveddiagonalen beregnes også simpelt ved rekursionsformlen (og induktion). Fokuseres på ét af

de tilladte felter, fx det i øverste række (og første søjle), ses, at begge de afledte brætter (E og F), når der ses bort fra rækker og søjler uden tilladte felter, har formen B_{n-1} , og derfor gælder: $B_n(x) = B_{n-1}(x) + x \cdot B_{n-1}(x) = (1+x)B_{n-1}(x)$. \square

Eksempel 2. Tårnpolynomiet for det i indledningen viste 4×4 bræt B kan nu beregnes via en slags tegnealgoritme. I hvert algoritmeskridt er det felt s , som benyttes ved opspaltningen i simple brætter, markeret; med en pil, der går nedad og til venstre vises det bræt, der fås ved at gøre det valgte felt gråt, og med pilen nedad til højre vises tilsvarende brættet, der fås ved at gråmarkere alle felter i rækken og i søjlen som indeholder det valgte felt. Rækker og søjler som derved omfatter udelukkende grå felter fjernes »stiltiende«.



Processen fortsættes indtil alle tårnpolynomierne for de dannede brætter kan beregnes direkte ved »hovedregning«, eller på anden måde er kendte – dette er naturligvis stærkt subjektivt. De brætter, der er dannet ved at slette en række og en søjle bidrager til det oprindelige bræts tårnpolynomium efter multiplikation med en potens x^k , hvor k er antallet af gange, der er slettet en række og en søjle fra det oprindelige bræt. På tegningen holdes der regnskab med disse ekstra potenser af x ved at skrive en faktor x (og gentagne som potenser af x) til venstre for brættet.

I eksemplet er de effektive bidrag til det oprindelige tårnpolynomium skrevet under slutbrætterne i tegningens nederste linje, og sammenfattende findes tårnpolynomiet derfor til:

$$r_B(x) = (1+2x)(1+4x+3x^2) + x(1+x)^3 + x(1+3x) + x^2(1+2x) + x^2(1+3x+x^2).$$

hvilket stemmer med resultatet fra den tidligere foretagne manuelle optælling – kontrollér selv! \square

Bemærkning. Det er vel næsten overflødig at gøre opmærksom på den strukturelle, der består mellem på den ene side metoden i rekursionsformlen for beregning af tårnpolynomier via *gråning* af et tilladt felt, og *fjernelse* af rækken og søjlen indeholdende det pågældende felt, og på den anden side metoden for beregning af kromatiske polynomier, se kapitel 13, baseret på *tilføjelse* af en ikke-realiseret kantmulighed, og *sammenrækning* af de involverede knuder.

16.5 Optælling via komplementbræt. Som nævnt er der sjældent – måske aldrig – behov for at benytte et tårnpolynomiums *værdier* for konkrete x . Desuden er det især koefficienten til højstegradsleddet i tårnpolynomiet for et bræt, der har tællermæssig interesse: koefficienterne til led af lavere grad »slæbes med« under beregningerne. Disse koefficienter har imidlertid en afgørende og nyttig funktion i forbindelse med beregningen af højstegradsleddet i tårnpolynomiet for det bræt, der fås fra et forelagt bræt, ved at gøre hvide felter grå, og omvendt.

Definition. Det til et bræt B hørende **komplementære bræt**, som betegnes \overline{B} , er det bræt, der fås fra B ved at gøre de hvide felter på B grå, og gøre de grå felter på B hvide.

Der består en – ved første blik – næsten mystisk forbindelse mellem koefficienten til højste-gradsleddet i tårnpolynomiet for \overline{B} , og sættet af koefficienter i tårnpolynomiet for B . Præcist:

Sætning. Antag, at B er et $n \times n$ bræt med tårnpolynomium:

$$r_B(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 + \dots + r_kx^k + \dots + r_nx^n.$$

Da er koefficienten \overline{r}_n til x^n i tårnpolynomiet for \overline{B} givet ved:

$$\overline{r}_n = r_0 \cdot n! - r_1 \cdot (n-1)! + \dots + (-1)^k r_k \cdot (n-k)! + \dots + (-1)^n r_n \cdot 0!. \quad (16.2)$$

(Udtrykket er en alternerende sum, af ialt $n+1$ led, indiceret af $k = 0, 1, \dots, n$, startende med fortegn $+$ for $k = 0$; leddene har form: koefficienten til x^k i $r_B(x)$ ganget med $(-1)^k(n-k)!$.)

Bevis. Påstanden følger via optælling ved inklusion og eksklusion for en mængde af abstrakte objekter og et system af egenskaber, som disse objekter *har* eller *ikke har*.

Mængden af objekter T er de ikke-truende n -tårnkonfigurationer på B , hvor der *ikke* tages hensyn til om tårnene står på hvide eller grå felter. Hvert objekt $\tau \in T$ har præcis ét tårn i hver række, og hver søjle, af B ; antallet af elementer i T er $|T| = n!$, da tårnet i den første række kan placeres på n måder, for hver af disse kan tårnet i den anden række placeres på $n-1$ måder, osv.

De egenskaber, der benyttes ved optællingen, afhænger af brættet B . Hvert hvidt (tilladt) felt på B giver anledning til en egenskab for objekter τ fra T , nemlig, at τ har et af sine tårne stående på det pågældende felt. Betegnes de hvide felter på B med s_1, s_2, \dots, s_m (der er altså m hvide felter), kan den j 'te egenskab \mathcal{E}_j for τ udtrykkes, at τ har et tårn placeret på s_j . Intet objekt kan have $n+1$ eller flere af egenskaberne, da hvert τ jo omfatter præcis n tårne; endvidere, egenskaber \mathcal{E}_i og \mathcal{E}_j svarende til to (forskellige) felter s_i og s_j i samme række eller samme søjle, indehaves aldrig begge af et objekt τ .

Det søgte antal, altså antallet af ikke-truende n -tårnkonfigurationer, hvor alle n tårne står på \overline{B} -tilladte felter, er dermed antallet af objekter τ i T , der har præcis 0 af egenskaberne – dette betyder jo, at ingen af tårnene i τ står på B -tilladte felter.

Idet N_k , for $k = 0, 1, \dots, n$, betegner de sammenfattende tællestørrelser, se afsnit 15.2, altså summen af tællestørrelserne for alle udvalg af k af egenskaberne, og $N(S)$ for en delmængde $S \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ betegner antallet af objekter med egenskaberne fra S , ses, at

$$N_k = \sum_{\substack{S \subseteq \{s_1, s_2, \dots, s_m\} \\ |S| = k}} N(S) = r_k(n-k)!$$

Hver opstilling af k ikke-truende tårne på B bidrager nemlig med $(n-k)!$ til denne sum: Når S svarer til de k felter på B , hvor de k tårne er anbragt, er k af de n rækker, og tilsvarende k af de n søjler, fastlagt for n -tårnkonfiguration τ , og de øvrige $n-k$ søjler, og rækker, for τ kan vælges på $(n-k)!$ måder.

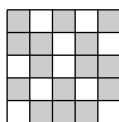
Påstanden, at antallet af objekter med præcis 0 af de betragtede egenskaber er den alternerende sum (16.2) følger nu af formelen i korollaret i afsnit 15.2. ■

Bemærkninger. Mængden T i beviset er »i virkeligheden« permutationer af $\{1, 2, \dots, n\}$; nummereres rækkerne og søjlerne med tallene $1, 2, \dots, n$ fås fra en permutation π af $\{1, 2, \dots, n\}$ et element $\tau \in T$ ved at sætte tårnene på felterne $(j, \pi(j))$, for $j = 1, 2, \dots, n$; omvendt bestemmer $\tau \in T$ direkte permutationen $i \mapsto \tau(i)$, hvor for $\tau \in T$, nummeret på den entydigt bestemte søjle, hvori tårnet i den i 'te række står, betegnes $\tau(i)$.

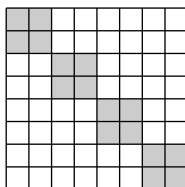
Algoritmen for beregning af tårnpolynomiet for et kvadratisk bræt giver således en metode til at bestemme *antallet af permutationer, der opfylder betingelser specificeret ved brættet*. □

Opgaver

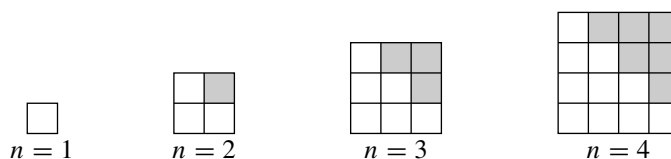
- (16.1) Kan et polynomium $p(x)$ være både kromatisk polynomium for en graf, og tårnpolynomium for et bræt?
- (16.2) Bestem tårnpolynomiet for komplementet til brættet i det indledende eksempel.
- (16.3) Bestem tårnpolynomiet for et $n \times n$ bræt med præcis ét hvidt (tilladt) felt i hver række, og ét tilladt felt i hver søjle (et *permutationsbræt*, jf. begrebet *permutationsmatrix*).
- (16.4) a) Bestem tårnpolynomiet $R_{m,n}(x)$ for et $m \times n$ bræt med lutter tilladte felter.
 b) Vis, at der gælder: $R_{m,n}(x) = R_{m-1,n}(x) + nxR_{m-1,n-1}(x)$.
 c) Vis, at der gælder: $\frac{d}{dx}R_{m,n}(x) = mnR_{m-1,n-1}(x)$.
- (16.5) Find tårnpolynomiet for et $n \times n$ bræt med et enkelt gråt felt (for $n \geq 2$).
- (16.6) Angiv to essentielt forskellige små brætter med samme tårnpolynomium. (Forskellige betyder: pånær opskæring og efterfølgende permutering af rækker og eller søjler.)
- (16.7) Find tårnpolynomiet for brættet (se eksempel 1 i afsnit 16.3):



- (16.8) Bestem antallet af ikke-truende 8-tårnkonfigurationer for brættet:



- (16.9) Lad B_n , for $n \geq 1$, betegne $n \times n$ brættet, hvor de tilladte felter er alle felterne på eller under diagonalen. Udregn tårnpolynomierne for B_n , for $n = 1, 2, 3, 4$ (brætterne er vist nedenfor).



Forsøg at se et mønster i disse polynomier, og formuler på basis heraf en *formel* for $r_{B_n}(x)$, gældende for alle $n \geq 2$. Vis dernæst denne formel.

Svar og kommentarer til opgaver

1.1 Der er $n(n - 1)$ sådanne par, fx via optælling ved multiplikation; for hvert $x \in X$ er der nemlig $n - 1$ elementer i mængden $X \setminus \{x\}$. Eller bemærke, at der er n^2 par ialt i $X \times X$, og præcis n af disse har ens »koordinater«, og derefter optælling ved subtraktion.

