Analyse 1

Matthias Christandl

Tredje udgave ved Søren Eilers og Henrik Schlichtkrull
Foråret 2021

Indhold

Forord

I mange år benyttedes på kurset Analyse 1 en samling af undervisningsmateriale der hver for sig var glimrende, men som ikke var perfekt fagligt afstemt med hinanden, hvilket førte til unødvendige udfordringer for kursets deltagere. Matthias Christandl tog det som kursusansvarlig på kurset i en årrække på sin kappe at løse dette problem i 2019, hvor han udgav den første udgave af nærværende notesæt.

Fra og med 2020 er kursets eksamensform ændret, og vi er taknemmelige for at professor Christandl har givet os tilladelse til at opdatere notesættet for at stille deltagerne bedre ved de planlagte lynprøver (disse blev ikke gennemført i 2020 pga. pandemien, og i skrivende stund står det ikke klart om det vil være muligt at gennemføre dem i år). Vi har samtidig set det som en naturlig opgave at tilpasse notesættet her mere eksplicit til indholdet af de øvrige førsteårskurser, navnlig til Analyse 0, hvis indhold er i spil i hele kurset.

Vi vil udtrykke vores taknemmelighed mod Sara Arklint, der har foreslået værdifulde nye måder at visualisere materialet på, og mod to af kursets instruktorer, Rasmus Vester Munkner og Thor Gabelgaard Nielsen, der har hjulpet os med at lokalisere hundredevis af trykfejl i vore tidlige udkast. Vi undskylder på forhånd for de trykfejl der er tilbage, og håber at læseren vil hjælpe med at rapportere dem til `eilers@math.ku.dk`

Søren Eilers & Henrik Schlichtkrull
Nørrebro & Virum
21. marts 2021

Kapitel 1

Komplekse tal og talfølger

I kursets første del ser vi på følger af reelle og komplekse tal. For at forstå begreberne konvergens og divergens, er det i princippet tilstrækkeligt kun at se på de reelle tal. Vi vælger dog også at se på komplekse talfølger, da vi derved får en mere omfattende eksempelmængde, der illustrerer den generelle teori om talfølger. Undersøgelsen af komplekse talfølger leder hen mod undersøgelsen af funktionsfølger og -rækker, specielt potens- og Fourierrækker, som vi behandler senere i kurset.

1.1 Komplekse tal

Introduktion Som kursernes navne antyder, er Analyse 0 og Analyse 1 nært beslægtede, og vi skal her i Analyse 1 trække betydeligt på materiale udviklet i Analyse 0. Men på ét punkt skiller de to kurser sig ad på en dramatisk måde: de komplekse tal spiller en helt central rolle i An1, men indgår overhovedet ikke i An0. Derfor starter vi disse noter for at samle op hvad An0 har lært os om de komplekse tal – uden at påpege det – og repetere de centrale ideer om $\mathbb{C}$ som læseren mødte endnu tidligere i sit matematikstudium.

De komplekse tal $\mathbb{C}$ er jo defineret som linearkombinationer af tallet 1 og symbolet i:

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : z = a + ib. \tag{1.1}$$

Givet et komplekst tal $z = a + ib$, siger vi også, at $a = \mathrm{Re}(z)$ er realdelen, og at $b = \mathrm{Im}(z)$ er imaginærdelen af z. Siden læserne mødte denne definition for første gang er de blevet introduceret til ideen om et reelt vektorrum, og det er klart at $\mathbb{C}$ opfylder aksiomerne og at $\{1, i\}$ udgør en basis. Som reelt vektorrum betragtet er der altså ikke den store forskel på $\mathbb{C}$ og $\mathbb{R}^2$, de er begge af dimension to, og således isomorfe (jf. [HW, Definition 4.4.1]). Det er særligt naturligt at identificere det komplekse tal $a + ib$ med vektoren (a, b) i $\mathbb{R}^2$, som vi gjorde i (1.1).

Så langt, så godt set fra et vektorrumsperspektiv. Men hele pointen med $\mathbb{C}$ er jo multiplikationen

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

der følger fra den centrale ide om at $i^2 = -1$, og den ide har ikke noget spejlbillede i generelle vektorrum.

Når vi skal arbejde med $\mathbb{C}$ i kontekst af matematisk analyse skal vi derfor være ekstremt påpasselige med at identificere $\mathbb{C}$ og $\mathbb{R}^2$. Nogle gange er det det helt rigtige at gøre, og vi kan tage hvad vi har lært om $\mathbb{R}^2$ (fx i An0) og bruge det på $\mathbb{C}$ i An1. Men andre gange går det galt, fordi vi taber kontakten til multiplikationsoperationen. Og i endnu andre sammenhænge er det nyttigt at bare tænke på $\mathbb{C}$ som en udvidelse af $\mathbb{R}$ og simpelthen genbevise de reelle resultater vi allerede har udviklet om analyse i $\mathbb{R}$ til analyse i $\mathbb{C}$ med de samme argumenter, ved bare at benytte multiplikationen på $\mathbb{C}$ på samme måde som multiplikationen på $\mathbb{R}$.

Den store udfordring her er næsten altid at de komplekse tal savner en *ordning* med de samme egenskaber som $\leq$ og $<$ på $\mathbb{R}$, således at et stor del af værktøjerne i $\mathbb{R}$-værktøjskassen holder op med at virke hvis man forsøger at bruge dem i $\mathbb{C}$. Men der er også mange tilfælde hvor det ikke gør nogen forskel overhovedet om man arbejder i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

Det er erfaringsmæssigt forvirrende når man skal tilegne sig ny matematisk viden at vi på denne måde skal studere det komplekse tallegeme $\mathbb{C}$ nogle gange ved at tænke på det som $\mathbb{R}^2$, nogle gange som $\mathbb{R}$, og andre gange med helt nye metoder. De komplekse tal er så vigtige i pensum navnligt til sidst i kurset at det ikke er en mulighed at se bort fra dem, men vi vil forsøge at hjælpe læseren med at markere i marginerne hvorvidt de resultater vi præsenterer gælder kun i $\mathbb{R}$ eller i hele $\mathbb{C}$ (hvis de gælder i $\mathbb{C}$, vil de altid også gælde i $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Vi markerer også med $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ om resultaterne om handler funktioner der er rent reelle, rent komplekse, eller defineret reelt med komplekse værdier. Det er især den sidstnævnte klasse vi har noget at sige om i kurset her.

Analyse i $\mathbb{C}$

For overhovedet at kunne diskutere analyse i $\mathbb{C}$ skal vi bruge et afstandsbegreb. Det låner vi uden omsvøb i $\mathbb{R}^2$ og sætter

$$|a+ib| = ||(a,b)|| = \sqrt{a^2+b^2}$$

dvs

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

Vi taler om $|z|$ som længde eller modulus af z. Vi husker på at når $z = a+ib$ så er dets komplekst konjugerede givet ved formlen

$$\overline{z} = a - ib$$

og at der gælder

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} \tag{1.2}$$

Vi ved fra $\mathbb{R}^2$ at modulusoperationen opfylder trekantsuligheden

$$|z_0 + z_1| \leq |z_0| + |z_1|,$$

og det er nemt at se at

$$|z_0 z_1| = |z_0||z_1| \tag{1.3}$$

fx ved at referere til (1.2) og kommutativiteten af $\mathbb{C}$.

Nu kan vi tale om kontinuitet for funktioner der tager komplekse argumenter og/eller giver komplekse værdier:

Definition 1.1. Lad $A \subset \mathbb{C}$ og $f : A \to \mathbb{C}$ være givet. Vi siger at f er *kontinuert i* $a \in A$ hvis der gælder $\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Vi siger at f er *kontinuert* hvis f er kontinuert i alle $a \in A$.

Dette er præcis den samme definition som vi får ved at opfatte f som en funktion fra (en delmængde af) $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$. Ved at argumentere præcis som i $\mathbb{R}$ (men så bruge (1.3) i stedet for den trivielle version $|x_0 x_1| = |x_0||x_1|$ i $\mathbb{R}$) ser vi:

Sætning 1.2. *Lad $f, g : A \to \mathbb{C}$ være funktioner med $A \subset \mathbb{C}$, og antag at f og g er kontinuerte i $a \in A$. Så gælder at*

$$f + g, f - g, f \cdot g$$

er kontinuerte i a, og hvis $g(a) \neq 0$ er

$$f/g$$

kontinuert i a. Hvis $h : B \to \mathbb{C}$ med $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$, og hvis h er kontinuert i $f(a)$, så er endvidere

$$h \circ f$$

kontinuert i a.

Resultatet betyder at man uden videre kan bygge nye kontinuerte funktioner ud fra gamle, præcis som vi er vant til fra $\mathbb{R}$.

Grænseovergang defineres helt parallelt og har de samme egenskaber som dem vi kender fra $\mathbb{R}$. Nu ser vi på differentiabilitet:

$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$

Definition 1.3. Lad $A \subset \mathbb{R}$ og $f : A \to \mathbb{C}$ være givet. Vi siger at f er differentiabel i $a \in A$ hvis der gælder

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$$

for et $c \in \mathbb{C}$, og vi skriver $f'(a) = c$ og kalder værdien for *differentialkvotienten* af f i a.

Bemærk at x i grænseovergangen er reel, mens $f(x)$ og $f(a)$ kan være komplekse. Derfor svarer situationen til den vi kender for afbildninger $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ fra An0, og differentiabilitetsbegrebet er nøjagtig det samme. Det viser at vi kan tjekke differentiabilitet i den reelle og den imaginære koordinat hver for sig, så der gælder

$$f \text{ er differentiabel i } a \iff \mathrm{Re} f \text{ og } \mathrm{Im} f \text{ er differentiable i } a$$

og

$$f'(a) = (\mathrm{Re}f)'(a) + i(\mathrm{Im}f)'(a) \tag{1.4}$$

De sædvanlige regneregler for differentiation af sum, differens, produkt og kvotient gælder også her. Det ses enten ved at skrive ud i real- og imaginærdele for sig, eller ved at inspicere beviserne og bemærke at de også holder her. Vi har også en kæderegel

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

men bemærk at da vi kun giver mening til f' når f er defineret reelt, så må værdimængden for g være reel. Den indre funktion g skal således både have reel definitions- og værdimængde.

Vi husker på at middelværdisætningen (og dermed, en række af dens konsekvenser) *fejler* for afbildninger $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, jf. [EHM, Eksempel 4.19]. Vi vil snart vise et eksempel der viser at den også fejler for funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dette kalder på forsigtighed, og i hele kurset vil vi være på vagt overfor denne problemstilling. I langt de fleste tilfælde er der dog ikke de store problemer med at arbejde med funktioner der tager reelle variable og leverer komplekse resultater.

Vi afstår fra at definere differentiabilitet for afbildninger defineret på $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ – det ville føre for vidt. Vi vælger samme strategi for integration:

Definition 1.4. Lad $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ være givet. Vi siger at f er *Riemann-integrabel* hvis der findes et $I \in \mathbb{C}$ med den egenskab at der for alle $\epsilon > 0$ findes $\delta > 0$ således at

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \epsilon$$

hvis $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ er en middelsum for f hørende til en inddeling af finhed mindre end δ.

Dette er igen en definition vi allerede kender, nemlig den vi benyttede til at definere integrabilitet og integral for afbildinger fra $[a, b]$ til $\mathbb{R}^2$, jf. [EHM, Definition 5.23]. Derfor ved vi at I er entydigt bestemt og fortjener navnet

$$I = \int_a^b f(t)dt$$

Vi ved igen at

$$f \text{ er Riemann-integrabel} \Longleftrightarrow \mathrm{Re}f \text{ og } \mathrm{Im}f \text{ er Riemann-integrable}$$

og

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}f(t)dt + i\int_a^b \mathrm{Im}f(t)dt \tag{1.5}$$

Når Ref og Imf er kontinuerte, kan vi lede efter deres stamfunktioner og bestemme integralet på den måde. Derfor gælder

Sætning 1.5 (Infinitesimalregningens hovedsætning)**.** *Lad $I \subset \mathbb{R}$ være et interval. For enhver kontinuert funktion $f : I \to \mathbb{C}$ kan vi definere $\Phi : I \to \mathbb{C}$ ved, for fast $c \in I$, at sætte*

$$\Phi(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Herved opnås en stamfunktion til f i den forstand at Φ er differentiabel overalt i I med

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Bevis. Benyt den sædvanlige hovedsætning ([EHM, Sætning 5.31]) på Ref og Imf separat og sæt det hele sammen igen med (1.4) og (1.5). □

Når vi skal formulere det vigtige korollar til hovedsætningen, løber vi ind i den problemstilling at vi i An0 viste at $f' = 0$ medfører at f er konstant ved at trække på middelværdisætningen, som jo ikke gælder komplekst. Vi løser det med følgende lemma:

Lemma 1.6. *Lad $[a, b] \subset \mathbb{R}$ være et afsluttet og begrænset interval. Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ er differentiabel med $f'(x) = 0$ for alle $x \in (a, b)$, så findes $c \in \mathbb{C}$ således at $f(x) = c$ for alle $x \in [a, b]$.*

Bevis. Vi har set at Ref er differentiabel med diffentialkvotient $(\mathrm{Re}f)' = \mathrm{Re}(f') = 0$ overalt, så ved middelværdisætningen ([EHM, Sætning 4.20]) er $\mathrm{Re}f = c_1$ med $c_1 \in \mathbb{R}$. På samme måde er $\mathrm{Im}f = c_2$ med $c_2 \in \mathbb{R}$, og dermed er $f(x) = c_1 + ic_2 =: c$ □

Korollar 1.7. *Lad $I \subset \mathbb{R}$ være et interval. Hvis der til kontinuert $f : I \to \mathbb{C}$ findes en stamfunktion $F : I \to \mathbb{C}$ så gælder*

$$\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b$$

Bevis. Argumentet føres præcis som i [EHM, Sætning 5.32, Korollar 5.33], bortset fra at vi benytter Lemma 1.6 til at slutte at $F = \Phi + c$ fra at der tydeligvis gælder $F' = \Phi' = f$. □

Til at bestemme stamfunktioner og dermed beregne integraler benytter vi os intensivt af partiel integration og integration ved substitution, der gælder præcis som i det klassiske tilfælde.

Vi får brug for en trekantsulighed for integraler, og starter med at skærpe en sætning fra Analyse 0 med følgende lemma:

Lemma 1.8. *Lad $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ være Riemann-integrabel. Så er $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ også Riemann-integrabel,*

Bevis. For to komplekse tal z, w har vi (ved at kvadrere på begge sider)

$$|z-w| \leq |\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(w)| + |\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(w)|$$

og for to reelle tal x, y har vi (ved at se på tilfældene $x < y$, $x = y$, $x > y$ for sig)

$$|x-y| = \max\{x,y\} - \min\{x,y\}$$

og vi samler disse observationer til

$$\begin{aligned} |z-w| \quad &\leq \quad \max\{\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(w)\} - \min\{\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(w)\} \\ &+ \quad \max\{\mathrm{Im}(z), \mathrm{Im}(w)\} - \min\{\mathrm{Im}(z), \mathrm{Im}(w)\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Vi vil vise at $|f|$ har Bolzano-egenskaben ([EHM, Definition 5.15]) på $[a,b]$ og betragter til det formål to inddelinger

$$D : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$
$$D' : a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b$$

og tilhørende middelsummer

$$M = \sum_{i=1}^{m} |f(\xi_i)| \Delta x_i$$
$$M' = \sum_{j=1}^{m} |f(\eta_j)| \Delta y_j$$

hvor $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ og $\eta_j \in (y_{j-1}, y_j)$.

Givet $\epsilon > 0$ skal vi så finde $\delta > 0$ således at

$$\left|M - M'\right| < \epsilon,$$

blot finheden af de to inddelinger er højst δ. Fordi vi har antaget at f er Riemann-integrabel, er såvel Ref som Imf Riemann-integrable. Vi kan derfor vælge et $\delta > 0$ som afparerer $\epsilon/4$ i forhold til Bolzano-egenskaben for både Ref som Imf.

Vi ser først, som i beviset for [EHM, Sætning 5.17], på problemstillingen under antagelsen at D' er en videreinddeling af D, og vi skriver som i dette bevis $j \vdash i$ hvis i og j er sammenknyttet ved at $(y_{j-1}, y_j) \subset (x_{i-1}, x_i)$. Vi vælger $\zeta_i \in \{\eta_j \mid j \vdash i\}$ sådan at

$$|f(\eta_j)| \leq |f(\zeta_i)| \tag{1.7}$$

for alle $j \vdash i$, altså således at ζ_i giver den største værdi blandt alle $|f(\eta_j)|$ med $j \vdash i$. Bemærk at $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Vi får dermed

$$M' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \vdash i} |f(\eta_j)| \Delta y_j \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \vdash i} |f(\zeta_i)| \Delta y_j = \sum_{i=1}^{n} |f(\zeta_i)| \Delta x_i$$

og det viser

$$\begin{aligned} M' - M &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(\zeta_i)| \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (|f(\zeta_i)| - |f(\xi_i)|) \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(\zeta_i) - f(\xi_i)| \Delta x_i \end{aligned}$$

hvor

$$|f(\zeta_i)| - |f(\xi_i)| \leq |f(\zeta_i) - f(\xi_i)|$$

følger af trekantsuligheden.Bruger vi nu (1.6) får vi

$$\begin{aligned}&M' - M \leq \\ &\sum_{i=1}^{n} \max\{\mathrm{Re}f(\zeta_i), \mathrm{Re}f(\xi_i)\}\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \min\{\mathrm{Re}f(\zeta_i), \mathrm{Re}f(\xi_i)\}\Delta x_i \\ +&\sum_{i=1}^{n} \max\{\mathrm{Im}f(\zeta_i), \mathrm{Im}f(\xi_i)\}\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \min\{\mathrm{Im}f(\zeta_i), \mathrm{Im}f(\xi_i)\}\Delta x_i \\ <&\epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2\end{aligned}$$

fordi alle fire summer er middelsummer hørende til en inddeling af finhed højst δ; de to første for $\mathrm{Re}f$ og de to sidste for $\mathrm{Im}f$.

Ved det samme argument hvor vi erstatter (1.7) med

$$|f(\zeta_i)| \leq |f(\eta_j)|$$

får vi at $M - M' < \epsilon/2$, og dermed har vi $|M - M'| < \epsilon/2$.

For D og D' i generel position vælger vi D'' som er en videreinddeling af begge, og ser at

$$|M - M''|, |M' - M''| < \epsilon/2$$

for M'' en middelsum hørende til D'', ved brug af bevisets første del. Og så får vi

$$|M - M'| \leq |M' - M''| + |M'' - M'| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

□

Sætning 1.9. *Lad $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ være Riemann-integrabel. Så er $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ også Riemann-integrabel, og der gælder*

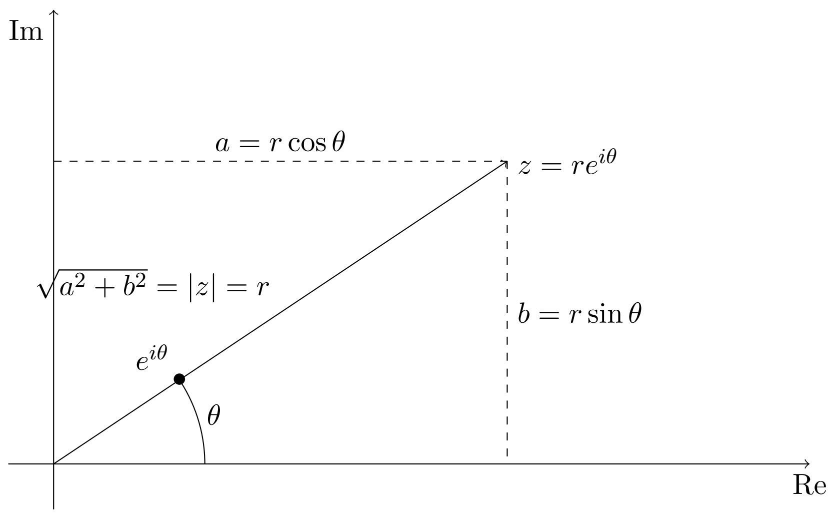
$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Bevis. At $|f|$ automatisk er integrabel er netop vist. Så følger trekantsuligheden ved at tænke på f som en afbildning over i $\mathbb{R}^2$ og referere til [EHM, Sætning 5.27]. □

Den komplekse eksponentialfunktion Hvorimod det er oplagt at arbejde med real- og imaginærdel, når det drejer sig om den additive struktur af $\mathbb{C}$, er det ofte mere naturligt at repræsentere komplekse tal ved hjælp af polarformen, når man kigger på den multiplikative struktur. Vi husker på at polarformen af et komplekst tal opnås ved at dividere med længden $r = |z|$ og ved at skrive det komplekse tal på enhedscirklen ved hjælp af cosinus og sinus.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Vi kalder θ for et *argument* for z.



Skriver vi nu også

$$w = s(\cos\phi + i\sin\phi),$$

hvor $s = |w|$, så finder vi

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r \cdot s\left((\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)\right) \\ &= r \cdot s\left(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\right), \end{aligned}$$

hvor vi brugte additionsreglerne for cosinus og sinus, jf. [EHM, Korollar A.7]. Vi ser således, at vinklerne opfører sig additivt under multiplikation!

Vi kender dette fænomen fra eksponentialfunktionen (jf. [EHM, Eksempel 3.27]) og er derfor ledt til følgende definition.

Definition 1.10 (De Moivre)**.** Lad $\theta \in \mathbb{R}$.

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta.$$

Vi vil veksle mellem at bruge θ og x i dette udtryk alt efter om vi vil fremhæve argumentet som en vinkel eller ikke.

Som vi lige har vist opfylder den imaginære eksponentialfunktion vi netop har defineret funktionalligningen

$$e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}.$$

Multiplikation af z og w kan derfor skrives som

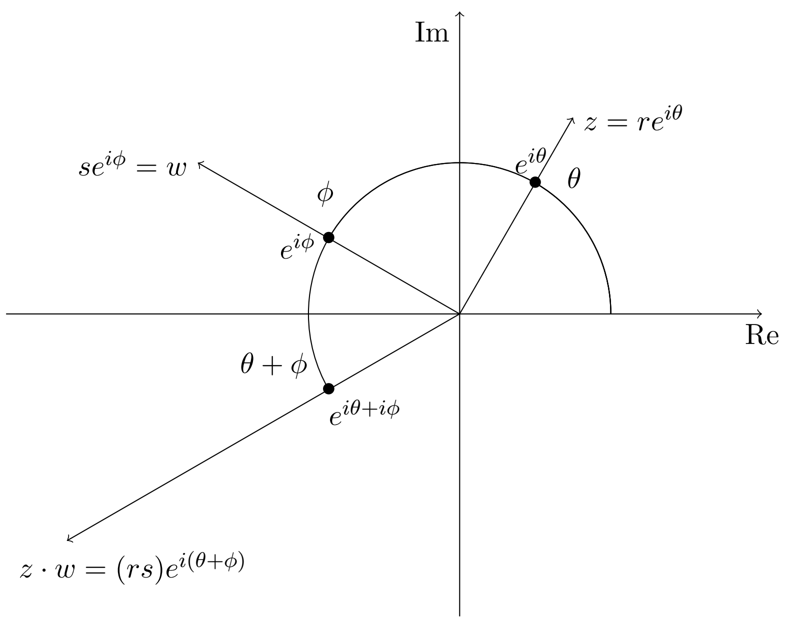
$$z \cdot w = rse^{i(\theta+\phi)}.$$

Da det gælder, at $e^{a+c} = e^a e^c$ for de reelle tal a og c, er det naturligt udvide definitionen af eksponentialfunktionen fra reelle og imaginære til alle komplekse tal $z = a + ib$ ved at definere

Definition 1.11 (Euler)**.** Lad $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

$$e^z := e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

I første omgang beder vi læseren tænke på $e^{i\theta}$ og e^z som en definition der giver effektiv notation. Men vi vil snart præsentere tunge argumenter for at de Moivre og Euler herved har udvidet eksponentialfunktionen til $\mathbb{C}$ på den eneste rimelige måde, og at koblingen mellem eksponentialfunktionen på den ene side og sinus/cosinus på den anden er alt andet end en fiks ide hos de to herrer.



Vi samler nogle resultater til senere brug, der alle peger i den retning ved at etablere egenskaber for e^z eller e^{ix} som vi kender fra exp.

Lemma 1.12. *Når $z, w \in \mathbb{C}$, gælder*

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

Bevis. Lad $z = a + ib$ og $w = c + id$. Så får vi

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{(a+c)+i(b+d)} \\ &= e^{a+c}e^{i(b+d)} \\ &= e^a e^b e^{ib} e^{id} \\ &= (e^a e^{ib})(e^c e^{id}) \\ &= e^z e^w. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.13. *For alle $a \in \mathbb{R}$ gælder*

$$\frac{d}{dx}\left(e^{iax}\right) = iae^{iax}$$

og for alle $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ har vi således

$$\int e^{iax} dx = -\frac{i}{a} e^{iax} + c$$

Bevis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(e^{iax}\right) &= \frac{d}{dx}\cos(ax) + i\frac{d}{dx}\sin(ax)) \\ &= -a\sin(ax) + ia\cos(ax) \\ &= ia\left(\cos(ax) + i\sin(ax)\right) \\ &= iae^{iax} \end{aligned}$$

og vi får $\frac{d}{dx}\left(-\frac{i}{a}e^{ix}\right) = e^{iax}$ ved at dividere igennem med ia. Så følger integralformlen af korollaret til infinitesimalregningens hovedsætning (Korollar 1.7). □

Når $a = 0$ er stamfunktionerne til $e^{iax} = 1$ selvfølgelig af formen $x + c$.

Vi bemærker her at med $f(x) = e^{ix}$ så er f' aldrig nul, og dermed er der ingen løsning $0 < \xi < 2\pi$ til

$$f'(\xi) = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = \frac{1 - 1}{2\pi} = 0.$$

Hermed har vi fundet det annoncerede modeksempel til middeværdisætningen i denne kontekst. Bemærk at det essentielt er det samme som det der anføres for afbildninger $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ i [EHM, Eksempel 4.19].

Den imaginære eksponentialfunktion får en særligt vigtig rolle i Fourieranalysen, hvor vi, for hvert $k \in \mathbb{Z}$, ser på

$$e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$e_k : \theta \mapsto e^{ik\theta} = \cos k\theta + i \sin k\theta.$$

Det er vigtigt at bemærke, at e_k er periodisk med periode 2π. Ud af eksponentialfunktionens egenskaber er det nemt at verificere, at

$$e_k e_\ell = e_{k+\ell},$$

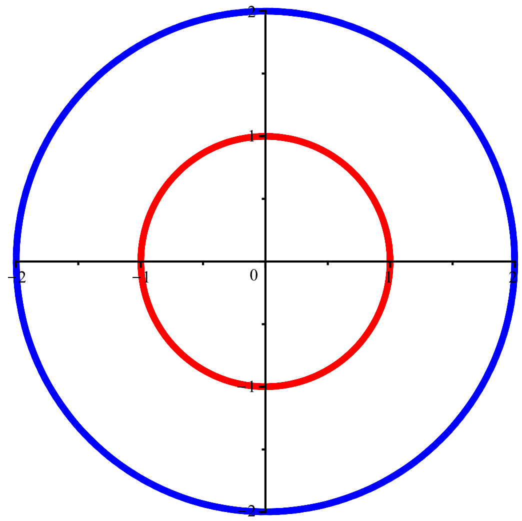
hvorimod beviset af denne formel er lidt mere vanskeligt ved brug af cosinus og sinus.

Visualisering

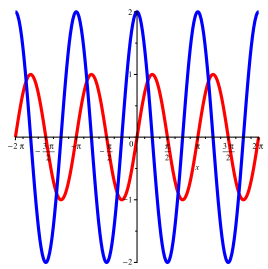
Observation 1.14. Senere i kurset får vi brug for at visualisere funktioner $f : I \to \mathbb{C}$, og det kræver en lille overvejelse som vi tager hul på nu. Vælger vi fx $I = [-2\pi, 2\pi]$ og ser på $f, g : I \to \mathbb{C}$ givet ved

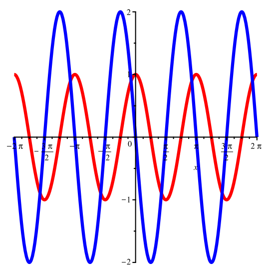
$$f(x) = e^{2ix} \qquad g(x) = 2ie^{2ix}$$

(som vi lige har set, er da $f' = g$) kan vi tænke på de to afbildninger som parametriseringer af kurver og tegne deres spor:



men en sådan illustration fortæller jo ikke noget om hvordan punkterne gennemløbes og skjuler fx helt at kurven løber fire gange rundt om origo. Det ser vi bedre på to plots af graferne for de to funktioners realdele (til venstre) og imaginærdele (til højre):

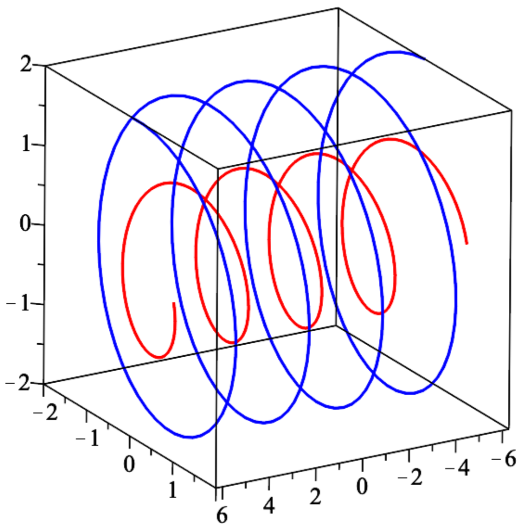




men her mister man til gengæld overblikket over hvilke punkter der besøges. I et computeralgebrasystem der kan lave 3D-plots, kan man i stedet afsætte alle punkter af formen

$$\begin{pmatrix} x \\ \mathrm{Re} f(x) \\ \mathrm{Im} f(x) \end{pmatrix}$$

som her giver



Vi kan tænke på denne 3D-figur som den naturlige generalisering af grafer for afbildninger $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til situationen med $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Bemærk at når vi ser på YZ-planen ovenfra, så får vi netop den første graf vi afbildede herover, og når vi ser på XY- og XZ-planerne fra siden, så fremkommer de to næste grafer. Det er således en god måde at forstå sådanne funktioner at dreje rundt på graferne i et sådant system.

1.2 Talfølger

I denne del skal vi introducere de grundlæggende begreber inden for studiet af talfølger. Vi starter med definitionen af en talfølge og ser på mange eksempler herpå. Vi introducerer derefter begreberne fortætningspunkt, konvergens og divergens. De reelle følger, hvor vi kan sammenligne størrelser på følgeleddene, spiller en særlig rolle i beviserne.

Eksempel 1.15. Menneskeheden har selvfølgelig haft behov for at udregne kvadratrødder længe inden den fik udstyret sig selv med isenkram der kan løse sådan en opgave med et tryk på en knap. En metode med flere tusind år på bagen til at bestemme $\sqrt{c}$ med $c \geq 0$ er følgende. Vi starter med at sætte $x_0 = c$, og bestemmer $x_1, x_2, \ldots$ fra den forrige værdi ved formlen

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}}\right)$$

Er målet fx at bestemme $\sqrt{2}$ giver proceduren

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= \frac{3}{2} \\ x_2 &= \frac{17}{12} \\ x_3 &= \frac{577}{408} \\ x_4 &= \frac{665857}{470832} \\ x_5 &= \frac{886731088897}{627013566048} \end{aligned}$$

eller i decimalapproksimation

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= 1.5 \\ x_2 &= 1.416666667 \\ x_3 &= 1.414215686 \\ x_4 &= 1.414213562 \\ x_5 &= 1.414213562 \end{aligned}$$

Vi ved at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal, så det er klart at de brøker vi opnår i proceduren aldrig rammer helt rigtigt, men vi ser jo tydeligt at de bevæger sig mod en værdi, endda så hurtigt at vi efter en håndfuld iterationer ikke kan se forskel med de givne ni decimalers nøjagtighed. Vi ser at kvadratet af heltallet 1414213562 er

$$1999999998944727844$$

hvilket viser at 1.414213562^2 svarer til tallet 2 med otte cifres nøjagtighed.

Vi går nu i gang med at formalisere hvad der skal forstås ved at x_n bevæger sig mod $\sqrt{c}$. Når det er på plads kan vi ret nemt føre bevis for at metoden herover faktisk virker.

Definition og eksempler

Definition 1.16 (Reel talfølge)**.** Lad $a_n \in \mathbb{R}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi siger, at

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

eller $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en *reel talfølge.*

Bemærk at en reel talfølge ikke er andet end en afbildning $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Navnet og notationen formidler at vi tænker på funktionens værdier sat op i rækkefølge

$$a(1), a(2), (3), \ldots$$

Brugen af krøllede parenteser her må ikke forveksles med deres brug ved specifikation af mængder. Det er også almindeligt i den matematiske litteratur at skrive følger $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Når det er praktisk for os starter vi følger i andre indekser end 1. Især tilfældet $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ er vigtigt.

Vi vil ofte have brug for at runde værdier fra $\mathbb{R}$ op eller ned til værdier i $\mathbb{Z}$. Til den brug indfører vi følgende notation:

Definition 1.17. Når $x \in \mathbb{R}$ betegner $\boxed{\mathbb{R}}$

$$\lfloor x \rfloor$$

det største hele tal der er mindre end eller lig med x. Funktionen $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ kaldes *gulvfunktionen.* På præcis samme måde betegner

$$\lceil x \rceil$$

det mindste hele tal der er større end eller lig med x, og $x \mapsto \lceil x \rceil$ kaldes *loftsfunktionen.*

Vi starter med at illustrere begrebet talfølge med en række karakteristiske eksempler, som vi vil referere tilbage til senere i kurset.

Eksempel 1.18. Den aftagende reelle talfølge

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots,$$

løber igennem positive værdier der bliver mindre og mindre . Faktisk aftager den ret langsomt, hvis vi sammenligner den med

$$a_n = 2^{-n} \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots \qquad \text{(binær) } 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \dots.$$

Vi kalder sådanne følger monotone, da værdierne enten stiger hver gang eller aftager hver gang (en formel definition af monotoni bliver givet senere).