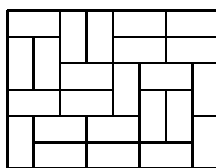
1.2 (a) et skuffesystem med n skuffer, hvor den j 'te skuffe kategoriserer de to muligheder j og $2n + 1 - j$, for $j = 1, 2, \dots, n$.

(b) et skuffesystem med n skuffer, hvor den j 'te skuffe kategoriserer de to muligheder $2j - 1$ og $2j$, for $j = 1, 2, \dots, n$ (to tal med forskel 1 er primiske).

(c) et skuffesystem med n skuffer, hvor den j 'te skuffe kategoriserer det j 'te ulige tal, $2j - 1$, for $j = 1, 2, \dots, n$; hvert af de givne hele tal x skrives på formen $x = u2^k$, hvor u er ulige, og tallet x kategoriseres derefter i den til u svarende skuffe.

1.3 Det er klart, at for et naturligt tal m gælder, at m er lige (ulige) hvis og kun hvis m^2 er lige (ulige). Desuden er et lige kvadrat kongruent med 0 modulo 4, og et ulige kvadrat er kongruent med 1 modulo 4; derfor er summen af to ulige kvadrattal et lige tal, der er kongruent med 2 modulo 4, altså ikke et kvadrat.

1.4 Der findes utvivlsomt mange! Her er et – endda med egenskaben, at hver »snitlinje« skærer præcis to brikker: er dette et tilfælde?



1.5 Der er mange! Følgen af længde 4 givet ved 3, 4, 1, 2 har længste monoton delfølge af længde 2; og følgen af længde 9 givet ved 7, 8, 9, 4, 5, 6, 1, 2, 3 har længste monoton delfølge af længde 3. Prøv at konstruere en tilsvarende følge af længde $n = 100$.

1.6 Dette følger ved et simpelt induktionsbevis; eller bemærke, idet summen betegnes S , at

$$S - Sx = 1 + x + x^2 + \dots + x^n - (1 + x + x^2 + \dots + x^n)x = 1 - x^{n+1},$$

fordi summen teleskoperer, og formlen følger, når $x \neq 1$, ved division med $1 - x$.

1.7 Dette følger ved et simpelt induktionsbevis; eller, når $x \neq 1$, fra den foregående opgave:

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

hvoraf ved differentiation, og efterfølgende multiplikation med x , at

$$\sum_{k=1}^n kx^k = x \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \right) = x \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x - 1)^2}.$$

1.8 De to udtryk er begge summen af samtlige led $a_{i,j}$, for $(i, j) \in T$.

2.1 Dette følger ved direkte udregning!

2.2 Den konstante funktion 1, og den identiske afbildning af \mathbb{N} , og potensfunktionerne $n \mapsto n^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{N}$) er multiplikative.

Hver divisor d i produktet mn er, når m og n er primiske, på entydig måde produkt af en divisor i m og en divisor i n .

2.3 Med $m = 9$ mulige ciffersymboler til de $n = 8$ pladser er der $9^8/8! = \frac{16!}{8! \cdot 8!}$ voksende 8-cifrede tal (ciffrer 0 kan jo ikke forekomme).

2.4 Ved at læse et voksende ord »bagfra« fås et aftagende ord, og omvendt. Der er $m^{\overline{n}}/n!$ voksende ord, og samme antal aftagende ord. Antal monotone ord er dermed to gange antal voksende ord minus antal konstante ord, der tælles med begge steder.

2.5 Det er måske lettest at få bragt specialtilfældene ud af verden først!

2.6 Det er jo én af pointerne med et positionstalssystem.

2.7 Der er $(n - 1)!$ cykliske rækkefølger af n objekter. Det er nok enklest at bemærke, at af ialt $n!$ almindelige rækkefølger af n objekter giver præcis n anledning til den samme cykliske rækkefølge. Eller forestille sig, at pladserne er nummerede $1, 2, \dots, n$, fx med uret rundt, hvor altså plads n efterfølges af plads 1, og placere objekterne enkeltvis: det første objekt sættes på plads 1. Plads nummer 2 kan besættes på $n - 1$ måder; for hver af disse kan plads 3 besættes på $n - 2$ måder; og således videre; den sidste plads må besættes af det n 'te objekt (1 måde).

2.8 Det kan måske være til hjælp at tænke på 5-cifrede binære tal, eller delmængder, herunder ægte og ikke-tomme, af $\{a, b, c, d, e\}$.

2.9 Hvis den forelagte mængde X har $n \geq 1$ elementer, fx indiceret x_1, x_2, \dots, x_n , kan benyttes en slags »bit-map« til beskrivelse af en delmængde: hvert binært skrevet tal b_1, b_2, \dots, b_n af længde n , altså med ialt n cifre (bit) b_i , der alle er 0 eller 1, læses som en beskrivelse af den tilsvarende delmængde $A \subseteq X$, hvor $x_i \in A$ hvis og kun hvis $b_i = 1$. Med denne kodning af delmængder er den leksikografiske ordning af n -cifrede binære ord nærliggende.

2.10 De er 3152476 og 2471356.

2.11 Permutationerne med løbenumre $0, 1, \dots, (n - 1)! - 1$ har alle 0 på første plads, med løbenumre $(n - 1)!, \dots, 2(n - 1)! - 1$ er der 1 på første plads, osv. Blandt de $(n - 1)!$ permutationer med 0 på første plads, har de første $(n - 2)!$ et 1 på anden plads, osv. Listen over permutationer af $\{1, 2, 3, 4\}$ i afsnit 2.8 er måske instruktiv!

3.1 Udregning af højresiden for $k \geq 1$:

$$\frac{(x - 1)^k}{k!} + \frac{(x - 1)^{k-1}}{(k - 1)!} = \frac{(x - 1)^k + k(x - 1)^{k-1}}{k!} = \frac{x^k}{k!}.$$

Eller bemærke, at de to sider af ligningen begge er polynomier af grad k , og fordi formelen gælder for alle hele tal indsat for x , gælder formelen for alle x (to polynomier, der er ens for uendelig mange x -værdier, er ens, dvs. har samme sæt af koefficienter).

3.2 Det er nok set af de fleste allerede!

3.3 For $y = 0$ er binomialformelen blot $x^n = x^n$. For $y \neq 0$ anvendes den simplificerede binomialformel (3.16) med x erstattet af x/y , hvorefter multiplikation med y^n giver binomialformelen.

3.4 Overvej gitterdimensioner, og tæl gittervejene fra A til B ved at skelne mellem vejenes »retning« i det sidste skridt.

3.5 Rektanglet »bliver til« en kasse med 3-dimensionale akseparallelle gitterveje. Beskrives via ord med bogstaverne \emptyset , N, og O.

3.6 Det første løsningsæt er $(0, 0, \dots, 0, n)$, med $x_i = 0$ for $i = 1, 2, \dots, k - 1$, og $x_k = n$.

3.7 Højresiden udregnes, for $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} (-1)^k \binom{k-x-1}{k} &= (-1)^k \frac{(k-x-1)(k-x-2)\dots(-x+1)(-x)}{k!} \\ &= \frac{(x-k+1)(x-k+2)\dots(x-1)x}{k!} = \binom{x}{k}. \end{aligned}$$

3.8 Ved gentagen ekspansion via rekursionsformelen:

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m+1} = \dots$$

Delmængderne af $\{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$ med $m+1$ elementer kan opdeles og tælles efter hvorvidt det største element er $n+1, n, \dots$; der er jo $\binom{k}{m}$ måder at supplere $k+1$ med m tal blandt $\{1, \dots, k\}$ til at danne en sådan.

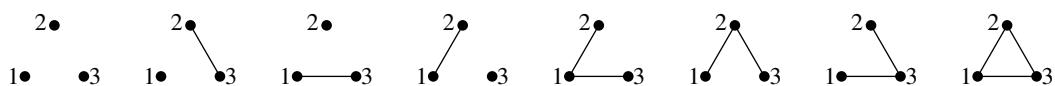
3.9 Vandermondes foldningsformel, for $m = n$, og symmetrien $\binom{n}{j} \binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}^2$.

Gittervejene i et kvadratisk gitter med $n+1$ vandrette og lodrette linjer kan indeles efter hvilket punkt på »diagonalen« de passerer.

3.10 Der er $\binom{5+3-1}{3-1} = 21$ sæt (k_1, k_2, k_3) af ikke-negative hele tal k_i , med sum $k_1+k_2+k_3 = 5$. Af de 21 sæt er der 3 med værdierne $(5, 0, 0)$ i en-eller-anden rækkefølge, dernæst 6 med værdierne $(4, 1, 0)$, og 6 med værdierne $(3, 2, 0)$, og 3 med værdierne $(3, 1, 1)$, og 3 med værdierne $(2, 2, 1)$. De tilsvarende trinomialkoefficienter er: 1 (3 gange), 5 (6 gange), 10 (6 gange), 20 (3 gange), og 30 (3 gange); summen af disse 21 tal er: $3 \cdot 1 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 30 = 243$.

4.1 Knude 7 er isoleret, medens alle de lige tal 2, 4, 6, 8, 10 er parvis forbundne (disse kanter udgør en K_5 med knudemængde 2, 4, 6, 8, 10), og ligeledes knuderne 3, 6, 9 (disse kanter udgør en $C_3 = K_3$ med knudemængde 3, 6, 9), samt endelig en kant mellem 5 og 10.

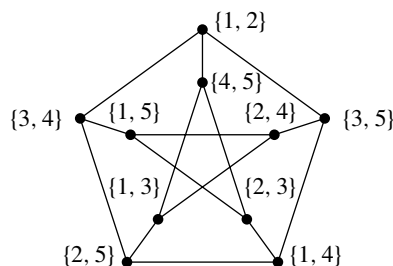
4.2 Den eneste graf med 1 knude er den trivielle; der er to grafer med 2 knuder, den tomme og den komplette. Med knuderne $\{1, 2, 3\}$ er der nedenstående 8 grafer, af fire isomorfityper:



4.3 Med n knuder er der $N := \binom{n}{2}$ kantmuligheder, og derfor 2^N forskellige grafer (hver kantmulighed kan være realiseret eller ikke). En kreds af længde m , hvor $3 \leq m \leq n$, er givet ved, dels de m knuder, der kan vælges på $\binom{n}{m}$ måder, dels ved den cykliske rækkefølge af dem, der kan fastlægges på $(m-1)!/2$ måder. Tilsvarende er en vej af længde $m-1$, hvor $2 \leq m \leq n$, givet ved, dels de m knuder, der kan vælges på $\binom{n}{m}$ måder, dels ved den rækkefølge, hvori de benyttes langs vejen, og denne kan fastlægges på $m!/2$ måder.