Eksempel 1.19. Følger kan også vokse ubegrænset opad

$$a_n = n \qquad 1, 2, 3, \dots,$$

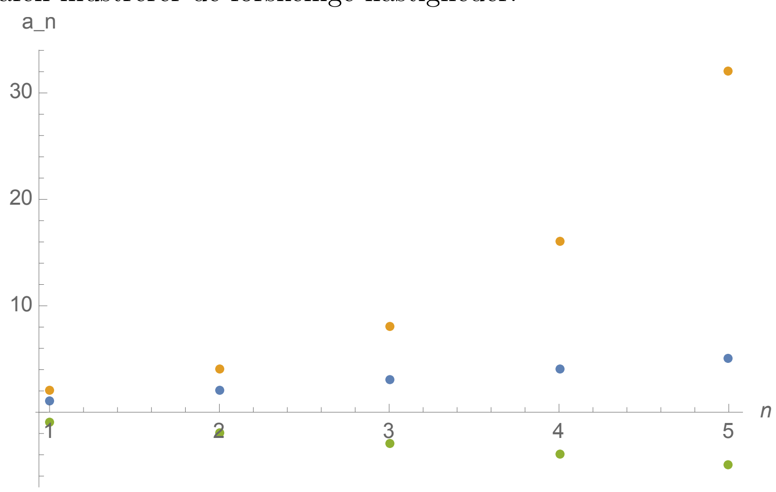
på en langsom måde eller på en hurtig måde

$$a_n = 2^n \qquad 2, 4, 8, 16, 32, 64 \dots,$$

eller aftage ubegrænset nedad

$$a_n = -n \qquad -1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots.$$

Grafen illustrerer de forskellige hastigheder.



Eksempel 1.20. Der findes også følger, som vakler lidt

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4} \dots,$$

men som alligevel ser ud til at have et mål, og nogle, som vakler så meget, at det ser ud som om at de ikke kan bestemme sig, for hvor de skal hen, fx:

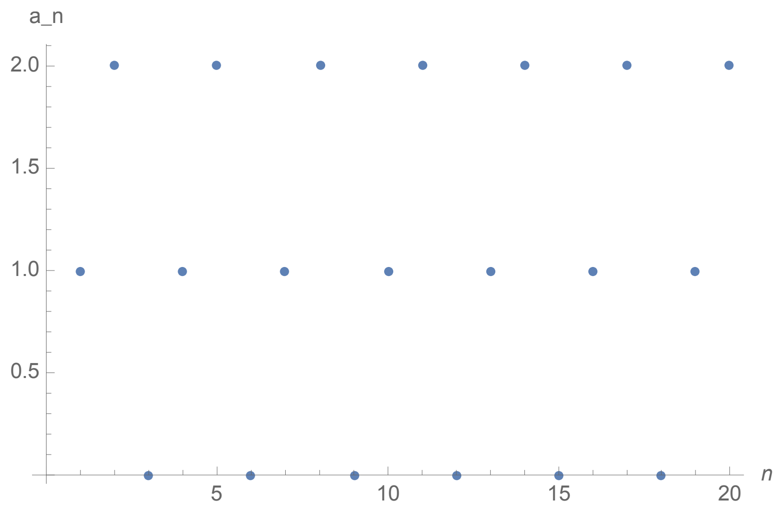
$$a_n = (-1)^n \qquad -1, 1, -1, 1, \dots.$$

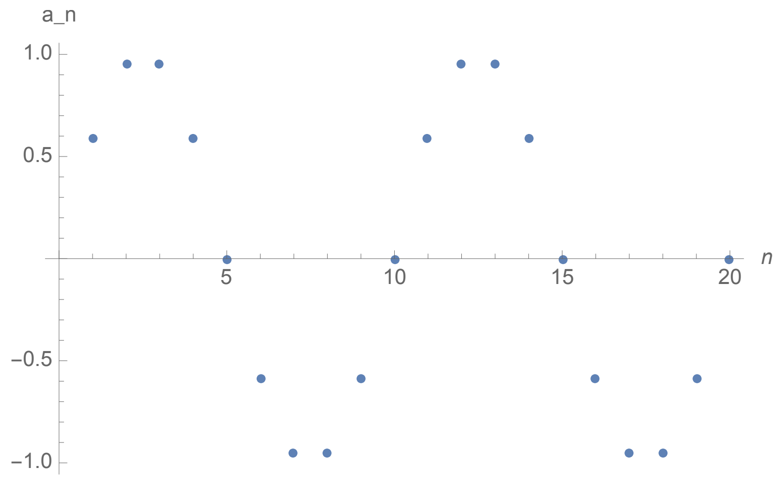
En talfølge kan også hoppe mellem flere end to værdier, fx tre

$$a_n = n - 3\lfloor n/3 \rfloor \qquad 1, 2, 0, 1, 2, 0, \ldots$$

eller rigtigt mange ($k \gg 1$, i grafen med $k = 10$)

$$a_n = \sin\left(\frac{2\pi}{k} n\right) \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{k}\right), \sin\left(\frac{2 \cdot 2\pi}{k}\right), \sin\left(\frac{3 \cdot 2\pi}{k}\right), \ldots$$



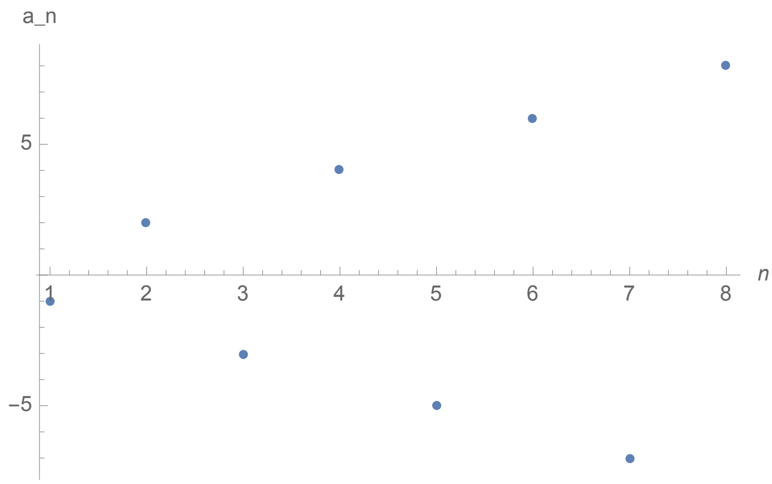


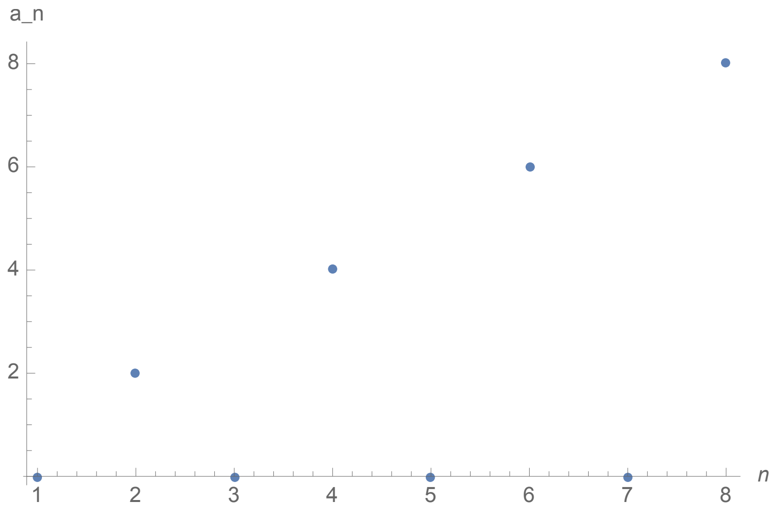
Følger kan også hoppe mellem store positive og negative værdier

$$a_n = (-1)^n n \quad -1, 2, -3, 4, \ldots$$

eller mellem en konstant følge og en følge af tal som bliver større og større:

$$a_n = \max\{(-1)^n n, 0\} \quad 0, 2, 0, 4, 0, 6 \ldots.$$





Eksempel 1.21 (Implicit definerede følger)**.** Udover at definere en følge ved hjælp af en given funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$a_n := f(n),$$

så kan følger også være givet via rekursion. F.eks. bliver

$$f_0 = 0, f_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$$

til følgen af Fibonacci-tal

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots .$$

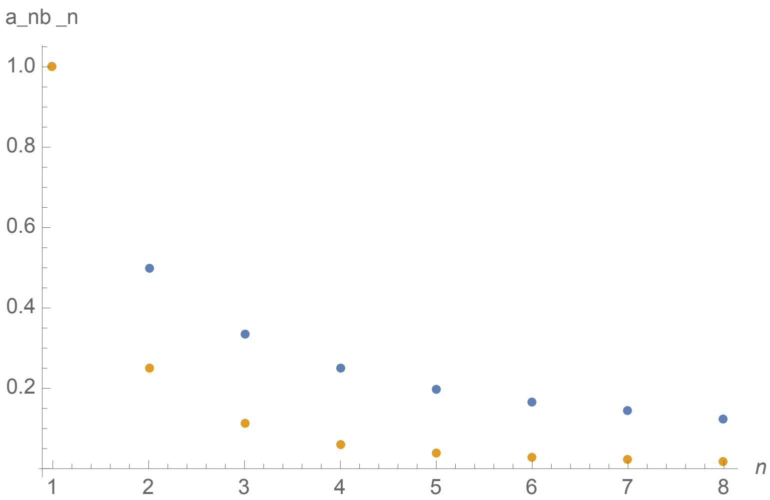
Eksempel 1.22. Ofte ser vi ikke på eksplicitte talfølger, men i stedet på en mængde af følger med en særlig egenskab. Derefter vil vi gerne udlede et nyt udsagn, som gælder for alle talfølger i mængden. F.eks. kan vi se på mængden af følger, der er ikke-negative, $a_n \geq 0$, og aftagende, $a_n \geq a_{n+1}$:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots .$$

For alle sådanne følger betragter vi talfølgen $b_n := a_n^2$. Udsagnet, vi vil vise er, at $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ også er ikke-negativ og aftagende. Her kommer beviset:

$$b_{n+1} = a_{n+1}^2 = a_{n+1} \cdot a_{n+1} \leq a_n a_n = b_n.$$

Vi udtrykte $n+1$-leddet b_{n+1}, ved hjælp af definitionen, så brugte vi den aftagende egenskab for $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ og satte resultatet sammen til b_n. Grafen viser eksemplet med $a_n = \frac{1}{n}$:



Og så er der selvfølgelig de komplekse talfølger:

Definition 1.23 (Kompleks talfølge)**.** Lad $z_n \in \mathbb{C}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi siger, at

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

eller $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en *kompleks talfølge.*

Bemærk, at en reel talfølge også er en kompleks talfølge, da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Eksempel 1.24 (Real- og imaginærdel)**.** Når man betragter en følge af komplekse tal, er det ofte oplagt først at se på de relaterede reelle talfølger af realdelene $\{\mathrm{Re}(z_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ og imaginærdelene $\{\mathrm{Im}(z_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$. På den måde ses den komplekse talfølge som to reelle talfølger, som skal analyseres separat. Følgen

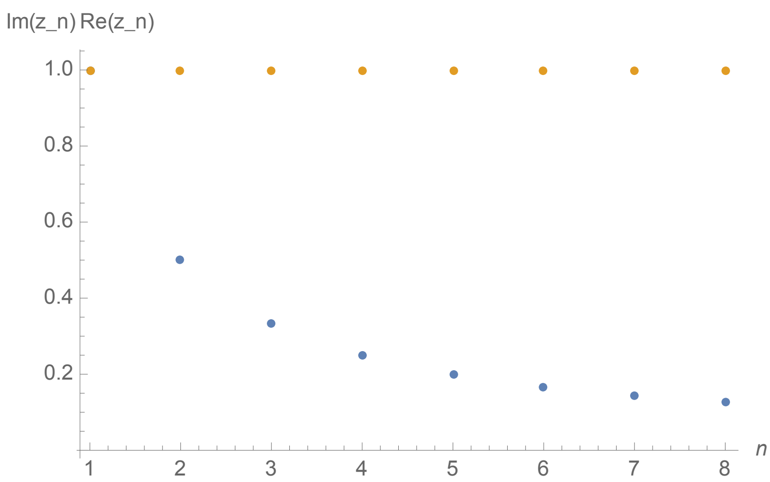
$$z_n = \frac{1+in}{n} \qquad 1+i, \frac{1+2i}{2}, \frac{1+3i}{3}, \dots$$

har

$$\mathrm{Re}(z_n) = \frac{1}{n} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

og

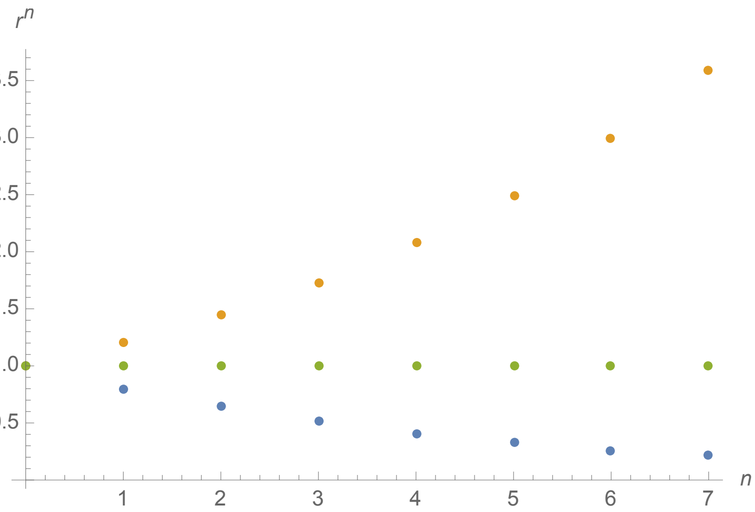
$$\mathrm{Im}(z_n) = \frac{n}{n} = 1 \qquad 1, 1, 1, \dots$$



Eksempel 1.25 (Polarform)**.** I andre tilfælde er det godt at se på den reelle talfølge af absolutværdierne $\{|z_n|\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, da deres egenskaber ofte giver en god indikation af, hvordan den komplekse talfølge opfører sig. Det er især tilfældet, hvis talfølgen har en multiplikativ struktur, f.eks

$$z_n := z^n \qquad 1, z, z^2, z^3, \dots,$$

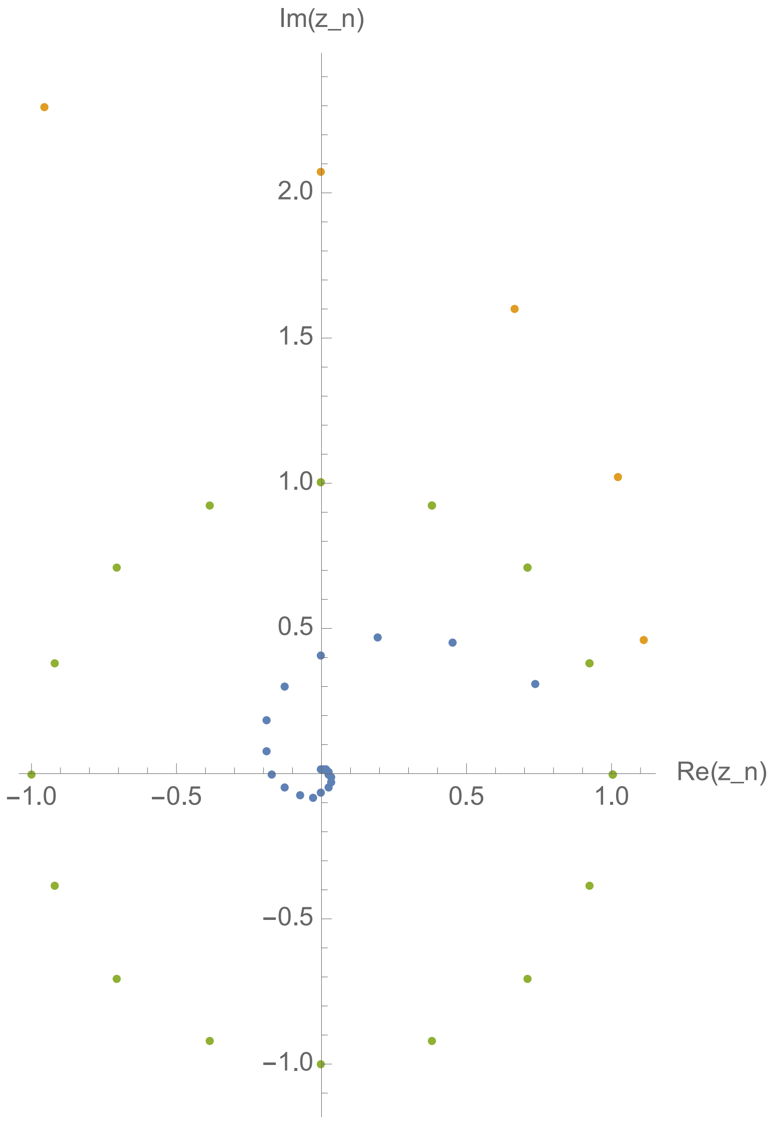
for et $z \in \mathbb{C}$ med $z \neq 0$. Skriver man z om på polarformen $z = re^{i\theta}$, så bliver det klart at $|z_n| = r^n$. Grafen viser tilfældet med $r = 0.8, 1, 1.2$.



Hvis $r < 1$, går talfølgen $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (i en spiral) mod nul uanset θ, hvorimod den spiralerer udad, hvis $r > 1$. Hvis $r = 1$, så forbliver tallene på cirklen med radius 1. Som eksempler lad os betragte $\theta = \pi/8$, hvor

$$z_n = z^n = r^n e^{i\frac{n\pi}{8}} \qquad 1, re^{i\frac{\pi}{8}}, r^2e^{i\frac{2\pi}{8}}, r^3e^{i\frac{3\pi}{8}}, \ldots .$$

Graferne viser tilfældene $r = 0.8, 1, 1.2$



Fortætningspunkt Som vi har set i eksemplerne, kan der findes ingen, én eller flere værdier, som en følge ofte kommer tæt på. Sådanne værdier kalder vi fortætningspunkter.

$\boxed{\mathbb{C}}$

Definition 1.26. Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en talfølge. $a \in \mathbb{C}$ er et *fortætningspunkt* for $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, hvis der for alle $\epsilon > 0$ findes uendeligt mange $n \in \mathbb{N}$ med $|a_n - a| < \epsilon$.

For at vise, at a ikke er et fortætningspunkt, skal der gælde at der findes et $\epsilon > 0$ sådan at $|a_n - a| < \epsilon$ gælder kun for endelig mange n.

Eksempel 1.27 (Et fortætningspunkt)**.** Den reelle talfølge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

har $a = 0$ som fortætningspunkt. For at kunne se dette, bemærker vi, at for et givet $\epsilon > 0$ og for alle naturlige tal n, som opfylder $n > \frac{1}{\epsilon}$ (det er uendeligt mange værdier af n) gælder det, at

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Følgen har ikke andre fortætningspunkter. For at vise dette, lad $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ være vilkårlig, og lad $\epsilon = \frac{|a|}{2}$. For alle naturlige tal n, som opfylder $n \geq \frac{2}{|a|}$ vil

$$|a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{|a|}{2} \leq |a|$$

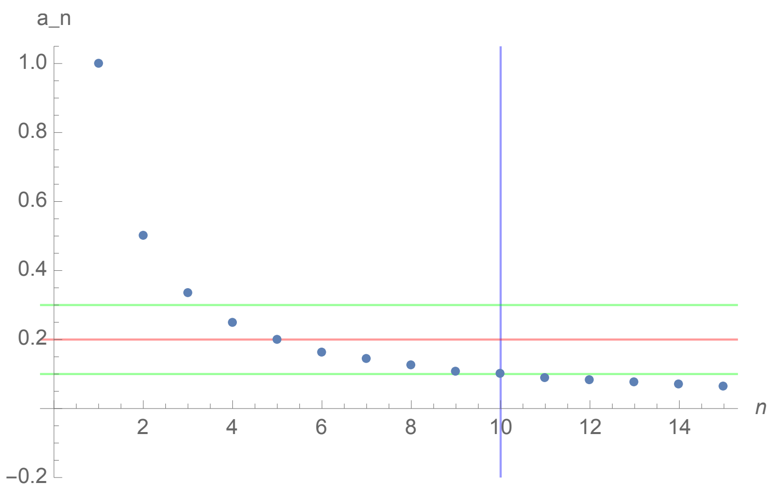
så vi finder ved brug af den omvendte trekantsulighed ([EHM, Korollar 1.5])

$$|a_n - a| \geq |a| - |a_n| \geq |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}.$$

Det betyder, at

$$|a_n - a| < \epsilon$$

ikke kan gælde for andre n end $n = 1, 2, \ldots, \lfloor\frac{2}{|a|}\rfloor$ (jf. Definition 1.17)). Vi har derfor fundet et $\epsilon > 0$ (lig med $\frac{|a|}{2}$), sådan at der kun findes endeligt mange led i følgen, som ligger i "ϵ-omegnen" af a. Det betyder, at a ikke kan være et fortætningspunkt for følgen. I grafen er $a = \frac{1}{5}$ indikeret med den røde streg. $a \pm \epsilon$ er i grøn. Alle værdier $n \geq \lfloor\frac{2}{|a|}\rfloor = 10$ har a_n, som er mindst ϵ langt væk fra a.



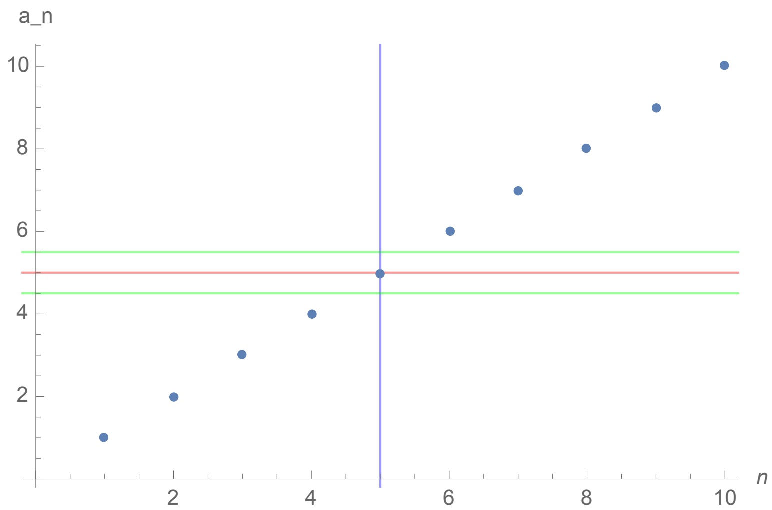
Eksempel 1.28 (Nul fortætningspunkter)**.** Lad den reelle talfølge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være givet ved

$$a_n = n \qquad 1, 2, 3, \ldots .$$

Følgen har ikke nogen fortætningspunkter, hvilket let ses ved at vælge $\epsilon = \frac{1}{2}$. Uligheden

$$|a_n - a| = |n - a| < \frac{1}{2} \tag{1.8}$$

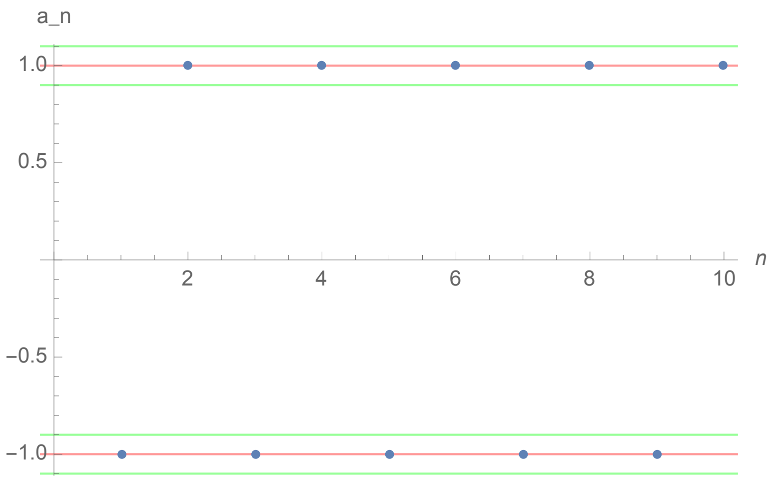
har jo højst en løsning n, fordi afstanden mellem to forskellige hele tal er mindst én.



Eksempel 1.29 (To fortætningspunkter)**.** Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være givet ved

$$a_n = (-1)^n \qquad -1, 1, -1, 1, \ldots$$

$a = 1$ er et fortætningspunkt, fordi $a_n = 1$ for alle lige n (og der findes uendelig mange) og dermed $|a_n - 1| = 0 < \epsilon$ for alle $\epsilon > 0$. På lignende vis ser man, at $a = -1$ er et fortætningspunkt. Der findes ikke andre fortætningspunkter.



Følgen $-1, 1, -1, 1, \ldots$ har en elegant generalisering i den komplekse talplan:

Proposition 1.30 (Mange fortætningspunkter)**.** *Lad $x \in [0, 2\pi)$. Vi ser på den komplekse talfølge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved*

$$a_n = e^{inx} = (e^{ix})^n$$

Hvis $x/2\pi \in \mathbb{Q}$, således at

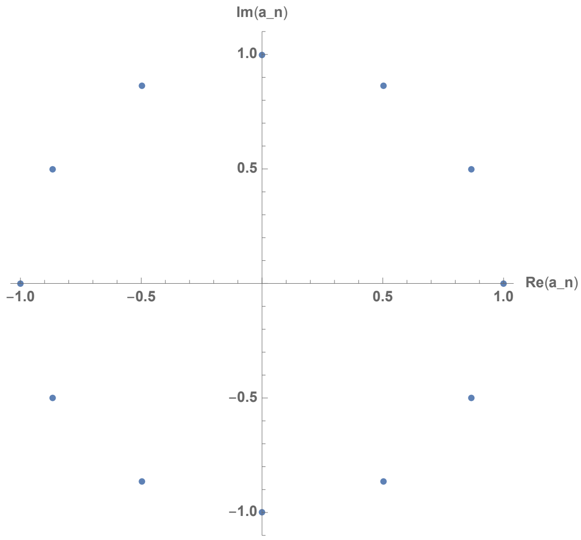
$$\frac{x}{2\pi} = \frac{p}{q},$$

hvor p, q er indbyrdes primiske, så har $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ netop q fortætningspunkter, nemlig

$$e^{2\pi i \frac{1}{q}}, e^{2\pi i \frac{2}{q}}, \ldots, e^{2\pi i \frac{q-1}{q}}, 1 \tag{1.9}$$

Hvis $x/2\pi \notin \mathbb{Q}$, så har $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uendeligt mange fortætningspunkter, nemlig alle punkterne i

$$\{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$$



Bevis. I det rationale tilfælde bemærker vi først at

$$a_n = e^{2\pi i \frac{np}{q}} = e^{2\pi i \frac{dq+r}{q}} = e^{2\pi i d} e^{2\pi i \frac{r}{q}} = e^{2\pi i \frac{r}{q}}$$

hvor vi har skrevet

$$np = dq + r$$

med $0 \le r < q$ i den sædvanlige forstand af division med rest, og brugt at $e^{2\pi i d} = 1$ fordi d er et helt tal. Altså ligger alle følgens elementer i en af de q anførte værdier, og et tal x der ikke er blandt dem kan ikke være fortætningspunkt, idet der findes $\epsilon > 0$ så $|x - a_n| < \epsilon$ aldrig gælder.

Omvendt ved vi fra Bézouts lemma ([Lü, Sætning 137]) at fordi p og q er primiske, så findes $r, s \in \mathbb{Z}$ så der gælder

$$rp + sq = 1$$

Vi kan antage at $r > 0$ ved at om nødvendigt vælge $t \in \mathbb{N}$ så stor at $r+tq > 0$ og i stedet se på

$$(r + tq)p + (s - tp)q = 1$$

Vi får

$$a_r = e^{2\pi i \frac{rp}{q}} = e^{2\pi i \frac{1-sq}{q}} = e^{2\pi i \frac{1}{q}} e^{2\pi i s} = e^{2\pi i \frac{1}{q}}$$

og så ser vi at

$$a_r, a_{2r}, a_{3r}, \cdots$$

gennemløber de q værdier i den rækkefølge vi angav i (1.9), med hver værdi besøgt uendeligt ofte. Så er de værdier tydeligvis fortætningspunkter.

Nu ser vi på det irrationale tilfælde. Vi bemærker først at $e^{ikx} \neq e^{i\ell x}$ for $k \neq \ell$, idet der ellers ville gælde $kx - \ell x \in 2\pi\mathbb{Z}$ i modstrid med irrationaliteten af $x/2\pi$. Mængden af tal

$$\{e^{ikx} \mid k \in \mathbb{N}\} = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

er altså uendelig. Vi fastholder et $N \in \mathbb{N}$ og inddeler cirken i N lige lange cirkelbuer svarende til en ækvidistant inddeling af intervallet $[0, 2\pi]$. Da følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ antager uendeligt mange forskellige værdier må et af buestykkerne indeholde mindst to følgeelementer, lad os sige a_k og a_ℓ, hvor vi antager $k > \ell$. Vi ved at de to komplekse tal har et argument der ligger højst $2\pi/N$ fra hinanden, så vi får at

$$a_{k-\ell} = e^{i(k-\ell)x} = e^{ikx}/e^{i\ell x} = a_k/a_\ell$$

er et komplekst tal med modulus 1 og argument i $[-2\pi/N, 0) \cup (0, 2\pi/N]$. Det viser, på samme måde som i det rationale tilfælde, at

$$a_{k-\ell}, a_{2(k-\ell)}, a_{3(k-\ell)}, \cdots$$

besøger alle de N cirkelbuer uendeligt ofte. Besøgene sker i positiv eller negativ omløbsretning alt efter hvilket delinterval argumentet for $a_{k-\ell}$ lander i.

Det viser at alle tal z_0 på enhedscirklen er fortætningspunkter ved at for $\epsilon > 0$ vælge N så stor at

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, |z - z_0| < \epsilon\}$$

indeholder en hel cirkelbue. Tal udenfor enhedscirklen er ikke fortætningspunkter, præcis som i det rationale tilfælde. □

Konvergens Vi har allerede bemærket, at talfølger sommetider *går mod en værdi*, på den måde at følgens led kommer tættere og tættere på værdien. Vi skal nu lave en formel definition af begrebet konvergens, som udtrykker dette og som er det mest centrale begreb i hele kurset.

Definition 1.31 (Konvergens)**.** En talfølge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergerer mod* $a \in \mathbb{C}$, hvis der for alle $\epsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$, således at det for alle $n \geq N$ gælder, at $\boxed{\mathbb{C}}$

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

En følge, som konvergerer, kaldes for *konvergent.* I så fald skriver vi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

eller

$$a_n \to a \text{ når } n \to \infty$$

Omvendt er det underforstået, at følgen konvergerer med grænseværdi a, hvis vi skriver sådan. En følge, som ikke konvergerer, kaldes for divergent.

Konvergens for en følge betyder altså at der for alle ϵ findes et indeks N således at a_n fra og med det indeks har afstand mindre end ϵ fra grænseværdien. Vi siger at følgeværdierne er *vilkårligt tæt på grænseværdien fra et vist trin.*

Bemærk at trinnet N er et naturligt tal. Sommetider skriver vi $N(\epsilon)$ for at tydeliggøre, at N er afhængig af ϵ.

Eksempel 1.32 (Konvergent følge)**.** Talfølgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved $a_n = \frac{1}{n}$ er konvergent mod $a = 0$: Givet et $\epsilon > 0$, vælger vi $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$, og finder for alle $n \geq N$:

$$|a_n - a| = |a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil} \leq \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Se graf i Eksempel 1.27.

Eksempel 1.33 (Divergent følge 1)**.** Talfølgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved $a_n = n$ divergerer. Vi skal vise, at der for alle $a \in \mathbb{R}$ findes et $\epsilon > 0$, sådan at der for alle N findes et $n \geq N$, sådan at $|a_n - a| \geq \epsilon$. Lad $\epsilon = 1$. Vælg $n = \max\{N, \lceil a \rceil\} + 1$. Så estimerer vi

$$|a - a_n| \geq a_n - a = n - a = \max\{N, \lceil a \rceil\} + 1 - a \geq \lceil a \rceil + 1 - a \geq 1.$$

Følgen kan dermed ikke være konvergent og er i så fald divergent per definition.

Eksempel 1.34 (Divergent følge 2)**.** Talfølgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved $a_n = (-1)^n$ divergerer. Vi skal vise, at der for alle $a \in \mathbb{R}$ findes et $\epsilon > 0$, sådan at der for alle N findes et $n \geq N$, sådan at $|a_n - a| \geq \epsilon$.

Lad a være givet og $\epsilon = 1$. For alle N, hvis $|a_N - a| < \epsilon$, lad $n = N + 1$ og dermed

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |a_n - a_N + a_N - a| \\ &\geq |a_n - a_N| - |a_N - a| \\ &\geq |(-1)^{N+1} - (-1)^N| - |a_N - a| \\ &\geq 2 - \epsilon \geq 1. \end{aligned}$$

Hvis $|a_N - a| \geq \epsilon$, lad $n = N$ og dermed

$$|a_n - a| = |a_N - a| \geq \epsilon.$$

Bemærk, at følgen divergerer 'anderledes' end i det forrige eksempel.

Koncepterne grænseværdi og fortætningspunkt er tæt beslægtede, hvilket følgende lemma viser. Grunden til, at vi lagde så meget vægt på fortætningspunkter, er, at mængden af fortætningspunkter kan undersøges ved alle talfølger, hvorimod grænseværdien kun findes for de konvergente talfølger.

Lemma 1.35 (Grænseværdi versus fortætningspunkt)**.** *Hvis en følge* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergerer mod* a*, så er* a *det entydige fortætningspunkt for talfølgen. Det medfører at konvergenspunktet er entydigt og notationen* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *er veldefineret.*

Bevis. Lad os først vise, at hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, så er a et fortætningspunkt for talfølgen. Lad $\epsilon > 0$ været givet. Ifølge antagelsen findes der et N, sådan at der for alle $n \geq N$ (der er uendeligt mange!) gælder at $|a_n - a| < \epsilon$. a er dermed et fortætningspunkt for følgen.