4.4 Det er en P_5 og en C_3 suppleret med en disjunkt kant P_2 .

4.5 Her er en tegning:



4.6 For en $K_{1,m}$ -graf med valens- m knuden som den første har kantmatricen 1-taller i første række og første søjle (pånær i diagonalen). For en kredsgraf med knuderne v_1, v_2, \dots, v_n har kantmatricen med rækker og søjler i den ved indiceringen bestemte rækkefølge 1-taller under diagonalen, og i nederste venstre hjørne (og er symmetrisk).

4.7 Den har længde $\leq 2 \min\{m, n\}$, specielt findes ingen kredse, hvis $m = 1$, eller $n = 1$.

4.8 Et træ med n knuder har valenssum $2n - 2$, og derfor mindst 2 knuder af valens 1.

4.9 Et træ med n knuder har $n - 1$ kanter, og komplementet til et træ har derfor $\binom{n}{2} - (n - 1)$ kanter; om et af de søgte n 'er gælder derfor, at $\binom{n}{2} - (n - 1) = n - 1$, eller $n(n - 1) = 4(n - 1)$, hvorefter enten $n = 1$ eller $n = 4$.

Den trivielle graf, svarende til $n = 1$, og en P_4 , svarende til $n = 4$ er træer for hvilke komplementet er et træ, der endda er isomorft med træet selv; træer med 4 knuder af den anden isomorfi-type $K_{1,3}$ har en 3-kreds samt en isoleret knude som komplement, hvilket ikke er et træ.

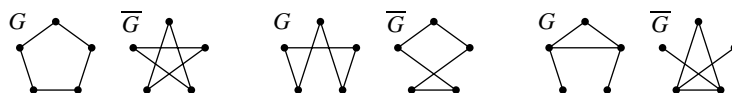
4.10 En knude med valens 0 er isoleret, og den eneste sammenhængende graf med en isoleret knude er den trivielle.

4.11 Ved at betragte længden af samtlige (u, v) -veje mellem forskellige knuder u, v , der er endeligt mange sådanne veje, kan en korteste vej findes (det kan sagtens forekomme, at der findes forskellige lige lange korteste (u, v) -veje).

Trekantsuligheden følger ved at sætte en korteste (v, w) -vej efter en korteste (u, v) -vej, og fra resultatet at fjerne eventuelle dobbeltknuder (og tage vare på diverse specialtilfælde).

4.12 Dette ses ved en variant af spadsereargumentet.

4.13 Af $|E| = |\overline{E}|$ følger, at $\binom{n}{2} = n(n - 1)/2$ er lige, altså, at $n(n - 1)$ er et multiplum af 4, dvs. enten n eller $n - 1$ er et multiplum af 4 (det ene af tallene er jo ulige, det andet lige). For $n = 4$ er en vejgraf P_4 isomorf med sit komplement. For $n = 5$ er en 5-kreds isomorf med sit komplement, og også en 3-kreds med to påmonterede kanter er isomorf med sit komplement, se tegningen nedenfor.



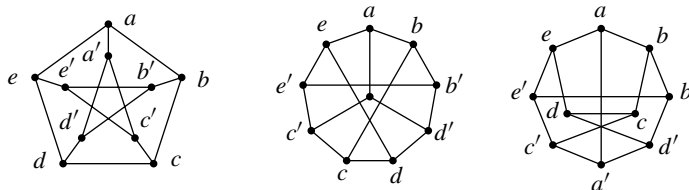
Det tredje par af en graf og dens komplement generaliserer til større værdier af n .

4.14 Med 3 blade, og med en knude af valens ≥ 3 , er der mindst 4 knuder. Brug dernæst fx, at valenssummen i et træ med n knuder er $2n - 2$. Nej, en vejgraf af længde 4 med en ekstra kant monteret i hver af vejgrafens valens-2 knuder, har 4 blade, men ingen knude af valens 4. At et træ med en knude af valens ≥ 4 har mindst 4 blade ses som før.

4.15 Dette følger ved at klippe en passende del af vandringens begyndelse fra og flytte afklippet hen efter resten af vandringen.

4.16 Ved fra en forelagt sammenhængende graf at fjerne en kant fra en eventuel kreds fås en sammenhængende graf med en kant færre. Fortsættes hermed til en kredsløs graf, altså et træ, refter, er der $n - 1$ kanter i restgrafen, og derfor var der ved processens start også mindst $n - 1$ kanter.

4.17 De er isomorfe, og faktisk blot andre inkarnationer af Petersen-grafen, se tegningen her, hvor mærkningen med knudenavne antyder isomorfierne (centerknuden i midtergrafen er a').



4.18 De er alle isomorfe; nedenstående tegninger viser hver graf med en fuldt optrukket 6-kreds og de øvrige kanter stiplede, som hjælp til at se isomorfin.

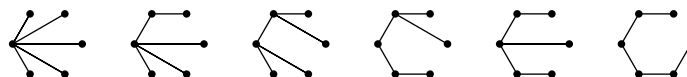


5.1 Her er a) en valensvektor for 20 træer, b) er *ikke* en valensvektor (summen er $11 \neq 2 \cdot 7 - 2$), og c) er valensvektor for 10 træer; antallet af træer fås af ligning (5.1).

5.2 Et af tallene $n - 1$ og alle andre = 1; brug ligning (5.1).

5.3 Der er 3 typer: vejtræer af længde 4 (ialt 60), vejtræer af længde 3 med en »sidegren« monteret på en af vejens valens-2 knuder (ialt 60), og stjernetræer, eller $K_{1,4}$ (ialt 5), og summen af disse antal er: $60 + 60 + 5 = 125 = 5^3$.

5.4 Der er 6 typer, med følgende antal: $6 + 90 + 120 + 360 + 360 + 360 = 1296 = 6^4$.



5.5 Et nærliggende træ kunne være som i eksempel 1 (afsnit 5.4) men med en kant 78 føjet til (med Prüfer-kode 447747).

5.6 Hvis der blev slået 6 seksere, er terningen med stor sandsynlighed uhæderlig, og der skal derfor slås om (med en anden terning)!

5.7 Med $n \geq 3$ knuder er alle $n - 2$ knudenavne i Prüfer-koden for et vejtræ forskellige, og deres rækkefølge koder knudernes rækkefølge i træet.

5.8 Nej, en Prüfer-kode har længde $n - 2 < n$.

5.9 Det er et vejtræ, eller »perler-på-snor«. Der er $n^{n-2} = n!/2$ ord af længde $n - 2$ med forskellige bogstaver fra alfabetet $\{1, 2, \dots, n\}$, og lige så mange træer, hvis Prüfer-kode består af indbyrdes forskellige bogstaver.

6.1 Alle krydspunkter har et lige antal streger til sig. Begrebet »tegning« er dog håbløst vagt!

6.2 Dette er klart!

6.3 Dette indses ved at prøve efter via den »forgrenende« fremgangsmåde. Det kan måske være en fordel at benytte den tegning af Petersen-grafen, der fremhæver den indeholdte 9-kreds (i en opgave til kapitel 4).

6.4 Først bemærkes, at k er lige (det gælder generelt, at antallet af knuder af ulige valens i en graf er lige). Prøv at kopiere idéen fra karakteriseringen af grafer med en ikke-lukket Euler-tur, ved at introducere $k/2$ »nye« knuder, og for hver af dem to kanter, en til hver af to af knuderne af ulige valens. Herefter haves en graf med alle knuder af lige valens, altså med en lukket Euler-tur, der skæres op ved igen at fjerne de $k/2$ nye knuder, og de k tilføjede kanter.

6.5 En tur består af lutter forskellige kanter, men to kanter e_1 og e_2 , der begge har u og v som endeknuder, kan forekomme i samme tur. En Euler-tur er en tur, der benytter alle kanter hver præcis én gang; en sammenhængende multigraf (hvad skal det betyde?) har en lukket Euler-tur hvis og kun hvis alle knuder har lige valens (hvad er mon valensen af en knude i en multigraf?).

6.6 For $k = 2$ er $00, 01, 11, 10$ en Hamilton-kreds; hvis v_0, v_1, \dots, v_n er en Hamilton-kreds for den k -dimensionale hyperterning (med $n = 2^k - 1$), er $0v_0, 0v_1, \dots, 0v_n, 1v_n, 1v_{n-1}, \dots, 1v_0$ en Hamilton-kreds i den $(k + 1)$ -dimensionale hyperterning.

6.7 De har en Hamilton-kreds hvis og kun hvis pq er lige (og en Hamilton-vej, når pq er ulige).

6.8 Knudeantallet $2d + 1$ er ulige, og derfor er den fælles knudevalens d lige. For $d = 0$ er kantmængden tom, og den tomme tur er en (slags) Euler-tur. Antag herefter $d > 0$. For to forskellige knuder u, v , der *ikke* er kant-forbundne, findes ifølge skuffeprikkippet en knude w så $uw, vw \in E$ (både u og v er forbundet med d forskellige knuder blandt $V \setminus \{u, v\}$), og derfor er G sammenhængende; og da alle knuder har lige valens findes en lukket Euler-tur.

6.9 Vilkårlige to knuder u, v , som *ikke* er kantforbundne, er hver forbundet til *alle andre* knuder, og derfor gælder: $\delta_u + \delta_v \geq |V| - 2 + |V| - 2 \geq |V|$ (det sidste fordi $|V| \geq 4$).

6.10 Lad u og v være to forskellige ikke-forbundne knuder i G . Der er højst

$$\binom{n-2}{2} = \frac{1}{2}(n-2)(n-3) = \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$$

kanter, hvor begge endeknuder tilhører $V \setminus \{u, v\}$. Alle øvrige kanter har enten u eller v som endeknude, og derfor kan valenssummen vurderes:

$$\delta_u + \delta_v \geq |E| - \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6) > \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4) - \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6) = n - 1,$$

altså $\delta_u + \delta_v \geq n$, og dermed har G en Hamilton-kreds.

For $n \geq 2$ har en K_{n-1} suppleret med en ekstra knude og en enkelt kant fra en af knuderne K_{n-1} -graf en ialt $\binom{n-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$ kanter, men naturligvis ingen Hamilton-kreds.

6.11 Alle knuder i G_1 har lige valens (og G_1 er sammenhængende).

Den »forgrenende« eftersøgning/kontrol af en eventuel Hamilton-kreds i G_2 kan udnytte både op/ned og højre/venstre symmetri (knuden tegnet øverst til højre er faktisk en »center-knude«), og den viser, at G_2 *ikke* har en Hamilton-kreds; eller G_2 er bipartit, med $6 + 8$ knuder.

6.12 Begge er bipartite, med et ulige antal knuder, og derfor *ikke* Hamilton-grafer.

6.13 For to forskellige knuder u, v , der *ikke* er kantforbundne, går samtlige kanter til de $|V| - 2$ øvrige knuder; uligheden $\delta_u + \delta_v \geq |V|$ udelukker $\delta_u = 0$, og $\delta_u = 1$, og medfører desuden (via skuffeprikkippet), at der findes en tredje knude w , så u og v begge har en kant til w .