Lad os nu vise, at der ikke findes andre fortætningspunkter for en følge med $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. For at gøre dette antager vi, at $a' \neq a$ er et yderligere fortætningspunkt og viser, at dette fører til en modstrid. Vælg $\epsilon = \frac{1}{2}|a - a'| > 0$. Så findes der et N således at alle a_n med $n \geq N$ ligger i afstand højst ϵ fra a. Ved konstruktion af ϵ kan de ikke ligge i afstand strengt mindre end ϵ fra a':

$$|a_n - a'| = |a_n - a + a - a'| \geq |a - a'| - |a_n - a| \geq |a - a'| - \epsilon = 2\epsilon - \epsilon = \epsilon.$$

Vi har brugt trekantsuligheden i den første ulighed. Maksimalt kan $|a_n - a'| < \epsilon$ derfor være sandt for alle $n < N$. Men dette tæller kun værdierne $n = 1, 2, \dots N - 1$. Det findes således færre end N (og specielt kun endelig mange) forskellige værdier af n. $\square$

Desværre gælder det omvendte ikke, dvs. en følge med unikt fortætningspunkt er ikke nødvendigvis konvergent, som eksemplet $0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, 0, \dots$ (se Eksempel 1.20) viser.

Bemærk, at alle fortætningspunkter af en reel talfølge, betragtet som en kompleks talfølge, er reelle. Konvergensegenskaber og grænseværdierne af reelle talfølger ændres derfor ikke, selvom de bliver betraget som komplekse talfølger.

Begrænsede talfølger Vi har i Eksemplerne 1.19 og 1.20 set, at følger kan divergere på forskellige måder. Vi indfører begrebet *begrænset* til at sætte ord på en vigtig egenskab som er nødvendig for konvergens:

$\boxed{\mathbb{C}}$ **Definition 1.36.** En talfølge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kaldes *begrænset*, hvis der findes et $c \in \mathbb{R}_+$ med $|a_n| \le c$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\mathbb{C}}$ **Lemma 1.37.** *En konvergent talfølge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er altid begrænset.*

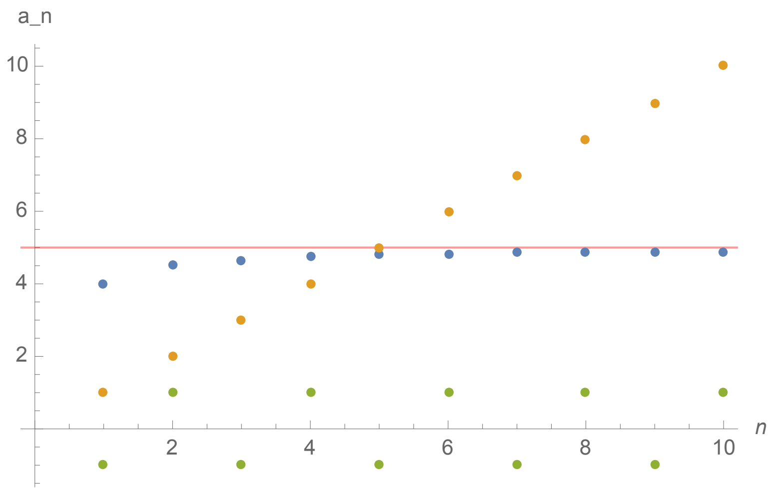
Bevis. Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en konvergent følge. Dvs. der findes et a, sådan at der for hvert $\epsilon > 0$ findes et $N(\epsilon)$, således at for alle $n \ge N(\epsilon)$: $|a_n - a| \le \epsilon$. Specielt gælder dette udsagn for $\epsilon = 1$. Alle $n \ge N(1)$ opfylder derfor

$$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| \le |a| + 1.$$

Der findes kun endeligt mange værdier – nemlig dem i mængden $\{a_n : n < N(1)\}$ – som potentielt har en større absolutværdi. Dermed er *alle* $|a_n|$ begrænset ved $c := \max\{|a| + 1, |a_1|, \dots, |a_{N(1)-1}|\}$. $\square$

Eksempel 1.38. Hvorimod egenskaben *konvergent* medfører egenskaben *begrænset* er det omvendte ikke nødvendigvis rigtigt, som f.eks. ved talfølgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved $a_n = (-1)^n$, eller ved $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved $z_n = i^n$.

Nedenstående graf viser den konvergente talfølge givet ved $a_n = 5 - 1/n$ og dens græsenværdi samt den ubegrænsede følge givet ved $a_n = n$ og den ikke-konvergente begrænsede talfølge givet ved $a_n = (-1)^n$.



1.3 Beregningsmetoder

Regneregler for konvergente talfølger Man kan undersøge konvergens af en lidt mere kompliceret talfølge ved at skrive den som sum og produkt af flere mindre komplicerede talfølger.

Sætning 1.39 (Regneregler for konvergente følger)**.** *Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ og $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være konvergente følger med respektive grænseværdier a og b. Så gælder*

1. *Følgen $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdi $a + b$.*
2. *Følgen $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdi $a - b$.*
3. *Følgen $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdi ab.*
4. *Hvis $b, b_n \neq 0$, så er følgen $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent med grænseværdi $\frac{a}{b}$.*

Bevis. Da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ og $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod a og b, ved vi, at for alle $\tilde{\epsilon} > 0$ findes et $N_A(\tilde{\epsilon})$ og et $N_B(\tilde{\epsilon})$ således at for alle $n \geq \max\{N_A(\tilde{\epsilon}), N_B(\tilde{\epsilon})\}$ gælder, at $|a_n - a| < \tilde{\epsilon}$ og $|b_n - b| < \tilde{\epsilon}$.

1. Antag et givet $\epsilon > 0$ for at vise den første påstand. Trekantsuligheden medfører, at

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\tilde{\epsilon}.$$

Hvis vi sætter $\tilde{\epsilon} := \frac{\epsilon}{2}$ og definerer $N(\epsilon) := \max \{N_A(\frac{\epsilon}{2}), N_B(\frac{\epsilon}{2})\}$, gælder for alle $n \geq N(\epsilon)$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \epsilon$$

Dvs., $a_n + b_n$ konvergerer mod $a + b$.

2. Udsagnet følger fra 1. og 3.

3. Vi kan antage at $\tilde{\epsilon} \leq 1$, og ved hjælp af trekantsuligheden (to gange) finder vi

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\
&= |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \\
&= |a_n - a + a||b_n - b| + |a_n - a||b| \\
&\leq (|a_n - a| + |a|)|b_n - b| + |a_n - a||b| \\
&< (\tilde{\epsilon} + |a|)\tilde{\epsilon} + \tilde{\epsilon}|b| \\
&\leq \tilde{\epsilon}(1 + |a| + |b|).
\end{aligned}$$

Vi har derfor vist, at der for alle $\epsilon > 0$ findes

$$N(\epsilon) := \max \left\{ N_A \left(\frac{\epsilon}{|a| + |b| + 1} \right), N_B \left(\frac{\epsilon}{|a| + |b| + 1} \right) \right\}$$

med den egenskab, at der for alle $n \geq N(\epsilon)$ gælder

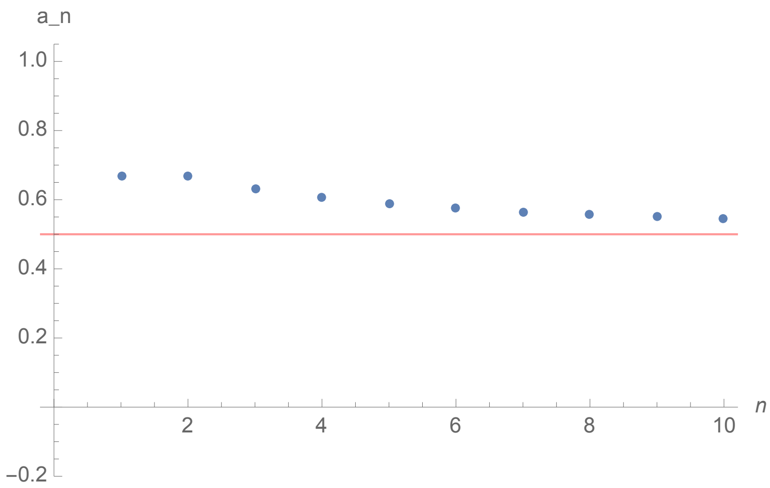
$$|a_n b_n - ab| < \epsilon.$$

Dvs., $a_n b_n$ konvergerer mod ab.

4. Beviset ligner 3.

□

Eksempel 1.40 (Regneregler)**.** Vi skal undersøge $a_n := \frac{1+1/n}{2+1/n^2}$. Ved at definere de fire konvergente følger $b_n = 1$, $c_n = 1/n$, $d_n = 2$ og $f_n = 1/n^2$ med grænseværdierne $b = 1$, $c = 0$, $d = 2$, $f = 0$, ser vi ved hjælp af Sætning 1.39, at $a_n = \frac{b_n + c_n}{d_n + f_n}$ konvergerer mod $\frac{b+c}{d+f} = \frac{1}{2}$.



Eksempel 1.41 (Forberedelse til brug af regneregler)**.** Det er tit vigtigt at bearbejde følgen, inden man bruger regnereglerne: Vi skal undersøge $a_n := \frac{n+1}{2n+1/n}$. Sætning 1.39 er ikke direkte brugbar, fordi tælleren og nævneren divergerer. Men hvis vi forkorter med n, ser vi, at $a_n = \frac{1+1/n}{2+1/n^2}$, og dermed er følgen den samme, som i forrige eksempel.

Kontinuitet For at bestemme konkrete grænseværdier kan vi også trække på viden fra tidligere kurser. Det uddyber vi her.

Observation 1.42. Givet en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, betragt talfølgen med led $a_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. I An0 ([EHM, Definition 2.29]) definerede vi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$$

til at betyde

$$\forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x > M \implies |f(x) - c| < \epsilon \tag{1.10}$$

Følgekonvergens af $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ er ikke det samme, idet det jo betyder

$$\forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > M \implies |f(n) - c| < \epsilon \tag{1.11}$$

og således kun inddrager de værdier f antager i $\mathbb{N}$. Det er klart at

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \implies \lim_{n\to\infty} a_n = c,$$

(man kan jo erstatte det M der er givet i (1.10) med $\lceil M \rceil$), og det giver os mulighed for uden videre at importere viden fra tidligere kurser til vort arbejde her. Men den modsatte vej gælder ikke! F.eks. har vi med $f(x) = \sin(\pi x)$ at $a_n = f(n) = 0$ for alle n, mens $f(x)$ ikke er konvergent for $x \to \infty$.

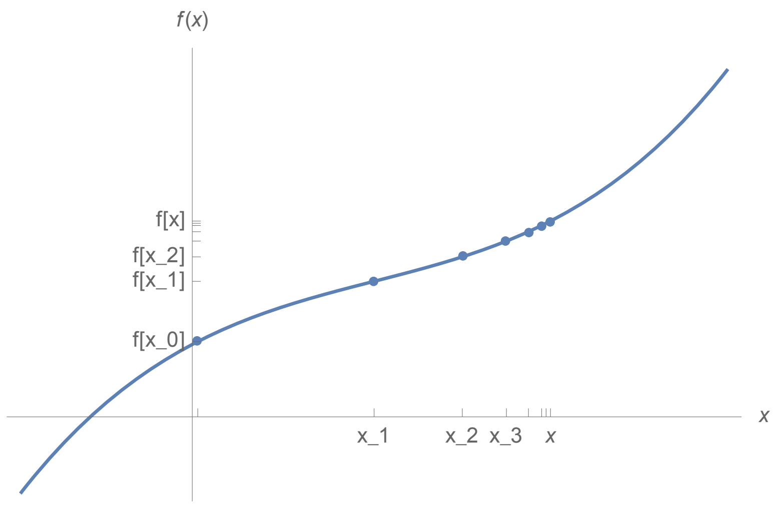
Vi omskriver den sædvanlige definition af kontinuitet ([EHM, Definition 3.1]) til en definition, som er baseret på talfølger.

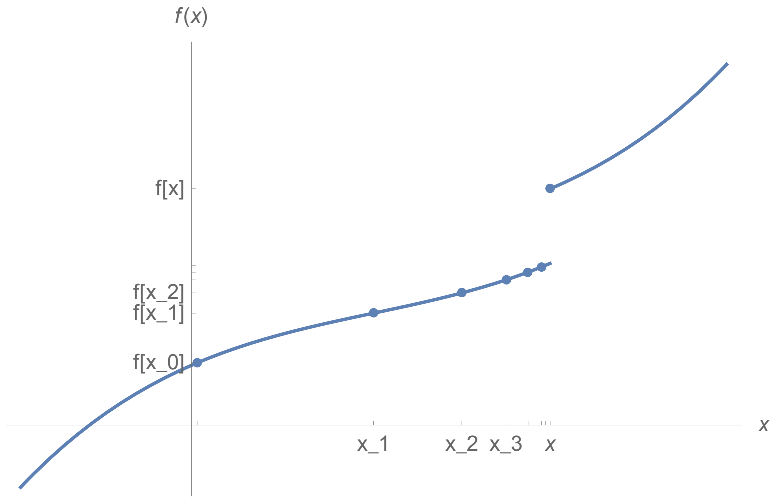
$\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Sætning 1.43. *Lad $A \subset \mathbb{C}$. En funktion $f : A \to \mathbb{C}$ er kontinuert i $a \in A$, hvis og kun hvis der for alle $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ med $x_n \in A$ og $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, gælder, at*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Grafen illustrerer sætningen for en kontinuert og en diskontinuert funktion.





Bevis. " $\Rightarrow$ ": Hvis f er kontinuert i a, findes der, for alle $\epsilon > 0$, et $\delta > 0$, sådan at

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

for alle $x \in A$ med $|x - a| < \delta$. Da $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, findes der et $N := N(\delta)$, sådan at for alle $n \geq N$: $|x_n - a| < \delta$. Dette medfører, at $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$.

" $\Leftarrow$ ": Hvis f ikke er kontinuert i a, så findes der et $\epsilon > 0$, sådan at for alle $\delta > 0$, der findes et $x \in A$ med

$$|x - a| < \delta, \tag{1.12}$$

men

$$|f(x) - f(a)| > \epsilon. \tag{1.13}$$

Sæt nu $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ og lad $x_1, x_2, x_3, \ldots$ være tilhørende værdier af x, som opfylder (1.12) og (1.13). Bemærk, at $\lim x_n = a$, men at $|f(x_n) - f(a)| > \epsilon$ for alle n og derfor konvergerer talfølgen $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ikke mod $f(a)$. $\square$

Det samme bevis giver at når $f : A \to \mathbb{C}$ er givet, og a er et kontaktpunkt for A, så er

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

præcis når der for alle følger $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ med alle $a_n \in A$ gælder

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = c$$

Det er interessant at kontinuitet kan forstås alene ud fra følgekonvergens, men i første omgang bruger vi mest observationerne her i situationer hvor vi allerede ved at vi har en kontinuert funktion.

Eksempel 1.44. Vi vil undersøge konvergens af følgen $a_n = n^{1/n}$. Vi ser først på følgen $b_n = \log(a_n)$ og bemærker

$$b_n = \log\left(n^{1/n}\right) = \frac{1}{n}\log(n) = \frac{\log(n)}{n}$$

Vi ved ([EHM, Eksempel 2.39])

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)}{x} = 0$$

så $\{b_n\}$ konvergerer mod 0, jf. Observation 1.42. Men exp er kontinuert i 0, så da $a_n = \exp(b_n)$ giver sætning 1.43 at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod 1.

Eksempel 1.45. Vi vil undersøge konvergens af følgen

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Igen sætter vi $b_n = \log(a_n)$ og bemærker

$$b_n = n\log(1+\tfrac{1}{n}) = \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}.$$

Vi genkender udtrykket som en differenskvotient og ser at

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\log(1)}{x} = \log'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

så idet $1/n \to 0$ slutter vi at $\lim b_n = 1$. Ved igen at bruge kontinuitet af exp ender vi med

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp(1) = e.$$

1.4 Reelle talfølger

For bedre at kunne forstå konvergens og divergens, skal vi først se på de reelle talfølger, hvor vi har en total orden på talrummet, og senere komme tilbage til de komplekse talfølger.

Divergens mod $\pm\infty$ Hvis vi kun ser på reelle talfølger, så kan vi udvide vores notation $\lim a_n = a$ og skrive $\lim a_n = \pm\infty$ for særlige divergente følger:

$\boxed{\mathbb{R}}$ **Definition 1.46** (Divergens mod $\pm\infty$)**.** Vi siger, at en reel talfølge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *divergerer mod uendelig*, hvis der for alle $c \in \mathbb{R}$ findes $N \in \mathbb{N}$, således at $a_n \geq c$ for alle $n \geq N$. I så fald skriver vi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Vi siger, at en reel følge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *divergerer mod minus uendelig*, hvis der for alle $c \in \mathbb{R}$ findes et $N \in \mathbb{N}$, således at $a_n \leq c$, for alle $n \geq N$. I så fald skriver vi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

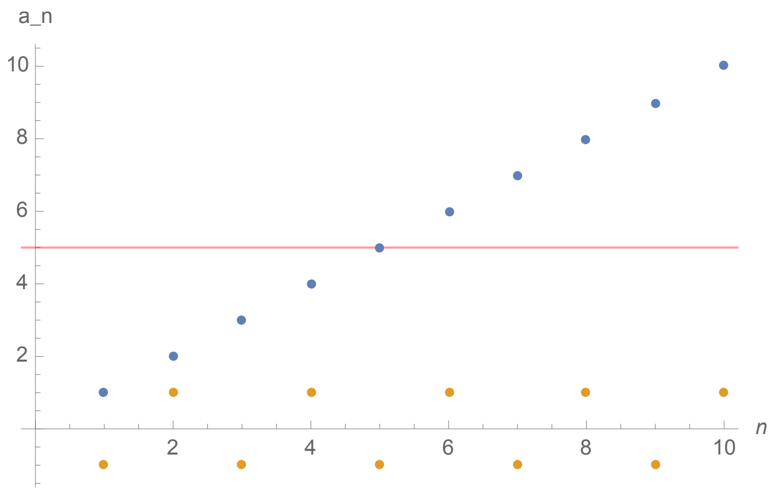
Vi vil tillade os sprogbrugen "går mod (minus) uendelig" for disse divergente følger.

Bemærk, at det er tilstrækkeligt at se på positive $c \in \mathbb{R}$, hvis man vil vise divergens mod uendelig, og at det er tilstrækkeligt at se på negative $c \in \mathbb{R}$, hvis man vil vise divergens mod minus uendelig.

Eksempel 1.47. Den divergente følge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved $a_n = n$ divergerer mod uendelig, fordi der for alle $c \in \mathbb{R}$ findes et N (fx $N := \lceil |c| \rceil$), således at der for alle $n \geq N$ gælder, at

$$a_n = n \geq N \geq c.$$

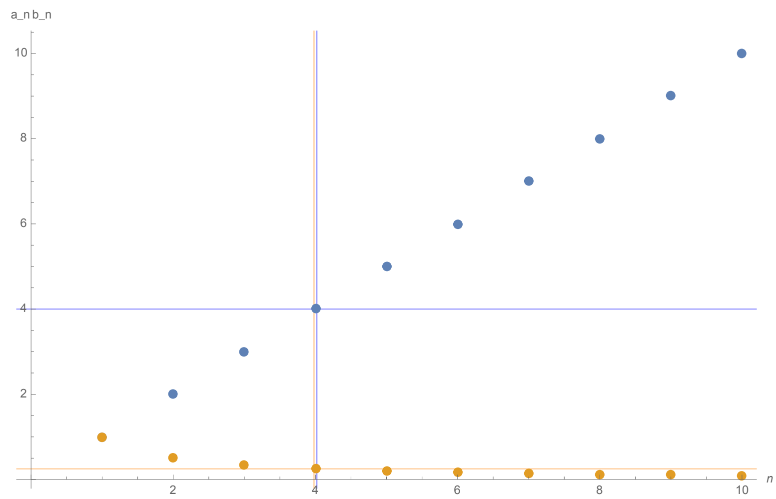
Den divergente følge $a_n = (-1)^n$ divergerer hverken mod uendelig eller minus uendelig, fordi for alle n: $|a_n| = 1$. Grafen viser begge følger og linjen $c = 5$.



Eksempel 1.48. Lad $a_n := \frac{1}{b_n}$, hvor b_n er en følge af strengt positive tal, som konvergerer mod nul. Så vil a_n divergere mod uendelig. Mere præcist: Lad $c \in \mathbb{R}$ være givet. Da $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, findes der for alle $\epsilon > 0$ et N, således at der for alle $n \geq N$ gælder at $b_n \leq \epsilon$. Da $b_n > 0$ gælder også $\frac{1}{b_n} \geq \frac{1}{\epsilon}$. Ved at sætte $\epsilon := \frac{1}{|c|}$ $(c \neq 0)$, ser vi, at for alle $n \geq N$

$$a_n = \frac{1}{b_n} \geq \frac{1}{\epsilon} = |c| \geq c.$$

Fordi c var vilkårlig, divergerer talfølgen mod uendelig. Grafen viser følgen $a_n = \frac{1}{n}$ sammen med den vandrette $\epsilon = \frac{1}{4}$ linje og den lodrette $N = 4$ linje i orange samt de tilsvarende grafer for $b_n = n$, $c = 4$ og $N = 4$ i blå.



Det er en god øvelse at udvide regnereglerne for konvergente følger til følger, der divergerer mod plus eller minus uendelig.

Monotone reelle talfølger Bemærk at vi ikke altid kan afgøre om følger konvergerer ved hjælp af regnereglerne, da det sommetider er svært at transformere følgen om til noget, der kan behandles med Sætning 1.39.

Der er andre gange, hvor vi ikke har den fulde information om talfølgen. Det kan være, fordi talfølgen er implicit defineret, eller fordi vi kun kender få af dens egenskaber. Vi skal nu undersøge dette nærmere.

Definition 1.49 (Monoton)**.** En reel talfølge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kaldes *monotont voksende*, hvis

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots,$$

dvs. hvis $a_{n+1} \geq a_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kaldes *monotont aftagende*, hvis

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots,$$

dvs hvis $a_{n+1} \leq a_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Talfølgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kaldes *monoton*, hvis den enten er monotont voksende eller monotont aftagende. Hvis ulighedstegnene er strenge, kalder vi talfølgen *strengt monoton*.

Eksempel 1.50 (Ubegrænset)**.** Talfølgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ med $a_n = n$ opfylder $a_{n+1} = n + 1 \geq n = a_n$ og er dermed monotont voksende. Den er ikke begrænset, fordi for alle c findes der et n, nemlig $n = \lceil c \rceil + 1$, sådan at $a_n = \lceil c \rceil + 1 \geq c + 1 > c$.

Eksempel 1.51 (Monotont aftagende og begrænset)**.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ med $a_n = \frac{1}{n}$ er monotont aftagende, fordi $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = a_n$, og begrænset, fordi $1 \geq a_n \geq 0$, og dermed er $|a_n| \leq 1$ for alle n.

Eksempel 1.52 (Begrænset og ikke-monoton)**.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ med $a_n = (-1)^n$ er ikke monotont voksende, fordi der for lige n gælder, at $a_{n+1} = -1 < 1 = a_n$. Den er heller ikke monotont aftagende, fordi der for ulige n gælder, at $a_{n+1} = 1 > -1 = a_n$. Den er dog begrænset, da $|a_n| = 1$ for alle n.

Den følgende sætning er den første vigtige sætning inden for talfølger og er central for den videre teori, der behandles i kurset.

Sætning 1.53. *En monoton og begrænset reel talfølge er konvergent.* $\boxed{\mathbb{R}}$

I betragtning af de eksempler vi har set, virker sætningen måske triviel. Beviset bruger dog supremumsegenskaben af de reelle tal ([EHM, p. 88]), og udsagnet er derfor alt andet end trivielt.

Bevis. Lad følgen $\{a_n\}$ være monotont voksende, og lad $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, hvilket er endeligt, da følgen er begrænset. Vi vil vise, at a_n er konvergent med grænseværdi a. Fra definitionen af a er $a_n \leq a$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Fordi a er den mindste øvre grænse på følgen, eksisterer der for ethvert $\epsilon > 0$ et N med egenskaben $a_N > a - \epsilon$. Men da a_n er monotont voksende, må $a_n \geq a_N > a - \epsilon$ for alle $n \geq N$. Med andre ord er $|a_n - a| < \epsilon$, og følgen er konvergent med grænseværdi a. $\square$

Observation 1.54. Når $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ er voksende i forstanden

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

eller aftagende i forstanden

$$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

bliver talfølgen $\{f(n)\}$ selvfølgelig monoton. I dette tilfælde falder vore to konvergensbegreber (se Observation 1.42) sammen, og der gælder

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = c$$

for hvis $|f(n) - c| < \epsilon$ når $n \geq N$, $n \in \mathbb{N}$ så gælder også $|f(x) - c| < \epsilon$ når $x \geq N$, $x \in \mathbb{R}$.

Eksempel 1.55. Vi forsøgte i Eksempel 1.15 at beregne kvadratroden af c ved at se på følgen $f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), \dots$ med

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$$

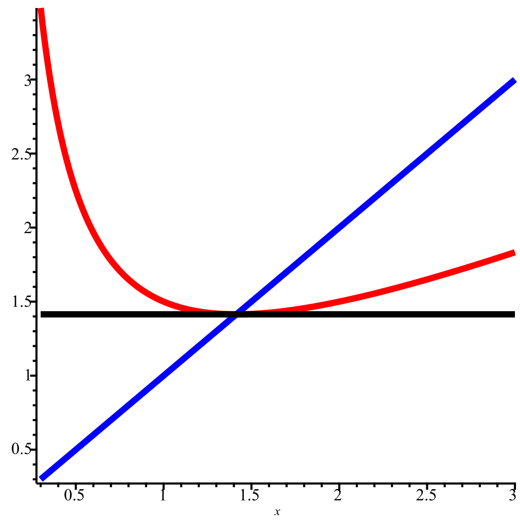
Når $\sqrt{c} \leq x$ gælder der

$$\sqrt{c} \leq f(x) \leq x$$

(jf. figur) så

$$c \geq f(c) \geq f(f(c)) \geq f(f(f(c))) \geq \cdots$$

og følgen er aftagende, og nedadtil begrænset af $\sqrt{c}$. Den konvergerer således pga. Sætning 1.53, lad os sige med grænseværdi y. Vi har $y \geq \sqrt{c}$, så $y > 0$.



Men nu ser vi af at gå til grænsen i

$$x_n = f(x_{n-1})$$

at

$$y = f(y)$$

fordi f er kontinuert på $(0, \infty)$, og derfor specielt i y. Ved at løse ligningen

$$y = \frac{1}{2}\left(y + \frac{c}{y}\right)$$

får vi at $y = \sqrt{c}$ som ønsket.

Bemærk hvordan vi delte opgaven op i eksemplet herover: Først brugte vi monotoniciteten til at vise konvergens og bagefter karakteriserede vi grænseværdien. Sådan skal vi ofte arbejde i kurset her.

Bolzano-Weierstrass Sætning At en monoton og begrænset, reel talfølge altid er konvergent, har været vores første vigtige resultat om talfølger (Sætning 1.53). Det har givet os en håndterbar klasse af talfølger, som vi nu skal bruge til at undersøge konvergens af generelle talfølger. Lidt overraskende vil vi vise, at vi “inden i” enhver reel talfølge i en passende forstand kan finde en monoton følge.

Sætning 1.56. *Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en reel talfølge. Da findes en voksende følge* $\boxed{\mathbb{R}}$

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

af naturlige tal, således at talfølgen $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ er monoton.

Bevis. Et led a_n i følgen, som opfylder $a_n \geq a_k$ for alle $k \geq n$ kaldes en *top*. Vi analyserer nu to tilfælde hver for sig: Enten har følgen uendeligt mange toppe eller kun endeligt mange.

- Hvis der er uendeligt mange toppe a_{n_k} benytter vi simpelhen disse værdier n_k. Vi har at $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ er monotont aftagende, da der for hver top a_{n_k} gælder, at for alle $n \geq n_k$: $a_n \leq a_{n_k}$ og dermed også for $n = n_{k+1}$: $a_{n_{k+1}} \leq a_{n_k}$.

- Hvis der kun er endeligt mange toppe, eller hvis der ikke er nogen toppe overhovedet, kan vi vælge n_1 således at enhver top har indeks mindre end n_1. Fordi a_{n_1} ikke er en top, må der findes et senere led a_{n_2} ($n_2 > n_1$) med $a_{n_2} > a_{n_1}$. Men a_{n_2} kan heller ikke være en top, så vi kan finde n_3 med $a_{n_3} > a_{n_2}$ På den måde konstruerer vi n_k således at $a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \cdots$, dvs. således at $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ er monotont voksende.

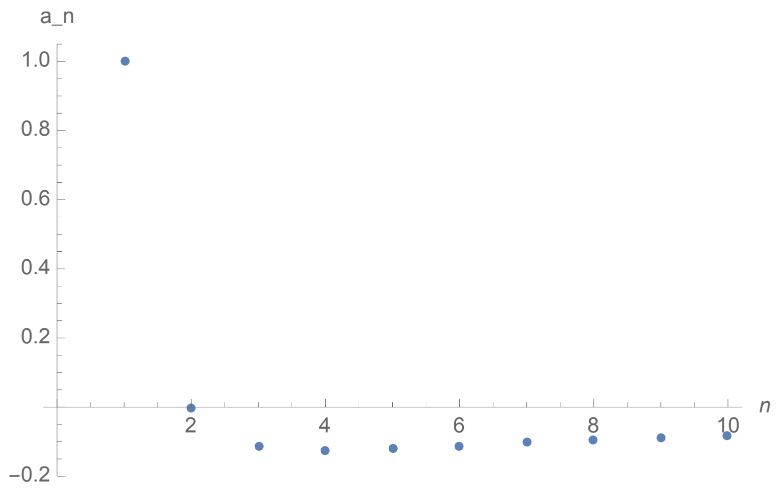
□

Eksempel 1.57. Sæt $a_n = \frac{1}{n}$ og lad n være vilkårlig. Der gælder, at $a_n \geq a_k$ for alle $k \geq n$, og derfor er a_n en top. Fordi n var vilkårlig, så er alle følgeleddene toppe (specielt er der uendeligt mange), og vi har fundet en monoton delfølge (nemlig hele følgen).

Lad nu $x_n = (-1)^n$. Lad n være lige (der er uendelig mange lige tal). I så fald gælder $x_n = 1$, og dermed er $x_n \geq x_k$ for alle $k \geq n$. Delfølgen b_m med $b_m = a_{2m} = 1$ er dermed en monoton delfølge af a_n.

$$x_n = \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} \qquad 1, 0, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{25}, -\frac{1}{9}, -\frac{4}{49}, \ldots, \to 0$$

Toppene er de første to elementer $x_1 = 1, x_2 = 0$. Da $y_1 := x_3 = -\frac{1}{9}$ ikke er en top (følgen konvergerer til 0), finder vi et element $y_2 := x_6 \geq x_3 = y_1$. Men x_6 er igen ingen top, da $y_3 := x_7$ er større...



1.5 Delfølger og Cauchys kriterium

Vi dykker nu dybere ned i temaet konvergens og vil vise, at en talfølges konvergens kan bestemmes direkte ud fra leddenes opførsel via *Cauchys kriterium*. Resultatet er både overraskende og kraftfuldt og vil være højdepunktet af den følgende analyse af talfølgers konvergens ud fra den måde, delfølgerne opfører sig på. Vi starter med at definere begrebet delfølge, som er tæt beslægtet med begrebet fortætningspunkt.

Delfølge versus fortætningspunkt Nu formaliserer vi den centrale ide fra Sætning 1.56 til begrebet *delfølge*:

Definition 1.58 (Delfølge)**.** Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en talfølge, og $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en strengt voksende følge af naturlige tal, dvs. $n_1 < n_2 < \cdots$. Talfølgen $\{b_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ med $b_k := a_{n_k}$ kaldes en *delfølge* af $\{a_n\}$. $\boxed{\mathbb{C}}$

Når man tænker på en følge som en afbildning fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{C}$ svarer delfølgebegrebet til komposition med en strengt voksende afbildning $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$k \mapsto n(k) \mapsto a(n(k))$$

eller

$$k \mapsto n_k \mapsto a_{n_k}$$

Med denne sprogbrug kan Sætning 1.56 omformuleres til "enhver reel talfølge har en monoton delfølge".

Eksempel 1.59. Lad $n_k := 2k$ være den strengt voksende følge af de lige naturlige tal: $2, 4, 6, \ldots$. Lad

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots$$

være en given talfølge, og lad følgen $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være givet ved $b_k := a_{n_k}$. Dette er delfølgen af $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, som består af de elementer af a_n med lige indeks $n = 2k$, dvs. hvert andet led i følgen:

$$\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \qquad b_1 = a_2, b_2 = a_4, b_3 = a_6, \ldots.$$

Bemærk, at en delfølge altid består af uendeligt mange elementer. Vi vil vise at en delfølge af en konvergent følge altid er konvergent, men en ikke-konvergent følge kan sommetider have en konvergent delfølge, f.eks. er delfølgen af den divergente følge

$$a_n = (-1)^n \qquad -1, 1, -1, 1, \ldots$$

af leddene med lige indeks $n_k = 2k$ den konstante (og specielt konvergente) følge

$$b_k = a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \qquad 1, 1, 1, \ldots.$$

Det følgende lemma viser, at begreberne delfølge og fortætningspunkt er tæt forbundne.