7.1 Der gættes på et polynomium af formen: $an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$, hvilket ved indsætning ses at tilfredsstille rekursionen hvis og kun hvis

$$4a = 1, \quad 6a + 3b = 0, \quad 4a + 3b + 2c = 0, \quad \text{og} \quad a + b + c + d = 0,$$

altså hvis: $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$, og $d = 0$. Summen af de første n kubiktal er dermed $x_{n+1} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

7.2 For følgen $x_n := n^{\underline{k+1}}$ ses ved udregning, at for $n \geq 0$

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)n(n-1)\dots(n-k+1) - n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k) = (k+1)n^{\underline{k}}.$$

7.3 Især i eksempel (c) er den direkte beskrivelse af løsningsfølgerne langt mere instruktiv end den på løsningsformelen baserede.

7.4 De to løsningsfølger: $(1, 0, 6, 6, 42, 78, \dots)$ og $(0, 1, 1, 7, 13, 55, \dots)$. Den karakteristiske ligning er $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, der har rødderne: $\lambda = -2, 3$. Den første følge er: $x_n = \frac{3}{5}(-2)^n + \frac{2}{5}3^n$, den anden er: $x_n = -\frac{1}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n$.

7.5 De to løsningsfølger: $(1, 0, 2, 0, 4, 0, \dots)$ og $(0, 1, 0, 2, 0, 4, \dots)$. Den karakteristiske ligning er $\lambda^2 - 2 = 0$, der har rødderne: $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Den første følge er: $x_n = \frac{1}{2}(\sqrt{2}^n + (-\sqrt{2})^n)$, dvs. $x_{2k} = 2^k$, og $x_{2k+1} = 0$, og den anden er: $x_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}^{n+1} + (-\sqrt{2})^{n+1})$, dvs. $x_{2k} = 0$ og $x_{2k+1} = 2^k$.

7.6 De to løsningsfølger: $(1, 0, -2, -4, -4, 0, 8, 16, \dots)$ og $(0, 1, 2, 2, 0, -4, -8, -8, \dots)$. Den karakteristiske ligning er $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, med rødderne: $\lambda = 1 \pm i$.

7.7 For længde 6 skal blandt de 8 forstavelser af længde 3 undgås de 2 af formen $x01$.

For længde 7 skal blandt de 16 forstavelser af længde 4 undgås de 3 af formen $xy01$, dog pånær, at 0101 er ok.

For længde 8 (hvor $b_8 = 26$) skal blandt de 32 forstavelser af længde 5 undgås de 8 af formen $xyz01$, dog pånær, at de to forstavelser $x0101$ er ok.

7.8 For længde 4 alle $3^4 = 81$ ord pånær de ialt 6 af formerne $x012$ og $012x$. For længde 5 alle $3^5 = 243$ ord pånær de 3 gange 9 ord af formerne: $xy012$, $x012y$, og $012xy$. For længde 6 alle $3^6 = 729$ ord pånær de 4 gange 27 ord af formerne: $xyz012$, $xy012z$, $x012yz$, og $012xyz$, dog kompenseret for den dobbelte fratrækning af 012012 .

7.9 Af rekursionen findes: $D_5 = 44$, $D_6 = 265$, og $D_7 = 1854$.

For $n = 5$ er typerne 2^13^1 og 5^1 , med $20 + 24 = 44$ permutationer; for $n = 6$ er typerne 2^3 , 3^2 , 4^12^1 , og 6^1 , dvs. ialt $15 + 40 + 90 + 120 = 265$ permutationer; for $n = 7$ er typerne 2^23^1 , 2^15^1 , 3^14^1 , og 7^1 , med $210 + 504 + 420 + 720 = 1854$ permutationer.

7.10 De søgte antal findes som $\binom{7}{m}D_{7-m}$:

m	0	1	2	3	4	5	6	7
e_m	1854	1855	924	315	70	21	0	1

7.11 I den første sum, er det første led antallet af permutationer uden fikspunkter, det andet led er antallet af permutationer med præcis 1 fikspunkt, osv.

7.12 Det er vel næsten et projekt!

8.1 Rekursionen er $t_{n+2} = 3t_{n+1} - t_n$, for $n \geq 0$, og $t_0 = 0$, $t_1 = 1 (= F_2)$, henholdsvis $t_0 = 1$, og $t_1 = 3$.

8.2 Rekursionen er $t_{n+2} = 4t_{n+1} + t_n$, for $n \geq 0$.

8.3 Et 5×5 bræt kan på analog måde opskæres og samles til et 3×8 rektangel, hvor der altså er »forsvundet« et felt! Formulér selv det generelle resultat.

8.4 Der benyttes følgende hjælpebegreb: En fliselægning af længde $n \geq 2$ siges at *skille efter position* k , hvis positionerne k og $k + 1$ dækkes af forskellige fliser ($k = 1, 2, \dots, n - 1$), altså, hvis positionerne k og $k + 1$ ikke dækkes af én dobbeltflise. Nu til argumentet.

De ialt f_{m+n} fliselægninger af længde $m + n$ er af to typer: den ene består af fliselægninger, der skiller efter position m , og den anden består af fliselægninger, i hvilke en dobbeltflise dækker positionerne m og $m + 1$. Antallet af den første type fliselægninger er produktet af antal fliselægninger af den første del (af længde m), altså f_m , og antal fliselægninger af den anden del (af længde n), altså f_n ; antallet af den anden type fliselægninger, hvor der altså ligger en dobbeltflise på positioner m og $m + 1$, er produktet af antal fliselægninger af længde $m - 1$, indtil denne dobbeltflise, altså f_{m-1} , og antal fliselægninger af længde $n - 1$, efter denne dobbeltflise, altså f_{n-1} .

8.5 Rekursion: $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$, for $n \geq 1$, og $u_1 = 1, u_2 = 3$, og $u_3 = 4$.

8.6 Rekursion: $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$, for $n \geq 1$, og $u_1 = 3$ og $u_2 = 11$.

8.7 Er Pascals trekant skrevet som i kapitel 3 findes Fibonacci-tallene som sum af binomialkoefficienter på skrålinier med hældning 1.

8.8 For eksempel gælder: $F_{-k} = (-1)^{k-1} F_k$, for $k \geq 0$.

8.9 Potensleddene kan skrives ved binomialformlen, og det ses leddene med de lige værdier af summationsindeks tager hinanden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) &= \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{5}^k - (-1)^k \sqrt{5}^k) \\ &= \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \sum_{j=0}^m \binom{n}{2j+1} 2 \sqrt{5}^{2j+1} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^m \binom{n}{2j+1} 5^j, \end{aligned}$$

(øvre summationsgrænse m i de sidste summer, er $\frac{n}{2}$ hvis n er lige, og $\frac{n-1}{2}$, hvis n er ulige.

8.10 Lægges to fliselægninger, begge af længde n , parallelt, men den ene »forskudt« én position i forhold til den anden, vil der i visse – faktisk de allerfleste – sådanne være flisemellemrum, der »flugter«. Med positioner nummereret $1, 2, \dots, n, n + 1$, med de første n for den første fliselægning, og de sidste n for den anden, betyder dette præcist, at der i begge fliselægninger er et mellemrum mellem position k og $k + 1$ (altså *ikke* en dobbelt flise på positionerne k og $k + 1$ i én eller begge fliselægninger). Ved for hvert par med et flugtende flisemellemrum at opsoge det sidste sådanne, og dernæst ombytte fliserne efter dette mellem de to fliselægninger, fås et par af fliselægninger, men nu med $n + 1$ og $n - 1$ fliser. Næsten alle par af fliselægninger, af længde $n + 1$ og $n - 1$, kan fås på denne måde. Det er klartest at se på tilfældene n lige, og ulige, hver for sig.

8.11 Betingelsen er, at λ er løsning til ligningen $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ (modulo p); det er den *karaktéristiske ligning*.

For $p = 19$ er restklasserne 5, 15 de to løsninger til den karakteristiske ligning, og ved tilpasning af konstanter finder man, at $F_n = 17 \cdot 5^n + 2 \cdot 15^n$ (modulo 19).

For $p = 17$ ses ved at prøve efter, at der *ikke* er løsninger til $x^2 = 5$, og heller ikke til $x^2 - x - 1 = 0$, modulo 17. Dermed bliver den direkte analogi til formel (8.2) et regneudtryk, der omfatter led, som ikke er restklasser modulo 17 (helt på samme måde som formelen i det sædvanlige heltalstilfælde består af irrationale tal). Regneudtrykket er dog »godt nok«, og det kan omformuleres til et udtryk, der alene består af restklasser modulo 17, på samme måde som i opgave 8.9.

9.1 På samme måde som i argumentet i teksten, se afsnit 9.5, ses, at

$$x^n = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k = \sum_{k,m} \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k} x^m.$$

hvoraf påstanden.

9.2 Her er x^j udtrykt ved de stigende faktorieller, jvfr. (9.8):

$$\begin{aligned} x^0 &= x^{\bar{0}}, \\ x^1 &= x^{\bar{1}}, \\ x^2 &= x^{\bar{2}} - x^{\bar{1}}, \\ x^3 &= x^{\bar{3}} - 3x^{\bar{2}} + x^{\bar{1}}, \\ x^4 &= x^{\bar{4}} - 6x^{\bar{3}} + 7x^{\bar{2}} - x^{\bar{1}}. \end{aligned}$$

9.3 Matricerne er:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 11 & -6 & 1 & 0 \\ 24 & -50 & 35 & -10 & 1 \end{pmatrix}.$$

og produktet AB er 5×5 enhedsmatricen.

9.4 Partitionerne af n i summander, der alle er $\leq m$, falder i to klasser: dels partitioner, hvor alle summander endda er $\leq m-1$, dels partitioner, hvor alle summander er $\leq m$, og hvor mindst én af dem er $= m$; antallet i den første klasse er $q_{m-1}(n)$, og antallet i den anden klasse er $q_m(n-m)$, og den ønskede rekursion er således: $q_m(n) = q_{m-1}(n) + q_m(n-m)$.

9.5 Dette er klart, fx: $5 = 4 + 1 = 3 + 2$, og $6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3$.

9.6 Mængden af disse partitioner af n deles naturligt i 2 dele, den ene bestående af partitioner med mindst én summand $= 1$, og den anden bestående af partitioner, hvor alle summander er ≥ 2 , og hvor der derfor ved at reducere hver summand med 1 fås en partition af $n-k$ i k summander.

9.7 Brug Ferrers-diagrammer: Ved at »folde« hver ulige summand omkring midterprikken, og »stakke« dem med spidsen, altså midterprikken, langs diagonalen, fås en selvkonjugeret partition, og omvendt.