$\boxed{\mathbb{C}}$ **Lemma 1.60.** *Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en talfølge. $a \in \mathbb{C}$ er et fortætningspunkt for talfølgen, hvis og kun hvis talfølgen har en konvergent delfølge med grænseværdi a.*

Bevis. "$\Leftarrow$" Lad $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en konvergent delfølge af $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ med grænseværdi a, dvs $\lim_{k\to\infty} b_k = a$. Specielt er a et fortætningspunkt for $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ved Lemma 1.35. Dermed er a også et fortætningspunkt for $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

"$\Rightarrow$" Lad a være et fortætningspunkt for $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dvs. for alle $\epsilon > 0$ eksisterer der uendelig mange værdier n med

$$|a_n - a| < \epsilon. \tag{1.14}$$

Vi vil nu se på en følge af mindre og mindre værdier for ϵ og hver gang vælge et nyt led som opfylder (1.14). Mere præcist, lad n_k være indekset på det første led i talfølgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, som opfylder (1.14) for $\epsilon = 1/k$, men (hvis $k > 1$) som også er strengt større end n_{k-1}. Bemærk, at det altid er muligt at finde sådan et n_k, fordi der er uendelig mange n som opfylder (1.14). De valgte elementer danner en talfølge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, som konvergerer mod a. □

Eksempel 1.61. Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være den reelle talfølge givet ved $a_n = (-1)^n(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$. I decimalapproksimation ser følgen sådan ud

$$-2.0, 1.71, -1.58, 1.5, -1.45, 1.41, -1.38, 1.35,$$
$$-1.33, 1.32, -1.3, 1.29, -1.28, 1.27, -1.26, 1.25$$

Følger vi konstruktionen fra beviset for Lemma 1.60 med fortætningspunktet $a = 1$ finder vi

$$\begin{aligned}
n_1 &= 6 : |a_6 - 1| = \frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{1}{2}\\
n_2 &= 10 : |a_{10} - 1| < \frac{1}{3}\\
n_3 &= 18 : |a_{18} - 1| = \frac{1}{\sqrt{18}} < \frac{1}{4}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

med leddene

$$a_6, a_{10}, a_{18}, \ldots, \qquad 1.40, 1.31, \ldots.$$

Lemma 1.62. *Hvis $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer med en grænseværdi a, så konvergerer enhver delfølge med den samme grænseværdi.* $\boxed{\mathbb{C}}$

Bevis. Lad $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en delfølge af $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. At $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod a betyder, at der for alle $\epsilon > 0$, findes et N, således at for alle $n \geq N$ gælder

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

og dermed

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon$$

for alle $n_k \geq N$. Dvs., der findes et K, således at $n_K \geq N$ og dermed

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon$$

for alle $k \geq K$. Vi konkluderer, at delfølgen konvergerer mod a. □

Nu har vi alle ingredienserne klar til at vise den vigtige Bolzano-Weierstrass sætning:

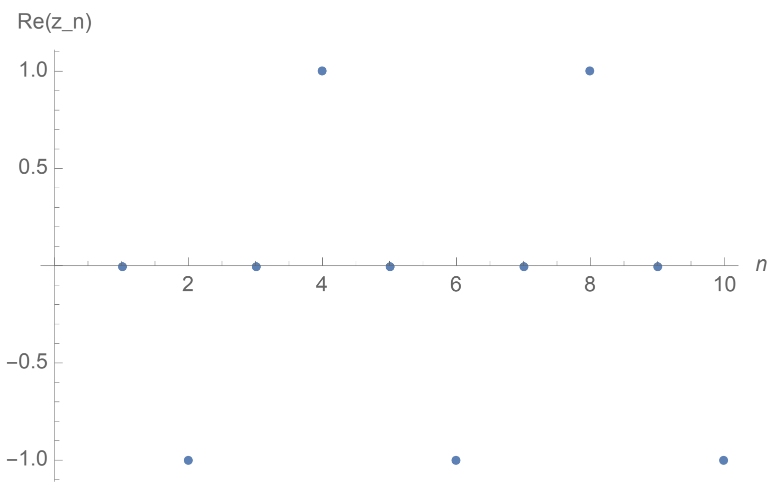
$\boxed{\mathbb{R}}$ **Lemma 1.63.** *Enhver begrænset reel talfølge har en konvergent delfølge.*

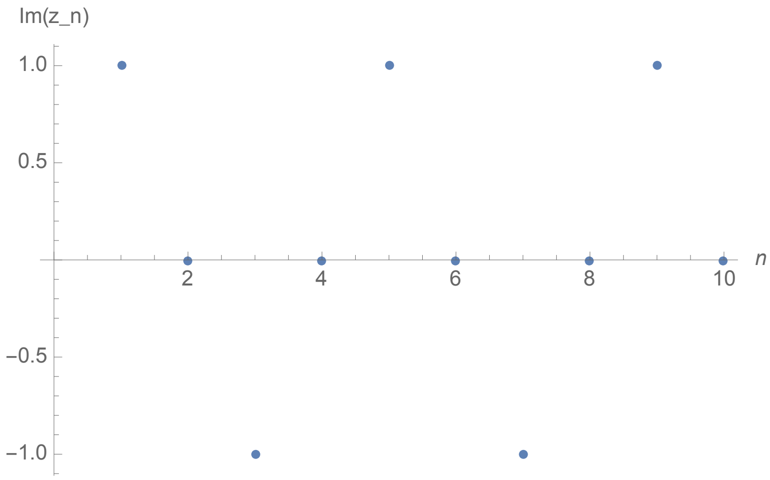
Bevis. Ifølge Sætning 1.56 har følgen en monoton delfølge. Fordi delfølgen også er begrænset, er den konvergent ifølge Sætning 1.53. □

$\boxed{\mathbb{C}}$ **Sætning 1.64** (Bolzano-Weierstrass)**.** *Enhver begrænset talfølge har en konvergent delfølge.*

Bevis. Lad $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en begrænset kompleks talfølge. Lad os se på realdelen $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$. Ifølge Lemma 1.63 har a_n en konvergent delfølge $a'_k := a_{n_k}$. Lad os nu se på de tilsvarende imaginærdele $b'_k := b_{n_k}$, hvor $b_n = \mathrm{Im}(z_n)$. Ifølge Lemma 1.63 har $\{b'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ også en konvergent delfølge b'_{k_m}. Følgen $\{z_{n_{k_m}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ er en konvergent delfølge af $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, fordi følgen af imaginærdelene er lig med den konvergente følge $\{b_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, og fordi følgen af realdelene $\{a_{n_{k_m}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ er en delfølge af den konvergente følge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ og dermed konvergent ifølge Lemma 1.62. □

Eksempel 1.65. Vi ser på $z_n = i^n$. Vi har $\mathrm{Re}(z_n) = 0$ for ulige n, $\mathrm{Re}(z_n) = (-1)^{n/2}$ for lige n. $\mathrm{Im}(z_n) = (-1)^{(n-1)/2}$ for ulige n, $\mathrm{Im}(z_n) = 0$ for lige n. Blandt de ulige n, vælg n med $(n-1)/2$ lige. Vi får at med $n_k = 4k+1$ er $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ en konvergent delfølge af $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, idet den er konstant i.





Cauchys kriterium Vi starter med at introducere konceptet Cauchy-følge.

Definition 1.66. En følge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en *Cauchy-følge*, hvis $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, således at der $\forall n, m \geq N$ gælder ℂ

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Hvis en talfølge er en Cauchy-følge, siger vi ofte, at talfølgen er *Cauchy*.

Eksempel 1.67. Lad $x_n = \frac{1}{n}$, da er $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy, fordi der for alle $\epsilon > 0$ findes et N (f.eks. $N = \lceil\frac{2}{\epsilon}\rceil + 1$), sådan at der for alle $m, n \geq N$ gælder

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} \leq \frac{2}{\lceil\frac{2}{\epsilon}\rceil + 1} < \epsilon.$$

Eksempel 1.68. Lad $x_n = (-1)^n$, da er $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ikke Cauchy, fordi der for $\epsilon = 1$, og for alle N, findes $n, m \geq N$ (f.eks. $m = N$ og $n = N + 1$), sådan at $|x_n - x_m| = 2$. Dermed er $|x_n - x_m|$ ikke mindre end ϵ, og følgen er ikke Cauchy.

Konvergente følger er altid Cauchy:

Lemma 1.69. *En konvergent følge er en Cauchy-følge.* ℂ

Bevis. Lad $\epsilon > 0$ være givet, og lad x være grænseværdien af $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Da $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod x, findes der et N, således at der $\forall n \geq N$ gælder

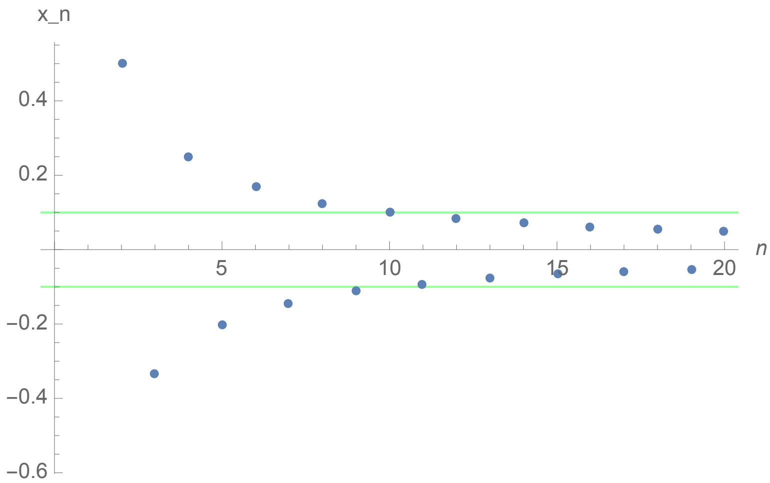
$$|x_n - x| < \epsilon/2.$$

Ved hjælp af trekantsuligheden finder vi at

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \epsilon,$$

når $m, n \geq N$, hvilket betyder, at $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge. $\square$

Eksempel 1.70. Grafen viser talfølgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, hvor $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, og $\epsilon = 0.2$. Bemærk at følgen går mod nul. Når følgeleddene har en afstand på mindre end 0.1 fra grænseværdien, ligger de mellem de to grønne linjer, dvs. de har en afstand på maksimalt 0.2.



Eksempel 1.71. Når man skal undersøge om en given følge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er Cauchy, er det essentielt at eftervise at $|x_n - x_m| < \epsilon$ for *alle* $n, m \geq N$. Det er ikke nok at undersøge tilfældet $n = N$ og $m = N + 1$, som følgende eksempel viser.

Lad $x_n = \sqrt{n}$ og bemærk at $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en divergent følge, idet den går mod uendelig. Følgen er ikke Cauchy, for hvis vi holder n fast har vi

$$|x_n - x_m| \geq x_m - x_n \to \infty \text{ når } m \to \infty$$

Men vi har

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2 = n + 1 - n = 1$$

så

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0 \text{ når } n \to \infty.$$

Vi har set at alle konvergente følger er Cauchy. Det er mere overraskende, at det omvendte også gælder, og det vil give os den store fordel at vi kan bevise at en følge er konvergent uden nødvendigvis at kunne pege på en grænseværdi. Vi skal forberede dette vigtige resultat med to lemmaer.

Lemma 1.72. *En Cauchy-følge er begrænset.* $\boxed{\mathbb{C}}$

Bevis. Ifølge definitionen for Cauchy-følger gælder, at $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, således at $\forall n, m \geq N$ gælder

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Vi betragter specialtilfældet, $\epsilon = 1$ og $m = N$. Vi har nu, at for alle $n \geq N$:

$$|x_n - x_N| < 1.$$

Det betyder, at

$$|x_N| - 1 \leq |x_n| \leq |x_N| + 1,$$

hvilket viser, at følgen er begrænset af $\max\{|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$. $\square$

Det næste lemma siger, at en Cauchy-følge klamrer sig til alle sine delfølger. Hvis der er en delfølge der konvergerer mod x, så konvergerer Cauchy-følgen mod den samme værdi.

Lemma 1.73. *Hvis en Cauchy-følge har en konvergent delfølge med grænseværdi x, så konvergerer Cauchy-følgen og har grænseværdi x.* $\boxed{\mathbb{C}}$

Bevis. Lad $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en Cauchy-følge. Lad $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en konvergent delfølge, som konvergerer mod x. Vi skal vise, at $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod x. Vi antager et $\epsilon > 0$ givet.

- Da $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod x findes et K, således at der $\forall k \geq K$ gælder
$$|x_{n_k} - x| < \epsilon/2.$$

- Da $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge, findes et M, således at der $\forall m, n \geq M$ gælder
$$|x_m - x_n| < \epsilon/2.$$

For $N := \max\{M, n_K\}$ finder vi et k med $n_k \geq N$. Derved gælder for alle $n \geq N$:

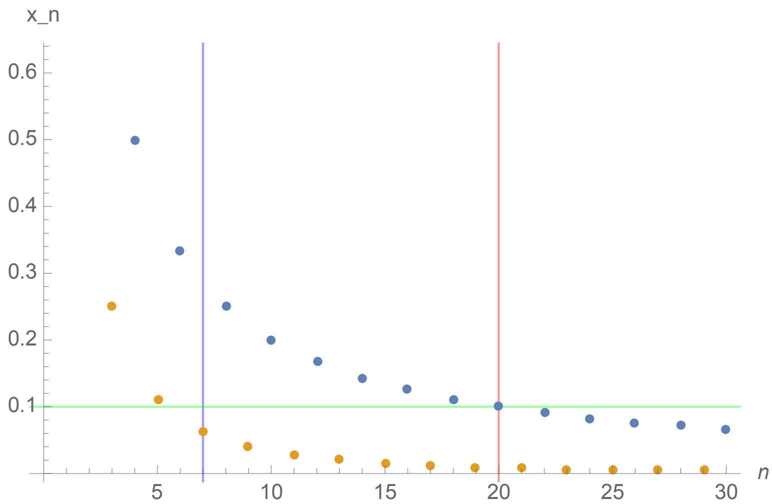
$$|x - x_n| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Det viser, at $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer med grænseværdi x. $\square$

Eksempel 1.74. Grafen viser Cauchy-følgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved $x_{2k} = 1/k$ og $x_{2k-1} = 1/k^2$. Værdierne fra delfølgen $\{x_{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ er farvet med orange. For $\epsilon = 0.1$ (grøn) falder delfølgen under ϵ for $k \geq K = 3$, da

$$x_{2\cdot 3+1} = x_7 = x_{2\cdot 4-1} = 1/4^2 < 0.1$$

For $M = 20$ er følgen Cauchy med dette ϵ. Det mindste n_k, som opfylder betingelserne, er $n_k = 21$.



Vi er nu klar til at bevise vores hovedsætning.

$\mathbb{C}$ **Sætning 1.75** (Cauchys kriterium)**.** *En talfølge er konvergent, hvis og kun hvis den er Cauchy.*

Bevis. "$\Rightarrow$": Lemma 1.69 viser, at en konvergent følge er en Cauchy-følge. "$\Leftarrow$": En Cauchy-følge er ifølge Lemma 1.72 begrænset. Den har derfor en konvergent delfølge ifølge Sætning 1.64. Vi kan nu bruge Lemma 1.73 til at se, at selve Cauchy-følgen konvergerer. $\square$

Sætningen kan bruges såvel i $\mathbb{R}$ som i $\mathbb{C}$. I den reelle version er grænseværdien automatisk reel.

Det er vigtigt at fastslå, at gyldigheden af Cauchys kriterium afhænger af den mængde vi undersøger konvergens i. Udsagnet "En rationel talfølge er konvergent i $\mathbb{Q}$, hvis den er Cauchy" er nemlig forkert. Vi gav et modeksempel i vores allerførste Eksempel 1.15, hvor vi konstruerede en rationel følge af tal $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ og viste at den konvergerede mod $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Da følgen er konvergent i $\mathbb{R}$, er den Cauchy i $\mathbb{R}$, og så er den dermed også Cauchy i $\mathbb{Q}$. Men den er ikke konvergent i $\mathbb{Q}$ da der så ville være to forskellige grænseværdier i $\mathbb{R}$.

Når vi prøver at finde ud af, hvor i beviset af Sætning 1.75 egenskaber ved de reelle tal er krøbet ind, ser vi, at vi benyttede Bolzano-Weierstrass sætningen, som bruger Sætningen 1.53 (monoton & begrænset $\Rightarrow$ konvergent), som bruger supremumsegenskaben. Dermed er vores bevis af Cauchys kriterium baseret på kontinuitetsaksiomet som så meget andet central analyse.

Begrebet Cauchy-følge giver mening i meget højere generalitet end det vi har set her. Det vender vi tilbage til til sidst i kurset.

Kapitel 2

Talrækker

I denne del skal vi se på summen af leddene i en talfølge

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Da det er en sum af uendeligt mange led, skal vi være meget omhyggelige med vores analyse. Vi starter derfor med at definere præcist, hvad vi mener med en uendelig sum, og udleder derefter nogle grundlæggende egenskaber (fx at summen kun kan være endelig, hvis talfølgen bestående af leddene konvergerer mod nul). Bagefter undersøger vi dybdegående den fundamentale situation, hvor leddene er positive, og hvor vi derfor ikke får led der går ud med hinanden. Det er interessant at observere, at vi ofte er i stand til at afgøre konvergens uden at have mulighed for at udregne summen. I den sidste del behandler vi den sværeste, men også sjoveste situation, hvor varierende fortegn som i

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \cdots$$

kan føre til det overraskende resultat, at vi kan ombytte led i rækken, sådan at rækken konvergerer mod en vilkårlig værdi.

2.1 Introduktion

Definition og divergenstest Vi starter med en præcis definition af en talrække, dvs. af den uendelige sum af leddene i en talfølge.

Definition 2.1. Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en talfølge.

$\boxed{\mathbb{C}}$ Talfølgen $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ af afsnitssummerne

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$$

kaldes for *talrækken* genereret af $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Vi betegner den med

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

Hvis $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ konvergerer med grænseværdi A, kalder vi A for summen af talrækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og skriver

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A. \tag{2.1}$$

I så fald kalder vi talrækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for konvergent. Ellers kaldes den divergent. En talrække kaldes begrænset, hvis afsnitssummerne danner en begrænset talfølge.

Det er selvfølgelig muligt at betragte summer af talfølger der er indekseret med start i $n_0 \neq 1$, og især $n_0 = 0$ optræder ofte. Så skriver vi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Notationen i (2.1) er standard, men indebærer risiko for forveksling, idet der selvfølgelig er forskel på en række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og det tal A, der er dens sum. Specielt benytter vi notationen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ også til at omtale rækker der divergerer, eller til at omtale rækker hvis konvergensforhold endnu er ukendte. Når man støder på udsagn af formen (2.1) skal man således altid sørge for at læse dem som at udsige dels at rækken er konvergent, og dels at summen er som angivet, nøjagtigt som vi gør det med lim.

For endelige summer, f.eks. $a_1 + a_2 + a_3$, gælder

- (kommutativitet) $a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_1 + a_3$
- (associativitet) $(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$
- (distributivitet) for alle $c \in \mathbb{C}$: $c(a_1 + a_2 + a_3) = ca_1 + ca_2 + ca_3$

For en talrække er det a priori ikke tilladt at ombytte leddene (kommutativitet), sætte parentes (associativitet) eller multiplicere ind med et tal (distributivitet), da det muligvis kan ændre konvergensegenskaber og givetvis grænseværdierne. Senere ser vi på betingelser, som giver os lov til at lave disse operationer (Sætning 2.6 (Parentes), Sætning 2.9 (Regneregler), Korollar 2.40 (Ombytning)). Men inden vi gør det, vil vi gerne komme i gang med at se på en vigtig konvergenstest og nogle eksempler.

Sætning 2.2 (Divergenstesten)**.** *Hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så vil $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergere mod nul.* $\boxed{\mathbb{C}}$

Bevis. At rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer mod S betyder jo at afsnitsfølgen $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod S. Se vi nu på $\{s'_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ givet ved $s'_N := \sum_{n=1}^{N+1} a_n$ bemærker vi at s'_N er en delfølge af s_N og således også går mod S. Ved hjælp af regnereglerne for talfølger ser vi, at følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ går mod nul, da vi kan skrive $a_{n+1} = s'_n - s_n$.

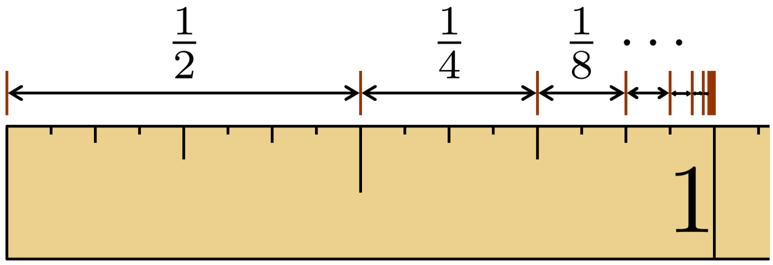
□

Divergenstesten ser i første omgang ikke ud som en særlig dyb indsigt eftersom en positiv talfølge, som ikke konverger mod nul tydeligvis vil føre til en række, som divergerer mod uendelig (fx talfølgen $1, 1, 1, \ldots$). Bemærk dog, at den også behandler talrækker med både positive og negative led, f.eks. $a_n = (-1)^n$, såvel som komplekse talfølger, f.eks. $a_n = e^{i\theta n}$, hvor situationen ikke er helt så åbenlys (især, når vi tænker på $\theta/2\pi \notin \mathbb{Q}$, jf. Proposition 1.30). Vi skal bruge divergenstesten, netop i denne situation, i analysen af det følgende vigtige eksempel.

Geometriske række Betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots,$$

som konvergerer til 1 ifølge illustrationen (fra Wikimedia commons, Copyright Jim.belk):



Vi skal nu vise dette udsagn i større generalitet. Lad $x \in \mathbb{C}$ og for alle $n \in \mathbb{N}_0$: $a_n = x^n$. Talrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kaldes *den geometriske række*. Vi begynder med at finde en formel for afsnitssummerne.

Lemma 2.3 (Afsnitssum af den geometriske række)**.** *For alle $N \in \mathbb{N}_0$ og alle $x \neq 1$:*

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \tag{2.2}$$

For $x = 1$ gælder selvfølgelig

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = N + 1 \tag{2.3}$$

Bevis. Lad P_N være udsagnet (2.2). Vi vil nu bevise, ved hjælp af induktionsmetoden, at P_N er sandt for alle $N \in \mathbb{N}_0$. Induktionsstarten er opfyldt, dvs. P_0 er sandt, fordi

$$\sum_{n=0}^{0} x^n = x^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1-x}{1-x} = \frac{1 - x^{0+1}}{1-x}.$$

Lad os nu tjekke induktionsskridtet: P_N sandt $\Rightarrow P_{N+1}$ sandt. Vi skal vise, at

$$\sum_{n=0}^{N+1} x^n = \frac{1 - x^{N+2}}{1 - x} \tag{2.4}$$

ud fra induktionsantagelsen

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}. \tag{2.5}$$

Det er oplagt at prøve at splitte det sidste led af summen på venstresiden af

(2.4) og bruge induktionsantagelsen (2.5)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N+1} x^n &= (\sum_{n=0}^{N} x^n) + x^{N+1} \\ &= \frac{1-x^{N+1}}{1-x} + x^{N+1} \\ &= \frac{1-x^{N+1}+(1-x)x^{N+1}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{N+2}}{1-x}.\end{aligned}$$

I de sidste to skridt har vi bare forenklet udtrykket. Dermed er både induktionsstarten og induktionsskridtet opfyldt, og vi kan nu bruge induktionsprincippet til at konkludere, at påstanden (2.2) er rigtig for alle $N \in \mathbb{N}_0$. □

Sætning 2.4 (Den geometriske række)**.** *Lad $x \in \mathbb{C}$. Hvis $|x| < 1$, gælder* $\boxed{\mathbb{C}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Hvis $|x| \geq 1$ divergerer rækken.

Bevis. Vi ved fra Lemma 2.3, at for $x \neq 1$

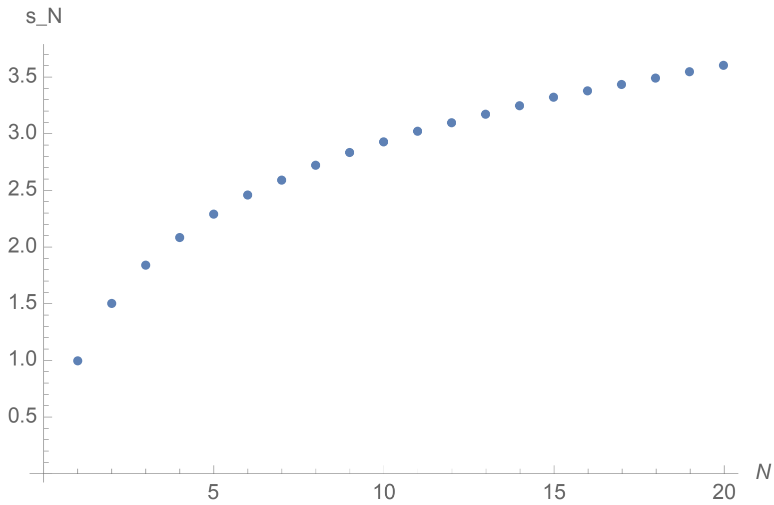
$$s_N := \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}.$$

Hvis $|x| < 1$, gælder

$$\lim_{N\to\infty} x^{N+1} = 0.$$

Med regnereglerne for talfølger finder vi, at den højre side konvergerer mod $\frac{1}{1-x}$. Hvis $|x| \geq 1$, går $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ikke mod nul, og dermed divergerer rækken ifølge divergenstesten. □

Den harmoniske række Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ kaldes den *harmoniske række.* Rækken er særligt interessant, da leddene er positive og går mod nul, mens rækken stadig divergerer. Specielt viser den harmoniske række, at ikke enhver følge der går mod nul har en konvergent række.



Sætning 2.5 (Den harmoniske række)**.** *Den harmoniske række divergerer.*

Bevis. Lad først M være lige. Vi estimerer afsnitssummen:

$$
\begin{aligned}
s_M &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{M-1} + \frac{1}{M} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{M-1} + \frac{1}{M}\right) \\
&\geq \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{\frac{M}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2} + s_{\frac{M}{2}}
\end{aligned}
$$

Lad os nu antage, at rækken konvergerer med sum S og vise at dette fører til en modstrid. Ifølge denne antagelse konvergerer $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ mod S, men det gør jo så også delfølgen $\{s_{2N}\}_{N\in\mathbb{N}}$, og vi har netop vist at

$$s_{2N} \geq \frac{1}{2} + s_N.$$

Hvis vi nu lader N gå mod uendelig, får vi

$$S \geq \frac{1}{2} + S$$

hvilket er en modstrid. Det viser, at antagelsen om konvergensen af den harmoniske række må være forkert, og vi konkluderer, at rækken divergerer.

□

Regneregler for talrækker Hvis vi har en konvergent talrække, så kan vi sætte parentes.

Sætning 2.6 (Parentes)**.** *Lad* $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *være en strengt voksende følge af naturlige tal, hvor* $n_1 = 1$*. Hvis* $\boxed{\mathbb{C}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$$

så gælder også

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bigl(a_{n_i} + a_{n_i+1} + \cdots + a_{n_{i+1}-1}\bigr) = A.$$

Bevis. Bemærk, at følgen af afsnitssummerne af rækken

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bigl(a_{n_i} + a_{n_i+1} + \cdots + a_{n_{i+1}-1}\bigr)$$

er en delfølge af følgen af afsnitssummerne af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

på grund af vores antagelse om at $n_1 = 1$. Da denne følge er konvergent, er også delfølgen konvergent med samme grænseværdi ifølge Lemma 1.62. $\square$

Eksempel 2.7. Lader vi $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ være følgen givet ved $n_i = 2^{i-1}$, så bliver rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

til

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_{2^{i-1}} + a_{2^{i-1}+1} + \cdots + a_{2^i-1}) = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + \cdots + a_7) + \cdots$$

Ifølge Sætning 2.6 medfører konvergens af den første række konvergens af den anden række (med samme grænseværdi).

Hvis talrækken derimod er divergent er det problematisk at sætte parentes, da resultatet kan blive konvergent som følgende eksempel viser.

Eksempel 2.8. Lad $a_n = (-1)^n$.Vi så i Sætning 2.4 at

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

er divergent. Hvis vi derimod ser på

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} 0,$$

så er rækken konvergent med sum $S = 0$, da $s_N = 0$ for alle N.

I analogi med regnereglerne for talfølger finder vi følgende regneregler for talrækker.

$\boxed{\mathbb{C}}$ **Sætning 2.9** (Regneregler for talrækker)**.** *Hvis rækkerne* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *og* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *er konvergente mod henholdsvis* A *og* B*, så gælder at*

- *(Sum)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *konvergerer med sum* $A + B$
- *(Differens)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ *konvergerer med sum* $A - B$
- *(Skalarmultiplikation)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ *konvergerer med sum* cA *for ethvert* $c \in \mathbb{C}$*.*

Bevis. Rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ har sum A og B, hvis følgen af afsnitssummerne $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ og $\{t_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod henholdsvis A og B. Efter regnereglerne for følger er også $\{s_N \pm t_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ konvergent mod $A \pm B$. For at vise det tredje udsagn, bemærk at afsnitssummerne af $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ er givet ved $(ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_N) = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_N) = cs_N$. Det medfører, at $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ har sum cA. □

Eksempel 2.10. Talrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{-n} - \frac{2}{3}3^{-n}\right) \tag{2.6}$$

er sammensat af to geometriske rækker $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^n$, som konvergerer mod henholdsvis 2 og $\frac{3}{2}$. (2.6) konvergerer derfor mod 1.

Multiplikation af rækker er mere kompliceret, og vi udskyder analysen af dem til sidst i kapitlet.

De følgende udsagn udvider regnereglerne til divergente rækker.

Korollar 2.11. *Hvis rækken* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er konvergent, og* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *er divergent, så divergerer* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$*.* $\mathbb{C}$

Bevis. Lad os antage, at $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergerer. Da også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, finder vi ved hjælp af regnereglerne for talrækker, at $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer. Dette er en modstrid. □

Proposition 2.12. *Givet* $m \in \mathbb{N}$ *vil* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *og* $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ *enten begge konvergere eller divergere.* $\mathbb{C}$

Bevis. Påstanden er en konsekvens af, at differencen $d = \sum_{n=1}^{m-1} a_n$ er endelig. Hvis $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er afsnitssummen for $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, og $\{t_n\}_{n\geq m}$ er afsnitssummen for $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, så har vi jo

$$s_n = t_n + d$$

for alle $n \geq m$, og derfor har de to rækker samme konvergensforhold. □

Observation 2.13. Når der er konvergens i de to rækker, gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

2.2 Positive rækker

Rækker med ikke-negative led er specielt lette at behandle, da afsnitssummerne vil være monotont voksende og vi ikke behøver bekymre os for led der går ud med hinanden. Sådanne rækker kaldes positive selv om "ikke-negative rækker" havde været mere korrekt. Men de er simpelthen for vigtige for os til at have så tungt et navn.

Generelle udsagn

Definition 2.14. Rækken genereret af følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kaldes for *positiv*, hvis følgen er ikke-negativ, dvs hvis $a_n \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Positive talrækker fører til monotont voksende afsnitssummer, da

$$s_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_N + a_{N+1} = s_{N+1}.$$

Fra vores undersøgelse af talfølger ved vi, at monotone talfølger har gode konvergensforhold, som vi nu skal bruge til at undersøge positive rækker.

$\boxed{\mathbb{R}_+}$ **Sætning 2.15.** *En positiv række konvergerer, hvis og kun hvis den er begrænset.*

Bevis. Hvis rækken er positiv, så er afsnitssummen monotont voksende. Hvis den også er begrænset, så er den konvergent (Sætning 1.53). Hvis den er ubegrænset, så divergerer den. □

For at vise, at en positiv række er konvergent, er det derfor nok at finde et $M \in \mathbb{R}$ med $\sum_{n=1}^{m} a_n \leq M$ for alle $m \in \mathbb{N}$. Bemærk også at hvis en positiv række er divergent, så giver det mening at sige at den divergerer mod uendelig og eventuelt skrive $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Eksempel 2.16. Lad $0 \leq r < 1$ og betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}.$$

Afsnitssummerne er begrænsede af $M = \frac{1}{1-r}$, da (Sætning 2.4)

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{r^n}{n} \leq \sum_{n=1}^{N} r^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Rækken er dermed konvergent ifølge Sætning 2.15.

Bemærk, at vi ikke bare fandt en øvre grænse i eksemplet, men faktisk sammenlignede talrækken med den geometriske række. Ved at betragte M som summen af den 'større' talrække, er følgende en direkte konsekvens.

$\boxed{\mathbb{R}_+}$ **Korollar 2.17** (Sammenligningstest)**.** *Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være to positive talrækker med $b_n \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$.*

- *$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer, hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer.*
- *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer, hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerer.*

Sammenligningstesten giver os endda information om grænseværdien:

Observation 2.18. Antag at $0 \leq b_n \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$. Så gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

.

Udsagnet her skal forstås sådan, at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, så gælder der $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \infty$. Det fortæller os ikke noget af værdi, men det er heller ikke ukorrekt.

Vi bemærker også at den besværlige situation hvor en divergent række kan blive konvergent ved sætning af parenteser ikke forekommer her:

Korollar 2.19. *Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en positiv række med den egenskab, at hvis man sætter parenteser* $\boxed{\mathbb{R}_+}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_{n_i} + \cdots + a_{n_{i+1}-1})$$

(hvor $n_1 = 1$), så bliver rækken konvergent. Så er den oprindelige række også konvergent, med samme sum.

Bevis. Afsnitssummerne for rækken med parenteser er jo netop delfølgen s_{n_i} af den oprindelige afsnitssum s_n. Men disse følger er voksende, så hvis delfølgen er konvergent mod en værdi, så gælder det samme for hele følgen. □

Konvergenstests Med sammenligningstesten har vi set en første test, som hjælper os at afgøre, om en talrække er konvergent eller divergent. Bemærk, at vi har brug for en anden (nemmere) talrække at sammenligne med, før vi kan bruge testen.

I det følgende skal vi udlede en del flere tests som er tilpasset for at afgøre konvergens af særlige typer af rækker. Vi starter med integraltesten. Det virker intuitivt, at man skulle kunne undersøge konvergens ved at approksimere rækken med et integral. Vi husker på ([EHM, s. 185]) at en funktion defineret på et åbent og/eller ubegrænset interval I siges at være *lokalt integrabel* hvis den er Riemann-integrabel på ethvert afsluttet og begrænset delinterval

$[a, b] \subset I$. Vi har vist at alle kontinuerte funktioner har denne egenskab. Vi husker videre på at når f er lokalt integrabel på $[1, \infty)$, så er det *uegentlige integral* $\int_1^\infty f(x)dx$ defineret ved $\lim_{c\to\infty} \int_1^c f(x)dx$, forudsat selvfølgelig at sidstnævnte eksisterer.