9.8 For 10 elementer er der 42 typer, se tabellen i afsnit 9.7. For 11 elementer fås ved at udvide tabellen med en ekstra søjle, at der er 56 typer.

9.9 Efterfølgeren til partitionen i (a) er $30 = 11 + 1 + \dots + 1$, med 19 summander 1.

9.10 Cykeltyperne er: $1^2 6^1$, $1^1 2^1 5^1$, $1^1 3^1 4^1$, $2^2 4^1$, $2^1 3^2$, med henholdsvis 3360, 5032, 3360, 1260, og 1120 permutationer. Summen af disse er: 13132 (heldigvis!).

9.11 Antallet af permutationer findes i den nederste række i tabellen i afsnit 9.4. For at bestemme hvor mange cykeltyper, der består af k cykler er det nok mest systematisk at gennemgå de 42 partitioner af 10, og registrere antallet af summander. Men lettere (!) at lave et beregningsskema baseret på rekursionen i opgave (9.6). Man finder 1, 5, 8, 9, 7, 5, 3, 2, 1, 1 for $k = 1, 2, \dots, 10$.

10.1 Det er klart, at $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$, og med $a := \binom{2n}{n}$ og $b := \binom{2n}{n-1}$, som begge er hele tal, kan denne identitet mellem rationale tal skrives: $an = b(n+1)$, hvoraf $b = n(a-b)$ og videre $a/(n+1) = b/n = n(a-b)/n = a-b$, som altså er hel.

10.2 Dette følger direkte af beregningsudtrykket.

10.3 Dette er et antal-øvre-veje-problem i et 5×5 gitter. Et barn med en 10-krone-mønt svarer til O, og et barn med en 20-krone-mønt svarer til H. Det omspurgte antal er derfor $C_5 = 42$ såfremt der ikke (kan, eller skal) skelnes mellem hvilke børn, der har hvilke penge med, og $5! \cdot 5! \cdot C_5$, hvis der skelnes mellem børnene.

10.4 Antallet er $\binom{2n}{n} - 2C_n = \binom{2n}{n}(1 - \frac{2}{n+1}) = (n-1)C_n$. For $n = 4$ er der altså 42, og for $n = 3$ er der 10, som falder i 2 klasser med 5 i hver, afhængigt af om første skridt er O eller H.

10.5 Ved at benytte et trick, der er analogt til det i beviset for sætningen i afsnit 10.2, men her for et $n \times m$ gitter, fås, at det søgte antal er:

$$\frac{n-m+1}{n+1} \binom{m+n}{m}.$$

10.6 Idet det søgte antal betegnes a_n gælder $a_1 = 1$ og $a_2 = 2$.

Betegnes punkterne x_1, x_2, \dots, x_{2n} gælder for $n = 2$, at $x_1 \leftrightarrow x_2$, eller $x_1 \leftrightarrow x_4$ (x_1 og x_3 kan ikke parres, da de to resterende i så fald bestemmer en linie der skærer den første).

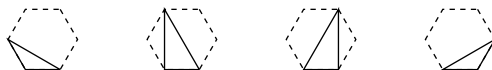
Det er praktisk at sætte $a_0 = 1$ selvom dette ikke svarer til en egentlig tællesituation (ved optællingen er der behov for at multiplicere med et antal parringer blandt 0 punkter, hvilket kun fungerer korrekt ved at sætte $a_0 = 1$).

Vælges P som ét af punkterne; for hvert af de øvrige punkter Q tænkes P parret med Q og det beregnes på hvor mange måder punkterne på hver side af linien PQ kan parres indbyrdes uden at danne skærende linier. Kun for valg af Q , så der på hver side er et lige antal punkter, gør dette muligt. Med $(0, 2n-2)$ er der $a_0 \cdot a_{n-1}$ måder at parre de øvrige punkter; med $(2, 2n-4)$ er $a_1 \cdot a_{n-2}$ måder at parre de øvrige punkter; med $(4, 2n-6)$ er $a_2 \cdot a_{n-3}$ måder at parre de øvrige punkter; osv. med $(2n-2, 0)$ er $a_{n-1} \cdot a_0$ måder at parre de øvrige punkter. Sammenfattende gælder:

$$a_n = a_0 \cdot a_{n-1} + a_1 \cdot a_{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot a_0.$$

hvilket med værdierne $a_0 = a_1 = 1$ identificerer tallene: $a_n = C_n$, for $n = 0, 1, 2, \dots$

10.7 For $n > 3$ vælges en af n -kantens sider som en slags grundlinje, og der betragtes trianguleringer, hvori trekanten med denne side indgår, sammen med ét af de $n-2$ hjørner, som ikke ligger på den valgte grundlinje. For en bestemt sådan trekant betragtes de to dele af n -kanten, der ligger på hver side af trekanten: en k -kant og en $n+1-k$ -kant (forstået passende for $k = 2$), fordi af de oprindelige n sider er trekantens grundlinje optaget, hvorimod hver af trekantens to andre sider indgår til afgrænsning af de to dele. Dette er illustreret i tilfældet $n = 6$ nedenfor:



Det ses, at $\tau_6 = 1 \cdot \tau_5 + \tau_3 \cdot \tau_4 + \tau_4 \cdot \tau_3 + \tau_5 \cdot 1$, og det fremgår, at det er fornuftigt at sætte $\tau_2 = 1$, hvorefter Catalan-rekursionen er åbenbar. Samme princip for vilkårlig $n > 4$.

11.1 Den maksimale knudevalens i G er det største af tallene $\Delta(G_1)$ og $\Delta(G_2)$; tilsvarende for kantkromatisk tal. Hvis begge graferne G_1 og G_2 er af klasse 1 (klasse 2) er også G af klasse 1 (klasse 2); ellers afhænger klasse 1/klasse 2 distinktionen af om klasse 2 grafen er den med størst maksimal knudevalens.

11.2 Det første er klart. Det andet følger fordi delgrafene bestående af kanterne med de 2 farver har alle knuder af valens 2, og den er derfor en disjunkt forening af kredse, men 3-kredse kan ikke optræde her fordi sådanne ikke har egentlige kantfarvninger i 2 farver.

11.3 Alle knuder har valens 3, derfor antal knuder lige. En Hamilton-kreds har derfor lige længde, og den kan 2-kantfarves. Med en sådan farves resten af kanterne med en tredje farve; derved fås egentlig kantfarvning.

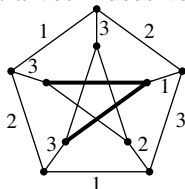
11.4 To af farverne (kaldes 1, 2) forekommer på 2 kanter, den tredje (kaldes 3) på kun 1 kant; nabokanterne til kanten med farve 3 har forskellige farver, ellers er der en farvekonflikt, hvor de sidste to kanter mødes.

11.5 Kantfarvningen nedenfor er et eksempel. Den fede 5-kreds har kanter af alle 5 farver, og tages denne som den cykliske rækkefølge af knuderne i den *regulære formation* er farvningen af parallelbundttype.



Først bemærkes, at ingen 5-kreds i en K_5 , der er kantfarvet i 5 farver, kan have kanter af 4 forskellige farver, men enten 3 eller 5 forskellige. Kantfarvemønsteret $a - 1 - b - 2 - c - 3 - d - 4 - e - 2 - a$ (hvor knuderne har navnene a, b, c, d, e) ville umuliggøre kantfarvning af kanterne ad, bd med en ekstra farve. Hvis 5-farvet 5-kreds ses let, at farvningen er af parallelbundttype; hvis 3-farvet 5-kreds, fx som vist på figuren til højre med kantfarverne $1 - 2 - 1 - 2 - 4$ på en yderkreds; kant $c = 4$ eneste mulighed; derefter kaldes farven på kant b for 5, men så også $a = 5$, og dermed $d = e = 3$.

11.6 At Petersen grafen *ikke* kan 3-kantfarves indses ved at prøve efter:



Med 3 kantfarver må yderkredsens kanter være farvet $1 - 2 - 1 - 2 - 3$, se opgave 11.4. Derefter må de 5 kanter »mellem« yderkredsens og inderkredsens være farvet som vist, men så skal begge de fede kanter farves med farve 2! Hvis grafen havde en Hamilton-kreds så kunne den 3-kantfarves.

11.7 Med 3 knuder er kun P_3 og $K_3 = C_3$ sammenhængende, og her er P_3 af klasse 1, og C_3 af klasse 2. Med 4 knuder er der 11 grafer – se oversigten i afsnit 4.8 – hvoraf 6 sammenhængende, og alle disse er af klasse 1. Med 5 knuder er der 34 grafer, heraf 21 sammenhængende; af disse er kun de 4 i afsnit 11.8 nævnte af klasse 2 (det er en C_5 , en C_5 med 2 krydsende korder, og en K_5 med en kant fjernet, samt en K_5 selv).

11.8 (a) I en egentlig kantfarvning af G er der højst $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ kanter med samme farve, og med $\Delta(G)$ farver til rådighed kan derfor højst $\Delta(G) \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ kanter farves, men uligheden giver, at dette antal er skarpt mindre end antallet af kanter.

(b) Idet summen af alle knudevalenserne er $2|E|$ fås $\Delta(G)|V| \geq 2|E|$, endda med skarpt ulighedstegn medmindre alle knuder har samme valens ($= \Delta(G)$). Antages $|V|$ lige er $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor = \frac{|V|}{2}$, altså $\Delta(G) \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor \geq |E|$, hvilket er i modstrid med den givne ulighed. Grafen G_2 i afsnit 11.2.

11.9 Det ligger i forudsætningen, at $|V| \geq 2$, og faktisk $|V| \geq 3$, fordi begge grafer med 2 knuder har samme valens i begge knuder. Altså er der $|V| - 1$ knuder af valens d , og 1 knude af valens $d' \neq d$; men da G kan kantfarves i d farver gælder $d' < d$. Og det gælder så, at alle d farver forekommer på kanter til hver af knuderne af valens d .

(a) Der findes en farve, fx rød, der indgår i en egentlig kantfarvning af G , som *ikke* forekommer på kanter til knuden af valens d' ; antallet af knuder, der er endeknuder for røde kanter, og dette gælder samtlige knuder af valens d , er naturligvis lige, og dermed er $|V|$ ulige.

(b) Antag, indirekte, at $d' \neq 0$. Så findes der en kant til denne knude, og den er tildelt en vis farve, fx hvid, ved en egentlig kantfarvning af G , men så kan ikke alle øvrige knuder – antallet af disse er jo lige – være endeknuder for hvide kanter.