$\boxed{\mathbb{R}_+}$

Sætning 2.20 (Integraltest)**.** *Lad $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ være en positiv, kontinuert og aftagende funktion. Rækken $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergerer, hvis og kun hvis det uegentlige integral $\int_1^\infty f(x)dx$ er endeligt.*

Bevis. Vi indfører $f^+, f^- : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ ved

$$\begin{aligned} f^+(x) &= f(\lfloor x \rfloor) \\ f^-(x) &= f(\lceil x \rceil) \end{aligned}$$

og bemærker at da

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$$

og f er aftagende, så gælder

$$f^+(x) = f(\lfloor x \rfloor) \geq f(x) \geq f(\lceil x \rceil) = f^-(x). \tag{2.7}$$

Lad $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Begge funktioner $f^\pm$ er lokalt integrable fordi de er stykkevist kontinuerte, og ved (2.7) har vi dermed

$$\int_1^k f^+(x)dx \geq \int_1^k f(x)dx \geq \int_1^k f^-(x)dx$$

på grund af monotoniciteten af Riemann-integralet ([EHM, Korollar 5.9], se grafik). Integralerne bliver til summerne

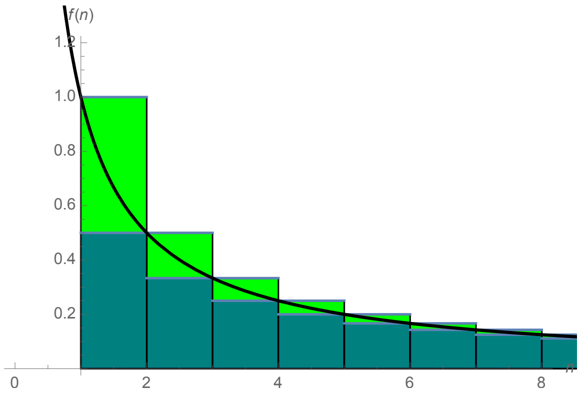
$$\int_1^k f^+(x)dx = \sum_{n=1}^{k-1} f(n)$$

og

$$\int_1^k f^-(x)dx = \sum_{n=2}^{k} f(n)$$

for $k \in \{2, 3, \dots\}$, og dermed finder vi

$$\sum_{n=2}^{k} f(n) \leq \int_1^k f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{k-1} f(n) \tag{2.8}$$



Hvis rækken er ubegrænset er følgen $\{\int_1^k f(x)dx\}_{k\in\mathbb{N}}$ således ubegrænset, og vice versa. I det begrænsede tilfælde ved vi fra Sætning 1.53 at følgen har en grænseværdi a, og det følger af Observation 1.54 at

$$\lim_{c\to\infty}\int_1^c f(x)dx = a$$

også i den stærkere forstand af grænseovergang i $\mathbb{R}$. $\square$

Observation 2.21. Når integraltesten har givet at $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er konvergent, får vi fra (2.8) det nyttige estimat

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx$$

Eksempel 2.22 (Den harmoniske række)**.** Vi giver et alternativt bevis for divergensen af den harmoniske række. Lad $f(x) = \frac{1}{x}$, så er

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = [\log x]_1^{\infty} = \lim_{c\to\infty}\log c - \log 1 = \infty.$$

Det viser, at den harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ er divergent.

Eksempel 2.23 (p-rækkerne)**.** Når $p > 1$, så er $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ konvergent, for vi har

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx = \int_1^{\infty} x^{-p}dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^{\infty} = \lim_{c\to\infty}\frac{c^{-p+1}-1^{-p+1}}{1-p} = \frac{1}{p-1} < \infty$$

Når $0 < p < 1$, så er $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ divergent, for vi har

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx = \int_1^{\infty} x^{-p}dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^{\infty} = \lim_{c\to\infty}\frac{c^{-p+1}-1^{-p+1}}{1-p} = \infty$$

Når $p \leq 0$ er p-rækken selvfølgelig divergent idet den underliggende følge ikke går mod nul. Vi ser altså samlet set at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergent, hvis og kun hvis $p > 1$ – et meget vigtigt eksempel.

$\boxed{\mathbb{R}_+}$

Sætning 2.24 (Kvotienttest). *Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en positiv række hvor $a_n > 0$ for alle $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Antag at følgen $\{a_{n+1}/a_n\}_{n \geq n_0}$ er konvergent.*

- *Rækken konvergerer, hvis $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.*
- *Rækken divergerer, hvis $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.*

Bevis. Definer $c := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Når $c < 1$ vælger vi r med $c < r < 1$ og bemærker at der findes et $N \geq n_0$, sådan at for alle $n \geq N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Vi ser at

$$a_{N+1} < r a_N$$

og herfra at

$$a_{N+2} < r a_{N+1} < r^2 a_N,$$

og så videre. Vi får således, formelt ved induktion, at

$$a_{N+p} < r^p a_N$$

når $p > 1$, så ved at substituere $n = N + p$ giver det

$$a_n \leq \frac{a_N}{r^N} r^n.$$

for alle $n \geq N$ (vi går til svagt ulighedstegn alene af hensyn til tilfældet $n = N$). Den højre side er proportional med leddene i den geometriske række, som jo konvergerer. Vi kan derfor bruge sammenligningstesten til at konkludere, at talrækken $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergerer. Ved Proposition 2.12 gælder det også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Når $c > 1$ findes N således at for alle $n \geq N \geq n_0$, $a_{n+1}/a_n \geq 1$. Det betyder at $a_{n+1} \geq a_n$ fra dette trin, og så kan $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ikke gå mod nul, da leddene er strengt positive fra og med trin n_0. Rækken vil derfor være divergent ifølge divergenstesten. □

Det skal understreges at testen ikke giver nogen konklusion når $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Eksempel 2.25 (Eksponentialrækken)**.** Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ med $a_n = \frac{1}{n!}$ konvergerer ved kvotienttesten, for leddene er aldrig nul, og

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$$

Vi ser på præcis samme måde at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!}$$

er konvergent for alle $R > 0$, idet kvotienten er

$$\frac{R^{n+1} n!}{R^n (n+1)!} = \frac{R}{n+1}$$

Kvotienttesten er nem at bruge i praksis, men ikke særligt stærk, fordi leddene ikke må være nul, og enten skal aftage eller vokse eksponentielt, inden man kan sige noget: fra beviset ser vi at testen i princippet bare sammenligner rækken med den geometriske række. Rodtesten, som vi viser nu, har en lidt større rækkevidde, blandt andet fordi den virker også for led der er nul.

Sætning 2.26 (Rodtest)**.** *Lad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *være en positiv række og antag at følgen* $\{a_n^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergerer.* $\boxed{\mathbb{R}_+}$

- *Rækken konvergerer, hvis* $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} < 1$.
- *Rækken divergerer, hvis* $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} > 1$.

Bevis. Definer $c := \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n}$. Det er intuitivt, at rækken forholder sig som en geometrisk række med parameter c. Det skal vi nu bevise.

Når $c < 1$ vælger vi r med $c < r < 1$ og ser fra definitionen af grænseværdi at vi kan finde et N, sådan at for alle $n \geq N$: $a_n^{1/n} < r$, eller med andre ord $a_n \leq r^n$. Ved sammenligningstesten er summen af $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ mindre end $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$, hvilket er mindre end $\frac{1}{1-r}$. Rækken konvergerer, fordi summen af de første N led også er endelig, jf. Proposition 2.12.

Hvis $c > 1$, findes der N, sådan at for alle $n \geq N$: $a_n^{1/n} \geq 1$, og dermed også

$$a_n \geq 1.$$

Talfølgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kan derfor ikke gå mod nul, og rækken divergerer ifølge divergenstesten (Sætning 2.2). $\square$

Igen skal det understreges at testen ikke giver nogen konklusion når $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = 1$.

Observation 2.27. Vi noterer til senere brug fra beviserne, at hver gang kvotient- eller rodtesten viser divergens, så er divergensen en konsekvens af at den bagvedliggende følge ikke går mod nul.

At testene ikke giver nogen konklusion hvis grænsen er 1 er en tvingende nødvendighed, for der findes konvergente såvel som divergente følger der resulterer i denne grænseværdi. Betragt fx den divergente harmoniske række med $a_n = 1/n$ og den konvergente 2-række med $b_n = 1/n^2$. Vi har

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$$

samt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \to 1.$$

Og vi har

$$(a_n)^{1/n} = \frac{1}{n^{1/n}} \to 1$$

samt

$$(b_n)^{1/n} = \frac{1}{(n^2)^{1/n}} = \frac{1}{(n^{1/n})^2} \to 1$$

ved brug af Eksempel 1.44

2.3 Absolut og betinget konvergens

I dette afsnit behandler vi rækker med led, som ikke kun har positivt fortegn. Vi skal først se på reelle rækker, hvor fortegnet skifter (alternerende rækker) og bagefter mere generelle rækker. Vi vil møde de vigtige begreber *absolut konvergens* og *betinget konvergens.*

Alternerende rækker

$\boxed{\mathbb{R}}$ **Definition 2.28** (Alternerende række)**.** Vi siger, at en reel talrække $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

er alternerende, hvis a_n har alternerende foretegn, dvs. hvis enten

$$\underbrace{a_1}_{\leq 0} + \underbrace{a_2}_{\geq 0} + \underbrace{a_3}_{\leq 0} + \underbrace{a_4}_{\geq 0} + \dots$$

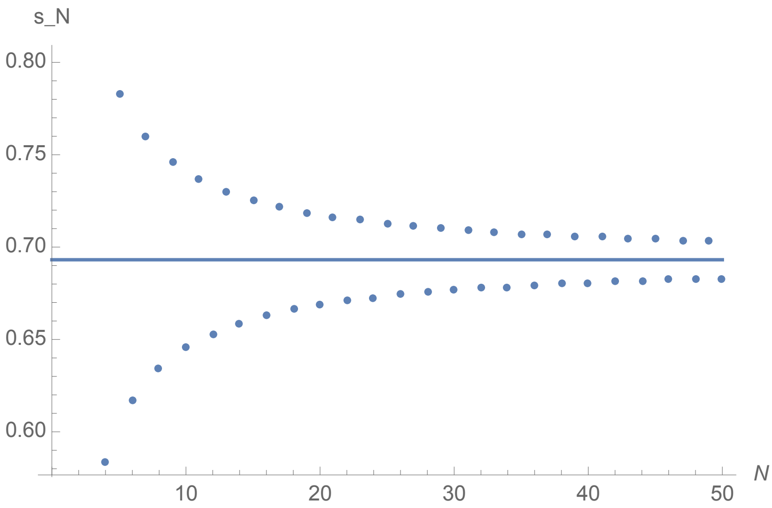
eller

$$\underbrace{a_1}_{\geq 0} + \underbrace{a_2}_{\leq 0} + \underbrace{a_3}_{\geq 0} + \underbrace{a_4}_{\leq 0} + \dots.$$

Eksempel 2.29. Et karakteristisk eksempel er den alternerende harmoniske række

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}.$$

I første omgang er der ingen grund til at gå ud fra, at rækken forholder sig anderledes end den harmoniske række, som jo divergerer. Men et plot af afsnitsfølgens led ser ud til at konvergere:



Den følgende sætning viser konvergens, uden at kunne afgøre summen.

Sætning 2.30 (Leibniz' test)**.** *Lad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *være en alternerende talrække.* $\boxed{\mathbb{R}}$
Hvis talfølgen $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *er monotont aftagende med* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$*, er* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

Bevis. Lad $a_1 > 0$ uden tab af generalitet. Så er $a_2 \leq 0, a_3 \geq 0, \dots$. Derved er følgen af de lige afsnitssummer voksende:

$$s_{2(m+1)} = \sum_{n=1}^{2(m+1)} a_n = \left(\sum_{n=1}^{2m} a_n\right) + \underbrace{a_{2m+1} + a_{2m+2}}_{\geq 0} \geq \sum_{n=1}^{2m} a_n = s_{2m}, \quad (2.9)$$

da det ulige led a_{2m+1} er positivt og større end a_{2m+2} i absolutværdi.

Omvendt er de ulige afsnitssummer aftagende:

$$s_{2(m+1)-1} = \sum_{n=1}^{2(m+1)-1} a_n = \left(\sum_{n=1}^{2m-1} a_n\right) + \underbrace{a_{2m} + a_{2m+1}}_{\leq 0} \leq \sum_{n=1}^{2m-1} a_n = s_{2m-1}. \tag{2.10}$$

Vi ved også, at

$$s_{2m} = s_{2m-1} + \underbrace{a_{2m}}_{\leq 0} \leq s_{2m-1},$$

da de lige led er negative. Da de ulige afsnitssummer er monotont aftagende, og de lige monotont voksende, finder vi derfor

$$s_2 \leq s_{2m} \leq s_{2m-1} \leq s_1$$

og ser, at $\{s_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ og $\{s_{2m-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ er begrænsede og dermed konvergente. Vi betegner grænseværdierne med henholdsvis s_{lige} og s_{ulige}. Da $a_{2m} = s_{2m} - s_{2m-1}$ finder vi med regnereglerne for talfølger at

$$\lim_{m\to\infty} a_{2m} = \left(\lim_{m\to\infty} s_{2m}\right) - \left(\lim_{m\to\infty} s_{2m-1}\right) = s_{lige} - s_{ulige}.$$

Da den venstre side er antaget at være nul, finder vi, at $s_{lige} = s_{ulige} =: s$.

$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer derfor mod s, for til givet $\epsilon > 0$ kan vi vælge $M_{lige}, M_{ulige} \in \mathbb{N}$ så

$$m \geq M_{lige} \Longrightarrow |s_{2m} - s| < \epsilon$$

og

$$m \geq M_{ulige} \Longrightarrow |s_{2m-1} - s| < \epsilon.$$

Med $N = \max\{2M_{lige}, 2M_{ulige} - 1\}$ har vi så

$$n \geq N \Longrightarrow |s_n - s| < \epsilon.$$

□

Bemærk, at Leibniz kræver at $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ skal være aftagende!

Observation 2.31. Det følger direkte fra beviset, at

$$|s - s_n| \leq |a_n|,$$

dvs. at det sidste led, som blev tilføjet, er en øvre grænse på fejlen man begår ved at afbryde summen.

Eksempel 2.32. De tre første led i den alternerende harmoniske række giver

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Summen ligger altså i intervallet

$$\left[\frac{5}{6} - \frac{1}{3}, \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right]$$

Vi bemærker til senere brug at summen dermed ikke kan være 0.

Bemærk, at Leibniz-testen kun behandler rækker med alternerende fortegn og ikke med generelle fortegn, et emne vi nu skal beskæftige os med.

Generelle rækker

Definition 2.33. En talrække $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ siges at være *absolut konvergent*, hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer. En talrække, som konvergerer, men som ikke konvergerer absolut, kaldes for *betinget konvergent*. $\boxed{\mathbb{C}}$

Ordvalget "betinget" henviser til et fænomen vi skal undersøge omhyggeligt i det følgende: summen af en betinget konvergent række afhænger af den rækkefølge elementerne er sat op i. Bemærk, at for positive rækker er konvergens det samme som absolut konvergens.

Eksempel 2.34. Bemærk, at den alternerende harmoniske række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

er betinget konvergent, da den er konvergent pga. Leibniz-kriteriet, men

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

er divergent, da vi genkender den som den harmoniske række.

Når $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en reel talrække definerer vi for alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n^+ := \max\{0, a_n\}$$

og

$$a_n^- := \max\{0, -a_n\}.$$

Vi ser at der gælder

$$a_n^+ + a_n^- = |a_n|$$

og

$$a_n^+ - a_n^- = a_n$$

ved at checke lighederne separat for negative og positive a_n.

$\boxed{\mathbb{R}}$ **Sætning 2.35.** *Hvis* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er en absolut konvergent reel række, konvergerer* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ *og* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. *Sætter vi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm} = A_{\pm}$$

gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A_+ - A_-$$

og

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A_+ + A_-.$$

Bevis. Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent betyder det, at $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer. Fordi $a_n^+ \leq |a_n|$ og $a_n^- \leq |a_n|$ konkluderer vi i så fald, ud fra sammenligningstesten Sætning 2.17, at rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergerer. Ifølge Sætning 2.9 konvergerer differensen og summen, hvilke er lig med henholdsvis summen af $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. □

$\boxed{\mathbb{C}}$ **Sætning 2.36.** *En absolut konvergent række er konvergent.*

Bevis. Udsagnet følger direkte af Sætning 2.35 i det reelle tilfælde. Hvis rækken er kompleks, sætter vi $b_n = \mathrm{Re}(a_n)$ og $c_n = \mathrm{Im}(a_n)$ og bemærker at $|b_n|, |c_n| \leq |a_n|$. Ved sammenligningskriteriet ses at b_n og c_n begge er absolut konvergente, og da de også er reelle, siger Sætning 2.35 at de konvergerer. Det gælder så også for $a_n = b_n + ic_n$ ved regnereglerne for konvergente rækker. □

Med den sidste sætning kan vi nu anvende vores konvergenskriterier på rækker med generelle fortegn til at etablere konvergens af en generel række ud fra den positive række den definerer. Divergensen kan ofte ses med divergenstesten.

Definition 2.37. En følge af naturlige tal $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ er en *permutation* af $\mathbb{N}$, hvis alle naturlige tal forekommer nøjagtigt én gang, dvs. hvis funktionen $i \mapsto n_i$ er en bijektiv afbildning fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{N}$.

Eksempel 2.38. Lad π være en permutation af $\{1, 2, \ldots, N\}$. Så er

$$\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(N), N+1, N+2, \ldots$$

en permutation af $\mathbb{N}$. Anvendt på en talrække ændrer de kun rækkefølgen på de første N led og har dermed ingen indflydelse på konvergensegenskaberne eller summen.

For at se på en mere drastisk måde at ombytte leddene på, bemærker vi at ethvert naturligt tal n kan skrives nøjagtigt enten som $2k-1$ (ulige) , $n = 2(2k-1)$ (lige, men ikke deleligt med 4) eller $n = 4k$ (deleligt med 4), hvor $k \in \mathbb{N}$. Det viser at

$$\pi(n) = \begin{cases} 2k+1 & n = 3k+1 \\ 4k+2 & n = 3k+2 \\ 4k+4 & n = 3k+3 \end{cases}$$

er en bijektion, der giver permutationen

$$1, 2, 4, 3, 6, 8, 5, 10, 12, \cdots, 2k-1, 2(2k-1), 4k, \cdots.$$

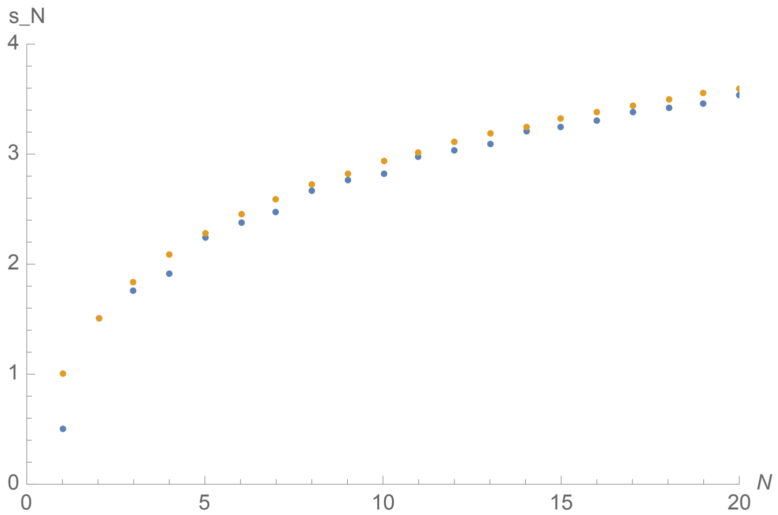
Ved hjælp af denne permutation bliver rækken

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

ombyttet til

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2(2k-1)} + \frac{1}{4k} + \cdots$$

Grafen viser afsnitssummerne af den oprindelige og den ombyttede række.



Grafen indikerer, at konvergensforhold og sum ikke afhænger af ombytningen.

$\boxed{\mathbb{R}_+}$

Sætning 2.39 (Ombytning af led i positive rækker)**.** *Lad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *være en konvergent, positiv række med sum* A*, og lad* $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *være en permutation af* $\mathbb{N}$*. Da er* $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$ *konvergent med sum* A*.*

Bevis. Definer $b_i := a_{n_i}$ for alle $i \in \mathbb{N}$. For alle $N \in \mathbb{N}$, findes der et $M \in \mathbb{N}$, således at alle $n_1, \dots n_N \leq M$. Fordi leddene er positive, gælder

$$\sum_{i=1}^{N} b_i = \sum_{i=1}^{N} a_{n_i} \leq \sum_{n=1}^{M} a_n.$$

A er dermed en øvre grænse for summen af $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$. Specielt er $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergent. Lad B være dens sum, som opfylder $B \leq A$. Da $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ er bijektiv kan a_n betragtes som ombytning af b_i (med den inverse permutation), og vi ser også, at $B \geq A$ gælder. $\square$

$\boxed{\mathbb{C}}$

Korollar 2.40. *Hvis* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er en absolut konvergent række, som konvergerer mod* A*, så gælder det samme for* $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$*, hvor* $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *er en permutation.*

Bevis. Antag først at rækken er reel. Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent mod A, er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ konvergente mod $A_{\pm}$ med $A = A_+ - A_-$ ifølge Sætning 2.36. Bruger vi nu Sætning 2.39 på de to positive rækker ser vi at $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}^{\pm}$ er konvergente med sum $A_\pm$. Med regnereglerne for talrækker konkluderer vi, at $\sum_{i=1}^\infty a_{n_i}$ er konvergent med sum $A_+ - A_- = A$.

Det komplekse tilfælde følger uden videre af det reelle ved at se på realdel og imaginærdel for sig. $\square$

Så let går det ikke med de betinget konvergente rækker. Vi vil se snart, at disse rækker kan konvergere mod hvad som helst, når man bytter om på leddene.

Eksempel 2.41. Ved at skrive de ulige naturlige tal på formen $2k-1$ og de lige enten som $4k$ eller som $2(2k-1)$ kan vi ombytte den alternerende harmoniske række til

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{4k}+\ldots$$

Lad os vise at den ikke kan konvergere med samme sum s som den oprindelige alternerende harmoniske række. Hvis den omordnede følge konvergerer mod t, kan vi sætte parenteser (Sætning 2.6),

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots \\ +\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}\right)-\frac{1}{4k}+\cdots$$

og ser derved, at den bliver til

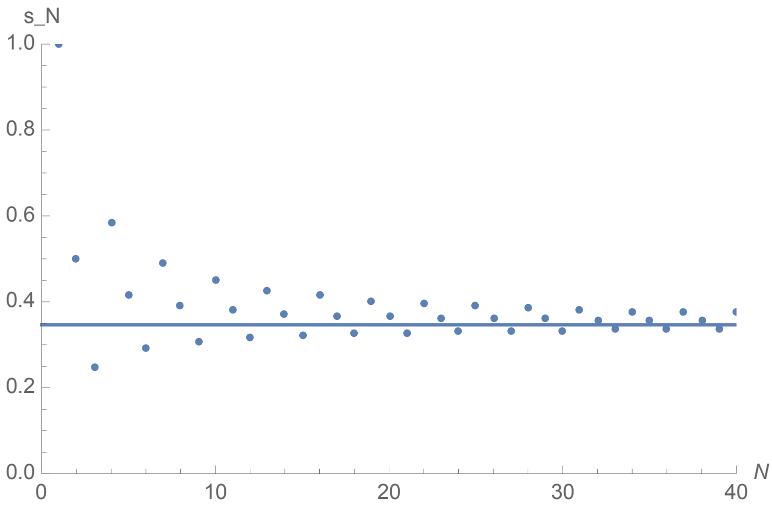
$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\ldots\right)$$

hvilket er lig med

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Det viser at $t=s/2$. Da vi har set i Eksempel 2.32 at $s\neq 0$ har vi nu set at den omordnede række ikke konvergerer med samme sum som den oprindelige. Enten er den divergent, eller også er den konvergent mod noget andet end s.

Grafen viser afsnitssummerne i den ombyttede talrække, sammen med den forventede sum.



Følgende lemma forbereder beviset af Sætning 2.43 herunder (sammenlign med Sætning 2.36).

$\mathbb{R}$ **Lemma 2.42.** *Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en betinget konvergent reel række divergerer både rækken af de positive og de negative led.*

Bevis. Antag, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konvergerer. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er divergent og da

$$|a_n| - a_n^+ = a_n^-$$

giver Korollar 2.11 at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergerer. Men vi har jo også

$$a_n^+ - a_n^- = a_n$$

så Korollar 2.11 anvendt igen viser at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer, hvilket er i strid med antagelsen om betinget konvergens. På lignende vis, ses, at talrækken af de negative led divergerer. □

$\mathbb{R}$ **Sætning 2.43** (Riemann-ombytning)**.** *Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en betinget konvergent, reel række, hvor alle $a_n \neq 0$. Får vilkårligt $B \in \mathbb{R}$ findes der en ombytning af rækken som konvergerer mod B.*

Bevis. Givet $B \in \mathbb{R}$ skal vi definere en ombytning som konvergerer mod B. Vi antager i første omgang at $B \geq 0$.

Vi vælger b_1 til at være det første positive led i følgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. For $k = 1, 2, 3, \ldots$, gør vi herefter som følger:

- Hvis $\sum_{i=1}^{k} b_i < B$, lad b_{k+1} = næste nye positive led
- Hvis $\sum_{i=1}^{k} b_i \geq B$, lad b_{k+1} = næste nye negative led

Bemærk, at hver betingelse kun er opfyldt endeligt mange gange efter hinanden, da rækkerne af de positive og negative led er divergente. Hvis vi sætter k_n til at gennemløbe de indekser hvor vi skifter mellem at vælge positive led og vælge negative led fra $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ opfører afsnitssummen for $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sig som

$$\begin{gathered} s_{k_1} \leq \cdots \leq s_{k_2} \\ s_{k_2} \geq \cdots \geq s_{k_3} \\ s_{k_3} \leq \cdots \leq s_{k_4} \\ s_{k_4} \geq \cdots \geq s_{k_5} \\ \cdots \end{gathered}$$

(her er $k_1 = 1$).

Da vi har sikret at alle elementer i $\{a_n\}$ bliver valgt på et og kun et tidspunkt, har vi hermed defineret en omordning, og nu viser vi at den konvergerer mod B. Vores konstruktion medfører at alle led i afsnitssummen $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ligger "klemt inde" mellem s_{k_n} og $s_{k_{n+1}}$ hvor $k_n \leq k \leq k_{n+1}$, så vi kan vise at hele afsnitssummen – og dermed den omordnede række – konvergerer mod B ved blot at vise at delfølgen s_{n_k} gør det.

For n lige har vi situationen

$$\sum_{i=1}^{k_n-1} b_i < B \text{ og } \sum_{i=1}^{k_n} b_i \geq B$$

fordi vi jo valgte en positiv værdi til indeks k_n og en negativ værdi til indeks $k_n + 1$. Det giver

$$B \leq \sum_{i=1}^{k_n} b_i = \sum_{i=1}^{k_n-1} b_i + b_{k_n} < B + b_{k_n}$$

og vi ser at

$$0 \leq s_{k_n} - B < b_{n_k}$$

For n ulige har vi på præcis samme måde

$$0 \leq B - s_{k_n} < -b_{n_k}$$

så vi får samlet set at

$$|s_{k_n} - B| < |b_{n_k}|.$$

Vi husker på at b_{n_k} er valgt blandt elementerne i $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, og at denne følge går mod nul fordi den definerer en konvergent række. Derfor går højresiden mod nul, hvilket viser det ønskede.

Hvis $B < 0$ ser vi i stedet på $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n$ der har positiv sum, men i øvrigt har de samme egenskaber som $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Udsagnet er stadigvæk sandt hvis der er led blandt a_n der er nul. Hvis endelig mange a_n er lig nul, placerer vi dem som de første elementer i omordningen og omordner resten som herover. Og hvis uendeligt mange a_n er lig nul, placerer vi dem i omordningen på alle ulige indekser og forskyder den omordning vi har konstrueret ud på de lige indekser.

Produktsummer De distributive og kommutative regneregler i $\mathbb{C}$ fortæller os at produktet af summer

$$(a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$$

kan skrives ud som en sum af produkter

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_1 b_1$$

Det virker intuitivt rimeligt at produktet af to konvergente rækker

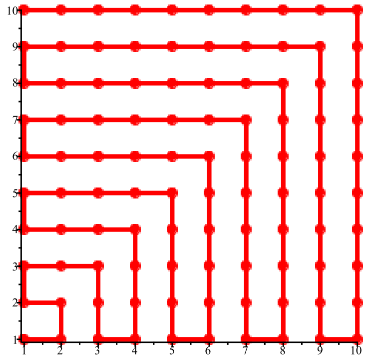
$$(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots)(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots)$$

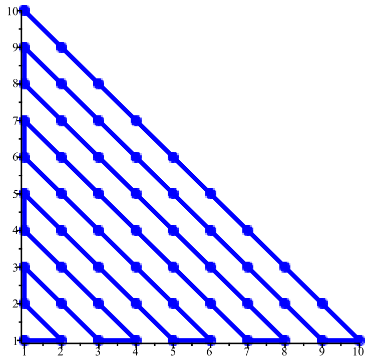
kan fortolkes som en uendelig række af alle leddene

$$a_i b_j, \qquad i, j \in \mathbb{N}_0$$

og det er faktisk tilfældet, men som vi skal se i afsnittet her ligger der en stor udfordring i at ordne disse led i en rækkefølge der på den ene side giver konvergens med den forventede sum, og på den anden side er mulig at arbejde med.

For at kunne summere leddene $a_i b_j$ med $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ skal vi ordne alle værdierne i $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, eller hvad der er det samme, finde en bijektion $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Vi kommer med to kandidater der begge starter i $(0, 0)$ og slanger sig udad som indikeret på figur:





Den første metode kalder vi "akseparallel" fordi vi bevæger os i en vinkelform parallel med x- og y-aksen på skift; her gennemløbes elementerne altså

$$\begin{gathered} a_0b_0+ \\ a_1b_0 + a_1b_1 + a_0b_1+ \\ a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0+ \\ a_3b_0 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_1b_3 + a_0b_3+ \\ \dots \end{gathered} \tag{2.11}$$

Hvis vi sætter parenteser svarende til hver vinkelform (og svarende til hver linje i (2.11)) får vi den mere komprimeret udtrykte sum

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_nb_k + a_nb_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_kb_n\right) \tag{2.12}$$

hvor vi i forhold til (2.11) har omordnet leddene svarende til ulige n således at vi altid gennemløber vinkelformerne fra x-aksen mod y-aksen. Det kan vi frit gøre, fordi summerne i parenteserne altid er endelige.

Den anden metode kalder vi "diagonal". Her gennemløbes elementerne

$$\begin{gathered} a_0b_0+ \\ a_1b_0+a_0b_1+ \\ a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0+ \\ a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+a_0b_3+ \\ \cdots \end{gathered} \tag{2.13}$$

og vi kan sætte parenteser svarende til hver diagonal (og svarende til hver linje i (2.13)) og igen omordne leddene svarende til ulige n således at vi altid gennemløber fra x-aksen mod y-aksen og få

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right) \tag{2.14}$$

Lemma 2.44. *Antag at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ begge er konvergente med summerne A og B, respektivt. Den komprimeret akseparallelt ordnede række* (2.12) *er da konvergent med sum AB.*

Bevis. Vi benævner afsnitssummen for $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ med s_n og afsnitssummen for $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ med t_n. Det er nu klart at

$$s_nt_n=\sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{m-1}a_mb_k+a_mb_m+\sum_{k=0}^{m-1}a_kb_m\right)$$

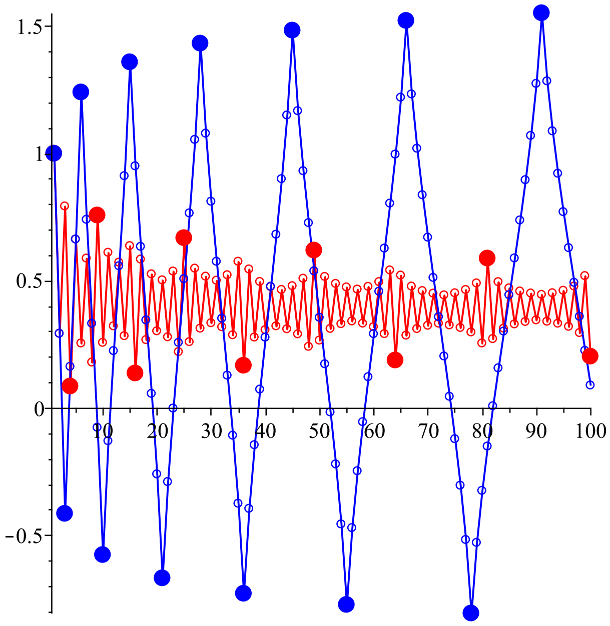
fordi begge sider indeholder alle led a_ib_j med $i,j\in\{0,\dots,n\}$ præcis en gang. Men vi ved jo at $s_nt_n\to AB$ ved regnereglen (Sætning 1.39) for produkt i følgekonvergens, så rækken (2.12) konvergerer med sum AB. □

Følgende eksempel viser at vi ikke uden videre kan summere diagonalt. Men eksemplet er tydeligvis kun betinget konvergent, så vi bevarer håbet for det absolut konvergente tilfælde.

Eksempel 2.45. Vi ser på

$$a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

og bemærker at følgen er konvergent ved Leibniz' kriterium. Ved det lemma vi lige har vist, konvergerer den akseparallelt komprimerede sum, svarende til de store røde cirkler i figuren:



Vi har her benyttet at afsnittene for de komprimerede summer er delfølger af afsnittene for de ukomprimerede summer, så vi kan have det hele i en figur, hvor de små røde cirkler indikerer leddene i afsnitssummen for (2.11), de små blå cirkler er afsnitssummen for (2.13) og de store blå er afsnitssummen for (2.14). Figuren indikerer at der også er konvergens for den ukomprimerede akseparallelle sum, men for de diagonale summer ser rækken divergent ud.

Figuren viser også tydeligt problemet: i alle de diagonale delsummer er fortegnene de samme, da

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$$

så den diagonale omordning giver meget store udsving undervejs. Vi har jo

$$k+1 \leq n+1 \text{ og } n-k+1 \leq n+1$$

så

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ og } \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

og dermed er

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{n+1} = 1$$

der tydeligvis ikke går mod nul. Rækken er dermed divergent ved divergenstesten.

ℂ **Sætning 2.46.** *Antag at* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *og* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *begge er absolut konvergente med summerne* A *og* B*, respektivt. Alle de ordnede rækker* (2.11), (2.12), (2.13) *og* (2.14) *er da absolut konvergente med sum* AB*.*

Bevis. Vi anvender først Lemma 2.44 på de konvergente summer $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ og $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$, og ser at

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}|a_n b_k| + |a_n b_n| + \sum_{k=0}^{n-1}|a_k b_n|\right)$$

konvergerer. Men i en positiv række må vi gerne hæve parenteser ifølge Korollar 2.19, så

$$|a_0b_0| + |a_1b_0| + |a_1b_1| + |a_0b_1| + |a_0b_2| + |a_1b_2| + |a_2b_2| + |a_2b_1| + |a_2b_0| + \cdots$$

er ligeledes konvergent. Det betyder at (2.11) er absolut konvergent, og så er den jo også konvergent. Summen ændres ikke hvis vi sætter parenteser, så vi sætter dem som i (2.12) og slutter at summen af (2.11) er AB ved at bruge Lemma 2.44 igen, nu uden at sætte $|\cdot|$.

Da (2.13) er en omordning af (2.11) som vi nu ved er absolut konvergent, følger det af Korollar 2.40 at den også er absolut konvergent, og har samme sum. Og endelig kan vi sætte parenteser og få at (2.14) har samme konvergensforhold, ved brug af Sætning 2.6. □

Man kan faktisk vise at (2.11) altid konvergerer med den rigtige sum, men da vi ikke har nogen anvendelse for det sparer vi arbejdet. Vi vil se senere at den relativt simple form af de diagonale udtryk gør det muligt at effektivt regne på produkter af uendelige summer. Metoden går tilbage til Cauchy, og kaldes *Cauchy-multiplikation*:

ℂ **Korollar 2.47** (Cauchy)**.** *Hvis* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *og* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *begge er absolut konvergente med summerne* A *og* B*, så gælder*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = AB$$

2.4 Estimerede summer

Ved dette trin i vores analyse af talrækker og deres konvergensforhold finder vi os selv i den lidt pinlige situation, at vi nu kan vise at et stort antal rækker er konvergerte, men kun i meget sjældne tilfælde bestemme deres sum. Det er jo stort set kun de geometriske rækker vi kan bestemme sum for. Vi vil i de følgende kapitler fylde nogle meget slagkraftige værktøjer til at bestemme summer i vores værktøjskasse, men lad os her ved andet kapitels afslutning reflektere over at vi ofte kan estimere konvergente rækkers sum ud fra fastholdte værdier i afsnitssummen.

Det er i almindelighed ikke muligt at sige noget om afstanden mellem en værdi i en konvergent følge, og denne følges grænseværdi, selv om man allerede ved at følgen konvergerer. Det gælder også for forholdet mellem en værdi $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ i en afsnitssum, og denne følges grænseværdi

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

men ofte kan vi bruge et eller flere af de resultater vi har samlet i Observation 2.13, 2.18, 2.21 og 2.31 til at finde et $\rho > 0$ og bevise at $|s_N - s| < \rho$. Hvis rækken så er reel, ved vi derved at $s \in (s_N - \rho, s_N + \rho)$, og hvis vi ved at vælge N stort nok kan få at $\rho < 5 \cdot 10^{-k-1}$, så giver det os mulighed for at bestemme de første k decimaler af s. Lad os se på nogle eksempler hvor vi i alle tilfælde holder os til $N = 50$.

Eksempel 2.48. Vi sætter $r = \frac{1}{2}$ i Eksempel 2.16 og ser at argumentet der giver at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \leq 2$$

er konvergent. Vi bruger et computeralgebrasystem til at beregne

$$s_{50} = \frac{604634697517522656635798845597392\,19}{872303479657928392239462081783398\,40}$$

som afrundes til 0.69314718055994529. Vi noterer at fordi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ er en positiv række er dens afsnitssum monotont voksende, så vi ved nu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \in (0.69314718055994529, 2]$$

Men vi kan bruge Observation 2.13 til at komme meget tættere på. Vi har jo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} - \sum_{n=1}^{50} \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=51}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

så vi kan finde et øvre estimat for $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ ved at estimere halesummen med start i $N = 51$. Der har vi jo

$$\sum_{n=51}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \leq \sum_{n=51}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2^{-51} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-50} \approx 8.881784197 \cdot 10^{-16}$$

så vi får

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \in (0.69314718055 9\mathbf{945}29, 0.69314718055 9\mathbf{945}74)$$

og ser dermed at summen afrundes til 0.69314718055995.

Eksempel 2.49. (2-rækken) Vi viste at $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ var konvergent ved brug af integralkriteriet, og Observation 2.21 gav os direkte det øvre estimat

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \leq 1^{-2} + \int_1^{\infty} x^{-2} dx = 1^{-2} + \left[-x^{-1}\right]_1^{\infty} = 1 + 1 = 2$$

Igen kan s_{50} let beregnes som en eksakt brøk

$$\frac{3121579929551692678469635660835626209661709}{1920815367859463099600511526151929560192000}$$

der afrundes til 1.634983900, så vi ser at

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \in (1.634983900, 2]$$

Men vi kan bestemme værdien meget mere præcist ved at benytte Observation 2.21 på halesummen $\sum_{n=51}^{\infty} n^{-2}$. Her har vi jo

$$\int_{51}^{\infty} x^{-2} dx \leq \sum_{n=51}^{\infty} n^{-2} \leq 51^{-2} + \int_{51}^{\infty} x^{-2} dx$$

hvor

$$\int_{51}^{\infty} x^{-2} dx = \left[-x^{-1}\right]_{51}^{\infty} = \frac{1}{51}$$

hvorfor

$$\sum_{n=51}^{\infty} n^{-2} \in \left[\frac{1}{51}, \frac{1}{51} + \frac{1}{(51)^2}\right] = [0.01960, 0.01999]$$

Derfor får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \sum_{n=1}^{50} n^{-2} + \sum_{n=51}^{\infty} n^{-2} \in [1.6447, 1.6451]$$

og at summen afrundes til 1.645.

Eksempel 2.50. (Eksponentialrækken) Det er ikke noget problem for et computeralgebrasystem at beregne

$$\sum_{n=0}^{50} \frac{1}{n!}$$

eksakt til

$$\frac{266690570578313737330634132288070236461240278868834697744597737 1}{98109978070043154979395510213112157562508521190195200000000000 0}$$

der afrundes til 2.71828182845**904**52. Fordi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ er en positiv række er dens afsnitssum monotont voksende, så det viser med det samme at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ er større end eller lig denne værdi. Som i Eksempel 2.48 vurderer vi nu på halesummen $\sum_{n=51}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Til det formål bemærker vi at det er klart at $n! \geq 2^n$ så snart $n \geq 4$, fordi vi kan vurdere alle tal $2, \ldots, n-1$ ned til 2 og n ned til $4 = 2^2$. Derfor gælder

$$\sum_{n=51}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=51}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

som vi allerede har beregnet til cirka $8.882 \cdot 10^{-16}$. Vi kan derfor konkludere at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq 2.71828182845\mathbf{904}61$$

og dermed at summen afrundes til 2.71828182845905.

Eksempel 2.51. (Den alternerende harmoniske sum) Vi gør som i Eksempel 2.32, men går lidt længere. Observation 2.31 giver

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{50} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{51}}{50} \right| = \frac{1}{50} = 0.02$$

Vi kan beregne s_{50} eksakt til

$$\frac{211741335802448128775 3}{309904450424599670640 0}$$

hvilket afrundes til 0.6833, så vi kan konkludere at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \in (0.6633, 0.7033)$$

og dermed at summen afrundes til 0.7.

Vi ser at det varierer meget fra række til række hvor tæt vi kan komme på at estimere en sum ud fra halvtreds led. Hvis vi i stedet fastholder at vi skal bruge otte cifre kan vi ved at løse de uligheder vi benyttede i estimaterne herover finde de nødvendige N-værdier. For de fire rækker vi har set på giver det

Sum	Estimat	N
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$	0.69314718	28
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	1.64493407	14142
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$	2.71828183	28
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$	0.69314718	2000000000

Vi vil senere vise, at de to summer der har samme estimat faktisk er eksakt ens, og at øvrige ligheder mellem de estimater vi finder her og elementære udtryk i vigtige matematiske konstanter ikke er tilfældige.

Kapitel 3

Funktionsfølger og -rækker

Vi vil nu udvide vores undersøgelse af talfølger og talrækker til følger af funktioner

$$f_1, f_2, f_3, \dots,$$

og senere til rækker af funktioner

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots,$$

hvor f_n er reelle eller komplekse funktioner. For ethvert x i definitionsmængden af alle f_n, så er $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en talfølge hvis konvergensforhold vi kan undersøge. Dette fører til konceptet *punktvis konvergens* af funktionsfølgen mod en mulig grænsefunktion f. Allerede det første eksempel vil vise, at egenskaber af en funktionsfølge, f.eks. kontinuitet af alle f_n, ikke nødvendigvis overlever grænseovergangen og at f kan være diskontinuert. Dette leder os til at se på alle x samlet og til en definition af en *uniform konvergens*, som sikrer, at kontinuitetsbegrebet overlever grænseovergangen (Afsnit 3.1).

Da en funktion er kontinuert i x, hvis

$$f(x) = \lim_{x'\to x} f(x'),$$

kan dette resultat ses som et kriterium, som giver tilladelse til ombytning af to grænseovergange:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x'\to x} f_n(x') = \lim_{x'\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(x').$$

Vi vil undersøge i Afsnit 3.2, under hvilke betingelser det er tilladt, at ombytte $\lim_{n\to\infty}$ og integration

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n.$$

og under hvilke betingelser

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'.$$

Fordi både Riemann-integration og differentiation er givet ved en grænseproces er problemet af samme natur som det for kontinuitet.

3.1 Konvergens af funktionsfølger

Definition, eksempler og punktvis konvergens

$\boxed{\mathbb{C}\to\mathbb{C}}$

Definition 3.1 (Funktionsfølge)**.** Lad $A \subseteq \mathbb{C}$ og for alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : A \to \mathbb{C}.$$

Vi siger at

$$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

eller $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en *funktionsfølge.*

Nogle gange er det vigtigt at holde sig til tilfældene hvor $A \subset \mathbb{R}$ og/eller $f_n : A \to \mathbb{R}$. Vi gør eksplicit opmærksom på det fra gang til gang.

Hvis vi ser på et fastholdt punkt x, bliver funktionsfølgen til talfølgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ med $a_n = f_n(x)$. Det er derfor ofte nyttigt at se på en funktionsfølge som en familie af talfølger for hvert x. Dette fører til følgende konvergensbegreb:

$\boxed{\mathbb{C}\to\mathbb{C}}$

Definition 3.2 (Punktvis konvergens)**.** Lad $A \subset \mathbb{C}$ og $f_n : A \to \mathbb{C}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi siger $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergerer punktvist* mod $f : A \to \mathbb{C}$, hvis for alle $x \in A$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Dvs., hvis

$$\forall x \in A\ \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Funktionen f kaldes *grænsefunktionen.*

Når vi siger, at en funktionsfølge $f_n : A' \to \mathbb{C}$ *konvergerer punktvist* mod f på $A \subset A'$ mener vi at funktionen betragtet som funktion $f_n : A \to \mathbb{C}$ konvergerer punktvis mod $f : A \to \mathbb{C}$.

Eksempel 3.3 (x^n på $\mathbb{R}$)**.** Lad

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x^n$$

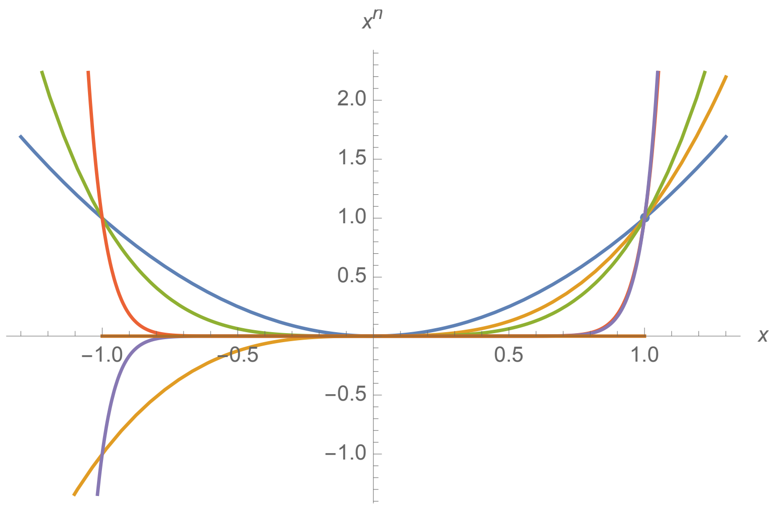
for alle $n \in \mathbb{N}$. Funktionsfølgen er givet ved

$$x, x^2, x^3, \ldots$$

Bemærk, at x^n går mod nul for alle x med $|x| < 1$, at x^n er divergent for $|x| > 1$ og $x = -1$, og at x^n er lig med 1 for $x = 1$. Derfor er funktionsfølgen punktvis konvergent på $A = (-1, 1]$ mod grænsefunktionen $f : A \to \mathbb{R}$, givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-1, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Bemærk, at grænsefunktionen ikke er kontinuert, selvom funktionerne i følgen er kontinuerte. Grafen viser f_n for $n = 2, 3, 4, 16, 17$ samt grænsefunktionen f.



For at understrege, hvad vi ser i grafen, betragter vi funktionsfølgen i punkterne $x = -2, -1, \frac{1}{2}, 1, 2$:

$$\begin{array}{rl}
\{f_n(-2)\}_{n\in\mathbb{N}} & -2, 4, -8, 16, -32, \ldots \\
\{f_n(-1)\}_{n\in\mathbb{N}} & -1, 1, -1, 1, -1, \ldots \\
\{f_n(\frac{1}{2})\}_{n\in\mathbb{N}} & \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \\
\{f_n(1)\}_{n\in\mathbb{N}} & 1, 1, 1, \ldots \\
\{f_n(2)\}_{n\in\mathbb{N}} & 2, 4, 8, \ldots
\end{array}$$

Med en enkelt funktionfølge kan vi altså generere et hav af interessante talfølger.

Eksempel 3.4 (x^n på $\mathbb{C}$)**.** Lad

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad f_n(x) = x^n$$

Følgen konvergerer mod nul for alle x med $|x| < 1$ og divergerer for alle x med $|x| > 1$. For x på cirklen $|x| = 1$ er det bedst at skrive x på polarformen $x = e^{i\theta}$. Talfølgen er kun konvergent for $\theta/2\pi \in \mathbb{Z}$ ($x = 1$) og ellers divergent. Hvis $\theta/2\pi \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$, er mængden af fortætningspunkter endelig (med mindst to elementer); hvis $\theta/2\pi$ er irrational, er mængden af fortætningspunkter hele cirklen (jf. Proposition 1.30). f er dermed punktvist konvergent på

$$A = \{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\} \cup \{1\}$$

med grænsefunktion $f : A \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x : |x| < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Uanset om vi tænker på $f_n(x) = x^n$ som definitionen af en kompleks eller reel funktion, viser eksemplerne, at en funktionsfølge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ af kontinuerte funktioner kan konvergere punktvist til en diskontinuert grænsefunktion f. Grunden til det er, at det er vanskeligt at ombytte to grænseovergange.

Vi så jo i Sætning 1.43 at en funktion f var kontinuert i et givet punkt x præcis når der gælder

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

for alle følger $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der konvergerer mod punktet x. Bruger vi dette på grænsefunktionen f af en funktionsfølge $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ser vi at den er kontinuert i x, hvis og kun hvis der for alle $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, som konvergerer mod x:

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_m(x_n) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} f_m(x_n). \tag{3.1}$$

Dvs. hvis og kun hvis vi får lov til at ombytte de to grænseovergange.

Eksempel 3.5. I vores eksempel $f_n(x) = x^n$, lad $x_m = 1-\frac{1}{m}$ med $\lim_{m\to\infty} x_m = 1$. Dermed bliver den venstre side af (3.1) til

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} f_n(x_m) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

hvorimod for alle $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_m) = \lim_{n\to\infty} x_m^n = 0,$$

da $|x_m| < 1$. Dermed er den højre side af (3.1) lig med

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x_m) = \lim_{m\to\infty} 0 = 0.$$

Grænseovergangene må derfor ikke altid ombyttes.

Uniform konvergens For at forstå, hvorfor grænsefunktionen af funktionsfølgen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, hvor $f_n(x) = x^n$, ikke er kontinuert, er det bedst, at vi ser en gang til på beviset for punktvis konvergens. Lad $0 < x < 1$ og $\epsilon > 0$. Så er

$$|x^n - 0| = x^n < \epsilon \qquad \forall n \geq N := \left\lceil \frac{\log \epsilon}{\log x} \right\rceil \tag{3.2}$$

Vi ser, at N ikke kun afhænger af ϵ, men også af x: $N = N(x, \epsilon)$.

Mens talfølgen er konstant (og dermed hurtigst muligt konvergerende) for $x = 1$:

$$N(1, \epsilon) := 1,$$

bliver konvergensen langsommere og langsommere (dvs. N større og større), jo mere vi nærmer os $x = 1$ nedefra, fordi jo så $\log x \to 0$.

$$\lim_{x\to 1^-} N(x, \epsilon) = \infty.$$

Da N ikke kan vælges uafhængigt af x, siger vi, at konvergensen ikke er uniform i x. Det er intuitivt, at dette er grunden til at, at grænsefunktionen får en diskontinuitet ved $x = 1$. Udstyret med dette eksempel, indfører vi nu formelt definitionen *uniform konvergens*. Som vi senere skal se, sikrer en uniform konvergent funktionsfølge os, at grænsefunktionen er kontinuert.

Vi starter med at definere en såkaldt norm på mængden af funktioner med samme definitionsområde.

$\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Definition 3.6 (Den uniforme norm (sup-norm))**.** Lad $A \subset \mathbb{C}$ og $f : A \to \mathbb{C}$. Så er den *uniforme norm (sup-normen)* givet ved

$$||f||_A = \sup\{|f(x)|, x \in A\}.$$

I overensstemmelse med konventionen (jf. [EHM, p. 89]) om at sup af en opad ubegrænset mængde er ∞, skriver vi $||f||_A = \infty$ når f er ubegrænset. Vi vil se at den uniforme norm er for funktioner, hvad absolutværdien er for reelle tal og modulus for komplekse. Specielt opfylder den trekantsuligheden:

$\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Lemma 3.7. *Lad $A \subset \mathbb{C}$ og $f : A \to \mathbb{C}$. For alle $f, g : A \to \mathbb{C}$ gælder*

$$||f + g||_A \leq ||f||_A + ||g||_A,$$

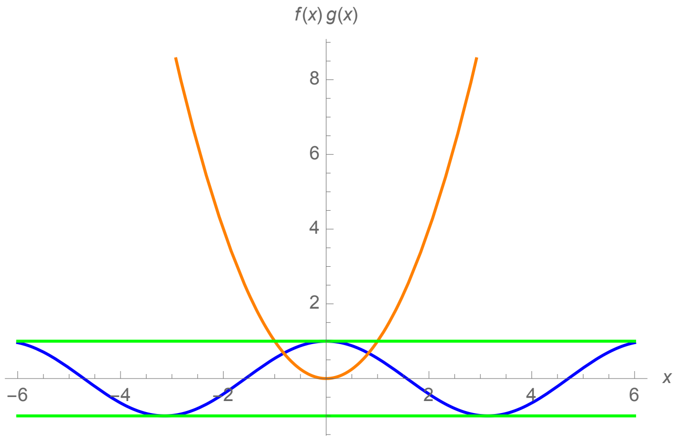
Bevis. For alle $a \in A$ har vi

$$|(f + g)(a)| = |f(a) + g(a)| \leq |f(a)| + |g(a)| \leq ||f||_A + ||g||_A.$$

så $||f||_A + ||g||_A$ er et overtal for den mængde der har supremum $||f + g||_A$. □

Argumentet gælder også hvis f eller g er ubegrænset på A, men har kun den trivielle konklusion at $||f + g||_A \leq \infty$.

Eksempel 3.8 (Begrænsede funktioner)**.** $f(x) = \cos x$ er en begrænset funktion, da $||f||_{\mathbb{R}} = 1$. $g(x) = x^2$ er ikke begrænset på $\mathbb{R}$, da $||g||_{\mathbb{R}} = \infty$, men begrænset på $[0, 1]$, da $||g||_{[0,1]} = 1$.



Lad $A \subset \mathbb{C}$. Det er ikke svært at vise ud fra Lemma 3.7, at mængden af begrænsede funktioner

$$\mathrm{B}(A, \mathbb{R}) := \{f : A \to \mathbb{R} : ||f||_A < \infty\}$$

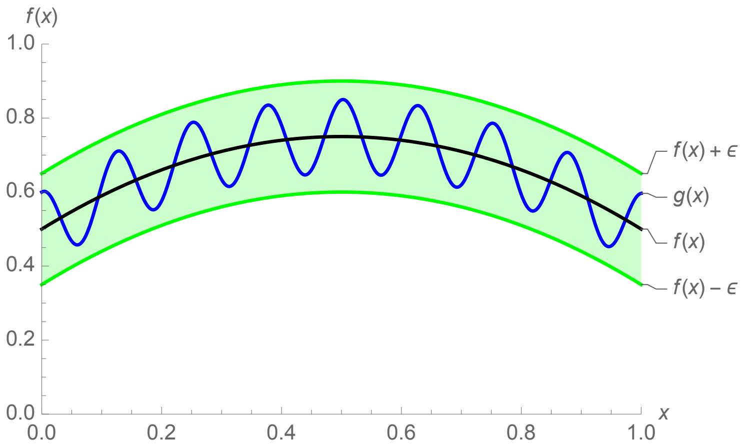
udgør et reelt vektorrum.

På samme måde som vi bruger absolutværdi eller modulus til at måle afstanden mellem to reelle eller komplekse tal x og y som $|x - y|$ vil vi bruge udtryk af formen

$$||f - g||_A$$

til at måle afstanden mellem to funktioner f og g.

Når vi tegner grafer af begge funktioner i det samme koordinatsystem, så svarer afstanden mellem funktionerne til den maksimale lodrette afstand mellem graferne. Hvis $||f - g||_A \leq \epsilon$, så ligger g i "ϵ-båndet omkring f" (og omvendt). Grafen illustrerer en funktion g, som ligger i ϵ-båndet af f. Her valgte vi $f(x) = \frac{1}{2} + x - x^2$, $g(x) = f(x) + \frac{1}{10}\cos(50x)$ og $\epsilon = 0.15$.



$\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Definition 3.9. Lad $A \subset \mathbb{C}$ og $f_n : A \to \mathbb{C}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. En funktionsfølge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergerer uniformt* mod $f : A \to \mathbb{C}$, hvis

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N :\ ||f_n - f||_A \leq \epsilon.$$

Med andre ord, hvis talfølgen $\{||f_n - f||_A\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod nul. Hvis vi sætter definitionen af den uniforme norm ind, bliver definitionen til

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Hvis konvergensen er uniform, så gælder, at for alle $\epsilon > 0$, findes der et N, således at for alle $n \geq N$, ligger f_n i ϵ-båndet af f (se grafen). Det er vigtigt at påpege, at forskellen mellem punktvis konvergens ligger i rækkefølgen af kvantorerne. For punktvis konvergens skriver vi $\forall x \exists N$, hvilket betyder, at N må afhænge af x: $N := N(x)$, mens vi for uniform konvergens skal have $\exists N \forall x$ hvilket betyder, at N ikke må afhænge af x (parallellen med begrebet uniform kontinuitet ([EHM, Definition 3.35]) skulle gerne være tydelig).

Disse overvejelser viser, at uniform konvergens medfører punktvis konvergens med samme grænsefunktion:

$\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Lemma 3.10. *Lad $A \subset \mathbb{C}$ og $f_n : A \to \mathbb{C}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Hvis funktionsfølgen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt mod $f : A \to \mathbb{C}$, så konvergerer talfølgen $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ mod $f(a)$ for alle $a \in A$.*

Vi vil nu udvide Cauchys kriterium til uniform konvergens og begynder med definitionen af Cauchy for funktioner.

$\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Definition 3.11. Lad $A \subset \mathbb{C}$ og $f_n : A \to \mathbb{C}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. En funktionsfølge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en *Cauchy-følge* hvis

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \; \forall n, m \geq N : ||f_n - f_m||_A \leq \epsilon.$$

Selve Cauchy-kriteriet vil vi bruge til at bevise det vigtige Weierstrass-Majorant-kriterium senere hen. Det vil også have betydning for vores studier af fuldstændige metriske funktionsrum.

Sætning 3.12 (Cauchy-kriterium for uniform konvergens)**.** *Lad $A \subset \mathbb{C}$ og $f_n : A \to \mathbb{C}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er uniformt konvergent, hvis og kun hvis $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge.* $\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Bevis. Vi viser først, at uniform konvergens medfører Cauchy-egenskaben. Hvis $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt mod en grænsefunktion f, findes der for alle $\epsilon > 0$ et N, sådan at for alle $n \geq N$

$$||f_n - f||_A \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ved hjælp af trekantsuligheden ser vi at for alle $n, m \geq N$

$$||f_n - f_m|| \leq ||f_n - f||_A + ||f - f_m||_A \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

dvs. funktionsfølgen er Cauchy.

Vi viser nu, at Cauchy-egenskaben medfører, at konvergensen er uniform. For alle $x \in A$ (dvs. punktvis), er $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Cauchy-følge. Cauchy-kriteriet for talfølger (Sætning 1.75) medfører, at $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer for alle $x \in A$ så vi kan opnå en kandidat f til en grænseværdi for $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ved at sætte

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Vi vil vise, at følgen konvergerer uniformt mod f, selv om vi i første omgang kun ved at den konvergerer punktvis.

Hertil vælges $\epsilon > 0$. Fordi følgen konvergerer punktvis, findes et $M(x)$, sådan at for alle $m \geq M(x)$:

$$|f_m(x) - f(x)| < \epsilon/2.$$

Da $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge, kan vi også finde et N, sådan at for alle $n, m \ \geq N$ og alle x:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon/2.$$

Kombinerer vi de to udsagn, finder vi for et fastholdt x at for alle $n \geq N$, og $m \geq \max\{N, M(x)\}$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Vi brugte $M(x)$ til at etablere uligheden

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

men konklusionen afhænger ikke af $M(x)$ og gælder for alle $x \in A$, så vi har vist, at for alle $\epsilon > 0$ og $n \geq N(\epsilon)$:

$$||f - f_n||_A \leq \epsilon.$$

□

Bemærk, at bevisets vigtigste indgrediens var Cauchys kriterium, men at beviset alligevel ikke var trivielt. Vi skal bruge resultatet lidt senere, når vi ser på funktionsrækker.

Vores næste sætning viser at uniform konvergens af kontinuerte funktioner fører til en kontinuert grænsefunktion. Husk, at vi indførte begrebet uniform konvergens netop for at vise dette resultat.

$\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Sætning 3.13. *Lad $A \subset \mathbb{C}$ og $f_n : A \to \mathbb{C}$ være kontinuerte for alle $n \in \mathbb{N}$. Hvis $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt mod $f : A \to \mathbb{C}$, så er f kontinuert.*

Bevis. Lad $a \in A$. Vi skal vise, at f er kontinuert i $a \in A$, dvs., givet $\epsilon > 0$, skal vi finde $\delta > 0$, således at $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ for alle $|x - a| < \delta$.

Lad $\epsilon > 0$ være givet. Da konvergensen er uniform, kan vi finde et N, således at $||f - f_N||_A \leq \epsilon/3$. Fordi f_N nu også er kontinuert kan vi finde et $\delta > 0$, sådan at $|f_N(x) - f_N(a)| < \epsilon/3$ for alle $|x - a| < \delta$. Ved hjælp af trekantsuligheden finder vi

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon\end{aligned}$$

som er præcis det, vi vil vise. □

Eksempel 3.14. Følgende funktionsfølge skal illustrere, at funktioner kan konvergere til en kontinuert funktion, selvom konvergensen kun er punktvis (og følgen endda er begrænset) og ikke uniform. Lad $f_n(x) = nx^n(1-x)$, som konvergerer punktvis mod nulfunktionen på $[0,1]$, da

$$\lim_{n\to\infty} nx^n(1-x) = 0$$

for alle $x \in [0,1]$. Konvergensen er ikke uniform, da funktionsværdien i maksimalpunktet $x_n = \frac{n}{n+1}$ er givet ved

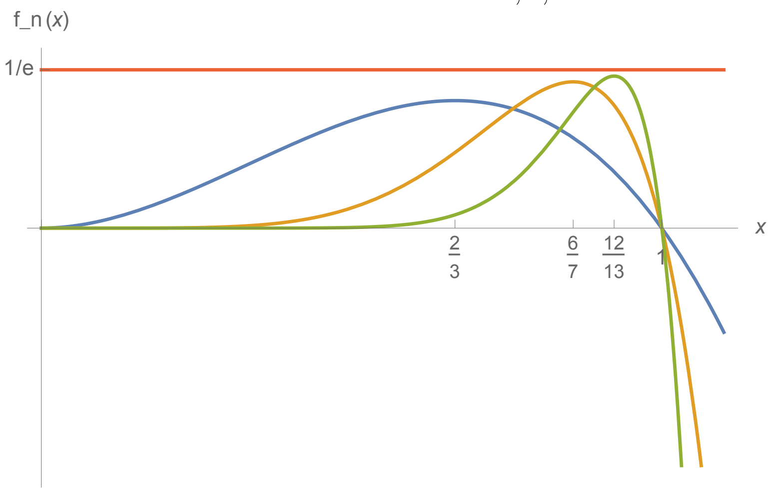
$$f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

og dermed forbliver udenfor et ϵ-bånd for alle $\epsilon < \frac{1}{e}$ og stort nok n, da

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{1\cdot e} = \frac{1}{e}.$$

jf. Eksempel 1.45.

Grafen illustrerer situationen med $n = 2, 6, 12$.



3.2 Integration og afledning af funktionsfølger

Hvis en funktionsfølge bestående af differentiable/integrable $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer, konvergerer så også følgen af de afledte $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ og/eller følgen af stamfunktionerne $\{\int f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$? Det er et vanskeligt spørgsmål som vi nu vil studere. Fordi vi kun har defineret differentiation og integration for funktioner med definitionsmængde $A \subset \mathbb{R}$ er det udelukkende det tilfælde vi ser på i dette afsnit.

Eksempel 3.15 (Stamfunktionen)**.** Lad $n \geq 2$. Betragt den kontinuerte funktion

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n^2 x \qquad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \\ f_n(x) &= n - n^2\left(x - \frac{1}{n}\right) \qquad x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \\ f_n(x) &= 0 \qquad x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right] \end{aligned}$$

som konvergerer punktvis mod nulfunktionen $f(x) = 0$. Stamfunktionen

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$$

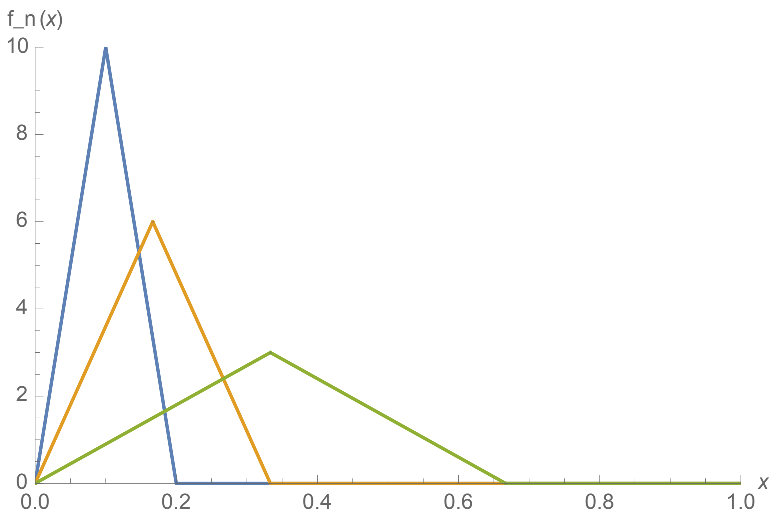
er derimod ikke lig med stamfunktionen af grænsefunktionen,

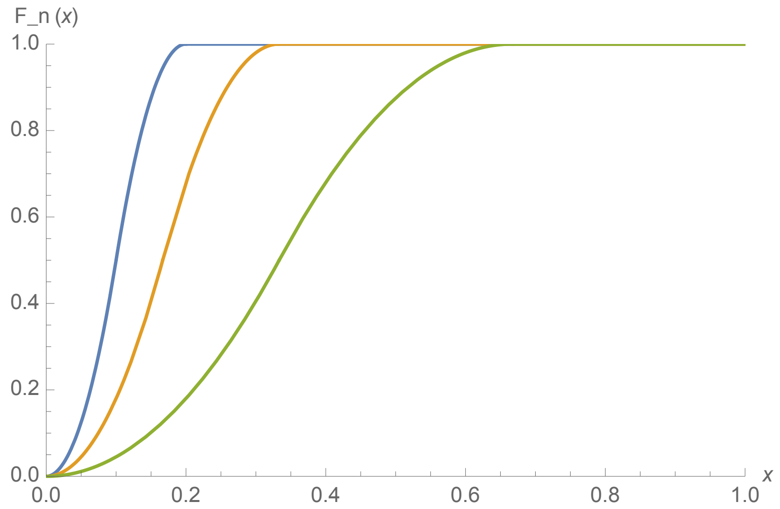
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = 0.$$

Specielt er ved $x = 1$: $F_n(1) = 1$ for alle $n \geq 2$, hvorimod $F(1) = 0$. Vi ser derfor, at integration og $\lim_{n\to\infty}$ generelt ikke kan byttes om:

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) dt \neq \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 f_n(t)dt\right)$$

Graferne illustrerer situationen med $n = 3, 6, 10$.





Eksemplet viser, at punktvis konvergens af en følge af kontinuerte funktioner $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mod en kontinuert funktion f ikke er tilstrækkeligt for at sikre, at $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod F. Følgende sætning og dens korollar viser, at uniform konvergens er tilstrækkeligt.