11.10 Det følger af Vizings sætning, at G kan kantfarves egentligt med d eller $d + 1$ farver. Antag, for et indirekte bevis, at G kan kantfarves i d farver. Med knuden v valgt som en knude, hvis fjernelse – med kanterne til den – gør restgrafen G' ikke-sammenhængende, gennemføres nu følgende konstruktion. Én af sammenhængskomponenterne af G' vælges og suppleres med knuden v og de af kanterne til v , der går til knuder i den valgte sammenhængskomponent af G' . Derved dannes en graf G'' , hvori alle knuder u , der er forskellige fra v , har valens d , og valensen af v er ikke d , fordi ikke alle kanter til v går til knuder i den valgte sammenhængskomponent. Dermed opfylder grafen G'' valensbetingelserne for grafen i opgave 11.9. Endvidere kan G'' kantfarves egentligt i d farver, fordi G kan (blot bruge kantfarverne på kanterne i G''). Men så giver opgave 11.9, at G'' har en isoleret knude, hvilket strider mod, at G'' er sammenhængende og ikke er den trivielle graf. Altså fører antagelsen, at $\chi'(G) = d$, til en modstrid, og derfor gælder $\chi'(G) = d + 1$. (Grafen (c) i opgave 12.1 er et eksempel på en graf, der opfylder betingelserne med $d = 3$.)

12.1 Alle tre grafer er 3-regulære, hvoraf specielt $\delta(G) = 3$. For (a) gælder $\kappa(G) = \kappa'(G) = 3$, for (b) gælder $\kappa(G) = \kappa'(G) = 2$, og for (c) $\kappa(G) = \kappa'(G) = 1$.

12.2 En sådan er et træ, specielt bipartit, fx $K_{1,n}$; der er en bijektiv korrespondance mellem kanter i grafen (træet) og blade i blok/snitknode-grafen.

12.3 Induktion efter $n := |V|$. En sammenhængende graf med 3 knuder er enten en C_3 , der ikke har snitknuder, eller P_3 , der har 1 snitknode (midterknuden). Antag, at $v \in V$ er en snitknode i G , og at restgrafen efter fjernelse af v har $k \geq 2$ komponenter; hver af disse komponenter suppleres med deres individuelle »kopi« af v , og de kanter, der i G forbinder knuderne i den pågældende komponent med v ; den således dannede delgraf svarende til den j 'te komponent betegnes G_j , for $j = 1, 2, \dots, k$. Dermed er hver snitknode i G , pånær v selv, snitknode i netop én af graferne G_j , og idet n_j , for $j = 1, 2, \dots, k$, betegner antallet af knuder i G_j , inklusive de k kopier af v , gælder $n_j < n$ og derfor med brug af induktionsantagelsen, at det samlede antal snitknuder i G er højst:

$$1 + (n_1 - 2) + (n_2 - 2) + \dots + (n_k - 2) = n_1 + n_2 + \dots + n_k - 2k + 1 = |V| - k \leq |V| - 2,$$

idet jo $n_1 + n_2 + \dots + n_k = |V| + k - 1$.

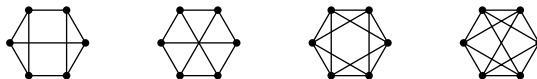
12.4 Hvis knuden v indgår i en kreds og har valens 2 er restgrafen efter fjernelse af v sammenhængende såfremt grafen selv er sammenhængende.

12.5 Antag, at $G = (V, E)$ er en sammenhængende graf med $|V| - 2$ snitknuder. Hvis G har kredse – én eller flere – fjernes en vilkårligt valgt kant fra G , der indgår i en kreds; den derved dannede restgraf har samme mængde af snitknuder som den forelagte graf. Denne proces gentages indtil den producerede graf er uden kredse, altså er et træ, der har $|V|$ knuder hvoraf $|V| - 2$ er snitknuder; men mindst 2 af knuderne i træet har valens 1, og sådanne er *ikke* snitknuder; men så er præcis 2 af knuderne af valens 1, altså de øvrige af valens 2, og et sådant træ er et vejtræ!

12.6 Der gælder $\kappa(G) = \kappa'(G) = \delta(G) = 3$ for Petersen-grafen G . Det er let at angive en snitmængde på 3 knuder, og ved at gå de forskellige indbyrdes placeringer af vilkårlige 2 knuder efter ses, at intet sæt af 2 knuder udgør en snitmængde.

12.7 Der er to, nemlig den til venstre og den i midten viste 3-regulære: Den tilstrækkelige betingelse for eksistens af en Hamilton-kreds giver, at en 3-regulær graf med 6 knuder har en Hamilton-kreds. Med de 6 knuder i en valgt cyklisk rækkefølge er der to muligheder: enten indeholder grafen en »korde« (relativt til den valgte cykliske rækkefølge), og i så fald er den grafen til venstre, eller ingen af de mulige korder (...) indgår i grafen, og i så fald er den grafen til højre (en $K_{3,3}$).

Tilsvarende ses, at en 4-regulær graf med 6 knuder er de(n) til højre viste:



Dette er lidt spøjfuldt: de to tegninger til højre er faktisk samme graf, blot baseret på to forskellige valg af cyklisk rækkefølge (Hamilton-kreds); grafen er faktisk oktaeder-grafen.

13.1 Grafen til venstre (3, 2) og farvning 1, 2, 1, 2, 1, 2 langs yderkredsen (grafene er en $K_{3,3}$); grafen i midten (3, 3) og farvning 1, 2, 3, 1, 3, 2 (den har en K_3 -delgraf); og grafen til højre (4, 3) og farvning 1, 2, 3, 1, 2, 3 (den har en K_3 -delgraf).

13.2 Grafen til venstre (4, 4) fordi den indeholder en K_3 -delgraf, men en forsøgsfarvning med 3 farver kan ikke fuldføres til en egentlig knudefarvning; grafen til højre (3, 3) (det er Petersen-grafen) fordi den indeholder en K_3 -delgraf, og en farvning 1, 2, 1, 2, 3 langs yderkredsen kan let udvides til en fuld egentlig knudefarvning i 3 farver.

13.3 For 1 knude: k ; for 2 knuder: k^2 , og $k(k - 1) = k^2$; for 3 knuder: k^3 , og $k^2(k - 1)$, og $k(k - 1)^2$, og $k^3 = k(k - 1)(k - 2)$ (i alle tilfælde angivet i rækkefølge efter voksende antal kanter). Polynomierne er indbyrdes forskellige!

13.4 Det første er klart. Nej! Som nævnt i afsnit 13.7 har alle træer med n knuder kromatisk polynomium $k(k - 1)^{n-1}$. Det simpleste eksempel på to ikke-isomorfe grafer med samme kromatisk polynomium er nok: en knudemængde med 4 knuder, og to disjunkte kanter, med kromatisk polynomium $(k(k - 1))^2$, henholdsvis en 3-vej samt en isoleret knude, med kromatisk polynomium $k(k - 1)^2 \cdot k$.

13.5 Summen af koefficienterne er værdien $p_G(1)$, for $k = 1$, der er $= 0$, da det kromatiske tal er > 1 .

13.6 Antallet af egentlige knudefarvninger i 0 farver er $= 0$. Det andet er klart!

13.7 Egenskaben, at være et normeret polynomium af grad lig knudeantallet i grafen, kan føjes til påstanden i induktionsbeviset for sætningen i afsnit 13.7.

13.8 Induktion efter antallet q af kanter. For $q = 0$ er grafen den tomme graf på n knuder, hvis kromatiske polynomium er k^n , og det ses, at påstanden er korrekt, svarende til $r = n$.

Betragt nu en graf G med $q > 0$, altså mindst én kant, og antag induktivt, at påstanden er korrekt for alle grafer med n knuder og færre end q kanter. Vælg en kant i G og lad G_1 være grafen G med denne kant fjernet, og lad grafen G_2 være grafen G med den valgte kants endeknuder »slået sammen« (og eventuelle derved dannede dobbeltkanter fjernede); så gælder – ligesom i beviset for sætningen i afsnit 13.8 – at:

$$p_G(k) = p_{G_1}(k) - p_{G_2}(k).$$

Her har G_1 jo n knuder, $q - 1$ kanter, og har enten r eller $r + 1$ sammenhængskomponenter, medens G_2 har $n - 1$ knuder, færre end q kanter, og præcis r sammenhængskomponenter. Dermed:

$$p_{G_1}(k) = k^n - (q - 1)k^{n-1} + \dots + (-1)^{n-j} b_j k^j + \dots + (-1)^{n-r} b_r k^r,$$

hvor muligvis $b_r = 0$, men $b_{r+1} > 0$, og øvrige viste b_j -koefficienter > 0 og

$$p_{G_2}(k) = k^{n-1} - \dots + (-1)^{n-j} c_j k^j + \dots + (-1)^{n-r} c_r k^r,$$

hvor alle $c_j > 0$. Ved at udføre subtraktionen ses påstanden. Induktion også efter n .

13.9 Induktion efter n . For $n = 3$ er

$$k^3 = k(k-1)(k-2) = k^3 - 3k^2 + 2k = (k-1)^3 + (-1)^3(k-1).$$

og induktionen kan derfor starte. Antages *formelen* korrekt for et $n \geq 3$ finder man ved at lave kanttilføjelse/knudesammentrækning for knuder u, v på C_{n+1} , med indbyrdes afstand 2 (altså med én mellemknode); derved produceres dels en C_{n-1} med en kant monteret i $u = v$ knuden, dels en C_{n+1} med en *korde* mellem knuderne u og v , der kan opfattes som en C_n (der overspringer knuden mellem u og v) med en *vinkel* monteret, fra u gennem den oversprungne mellemknode til v . På sædvanlig måde findes antallet af farvninger for de producerede grafer, og samlet fås:

$$\begin{aligned} & ((k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1))(k-1) + ((k-1)^n + (-1)^n(k-1))(k-2) \\ & = (k-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(k-1). \end{aligned}$$

13.10 Det følger af regneudtrykket i (13.1), at en sådan graf er sammenhængende (koefficienten til k er $\neq 0$), og har m kanter (koefficienten til k^m er $-m$), og dermed er grafen et træ.

14.1 (a). Alle 1-, 2-, og 3-pige-betingelser er opfyldte (alle drengbekendtskabskredse er på mindst 2 drenge, og kun 2 af dem er på præcis 2 drenge; dog er pigemængden $\{1, 3, 4\}$ kritisk (disse pigers samlede drengbekendtskabskreds er $\{1', 2', 3'\}$). Derfor findes der et partielt bryllup, der omfatter pigerne $\{1, 3, 4\}$, og den forelagte bryllupssituation tillader derfor et bryllup hvis og kun hvis den reducerede bryllupssituation, med restpigerne $\{2, 5, 6\}$, og restdrengebekendtskaberne:

$$D_2 = \{4'\}, \quad D_5 = \{4', 5', 6'\}, \quad D_6 = \{5'\}.$$

tillader et bryllup, hvilket den gør. (Hovedregning!)

(b) Der findes *ikke* et bryllup, da den samlede drengbekendtskabskreds for pigerne $\{1, 2, 3, 5\}$ er $\{1', 3', 5\}$, og Halls betingelse er derfor *ikke* opfyldt. (1-, 2-, og 3-pige-betingelserne er opfyldte.)

14.2 Supplér den forelagte bryllupssituation med $n - k$ »nye drenge«, og fastsæt, at alle pigerne kender alle de nye drenge. Da findes et fuldt bryllup i den supplerede bryllupssituation hvis og kun hvis der findes et partielt bryllup af størrelse k i den givne bryllupssituation. De anførte uligheder er blot Halls betingelse for den supplerede bryllupssituation.

14.3 Antallet af kanter er $k|V_1|$ og også $k|V_2|$, hvoraf $|V_1| = |V_2|$ (idet jo $k > 0$).

For en vilkårlig delmængde $U \subseteq V_1$ omfatter mængden af knuder $v \in V_2$, som er kantforbundne til en knude fra U , mindst $|U|$ knuder. I en liste, skrevet med eventuelle gentagelser, over disse knuder, er der præcis $k|U|$ elementer, og da en knude $v \in V_2$ forekommer højst k gange, da dens valens jo er k , er der mindst k forskellige knuder i listen. Dette viser, at Halls betingelse er opfyldt. Eller den følgende opgave!

14.4 (a) Påstanden er en variant af bryllupssætningen. I formuleringen for parring i bipartite grafer spiller rækkeindices rollen af V_1 , og søjleindices rollen af V_2 , og matricen A koder simpelthen hvilke kanter grafen indeholder.

(b) Et sådant sæt af m 1'taller koder et bryllup, og at et sådant eksisterer verificeres ved at kontrollere Halls betingelse. Hvert sæt af fx r rækker har samlet set 1'taller i mindst r forskellige søjler; dette følger ved en enkel variant af det centrale tælleargument i beviset for udvidelse af $p \times n$ latinsk rektangel (eller »korttricket«!).

14.5 Det følger af den foregående opgave, at der fra matricen kan dannes en permutationsmatrix ved at vælge 1'taller, n ialt, fra matricen, ét i hver række og ét i hver søjle. Hvis $d = 1$ er alle

1'taller brugt; hvis $d > 1$ fjernes 1'tallerne fra en permutationsmatrix valgt som beskrevet, og restmatricen har samme egenskab som den givne, blot med $d - 1$ i stedet for d .

14.6 Det første er klart! Det er det andet vel også: hvis $k \cdot i + j = k \cdot i + j'$ gælder klart, at $j = j'$, og hvis $k \cdot i + j = k \cdot i' + j$ så fås først, at $k \cdot i = k \cdot i'$, hvoraf $i = i'$, da k er primisk med n (alle ligninger gælder modulo n).

15.1 Optællingen fungerer naturligvis i så fald ikke i almindelighed – men fejl kunne tænkes at ophæve hinanden! Ved en håndkraftoptælling ligesom i det indledende eksempel, må naturligvis enhver af de optrædende delmængder have et ikke-negativt antal objekter – ellers er der noget galt.

15.2 Et primtal p , der går op i en k 'te potens x^k , går op i x^k et multiplum af k gange (aritmetikens fundamentalsætning).

15.3 $\varphi(60) = 16$; de primiske restklasser er 1, 49, samt de 14 primtal mellem 7 og 59. $\varphi(45) = 24$; de primiske restklasser er 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, og de med 15 og 30 forskudte tal.

15.4 Optælling af komplementærmængde ved inklusion og eksklusion. Antallet af alle afbildninger er n^m , og ved at inddеле disse efter egenskaberne: tallet i tilhører *ikke* billedmængden, for $i = 1, 2, \dots, n$, følger regneudtrykket (som i eksemplet med permutationer uden fikspunkter). (c) Der er $\binom{m}{2}$ valg af originalmængden med 2 elementer – de øvrige er singleton'er – for hvert sådant $n!$ måder for tilordning af billeder til disse originalmængder, altså ialt: $\binom{m}{2}n!$ surjektive afbildninger; hvilket passer med 6 surjektive afbildninger, når $m = 3$, og $n = 2$.

15.5 Benyt de fire egenskaber: De 13 kort omfatter *ingen spar* (E_1), *ingen hjerter* (E_2), *ingen ruder* (E_3), og *ingen klør* (E_4). Dermed gælder, når i, j, k er indbyrdes forskellige, $|E_i| = \binom{39}{13}$, og $|E_i \cap E_j| = \binom{26}{13}$, og $|E_i \cap E_j \cap E_k| = \binom{13}{13} = 1$, hvormed det søgte antal er:

$$\binom{52}{13} - 4\binom{39}{13} + 6\binom{26}{13} - 4.$$

15.6 For (a) benyttes metoden fra eksemplet i afsnit 15.4. For (b) og (c) er der uendeligt mange løsninger.

15.7 For $n = 5$ fordeler de 120 permutationer sig på følgende måde:

j	0	1	2	3	4	5
e_j	44	45	20	10	0	1

Med cykeltyperne: 5^1 og 2^13^1 (uden fikspunkter), 1^14^1 og 1^12^2 (ét fikspunkt), 1^23^1 (to fikspunkter), 1^32^1 (tre fikspunkter), og 1^5 (med fem fikspunkter).

For $n = 7$ fås:

j	0	1	2	3	4	5	6	7
e_j	1854	1855	924	315	70	21	0	1

16.1 Nej. Et tårnpolynomial har konstantled 1, det kromatiske polynomial for en graf har konstantled 0 (hvorfor?).

16.2 Brættet er selvkomplementært: efter opskæring og permutering af rækker/søjler, fx ombytte søjlerne 1 og 3, dernæst søjlerne 2 og 4, og sluttelig ombytning af rækkerne b og c .

16.3 Brættet kan opskæres/omordnes til et bræt med hvide felter kun i diagonalen; tårnpolynomial for dette bræt er udregnet flere gange i eksempler.

16.4 a) Koefficienten til x^k i $R_{m,n}(x)$, for $k \leq \min\{m, n\}$, er $\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!$, nemlig antal valg af k blandt m rækker, gange antal valg af k blandt n søjler, gange antal opstillinger af k tårne med ét tårn i hver af de valgte rækker og i hver af de valgte søjler. Regneudtrykket gælder naturligvis også når $k > \min\{m, n\}$.

b) Rekursionsformlen for tårnpolynomier giver denne formel for »udvikling« efter felterne i fx den øverste række.

c) Dette følger ved differentiation af det eksplicite udtryk for $R_{m,n}(x)$ fra a).

Af resultatet fås simple formler for tårnpolynomier for helt hvide brætter. For eksempel gælder $R_{1,1}(x) = 1 + x$, og dermed:

$$R_{2,2}(x) = 1 + \int_0^x 2^2(1+t)dt = 1 + 4x + 2x^2,$$

og

$$R_{3,3}(x) = 1 + \int_0^x 3^2(1+4t+2t^2)dt = 1 + 9x + 18x^2 + 6x^3.$$

16.5 Rekursionsformlen giver let, at det er differensen: $R_{n,n}(x) - xR_{n-1,n-1}(x)$, med $R_{n,n}$ fra den foregående opgave. For eksempel, for $n = 2$: $1 + 3x + x^2 = (1 + 4x + 2x^2) - x(1 + x)$.

16.6 Alle brætter med lutter grå felter har, uanset størrelse, tårnpolynomium: 1. Dette opfattes nok som et snydesvar! Brætter med mindst ét tilladt felt, og størrelse op til 2×2 er bestemt ved deres tårnpolynomium (pånær omordning af rækker og søjler, og fjernelse af rækker/søjler helt uden tilladte felter), se eksemplet i afsnit 16.2.

Et 2×2 bræt med lutter tilladte felter, og et bræt med et L-formet mønster af 4 tilladte felter, fx på et 3×2 bræt, har begge tårnpolynomiet: $1 + 4x + 2x^2$.

16.7 Brættet tillader – som vist i eksemplet – en opdeling i uafhængige brætter, og tårnpolynomiet er derfor: $(1 + 4x + 2x^2)(1 + 6x + 9x^2 + 2x^3)$.

16.8 Tårnpolynomiet for komplementbrættet til det forelagte bræt er: $(1 + 4x + 2x^2)^4$, der med noget besvær udregnes til:

$$1 + 16x + 104x^2 + 352x^3 + 664x^4 + 704x^5 + 416x^6 + 128x^7 + 16x^8,$$

og det omspurgte antal er derfor ved brug af komplementbrætformelen:

$$8! - 7! \cdot 16 + 6! \cdot 104 - 5! \cdot 352 + 4! \cdot 664 - 3! \cdot 704 + 2! \cdot 416 - 1! \cdot 128 + 0! \cdot 16 = 4752.$$

16.9 Tårnpolynomierne er:

$$\begin{aligned} &1 + x, \\ &1 + 3x + x^2, \\ &1 + 6x + 7x^2 + x^3, \text{ og} \\ &1 + 10x + 25x^2 + 15x^3 + x^4. \end{aligned}$$

Koefficienterne i disse polynomier er Stirling tal af anden art: koefficienten til x^k i $r_{B_n}(x)$ er $\left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ n+1-k \end{smallmatrix} \right\}$, hvilket vises ved induktion. Antallet af ikke-truende k -tårnkonfigurationer på B_n bestemmes ved for en sådan at skelne mellem to tilfælde: 1) intet tårn på sidste række, på $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-k \end{smallmatrix} \right\}$ måder; 2) et tårn på sidste række (i så fald $k-1$ tårne på de øverste $n-1$ rækker, og for hver af de $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-(k-1) \end{smallmatrix} \right\}$ sådanne ikke-truende $(k-1)$ -tårnkonfiguration på de øverste $n-1$ rækker kan tårnet i den n 'te række placeres på $n-(k-1)$ måder); dette giver at koefficienten til x^k opfylder rekursionen for Stirling-tal af anden art.