Sætning 3.16. *Lad* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *være en funktionsfølge af funktioner* $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ *der alle er Riemann-integrable. Hvis* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergerer uniformt mod* f*, så er* f *også Riemann-integrabel, og der gælder* $\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Bevis. Vi sætter $I_n = \int_a^b f_n(t)dt$ og bemærker at $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchyfølge, idet trekantsuligheden for integraler (Sætning 1.9) giver

$$|I_n - I_m| = \left|\int_a^b (f_n(t) - f_m(t))dt\right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|dt \leq \int_a^b ||f_n - f_m||_{[a,b]}dt$$

således at

$$|I_n - I_m| \leq (b-a)||f_n - f_m||_{[a,b]}.$$

Fordi $\{f_n\}$ er Cauchy, idet følgen er uniformt konvergent, kan vi gøre højresiden vilkårligt lille ved at gå tilstrækkeligt langt ud i følgen, og dermed er $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy. Vi får fra Cauchys kriterium (for talfølger, Sætning 1.75) at $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent, lad os sige med grænseværdi $I \in \mathbb{C}$, og vort mål er at vise at f er Riemann-integrabel med integral I. Til det formål må vi bruge definitionen, så vi vælger $\epsilon > 0$ og tager $N \in \mathbb{N}$ så der gælder $||f - f_N||_{[a,b]} < \epsilon/(3(b-a))$ og $|I - I_N| < \epsilon/3$. Vi ved at f_N er Riemann-integrabel med integral I_N, så vi kan vælge $\delta > 0$ således at

$$\left| I_N - \sum_{i=1}^{m} f_N(\xi_i)\Delta x_i \right| < \epsilon/3$$

når finheden af inddelingen er mindre end δ. Men så har vi også

$$\begin{aligned}
\left| I - \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i \right| &\leq |I - I_N| + \left| I_N - \sum_{i=1}^{m} f_N(\xi_i)\Delta x_i \right| \\
&+ \left| \sum_{i=1}^{m} f_N(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i \right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \sum_{i=1}^{m} |f_N(\xi_i) - f(\xi_i)|\Delta x_i \\
&\leq \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i = \epsilon
\end{aligned}$$

□

$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$

Korollar 3.17. *Lad $I \subset \mathbb{R}$ være et interval. Lad $\{f_n\}$ være en funktionsfølge af lokalt integrable funktioner $f : I \to \mathbb{C}$ der konvergerer uniformt mod f. Vælg et $c \in I$. Da giver*

$$F_n(x) := \int_c^x f_n(t)dt \qquad F(x) := \int_c^x f(t)dt$$

mening for alle $x \in I$, og $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer punktvis mod F på I:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_c^x f_n(t)dt \right) = \int_c^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t) \right) dt$$

for alle $x \in I$.

Hvis I er begrænset, er konvergensen også uniform på I.

Bevis. Antag først at $x > c$. Fordi f_n er Riemann-integrabel på intervallet $[c, x]$ og konvergerer uniformt mod f der, giver Sætning 3.16 at f er Riemann-integrabel, således at udtrykket for $F(x)$ giver mening. Sætningen viser videre at $F_n(x)$ konvergerer mod $F(x)$. Når $x < c$ argumenterer vi på samme måde på $[c, x]$, og når $x = c$ er alle værdier nul, så vi har vist at F_n konvergerer punktvis mod F.

Nu vender vi os mod den uniforme konvergens under den videre antagelse at I er begrænset. Vi finder derfra $a < b$ så $I \subset [a, b]$ og lader $\epsilon > 0$ være givet. Fordi konvergensen af $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mod f er uniform, kan vi finde et N, således at der for alle $n \geq N$ og alle $t \in I$ gælder

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Nu bruger vi trekantsuligheden for integraler (Sætning 1.9) samt denne ulighed til at estimere differensen

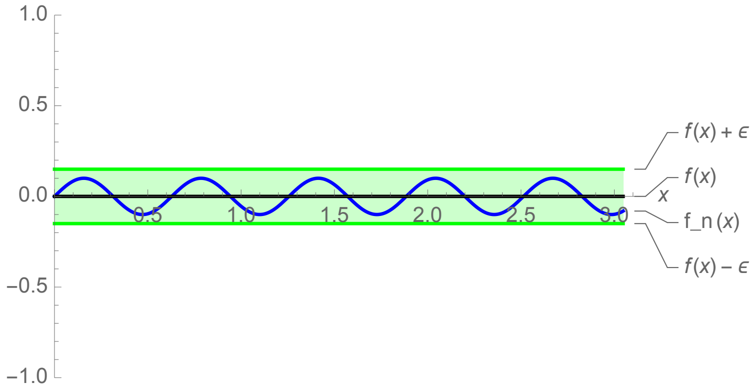
$$\begin{aligned}
|F(x) - F_n(x)| &= \left|\int_c^x f(t) - f_n(t)dt\right| \\
&\leq \left|\int_c^x |f(t) - f_n(t)|dt\right| \\
&\leq \left|\int_c^x \frac{\epsilon}{b-a}dt\right| \\
&= \epsilon\frac{|x-c|}{b-a} \leq \epsilon
\end{aligned}$$

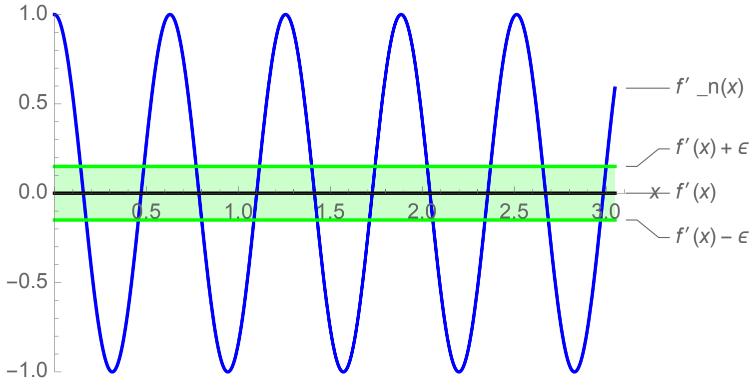
hvilket viser påstanden. □

Følgen af konstante funktioner $f_n(x) = \frac{1}{n}$ konvergerer uniformt mod nulfunktionen på hele $\mathbb{R}$, men stamfunktionerne $F_n(x) = \frac{x}{n}$ (svarende til $c = 0$) konvergerer ikke uniformt mod nulfunktionen.

Det er naturligt at ønske, at et lignende resultat skal holde for den afledte, men det er ikke tilfældet, som det følgende eksempel viser.

Eksempel 3.18 (Den afledte)**.** Lad $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ med $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Følgen konvergerer uniformt mod nulfunktionen $f(x) = 0$, hvorimod følgen af afledningerne $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ med $f'_n(x) = \cos(nx)$ ikke konvergerer, specielt ikke til den afledte $f'(x) = 0$. Grafen illustrerer situationen med $n = 10$ og $\epsilon = 0.15$.





Hvis vi fordrer at de afledte konvergerer uniformt, kan vi dog bruge Sætning 3.16 på $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ og bevise følgende udsagn for $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Til den brug husker vi på følgende definition

$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$

Definition 3.19. Vi definerer $C^1([a,b])$ som mængden af funktioner $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ der er differentiabel i sædvanlig forstand i alle $x \in (a,b)$ og differentiabel fra højre i a i den forstand at

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

og fra venstre i b i den forstand at

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b)$$

således at den afledede $f' : [a,b] \to \mathbb{C}$ bliver kontinuert.

$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$

Korollar 3.20. *Lad $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en funktionsfølge fra $C^1([a,b])$ som kon-*

vergerer i mindst et punkt $d \in [a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(d) = c.$$

Antag at $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt mod en funktion h. Da konvergerer $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformt mod en differentiabel funktion f og der gælder $f' = h$. Specielt gælder for hvert x:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Bevis. Bemærk, at antagelsen at f_n er kontinuert differentiabel betyder, at f_n er differentiabel og at den afledte f_n' er kontinuert og derfor Riemann-integrabel. Integralerne

$$g_n(x) := \int_d^x f_n'(t)dt$$

og

$$g(x) := \int_d^x h(t)dt$$

er derfor veldefinerede, og ved infinitesimalregningens hovedsætning (Sætning 1.5) har vi at $g' = h$. Ved hjælp af Korollar 3.17 ser vi, at $g_n(x)$ konvergerer uniformt mod $g(x)$.

Bemærk, at g_n og f_n begge to er stamfunktioner for f_n'. Vi kan derfor konkludere ved Lemma 1.6, at

$$f_n(x) = g_n(x) + c_n,$$

hvor vi ser at $c_n = f_n(d)$ fordi $g_n(d) = 0$.

Da c_n konvergerer mod c ifølge antagelsen, finder vi, at $f_n(x)$ konvergerer uniformt mod $f(x) := g(x) + c$. Specielt gælder $f' = h$. □

I beviset herover havde vi igen det potentielle problem at vi skal bruge middelværdisætningen til at slutte at en funktion der har afledet 0 er nødt til at være konstant. Vi løste det som i beviset for Sætning 1.5.

3.3 Funktionsrækker

Definition 3.21. Lad $A \subseteq \mathbb{C}$. Lad $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en funktionsfølge med $\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

$f_n : A \to \mathbb{C}$. Definer $\sigma_N := \sum_{n=1}^N f_n$. Da kaldes funktionsfølgen $\{\sigma_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ for *(afsnits)funktionsrækken* genereret af $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ og betegnes ved

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots .$$

Definition 3.22. Funktionsrækken $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ *konvergerer punktvis (uniformt)* hvis afsnitsfunktionsfølgerne $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, konvergerer punktvis (uniformt). Vi kalder grænsefunktionen for afsnitsfølgen for *sumfunktionen*.

Eksempel 3.23 (Geometrisk række)**.** Vores undersøgelser (Sætning 2.4) i konteksten af talrækker fører umiddelbart til udsagnet at

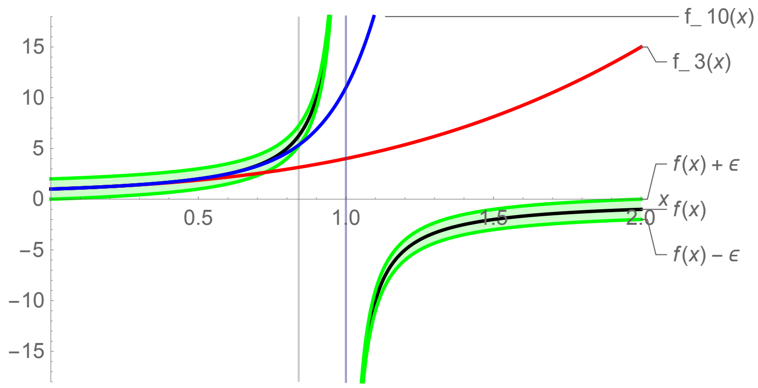
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

konvergerer punktvis på $[0, 1)$ mod grænsefunktionen $\frac{1}{1-x}$. For ethvert $\delta > 0$ er konvergensen uniform på $[0, 1-\delta]$, da

$$\left|\sum_{n=0}^{N} x^n - \frac{1}{1-x}\right| = \frac{x^{N+1}}{1-x} \leq \frac{(1-\delta)^{N+1}}{\delta} < \epsilon$$

for $N := \left\lceil \frac{\log(\delta\epsilon)}{\log(1-\delta)} \right\rceil$, specielt er N uafhængig af x.

Grafen viser afsnitssummerne for $N = 3, 10$ (blå og rød) sammen med gransefunktionen $\frac{1}{1-x}$ samt dens ϵ-bånd ($\epsilon = 1$). Vi kan se, at f_{10} ligger indenfor båndet i intervallet $[0, 1-\delta]$ med $\delta = 0.16$ (lodret linje). Divergensen ved $x = 1$ er også indikeret.



Det er nemt at udvide argumentationen til at vise uniform konvergens i området

$$A = \{x : |x| \leq 1 - \delta\} \subset \mathbb{C}.$$

Sætning 3.24 (Weierstrass' Majoranttest)**.** *Lad $A \subseteq \mathbb{C}$ og lad $f_n : A \to \mathbb{C}$. Hvis $|f_n(x)| \leq a_n$ for alle $x \in A$ og $n \in \mathbb{N}$ og hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformt.* $\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Vi kalder $\{a_n\}$ for en *majorantrække.*

Bevis. Lad $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være følgen af afsnitssummerne for talfølgen og $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være følgen af afsnitssummerne for funktionsfølgen. Da $|f_n(x)| \leq a_n$ for alle x ifølge antagelsen, finder vi, at for alle $m \geq n$:

$$||\sigma_m - \sigma_n||_A = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k \right\|_A \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||f_k||_A \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k = s_m - s_n. \quad (3.3)$$

Da $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent ifølge antagelsen, er den også Cauchy. Uligheden (3.3) medfører nu, at også $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i den uniforme forstand og dermed uniformt konvergent ifølge Sætning 3.12. □

Bemærk, at konvergens af

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_A$$

medfører uniform konvergens af

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n,$$

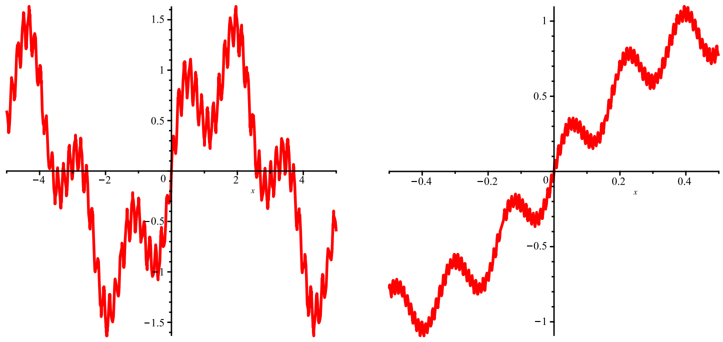
ved blot at sætte $a_n = ||f_n||_A$. Når vi senere taler om metriske rum, skal vi omformulere dette ved at sige, at absolut konvergens af $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ medfører konvergens i den uniforme norm.

Weierstrass brugte sin test til at producere eksempler af følgende art:

Eksempel 3.25 (En Weierstrass-funktion)**.** Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n!^2 x)}{n!}$$

har den ledvise majorant $a_n = 1/n!$ på hele $\mathbb{R}$, og vi ved fra Eksempel 2.25 at den tilhørende række er konvergent. Altså gælder at rækken konvergerer uniformt mod en sumfunktion $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. At W er kontinuert ses nu af Sætning 3.13, fordi alle de summerede funktioner er kontinuerte.



Men som figurerne indikerer, er W voldsomt fluktuerende, og Weierstrass chokerede sin samtids matematikere med at vise at W ikke er differentiabel i noget $x \in \mathbb{R}$, selv om alle de summerede funktioner er vilkårligt ofte differentiable. Se [Li, Sætning 12.5.4] for detaljer.

Det sidste eksempel i dette kapitel opfører sig en del pænere.

Eksempel 3.26 (Eksponentialrækken)**.** Lad $R > 0$. Vi ser først at funktionsrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

er uniformt konvergent i regionen

$$\overline{\mathrm{B}}_R := \{x \in \mathbb{C} : |x| \leq R\}.$$

Bemærk, at for alle $x \in \overline{\mathrm{B}}_R$ gælder

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{R^n}{n!}$$

Vi så i Eksempel 2.25, ved brug af kvotienttesten, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!}$$

er konvergent, så vi konkluderer med Sætning 3.24 at funktionsrækken er uniformt konvergent i regionen $\overline{\mathrm{B}}_R$. Da R er vilkårligt, er funktionen punktvis konvergent på hele $\mathbb{C}$.

Vi ved kun at konvergensen er uniform på begrænsede mængder, men vi har alligevel vist at sumfunktionen $f(x)$ er kontinuert opfattet som en funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, for når vi skal undersøge kontinuiteten i et fast $x \in \mathbb{C}$ vælger vi bare $R > |x|$ og ser at der er uniform konvergens i $\overline{\mathrm{B}}_R$ og dermed kontinuitet i $x \in \overline{\mathrm{B}}_R$.

Hvis vi holder os til at se på rækken kun defineret på den reelle akse kan vi sige mere. Vi har lige vist at afsnitsfølgen

$$\sigma_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$$

konvergerer uniformt på ethvert interval af formen $[-R, R]$, og vi ser uden videre at

$$\sigma'_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(x^n)'}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sigma_{N-1}(x)$$

Det betyder altså at den afledede afsnitsfølge er en delfølge af den oprindelige afsnitsfølge, og dermed konvergerer den også uniformt mod f. Vi kan således bruge Korollar 3.20 til at se at f er differentiabel med $f'(x) = f(x)$. Igen følger dette på hele $\mathbb{R}$ fra at R er vilkårligt valgt.

Vi kender allerede en funktion der som f har $f' = f$ og $f(0) = 1$, nemlig eksponentialfunktionen. Og nu kan vi slutte at $f = \exp$ ved at differentiere

$$\left(\frac{f}{\exp}\right)' = \frac{f' \exp - \exp' f}{\exp^2} = \frac{f \exp - \exp f}{\exp^2} = 0$$

og konkludere at $f(x)/\exp(x) = c$ for en passende valgt konstant c. Ved at indsætte $x = 0$ ser vi at $c = 1$.

Vi har således vist

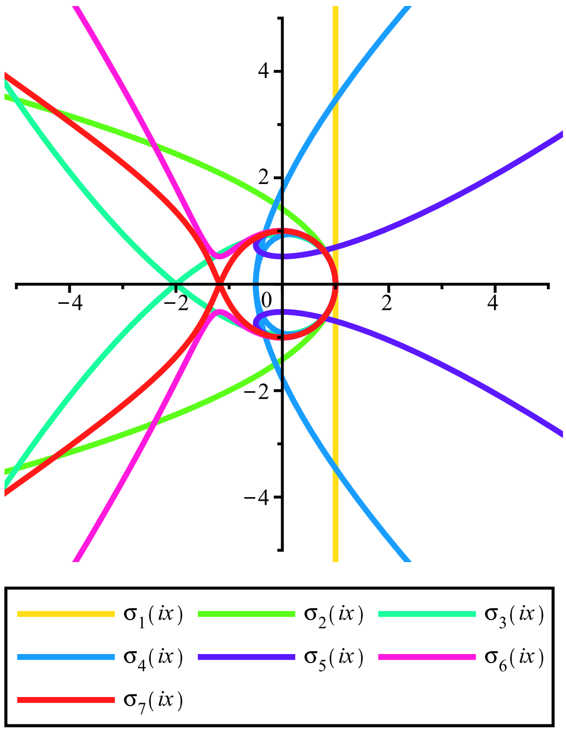
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x) = \exp(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$, hvilket forklarer rækkens navn. Med $x = 1$ får vi

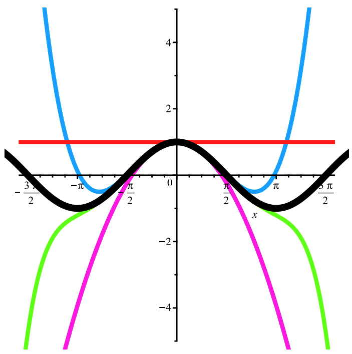
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

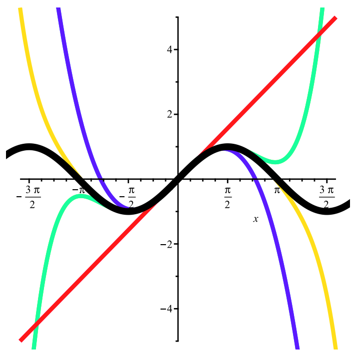
hvilket måske bekræfter en mistanke grundlagt i Eksempel 2.50.

Vi vil snart se på hvad vi kan sige ud fra vores viden om at $\sigma_N(ix)$ konvergerer uniformt på alle intervaller $[-R, R]$ mod $f(ix)$, men vi mangler lidt mere teori som vi skal udvikle i næste afsnit. Vi nøjes derfor nu med at visualisere situationen på samme måde som i Observation 1.14, og plotter $\sigma_1(ix), \ldots, \sigma_7(ix)$. Vi kan fx se på kurvernes spor,

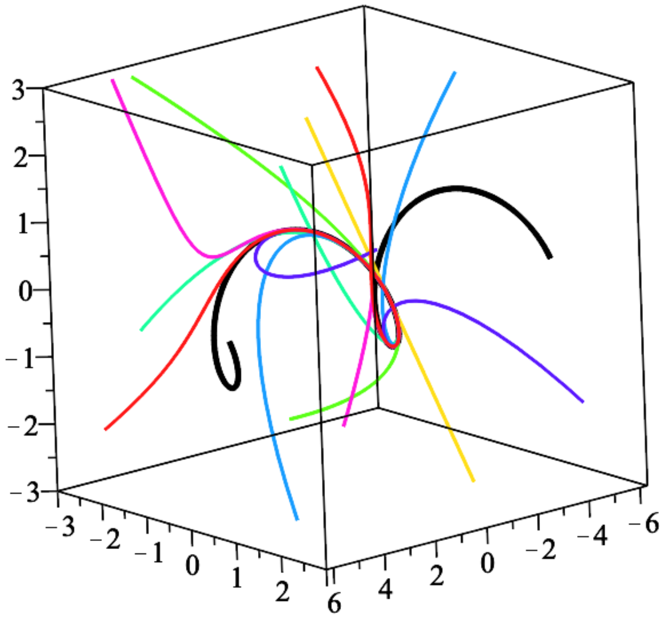


eller på deres realdele (til venstre) og imaginærdele (til højre) separat (sammen med e^{ix})





Bemærk her at da forskellen $(ix)^n$ mellem σ_{n-1} og σ_n altid er rent reel eller rent imaginær, så falder real- og imaginærdelene sammen parvist. Vi kan også samle det hele i en 3D-figur:



Kapitel 4

Potensrækker

Betragtet som kompleks funktionsrække, har vi set, at den geometriske række konvergerer indenfor enhedscirklen og divergerer udenfor. I dette afsnit skal vi se på vilkårlige *potensrækker*, dvs. funktionsrækker af formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

hvor $x \in \mathbb{C}$, og vil vise, at konvergensområdet for sådanne rækker har en særlig form der kan beskrives med et tal $r \in [0, \infty]$ som vi kalder rækkens konvergensradius. Vi viser stærke resultater om summerne af sådanne rækker, og indfører regneregler der giver mulighed for at manipulere med potensrækkerne og bestemme deres sum, navnlig ud fra regler for integration og differentiation af potensrækker ud fra de kendte regler for monomierne x^n.

Teorien giver os mulighed for at tage Taylorpolynomierne "til grænsen" ved at indføre en særlig potensrække hvis koefficienter er valgt så de passer med de afledede af en konkret funktion. Det giver os simple rækkebeskrivelser for de vigtigste funktioner, og når vi til sidst i kapitlet træder ud i de komplekse tal leder det til dybe indsigter om relationen mellem eksponentialfunktionen på den ene side, og de trigonometriske funktioner sinus og cosinus på den anden.

4.1 Punktvis og uniform konvergens

Konvergensradius Vi starter med at definere, hvad en potensrække er, for derefter at undersøge områder af punktvis og uniform konvergens.

Definition 4.1. Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en talfølge. Funktionsrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

kaldes en *potensrække*. x kan betragtes enten som en reel eller kompleks variabel.

Potensrækker er formelt set altid givet ved talfølger $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ der er indekseret fra 0 og frem, men vi kan jo se på

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n x^n$$

ved at sætte

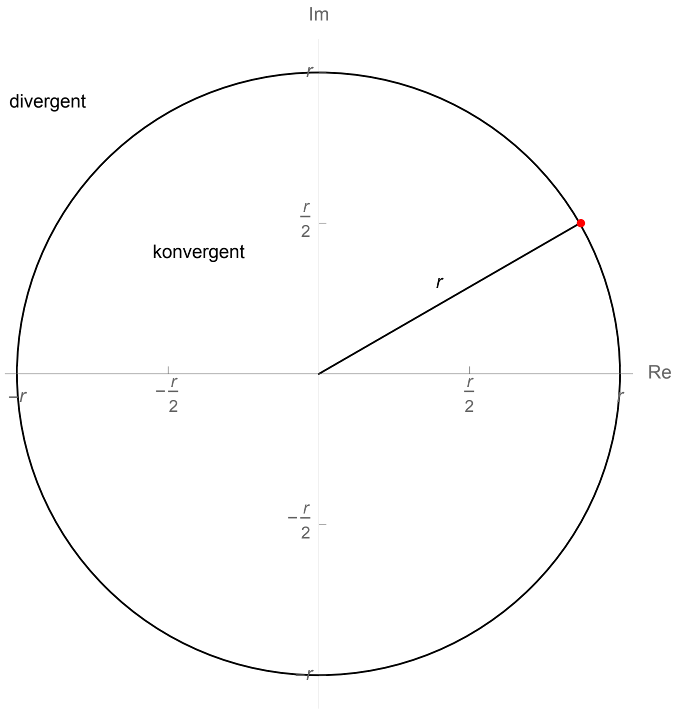
$$a_0 = \cdots = a_{N-1} = 0.$$

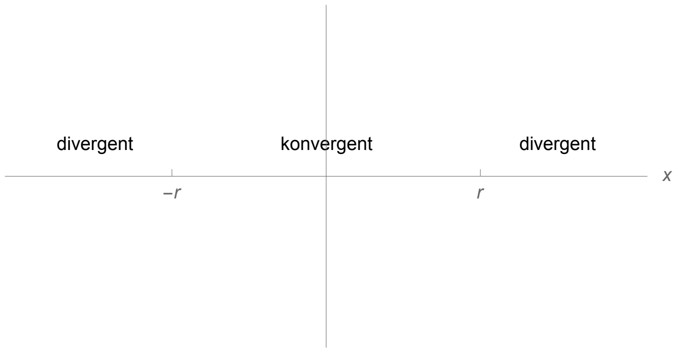
Mere generelt er en potensrække en række af formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

for et $a \in \mathbb{C}$ eller $a \in \mathbb{R}$, men som udgangspunkt betragter vi her kun situationen $a = 0$, da alle resultater uden problemer kan overføres dertil med en variabelsubstitution $x \mapsto x + a$.

Konvergensen af en potensrække kan beskrives med et enkelt tal r (positiv, lig med nul eller lig med uendelig), som benævnes *konvergensradien*. Graferne illustrerer situationen, hvis $x \in \mathbb{C}$ og $x \in \mathbb{R}$. Den efterfølgende sætning karakteriserer r.





For at formulere sætningen bedst muligt indfører vi

$$\mathrm{B}_r := \{x \in \mathbb{C} : |x| < r\}$$

og repeterer definitionen

$$\overline{\mathrm{B}}_r := \{x \in \mathbb{C} : |x| \leq r\},$$

hvor vi tillader $r = 0$ og $r = \infty$. Her er $\mathrm{B}_\infty = \overline{\mathrm{B}}_\infty = \mathbb{C}$ mens $\mathrm{B}_0 = \emptyset$ og $\overline{\mathrm{B}}_0 = \{0\}$.

Lemma 4.2. *Antag* $|x| < |y|$ *med* $x, y \in \mathbb{C}$, *og lad en følge* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *af komplekse tal være givet. Da gælder at hvis følgen* $\{a_n y^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *er begrænset, så er rækken* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *absolut konvergent.*

Bevis. Antag at følgen $\{a_n y^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ er begrænset, og lad $K \in \mathbb{R}_+$ være givet så $|a_n y^n| \leq K$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Definer $c = |x/y|$ og bemærk at $c < 1$. Vi har således at

$$|a_n x^n| = |a_n y^n (x/y)^n| \leq K c^n$$

for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da rækken $\sum_{n=0}^{\infty} K c^n$ er konvergent, gælder det samme for rækken $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, jf. sammenligningstesten (Sætning 2.17). □

Sætning 4.3. *Lad en følge* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *af komplekse tal være givet. Da findes der* $r \in [0, \infty]$ *så*

(1) Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *er konvergent for alle* $x \in \mathrm{B}_r$,

(2) Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *er divergent for alle* $x \notin \overline{\mathrm{B}}_r$.

Der gælder videre at

(3) Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *er absolut konvergent for alle* $x \in \mathrm{B}_r$,

(4) Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *er uniformt konvergent i* $\overline{\mathrm{B}}_s$ *for alle* $s < r$.

Tallet r er tydeligvis entydigt bestemt, og benævnes *konvergensradien* for $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Hvis man kun betragter reelle x, kan man erstatte B_r med intervallet $(-r, r)$ og $\overline{\mathrm{B}}_r$ med $[-r, r]$. I de ekstreme tilfælde $r = 0$ og $r = \infty$ er $(-r, r)$ henholdsvis $\emptyset$ og $\mathbb{R}$, mens $[-r, r]$ er henholdsvis $\{0\}$ og $\mathbb{R}$.

Bevis. Sæt

$$A := \left\{ t \in [0, \infty) \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \text{ er konvergent} \right\}$$

og definer

$$r = \sup A$$

Det er klart at $0 \in A$, så r er defineret som en værdi i $[0, \infty]$.

Når $|x| < r$ ved vi at $|x|$ ikke er et overtal for A, og vi kan derfor vælge $t \in A$ så $|x| < t < r$. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ er konvergent ved definitionen af A, er specielt $\{a_n t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ begrænset. Det følger derfor af Lemma 4.2 at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er absolut konvergent, og dermed konvergent.

Når $|x| > r$, vælges et t så $|x| > t > r$. Antag for modstrid at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer. Da er $\{a_n x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ begrænset, så derfor må $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ være (absolut) konvergent ved Lemma 4.2. Så ligger t i A, men dette strider mod at $t > r$, for r er antaget at være et overtal for A.

Udsagnet (3) har vi allerede vist som en del af argumentet for (1). For (4) vælger vi $s < r$. For at bevise, at uniform konvergens holder i $\overline{\mathrm{B}}_s$, bemærker vi, at

$$|a_n x^n| \leq |a_n| s^n,$$

for alle x med $|x| \leq s$ og alle $n \in \mathbb{N}$. Da $s < r$, er

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| s^n$$

konvergent, som vi lige har vist. Vi kan derfor bruge Weierstrass' Majoranttest 3.24 til at konkludere, at potensrækken er uniformt konvergent i området $\overline{\mathrm{B}}_s$. $\square$

Det er nemt at komme til at undervurdere den netop viste sætning her, da resultatet virker så naturligt og beviset er så relativt ligefremt (bemærk dog at vi er afhængige af kontinuitetsaksiomet både til at definere r og når vi går fra absolut konvergens til konvergens). Slagkraften i resultatet, og i hele ideen om konvergensradius, ligger i at vi kan slutte fra viden om konvergensforhold for $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i et enkelt punkt til at udsige noget om konvergens i en hel region af den komplekse plan. Ved vi at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ er konvergent i et $x_0 \neq 0$, så må $r \geq |x_0|$ og dermed er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent for alle x med $|x| < |x_0|$. Ved vi at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ er divergent i et x_0, så må $r \leq |x_0|$ og dermed er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergent for alle x med $|x| > |x_0|$.

Her er er slående eksempel på denne tankegang:

Eksempel 4.4. Vi sætter $a_0 = 0$ og $a_n = 1/n$ for $n \in \mathbb{N}$. Den tilsvarende potensrække

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

er divergent i $x = 1$ fordi vi der opnår den harmoniske række. Derfor er konvergensradius højst 1. Men den er konvergent i $x = -1$ fordi vi der opnår den alternerende harmoniske række (eller rettere: -1 gange den), så konvergensradius er mindst 1, og vi konkluderer direkte at $r = 1$.

Observation 4.5. Vi er mest interesserede i konvergensradien r som et skillepunkt mellem konvergens og divergens af rækker, men bemærker at r også kan karakteriseres direkte fra følgerne $\{a_n x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Der gælder

(5) $\{a_n x^n\}$ går mod nul for alle $x \in \mathrm{B}_r$ og går ikke mod nul for alle $x \notin \overline{\mathrm{B}}_r$

(6) $\{a_n x^n\}$ er begrænset for alle $x \in \mathrm{B}_r$ og er ubegrænset for alle $x \notin \overline{\mathrm{B}}_r$.

Begge udsagn følger af beviset for Sætning 4.3. For $x \in \mathrm{B}_r$ ved vi at rækken er konvergent, og derfor må følgen gå mod nul, og derfor må den være begrænset. For $x \notin \overline{\mathrm{B}}_r$ førte antagelsen at $\{a_n x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ var begrænset til modstrid i beviset. Så må den være ubegrænset, og går dermed heller ikke mod nul.

Eksempel 4.6. Vi ser på potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ hvor f_n er det n^{te} fibonaccital, jf. Eksempel 1.21. Det er let at se ved induktion at

$$f_n \leq 2^n$$

for alle $n \in \mathbb{N}_0$, så der gælder

$$\frac{f_n}{2^n} \leq 1$$

og dermed er $\{f_n x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ begrænset i $x = \frac{1}{2}$. Det medfører ved hjælp af Observation 4.5(6) at $r \geq \frac{1}{2}$, og dermed er rækken konvergent for alle x med $|x| < \frac{1}{2}$.

Nu opskriver vi variationer af rod- og kvotienttestene (Sætning 2.24 og 2.26) til brug ved bestemmelse af konvergensradier.

Sætning 4.7. *Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrække med den egenskab at følgen*

$$\{|a_n|^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergerer. Da er

$$r = \left(\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right)^{-1}$$

når vi bruger konventionen at $0^{-1} = \infty$ og $\infty^{-1} = 0$.

Bevis. Vi benytter rodtesten på den positive række $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ og ser

$$\lim_{n\to\infty} (|a_n x^n|)^{1/n} = |x| \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Når $x \in \mathbb{C}$, $|x| < \left(\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right)^{-1}$, giver rodtesten at $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ er konvergent og $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dermed (absolut) konvergent.

Når $x \in \mathbb{C}$, $|x| > \left(\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right)^{-1}$, giver rodtesten at $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ er divergent, og af Observation 2.27 ved vi endda at $\{a_n x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ikke konvergerer mod 0. Ved at sammenligne med Observation 4.5(5) ser vi at r må have samme værdi som den reciprokke grænseværdi. $\square$

Det er værd at bemærke at vi nu får information ud af rodtesten også i den situation at grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

giver 1. I det tilfælde ved vi ikke om $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er konvergent, men vi ved at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er konvergent når $|x| < 1$ og divergent når $|x| > 1$. På præcis samme måde viser vi ved appel til kvotienttesten:

Sætning 4.8. *Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrække med den egenskab at $a_n \neq 0$ for $n \geq n_0$, og at følgen*

$$\{|a_{n+1}|/|a_n|\}_{n\geq n_0}$$

konvergerer. Da er

$$r = \left(\lim_{n\to\infty} (|a_{n+1}|/|a_n|)\right)^{-1}$$

når vi bruger konventionen at $0^{-1} = \infty$ og $\infty^{-1} = 0$.

Eksempel 4.9. Lad $p \in \mathbb{R}$ være givet. Vi ser på potensrækken hvor koefficienterne er givet som $a_0 = 0$ og $a_n = 1/n^p$ for $n \in \mathbb{N}$. Så har vi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = (1 + \tfrac{1}{n})^{-p} \to 1$$

fordi funktionen x^{-p} er kontinuert i $x = 1$, og dermed har potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$$

konvergensradius 1.

Bemærk at argumentet også gælder for de $p \in (-\infty, 1]$ hvor vi har set at den tilsvarende talrække divergerer. Specielt kan vi sætte $p = -1$ og indse at $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ konvergerer for alle $x \in \mathrm{B}_1$. Vi kan også sætte $p = 0$ og genfinde den geometriske række.