Indeks

- (u, v) -vandring i graf, 48
- 4-farveproblem, 123
- C_n kredsgraf med n knuder, 49
- K_n komplet graf med n knuder, 49
- $K_{n,m}$ komplet-bipartit graf, 54
- P_n vejgraf med n knuder, 49
- $\Delta(G)$ maksimal knudevalens i graf G , 116
- $\binom{n}{k}$, binomialkoefficient, n over k , 32
- $\chi'(G)$ kantkromatisk tal for graf, 116
- $\chi(G)$ (knudekromatisk tal for graf G), 131
- $\delta(G)$ minimal knudevalens i graf G , 127
- $\kappa'(G)$ (grad af kantsammenhæng for graf G), 127
- $\kappa(G)$ (grad af knudesammenhæng for graf G), 126
- $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$, Stirling-tal af første art, n over k cykler, 97
- $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, Stirling-tal af anden art, n over k delmængder, 95
- k -delmængde, 31
- k -kantsammenhængende graf, 127
- k -regulær graf, 129
- k -sammenhængende graf, 126
- n fakultet, 23
- n udråbstegn, 23
- r -nomialkoefficienter, 38
- $x^{\overline{k}}$ den k 'te stigende faktoriel af x , 23
- $x^{\underline{k}}$ den k 'te dalende faktoriel af x , 23
- $|X|$ antal elementer i endelig mængde X , 8
- additionsformelen (binomialkoefficienter), 34
- adskillende kantmængde i graf, 126
- adskillende knudemængde i graf, 126
- afbildning, 21
- afsnit i de naturlige tal, 8
- algoritme: efterfølger til r -delmængde, 43
- algoritme: efterfølger til ord, 28
- algoritme: efterfølger til permutation, 29
- algoritme: fra Prüfer-kode til træ, 66
- algoritme: fra træ til Prüfer-kode, 64
- algoritme: kromatisk polynomium, 140
- algoritme: næste partition, 104
- algoritme: tårnpolynomier, 163
- antal elementer $|X|$ i endelig mængde X , 8, 20
- antal fikspunkter for permutationer, 159
- antal løsninger til heltalsligninger, 36
- antal løsninger til heltalsligninger (fortsat), 156
- antal primiske restklasser, 155
- antallet D_n af permutationer uden fikspunkter, 86
- antallet $p(n)$ af partitioner af n , 101
- antallet $p_k(n)$ af partitioner af n med k summer, 102
- antallet $p_k^*(n)$ af partitioner af n med op til k summer, 103
- asymmetrisk relation, 21
- begyndelsesværdier for rekursion, 79
- beregning af partitionstal, 103
- bijektiv afbildning, 22
- bijektiv korrespondance, 8, 22
- bijektivitetsprincippet, 10
- billedmængde for afbildning, 21
- Binets formel, 91
- binomialformelen, 33
- binomialkoefficienter, definition, 32
- binomialkoefficienter, regneudtryk, 32
- binomialkoefficienter, rekursionsformelen, 34
- binomialrækken, 41
- bipartit graf, 53
- blad i graf, 47
- blok af graf, 128
- blok/snitknode-graf for graf, 129
- bro i graf, 127
- Brooks' sætning, 133
- Brooks' sætning (bevis), 135
- bryllup for bryllupssituation, 144
- bryllupssituation, 144
- Cassinis formel, 92
- Catalan-rekursionen, 111
- Catalan-tal, 110
- Cayleys formel, 63
- cyklisk rækkefølge, 30
- dalende faktoriel, 23
- de små situationers princip, 15
- delgraf af graf, 50
- delmængde A af mængde B , $A \subseteq B$, 19
- den tomme mængde \emptyset , 19
- den trivielle graf, 46
- differensligning, 77
- digraf, 46
- Diracs sætning, 74
- disjunkt optælling, 14
- disjunkte mængder, 20
- dodekaeder-grafen, 130
- egentlig kantfarvning af graf, 115
- egentlig knudefarvning af graf, 131
- eksistens- og entydighedssætning for rekursioner, 79
- element af mængde, 19
- endeknode for kant i graf, 45

- endelig mængde, 8, 20
 Euler-graf, 69
 Euler-tur i graf, 69
 Eulers φ -funktion, 155
- faktorieller, 23
 fakultetsfunktionen, 23
 farvelemmet til Vizings sætning, 120
 farveombytning af to farver i kantfarvning, 118
 Ferrers-diagram af partition, 103
 Fibonacci-rekursionen, 78, 90
 Fibonacci-tallene, 78, 90
 fliselægninger, 89
 fordeling af objekter i nummerede kasser med
 ordnet indhold, 25
 fordeling af objekter i nummererede kasser med
 ikke-ordnet indhold, 38
 foreningsmængden $A \cup B$ af A og B , 20
 fællesmængden $A \cap B$ af A og B , 19
- generaliseret binomialkoefficient, 41
 gittervejsargumentet, 35
 grad af kantsammenhæng $\kappa'(G)$ for graf, 127
 grad af knudesammenhæng $\kappa(G)$ for graf, 126
 graf, 45
 graf (= simpel graf), 45
 graf af klasse 1 (kantfarvning), 123
 graf af klasse 2 (kantfarvning), 123
 gulvet $\lfloor x \rfloor$ af x , 112
- Halls betingelse for bryllupssituation, 144
 Hamilton-graf, 72
 Hamilton-kreds i graf, 72
 Hamilton-vej i graf, 73
 Herschels graf, 76
 hexaeder-grafen, 130
 homogen rekursion, 78
 hyperterning, 76
- ikke-homogen rekursion, 79
 ikke-lukket Euler-tur i graf, 72
 ikke-ordnet k -kombination, 31
 ikke-truende k -tårnkonfiguration, 162
 ikosaeder-grafen, 130
 inhomogen rekursion, 79
 injektiv afbildning, 22
 inklusion og eksklusion, 153
 isoleret knude i graf, 47
 isomorfe grafer, 55
 isomorfi af grafer, 55
- kant i graf, 45
 kantfarvning (egentlig) af graf, 115
 kantkromatisk tal $\chi'(G)$ for graf G , 116
 kantmatrix (for graf), 46
- kanttilføjelse til graf, 138
 karakteristisk ligning for 2. ordens rekursion, 82
 kardinalitet $|X|$ af endelig mængde X , 8
 Kirkmans graf, 76
 klassesdeling, 21
 knude i graf, 45
 knudefarvning (egentlig) af graf, 131
 knudekromatisk tal $\chi(G)$ for graf G , 131
 knudesammenhæng i graf, 138
 kombinatorisk bevis, 34
 kombinatorisk definition, 32
 komplementbræt (tårnpolynomier), 167
 komplementgraf, 56
 komplementærmængde $A \setminus B$ til B relativt til A ,
 20
 komplet graf K_n med n knuder, 49
 komplet-bipartit graf $K_{n,m}$, 54
 konjugering af partition, 104
 kreds i graf, 48
 kredsgraf C_n med n knuder, 49
 kritisk delmængde i bryllupssituation, 145
 kromatisk polynomium $p_G(x)$ for graf G , 140
 kromatisk polynomium (beregning), 140
 kromatisk polynomium for træ, 137
 kromatisk tal $\chi(G)$ for graf G , 131
 Königs sætning (kantfarvning), 119
- latinsk kvadrat, 148
 latinsk rektangel, 148
 leksikografisk ordning, 28
 leksikografisk ordning af r -delmængder, 42
 leksikografisk ordning af partitioner, 104
 lineær rekursion, 78
 lineær rekursion med konstante koefficienter, 78
 loftet $\lceil x \rceil$ af x , 112
 lukket Euler-tur i graf, 69
 lukket vandring, tur, 48
 længde af vandring, 48
 løkke i graf, 45
- maksimal knudevalens $\Delta(G)$ i graf G , 116
 minimal knudevalens $\delta(G)$ i graf G , 127
 multinomialformelen, 40
 multinomialkoefficient, 38
 multinomialkoefficienter, regneudtryk, 39
 multinomialkoefficienter, rekursionsformelen, 41
 multiple kanter i graf, 46
 multiplikativ afbildning, 30
 mængde, 19
 mængde på listeform, 19
 mængdeinklusion, 21
 mængden $\mathcal{P}(X)$ af delmængder af X , 21
- naboknuder i graf, 46
 normeret (lineær) rekursion, 78

- octaeder-grafen, 130
 omvendt afbildning, 22
 opdeling af bræt i uafhængige dele (tårnpolynomier), 163
 optælling med gentagelser, og korrektion, 15
 optælling ved addition, 9
 optælling ved inklusion og eksklusion, 153
 optælling ved multiplikation, 9
 optælling ved overlap, 9
 optælling ved subtraktion, 9
 optælling via tårnpolynomium for komplementbræt, 167
 orden m af en rekursion, 79
 orden af graf (= antal knuder), 45
 ordensrelation, 21
 ordnede n -sæt, eller n -tupler, 20
 ordnede par, 20
 ordnet k -kombination, 31
 Ores sætning, 74
 orienteret graf, 46
 overskudsmængden $A \setminus B$ af A over B , 20

 parring i bipartit graf, 148
 partikulær løsning, 84
 partition af naturligt tal, 101
 partition, Ferrers-diagram, 103
 partitionstal, 103
 Pascals formel (binomialkoefficienter), 34
 Pascals trekant, 34
 permutationsmatrix, 150
 Petersen-grafen, 58, 76
 planar graf, 123
 produktformelen for tårnpolynomier, 164
 produktmængde $X \times Y$, 20
 produktmængde X^2 , 20
 produktmængde X^n , 20
 præfiks af ord, 28
 Prüfer-kode for træ, 65

 refleksiv relation, 20
 regulær graf, 129
 rekursion, 16
 rekursion af orden m , 79
 rekursion for beregning af tårnpolynomier, 165
 rekursion for binomialkoefficienter, 34
 rekursion for multinomialkoefficienter, 41
 rekursion for Stirling-tal af anden art, 96
 rekursion for Stirling-tal af første art, 98
 relation fra X til Y , 20
 relation i mængde X , 20

 sammenhængende graf, 50
 sammenhængskomponent af graf G , 51
 simpel graf, 46
 skuffeprincippet, 11

 snitkant i graf, 127
 snitknode i graf, 125
 snitmængde i graf, 126
 stigende faktoriel, 23
 Stirling-tal af anden art $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, 95
 Stirling-tal af første art $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$, 97
 Stirlings formel, 23
 summander i partition, 101
 symmetri af binomialkoefficienter, 33
 symmetrisk relation, 20
 sætning af Erdős og Szekeres, 12

 tetraeder-grafen, 130
 todelt graf, 53
 tom graf, 46
 tom vandring i graf, 48
 tom vej i graf, 48
 total ordensrelation, 21
 transitiv relation, 21
 transversal for mængdefamilie, 147
 transversalsætningen, 147
 trivielle træ, 51
 træ, 51
 tur i graf, 48
 tårnpolynomium for bræt, 162

 udspændt delgraf, 126
 udvidelse af $p \times n$ latinsk rektangel, 149

 valens δ_u af knude u i graf, 47
 valensprofil for graf, 47
 valensvektor for træ, 60
 Vandermondes foldningsformel, 42
 vandring i graf, 48
 vej i graf, 48
 vejforbundne knuder i graf, 50
 vejgraf P_n med n knuder, 49
 Venn-diagram, 10
 Vizings sætning (kantfarvning), 122
 voksende ord, 26
 vægtet graf, 46

 ægte delmængde, 19
 ækvivalensrelation, 21