Eksempel 4.10. Potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ har konvergensradius ∞, da

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Det følger også fra Eksempel 3.26.

Potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ har konvergensradius 0, da

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \to \infty.$$

Bemærk, at rækken (som enhver potensrække) konvergerer i $x = 0$ fordi alle led der er nul.

Eksempel 4.11 (Randpunkter)**.** Det er essentielt at bemærke, at Sætning 4.3 ikke siger noget om konvergensen i punkterne med $|x| = r$, og vi har allerede set at den harmoniske potensrække $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ var divergent i $x = 1$ og konvergent i $x = -1$.

Der er potensrækker der er divergente overalt på cirklen $|x| = r$. Betragt fx den geometriske række, som har konvergensradius $r = 1$, men hvor intet punkt med $|x| = 1$ giver konvergens, fordi jo x^n ikke går mod nul for $|x| = 1$.

Der er også potensrækker der er konvergente overalt på cirklen $|x| = r$, fx potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ knyttet til 2-rækken. Når $|x| = 1$ har vi jo $|x^n/n^2| = n^{-2}$ og dermed er følgen absolut konvergent.

Vi bemærker at de tre eksempler alle er af formen studeret i Eksempel 4.9. Ved at argumentere på præcis samme måde ser vi at der er divergens overalt for $p < 1$ og konvergens overalt for $p > 1$. Abel viste at der er konvergens på cirklen $|x| = 1$ for alle andre x end $x = 1$ i det harmoniske tilfælde $p = 1$.

Kontinuitet Ud fra vores generelle undersøgelser af uniform konvergens er det oplagt, at grænsefunktionen er kontinuert i B_r. Vi skal hurtigt skrive dette ned og bagefter undersøge, hvornår konvergensen kan udvides til randpunkterne.

Korollar 4.12 (Kontinuitet i det indre)**.** *Potensrækken $\sum_n a_n x^n$ med konvergensradius r har en sumfunktion i B_r, som er kontinuert. Specielt er den kontinuert for reelle x i det åbne interval $(-r, r)$.* $\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Bevis. Vi viser kontinuitet for hvert $x \in \mathrm{B}_r$. Da $|x| < r$ kan vi vælge et s, sådan at $|x| < s < r$. Da vi med Sætning 4.3(4) ved, at funktionsrækken er uniformt konvergent i $\overline{\mathrm{B}}_s$, og da alle leddene

$$\sigma_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

er kontinuerte, ser vi med Sætning 3.13, at summen også er kontinuert i $\overline{\mathrm{B}}_s$. Da $x \in \mathrm{B}_s$, er x et kontinuitetspunkt for sumfunktionen. Beviset er fuldført, da $x \in \mathrm{B}_r$ var vilkårligt valgt. □

Vi studerer nu hvad man kan sige om kontinuitet hvis potensrækken konvergerer i et endepunkt af konvergens-intervallet $(-r, r)$.

Lemma 4.13. *Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ betegne en potensrække, og betragt et fast $x \in \mathbb{C}$. For alle $m, n \in \mathbb{N}$ med $n \geq m$ gælder da*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k x^k = (a_m + \cdots + a_n)x^n + (1 - x) \sum_{k=m}^{n-1} (a_m + \cdots + a_k)x^k$$

Bevis. Det er ækvivalent at vise

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_k x^k &+ \sum_{k=m}^{n-1} (a_m + \cdots + a_k)x^{k+1} \\ &= (a_m + \cdots + a_n)x^n + \sum_{k=m}^{n-1} (a_m + \cdots + a_k)x^k.\end{aligned}$$

I denne ligning repræsenterer begge sider summen af alle $a_j x^l$ hvor $m \leq j \leq l \leq n$. På venstre side summeres leddene med $j = l$ separat og på højre side leddene med $l = n$. Da siderne repræsenterer den samme sum gælder ligheden. □

Proposition 4.14. *Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrække ($x \in \mathbb{R}$) med konvergensradius 1, som også er konvergent i $x = 1$. Da er sumfunktionen $f(x)$ kontinuert i endepunktet $x = 1$, dvs.* $\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1).$$

Således er sumfunktionen kontinuert i intervallet $(-1, 1]$.

Bevis. Vi vil vise at afsnitsfunktionsrækken $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergerer uniformt på $[0, 1]$, og gør det (jf. Sætning 3.12) ved at vise at følgen er Cauchy.

Givet $\epsilon > 0$. Da potensrækken er konvergent for $x = 1$ findes N så $|a_m + \cdots + a_n| < \epsilon$ for alle $n \geq m \geq N$. Så fås ved Lemma 4.13, for alle $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m}^{n} a_k x^k\right| &= \left|(a_m + \cdots + a_n)x^n + (1-x)\sum_{k=m}^{n-1}(a_m + \cdots + a_k)x^k\right| \\
&\leq |a_m + \cdots + a_n|\, x^n + (1-x)\sum_{k=m}^{n-1}|a_m + \cdots + a_k|\, x^k \\
&\leq \epsilon\left(x^n + (1-x)\sum_{k=m}^{n-1} x^k\right) \\
&\leq \epsilon\left(x^n + (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

hvor vi i sidste trin har brugt Lemma 2.3. Altså er rækken Cauchy på $[0, 1]$ og den har således ved Sætning 3.13 en kontinuert sumfunktion der, som ønsket. Vi ved allerede fra Korollar 4.12 at f er kontinuert i $(-1, 1)$. $\square$

Vi vil meget snart udvide resultatet til andre konvergensradier end $r = 1$, og til konvergens i det andet endepunkt. Det generelle resultat kaldes Abels sætning.

4.2 Ledvis manipulation af potensrækker

En af de centrale styrker ved potensrækketeorien er at det er nemt at manipulere med rækkerne ledvist uden at miste kontrol over deres sum og konvergensradius. Det giver stor frihed til at beregne deres summer. Vi starter blødt med:

$\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Sætning 4.15 (Ledvis manipulation, del I)**.** *Lad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *være en potensrække med konvergensradius* r *og sumfunktion* f *på* B_r*.*

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} c a_n x^n$*,* $c \neq 0$*, har konvergensradius* r *og sumfunktion* $cf(x)$ *på* B_r*,*

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} c^n a_n x^n$, *$c \neq 0$, har konvergensradius* $\frac{r}{|c|}$ *og sumfunktion* $f(cx)$ *på* $\mathrm{B}_{\frac{r}{|c|}}$,

(3) $\sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} x^n$, *$m \in \mathbb{N}$, har konvergensradius r og sumfunktion* $x^m f(x)$ *på* B_r,

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{mn}$, *$m \in \mathbb{N}$, har konvergensradius* $r^{1/m}$ *og sumfunktion* $f(x^m)$ *på* $\mathrm{B}_{r^{1/m}}$,

Bevis. (1) Da $c \neq 0$, er konvergensforholdene for $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} c a_n x^n$ de samme (jf. Sætning 2.9), så konvergensradius for de to rækker er ens. Summerne stemmer overens som anført, igen ved brug af en regneregel fra Sætning 2.9.

(2) Omskrivningen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (cx)^n$$

viser at den oprindelige række er konvergent i cx hvis og kun hvis den manipulerede række er det i x. Vi har specielt at den manipulerede række er konvergent for $t \in [0, r/|c|)$, fordi der så gælder $|ct| < r$, og den oprindelige række således er konvergent i ct. På samme måde ses at den manipulerede række er divergent for $t \in (r/|c|, \infty)$. Derfor korresponderer konvergensradierne som anført.

(3)

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} x^n = x^m \left(\sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} x^{n-m} \right) = x^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$$

så når $x \neq 0$ ser vi at de to potensrækker konvergerer samtidig, og beviset færdiggøres som i tilfældet (1).

(4) Det er klart at den at den oprindelige række er konvergent i x^m hvis og kun hvis den manipulerede række er det i x. Vi har specielt at den manipulerede række er konvergent for $t \in [0, r^{1/m})$, fordi der så gælder $t^m < r$, og den oprindelige række således er konvergent i t^m. På samme måde ses at den manipulerede række er divergent for $t \in (r^{1/m}, \infty)$. Derfor korresponderer konvergensradierne som anført.

$\square$

Vi bemærker straks at vi nu uden videre kan udvide konklusionen fra Proposition 4.14:

$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$

Sætning 4.16 (Abel). *Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrække ($x \in \mathbb{R}$) med konvergensradius $0 < r < \infty$, som også er konvergent i et endepunkt af intervallet $(-r, r)$. Da er sumfunktionen $f(x)$ kontinuert i endepunktet x_0, dvs.*

$$\lim_{x \to r^-} f(x) = f(r)$$

når $x_0 = r$, og

$$\lim_{x \to -r^+} f(x) = f(-r)$$

når $x_0 = -r$.

Bevis. Potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n x^n$$

har konvergensradius 1 og sum $g(x) = f(rx)$ ifølge Sætning 4.15(2). Hvis den oprindelige række konvergerer i r så vil den manipulerede række konvergere i 1, og vi kan benytte Proposition 4.14 til at indse

$$\lim_{x \to r^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = g(1) = f(r).$$

Potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-r)^n x^n$$

har konvergensradius 1 og sum $h(x) = f(-rx)$ ifølge Sætning 4.15(2). Hvis den oprindelige række konvergerer i $-r$ så vil den manipulerede række konvergere i 1, og vi kan benytte Proposition 4.14 til at indse

$$\lim_{x \to -r^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} h(x) = h(1) = f(-r).$$

□

Eksempel 4.17. Sætning 4.15 giver os en masse muligheder for at gå på jagt efter en potensrække der har en ønsket sum ved at tage udgangspunkt i summer vi allerede kender. Starter vi med den geometriske række

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \tag{4.1}$$

kan vi bruge (2) med $c = -1$ til at opnå

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \tag{4.2}$$

eller (4) med $m = 2$ til at opnå

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots \tag{4.3}$$

Konvergensradierne er alle 1, så lighederne gælder for $|x| < 1$.

Sætning 4.18 (Ledvis manipulation, del II)**.** *Lad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *og* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *være potensrækker med konvergensradius* r *hhv.* s *og sumfunktion* f *hhv.* g *på* B_r *hhv.* B_s*.* $\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ *har konvergensradius mindst* $\min\{r, s\}$ *og sumfunktion* $f(x) + g(x)$ *på* $\mathrm{B}_{\min\{r,s\}}$*,*

(6) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *med* c_n *givet som*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0,$$

har konvergensradius mindst $\min\{r, s\}$ *og sumfunktion* $f(x)g(x)$ *på* $\mathrm{B}_{\min\{r,s\}}$*,*

Bevis. Sæt $t = \min\{r, s\}$.

(5) Vi ved at rækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ konvergerer for alle $|x| < t$. Sætning 2.9 giver så at $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ også konvergerer for alle $|x| < t$. Dermed er konvergensradius mindst t, og summen er som anført.

(6) Vi ved fra Sætning 4.3(3) at rækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ konvergerer absolut for $|x| < t$. Derfor kan vi benytte Cauchy-multiplikation (Korollar 2.47) og får at produktet konvergerer mod rækken med led

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k x^k)(b_{n-k} x^{n-k}) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n = c_n x^n$$

Dette er netop den angivne potensrække, og da den konvergerer for alle $|x| < t$ er konvergensradien mindst t.

$\square$

Eksempel 4.19. Vi kan summere (4.1) og (4.2) med Sætning 4.18(5) og få

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = 2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + \cdots + 2x^{2n} + \cdots$$

fordi leddene for ulige n går ud med hinanden. Vi har jo

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

så vi kan videre bruge Sætning 4.15(1) med $c = \frac{1}{2}$ til at se at

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots$$

jf. (4.3).

Multiplikationsmetoden i Sætning 4.18(5) er lidt mere vanskelig at benytte. For at finde en potensrække der summerer til

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x}$$

skal vi bruge formlen for c_n med koefficienterne $a_n = b_n = 1$ overalt. Det giver selvfølgelig

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$$

så vi ender på

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

Vi ved fra sætningen at konvergensradien her er mindst 1, og det er jo klart at rækken divergerer i $x = 1$, så den er altså nødt til at være præcis 1.

Gør vi det samme for

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}\frac{1}{1-x}$$

er $a_n = (-1)^n$ og $b_n = 1$, så vi får

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & n \text{ ulige} \\ 1 & n \text{ lige} \end{cases}.$$

hvilket giver

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots$$

fordi alle led x^n med n ulige forsvinder. Igen må konvergensradius være 1.

Det var tredje gang vi fandt en potensrækkefremstilling af $1/(1-x^2)$, og vi skal snart vise et entydighedresultat der forklarer hvorfor vi får den samme potensrække uanset hvilken af disse meget forskellige veje vi går. Det er meget ofte tilfældet at der som her er en stor grad af metodefrihed når man forsøger at sammensætte kendte potensrækker til at bestemme en ukendt.

Eksempel 4.20. Vi ser som i Eksempel 4.6 på potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

givet med Fibonaccitallene, og husker på at vi ved at konvergensradius r er mindst 1/2. Vi sætter

$$s(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + f_4 x^4 + \cdots + f_n x^n + \cdots$$

for alle x med $|x| < r$. Vi får nu fra Sætning 4.15(1) og (3) at

$$-xs(x) = -f_0 x - f_1 x^2 - f_2 x^3 - f_3 x^4 - \cdots - f_{n-1} x^n - \cdots$$

og

$$-x^2 s(x) = -f_0 x^2 - f_1 x^3 - f_2 x^4 - f_3 x^5 - \cdots - f_{n-2} x^n - \cdots$$

Alle disse tre potensrækker har konvergensradius r, så vi ser med Sætning 4.18(5) at deres sum $(1-x-x^2)s(x)$ er givet ved potensrækken

$$f_0 + (f_1 - f_0)x + (f_2 - f_1 - f_0)x^2 + \cdots + (f_n - f_{n-1} - f_{n-2})x^n + \cdots .$$

Men koefficienterne til x^n med $n \geq 2$ er jo dermed alle nul ved den definerende egenskab af Fibonaccitallene, så vi ender med

$$(1-x-x^2)s(x) = x$$

for alle x med $|x| < r$. Dermed har vi bestemt sumfunktionen:

$$s(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

i hvert fald for $|x| < \frac{1}{2}$ hvor vi ved at s er defineret, og hvor vi samtidig ser at andengradspolynomiet ikke har nogen rødder således at der ikke er risiko for division med nul.

Nu tager vi hul på differentitation og integration af potensrækker. Som sædvanlig kræver vi så at x skal være reel.

$\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Lemma 4.21. *Hvis* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *er en potensrække med konvergensradius* r, *så har potensrækken*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

også konvergensradius r.

Bevis. Lad os kalde konvergensradien for den manipulerede række s. Det følger direkte fra Observation 4.5(5) at $s \leq r$ fordi $|a_n| \leq n|a_n|$ for alle $n \geq 1$. Målet er at vise $r = s$, og det vil vi gøre ved at se på de to rækker på $\mathbb{R}_+$. Til dette bemærker vi at hvis $0 < x < y$, så gælder

$$\{a_n y^n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ er begrænset } \implies \{n a_n x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ er begrænset} \tag{4.4}$$

Hvis $|a_n y^n| \leq K$, så vil

$$|n a_n x^n| = n|x/y|^n |a_n y^n| \leq n|x/y|^n K.$$

For at vise (4.4) skal vi derfor blot begrænse $\{n|x/y|^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Og fra Eksempel 4.9 ved vi at $\sum_{n=0}^{\infty} n(x/y)^n$ er konvergent, således at $\{n\,|x/y|^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ også må være begrænset (følgen går endda mod nul).

Antager vi nu for modstrid $s < r$ kan vi vælge x, y med $s < x < y < r$. Så er y i konvergensområdet for den oprindelige række, og det medfører at $\{a_n y^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er begrænset. Ved (4.4) er så også $\{n a_n x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ begrænset, og dermed kan x ikke ligge udenfor B_s. Dermed opnås den ønskede modstrid. □

$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$

Sætning 4.22 (Ledvis manipulation, del III)**.** *Lad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *være en potensrække med konvergensradius* r *og sumfunktion* f *på* $(-r, r)$. *Da er* f *differentiabel i* $(-r, r)$, *og der gælder*

(7) $\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$ *har konvergensradius* r *og sumfunktion* $f'(x)$ *på* $(-r, r)$.

(8) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m-1}}{m} x^m$ *har konvergensradius* r *og sumfunktion* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ *på* $(-r, r)$.

Observation 4.23. Det er en essentiel del af sætningen at bemærke at sumfunktionen for den oprindelige række er differentiabel i $(-r, r)$, der jo er et åbent interval omkring 0 så snart $r > 0$. Indholdet af sætningen huskes lettest ved

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

og

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

idet vi så blot finder udtrykkene ved at differentiere og integrere hvert af leddene $a_n x^n$ for sig, præcis som vi plejer. Sætningen siger også at konvergensradius for de ledvist afledede og integerede udtryk er den samme som den oprindelige rækkes.

At det er det samme der er udtrykt herover ses ved substitution $n = m+1$ i (7) og $n = m - 1$ i (8).

Bevis. Bemærk, at afsnitsfølgerne

$$\sigma_N(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

er differentiable funktioner med

$$\sigma_N'(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n n x^{n-1}.$$

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ har samme konvergensradius som $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ ved Sætning 4.15(3), og fra Lemma 4.21 er denne radius netop r. Det viser at σ_N' konvergerer uniformt på $[-t, t]$ for alle $t < r$, og da vi også ved at σ_N er konvergent i alle punkter i $[-t, t]$ kan vi bruge Korollar 3.20 til at konkludere at f er differentiabel og at σ_N' konvergerer mod f' på $(-r, r)$, som ønsket. Det viser differentiabiliteten af f samt manipulationsreglen (7).

For at vise (8) ser vi på rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

og anvender (7) til at se at den har konvergensradius r fordi den ledvist afledede række netop er vores udgangspunkt. Dermed har den en differentiabel sumfunktion $F(x)$ i $(-r, r)$ hvis afledede er $f(x)$. Da $F(0) = 0$ giver det den ønskede konklusion ved Korollar 1.7. $\square$

Eksempel 4.24. Vi kan ledvis differentiere den geometriske række

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

og få

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

for $|x| < 1$. Det fandt vi også i Eksempel 4.19 med andre metoder.

Hvis vi i stedet ledvist integrerer får vi noget helt nyt! Det giver jo

$$-\log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots .$$

som vi oftest benytter i formen

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \tag{4.5}$$

ved at inddrage Sætning 4.15(2).

I punktet $x = -\frac{1}{2}$ giver (4.5) uden videre

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n} = \log(1 - \tfrac{1}{2})$$

som vi kan skrive pænere som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = -\log(\tfrac{1}{2}) = \log 2$$

Det var den sum, vi betragtede i Eksempel 2.48.

I punktet $x = 1$ er rækken lig med den alternerende harmoniske række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

som konvergerer mod en grænseværdi c ifølge Leibniztesten. Vi kan derfor bruge Abels sætning til at konkludere, at sumfunktionen opfylder

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1).$$

Bemærk, at den højre side er lig med c og at den venstre side kan regnes ud som

$$\lim_{x\to 1^-} \log(1+x) = \log 2,$$

da $\log(1 + x)$ er kontinuert i $x = 1$. Det var den sum, vi forsøgte med begrænset held at estimere i Eksempel 2.51, og vi har nu bevist vores tidligere numeriske observation at de to summer var ens. At det var meget mere effektivt at approkismere grænsen i det indre af konvergensområdet end på dets rand er et ofte forekommende fænomen.

Eksempel 4.25. Vi fandt i (4.2) at

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

og kan indsætte x^2 heri (formelt ved brug af Sætning 4.15(4)) og få

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots$$

Da vi ved at $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ og $\arctan(0) = 0$, ser vi at

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Konvergensradien er overalt 1, så udsagnet gælder for alle $x \in (-1, 1)$.

4.3 Analytiske funktioner

Vi er indtil videre stødt lidt sporadisk på funktioner som fx

$$\frac{1}{1-x}, \exp(x), \frac{1}{1+x^2}, \frac{x}{1-x-x^2}, \log(1+x), \arctan(x)$$

der har vist sig at være sumfunktioner for en potensrække i et større eller mindre område omkring 0. Nu vender vi perspektivet og undersøger systematisk om en konkret funktion kan opskrives på den måde. I de mange tilfælde hvor en sådan potensrækkefremstilling er mulig finder vi således en effektiv måde at studere og beregne den. Lad os indføre en praktisk sprogbrug:

Definition 4.26. Lad I være et åbent interval der indeholder 0. Vi siger $\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$

at $f : I \to \mathbb{C}$ er *analytisk i 0* hvis der findes $r > 0$ og en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ således at

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

for alle $x \in (-r, r)$.

Det er selvfølgelig underforstået at $(-r, r) \subset I$ og at r ikke er større end konvergensradien for $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Bemærk at vi ikke kræver at sumfunktionen og f skal være ens overalt hvor de begge er definerede; kun at de er ens på et interval omkring 0.

Eksempel 4.27. Alle polynomier

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N$$

er analytiske i 0, idet vi har

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

når vi fortsætter med $a_n = 0$ for $n > N$. Rækken har konvergensradius ∞.

Vi ser med resultaterne fra sidste afsnit at en funktion der er analytisk i 0 er nødt til at være relativt pæn:

$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$

Sætning 4.28. *Givet en potensrække*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

med konvergensradius $r > 0$ og sumfunktion $f(x)$. Da er f vilkårligt ofte differentiabel i $(-r, r)$, og der gælder

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Bevis. Bemærk, at

$$f(0) = a_0.$$

Ved hjælp af Sætning 4.22(7) finder vi, at f' er sumfunktionen til

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1},$$

med samme konvergensradius. Ved evaluering i $x = 0$ finder vi,

$$f'(0) = 1 \cdot a_1.$$

Bruger vi nu Sætning 4.22(7) på $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$, ser vi at f'' er sumfunktion for

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2},$$

og at konvergensradien igen er r. Ved evaluering i $x = 0$ får vi

$$f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2.$$

Vi kan nu fortsætte med at aflede og evaluere og finder (formelt ved hjælp af induktion)

$$f^{(n)}(0) = n!a_n.$$

□

Sætning 4.28 viser, at hvis f er analytisk i 0, så er den vilkårligt ofte differentiabel i et interval $(-r, r)$ omkring 0, og at der kun er én måde at potensrækkefremstille den på. I erkendelse af at denne måde er en umiddelbar generalisering af de velkendte Taylor-polynomier, definerer vi:

Definition 4.29. Lad $f : I \to \mathbb{C}$ være defineret på et åbent interval $0 \in I \subset \mathbb{R}$, og antag at f er vilkårligt ofte differentiabel i $(-r, r)$ for et $r > 0$. Vi siger, at potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

er *Taylorrækken* for f (i punktet 0).

Vi har således opnået et sprog til at omformulere spørgsmålet om hvorvidt en vilkårligt ofte funktion f er analytisk i 0 til spørgsmålene om

- hvorvidt der gælder at Taylorrækken for f har positiv konvergensradius $s > 0$, og
- hvorvidt Taylorrækkens sumfunktion stemmer overens med f på $(-r, r)$ med $0 < r \leq s$.

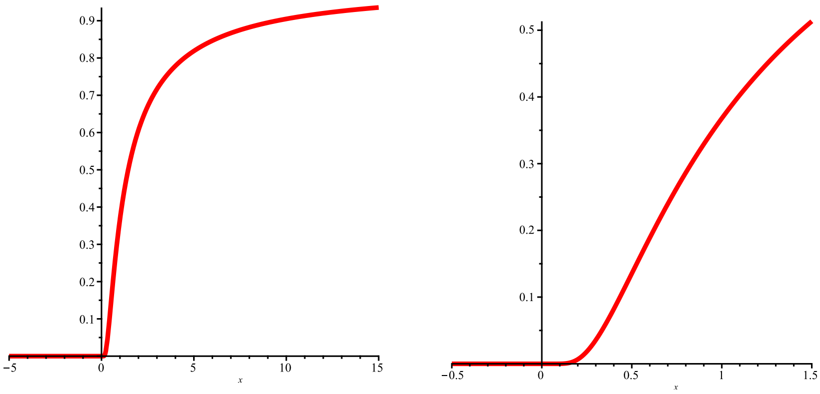
At det ikke altid er tilfældet, viser følgende eksempel.

Eksempel 4.30. Vi ser på

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$



For $x > 0$ ser vi let at de første afledede er givet som

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ f''(x) &= \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right) e^{-\frac{1}{x}} \\ f'''(x) &= \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

og vi påstår at der for alle n gælder at

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\tfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

hvor $p_n(y)$ er et passende valgt polynomium. Dette ses ved induktion, da

$$\begin{aligned} \left(p_n\left(\tfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \right)' &= -\tfrac{1}{x^2} p_n'(\tfrac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} + p_n(\tfrac{1}{x})(\tfrac{1}{x^2}) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \tfrac{1}{x^2} \left(p_n(\tfrac{1}{x}) - p_n'(\tfrac{1}{x}) \right) e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Vi har fx $p_1(y) = y^2$, $p_2(y) = y^4 - 2y^3$, $p_3(y) = y^6 - 6y^5 + 6y^4$, og de følgende polynomier kan bestemmes ved den rekursive formel

$$p_{n+1}(y) = y^2(p_n(y) - p_n'(y))$$

men det er underordnet for den videre analyse af f.

Sætter vi $q_n(y) = yp_n(y)$ ser vi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{f^{(n)}(x)}{x} &= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}p_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{q_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{q_n(y)}{e^y} \\
&= 0
\end{aligned}$$

hvor den sidste grænseværdi er bestemt ved at e^y går hurtigere mod uendelig end et hvilket som helst polynomium, jf. [EHM, Eksempel 2.40]. Dermed har vi vist at alle $f^{(n)}$ er differentiable fra højre i 0, med differentialkvotient 0. Det samme gælder selvfølgelig også fra venstre, så vi har fundet at f også er vilkårligt ofte differentiabel i hele $\mathbb{R}$, med

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Taylorrækken for f i punktet nul har dermed sumfunktionen der er konstant nul, og den stemmer ikke overens med f i noget interval $(-r, r)$ fordi funktionen er skarpt positiv for $x > 0$.

Der er ingen problemer med funktionen herover i forhold til konvergensradius – Taylorrækken konvergerer i hele $\mathbb{R}$ af oplagte årsager. Men den summerer til noget andet end f, som derfor ikke kan være analytisk i 0.

Taylors formel Det er oplagt at forsøge at vise at en konkret funktion er analytisk i 0 ved hjælp af Taylors sætning med restled ([EHM, Sætning 4.27]). Den giver jo at der mellem x og 0 findes et ξ med egenskaben

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n$$

som er det samme som

$$f(x) = \sigma_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n$$

hvor σ_n er afsnitsfølgen for Taylorrækken.

Hvis vi først antager at $x > 0$ kan vi ved at indføre den uniforme norm se

$$|f(x) - \sigma_{n-1}(x)| \leq \frac{||f^{(n)}||_{(0,x)}}{n!}|x|^n \tag{4.6}$$

Her ved vi at $x^n/n!$ går mod nul når n går mod uendelig (følgen har endda endelig sum), så kan vi finde en måde at vise at $||f^{(n)}||_{(0,x)}$ er begrænset – eller ikke vokser alt for hurtigt – så kan vi bruge (4.6) til at vise at Taylorrækken konvergerer mod f i x. Vi kan argumentere på samme måde for $x < 0$, men får her

$$|f(x) - \sigma_{n-1}(x)| \leq \frac{||f^{(n)}||_{(x,0)}}{n!}|x|^n \tag{4.7}$$

Det skal bemærkes at Taylors formel med restled og dermed (4.6),(4.7) afhænger af middelværdisætningen og således ikke gælder for f der antager komplekse værdier. Men så kan man arbejde separat på Ref og Imf og komme i mål på den måde. Følgende lemma samler alle disse overvejelser:

$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$

Lemma 4.31. *Lad $r > 0$ og antag at $f : (-r, r) \to \mathbb{C}$ er vilkårligt ofte differentiabel. Hvis der om $x \in (-r, r)$ gælder at følgen*

$$\left\{ \frac{||f^{(n)}||_{(-|x|,|x|)}}{n!}|x|^n \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergerer mod nul, så er Taylorrækken for f konvergent i x med sum $f(x)$.

Bevis. Udsagnet gælder for f der kun antager reelle værdier ved at bemærke at

$$||f^{(n)}||_{(0,x)} \leq ||f^{(n)}||_{(-|x|,|x|)}$$

og bruge (4.6) for $x > 0$ og bemærke at

$$||f^{(n)}||_{(x,0)} \leq ||f^{(n)}||_{(-|x|,|x|)}$$

og bruge (4.7) for $x < 0$.

I det komplekse tilfælde deler vi op i real- og imaginærdele. Vi har at $\text{Re}(f)^{(n)} = \text{Re}(f^{(n)})$ og at $||\text{Re}(f^{(n)})||_{(-|x|,|x|)} \leq ||f^{(n)}||_{(-|x|,|x|)}$, så denne funktions Taylorrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Re}(f)^{(n)}(0)}{n!}$$

konvergerer mod Ref i x. Det samme gælder Imf, og dermed også $f = \text{Re}f + i\text{Im}f$. $\square$

Eksempel 4.32. Vi ved at cos er vilkårligt ofte differentiabel, og at dens afledede cykler periodisk gennem $\pm\cos$ og $\pm\sin$. Mere præcist har vi

$$\cos^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos(x) & n = 4m \\ -\sin(x) & n = 4m+1 \\ -\cos(x) & n = 4m+2 \\ \sin(x) & n = 4m+3 \end{cases}$$

hvilket så giver

$$\cos^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & n = 4m \\ 0 & n = 4m+1 \\ -1 & n = 4m+2 \\ 0 & n = 4m+3 \end{cases}$$

og dermed Taylorrækken

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

Da vi tydeligvis har

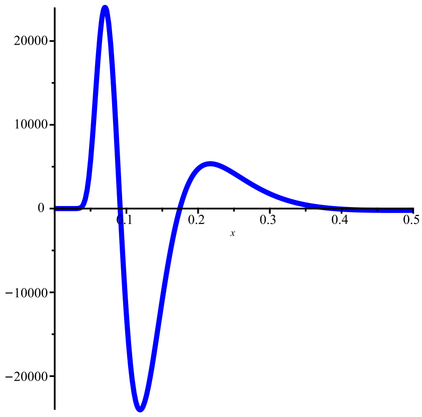
$$||\cos^{(n)}||_{\mathbb{R}} = 1$$

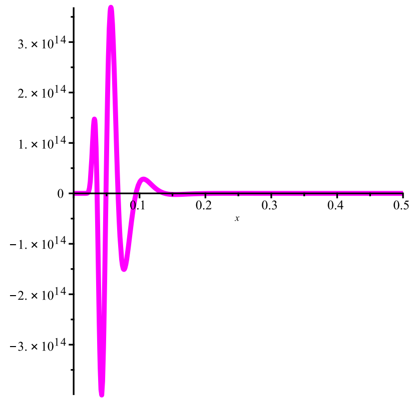
for alle n viser Lemma 4.31 at Taylorrækken konvergerer overalt med sum cos. Dermed er cos analytisk i 0.

Vi kan argumentere parallelt med sin, eller blot benytte ledvis differentiation, til at se at sin er analytisk i 0 og har potensrækkefremstillingen

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

Eksempel 4.33. Vi ved fra konklusionen i Eksempel 4.30 at Lemma 4.31 umuligt kan finde anvendelse for funktionen f derfra, idet konklusionen jo er falsk. Et plot af $f^{(5)}$ og $f^{(10)}$ giver en visuel forklaring: selv om funktionerne er helt flade tæt på nul, så er der meget store udsving ikke så langt derfra, og når n går mod uendelig vil udsvingene på $f^{(n)}$ ske tættere og tættere på nul.





Nu viser vi den generaliserede binomialsætning, som var en af de mange ting Newton fandt på da han var i pandemikarantæne. Vores udgangspunkt er binomialformlen

$$(x+y)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n y^{m-n} \tag{4.8}$$

hvor jo

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}.$$

Vi indsætter $y = 1$ og ser at

$$(1+x)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{m-1}x^{m-1} + \binom{m}{m}x^m$$

hvor vi bemærker at højresiden er en potensrække der konvergerer overalt, da koefficienterne er 0 fra trin $m+1$ og fremefter.

Newton indførte de *generaliserede binomialkoefficienter* givet ved

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} \tag{4.9}$$

for alle $\alpha \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}_0$.

Sætning 4.34. *For alle $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}_0$ er $f_\alpha : (-1,1) \to \mathbb{R}$ givet ved*

$$f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha,$$

analytisk i 0. Dens Taylorrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

har konvergensradius 1, og konvergerer mod f_α overalt i $(-1,1)$.

Bevis. Vi har

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

så

$$\frac{f_\alpha^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$$

og dermed er Taylorrækken for f_α givet som anført.

Vi ser at

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n\cdots 1} = (\alpha-n)\binom{\alpha}{n} \tag{4.10}$$

så ved at bruge kvotienttesten og

$$\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} = \frac{\alpha-n}{n+1} = \frac{\alpha/n-1}{1+1/n} \to -1, n \to \infty$$

får vi at konvergensradius er 1. Bemærk at $\binom{\alpha}{n} \neq 0$ netop fordi vi har antaget at $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Vi skriver $s_\alpha(x)$ for sumfunktionen i $(-1,1)$ og ønsker at vise $f_\alpha = s_\alpha$. Nu differentierer vi ledvist og får

$$s'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha-n)\binom{\alpha}{n}x^n$$

igen ved brug af (4.10). Vi har også

$$xs'_\alpha(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^n$$

Samlet set får vi

$$\begin{aligned}(1+x)s'_\alpha(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha-n)\binom{\alpha}{n}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^n \\ &= \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \\ &= \alpha s_\alpha(x),\end{aligned}$$

og dermed

$$\begin{aligned}\left(\frac{s_\alpha(x)}{f_\alpha(x)}\right)' &= \left((1+x)^{-\alpha}s_\alpha(x)\right)' \\ &= -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}s_\alpha(x)+(1+x)^\alpha s_\alpha'(x) \\ &= (1+x)^{-\alpha-1}\left(-\alpha s_\alpha(x)+(1+x)s_\alpha'(x)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

således at $s_\alpha(x) = cf_\alpha(x)$ for en konstant c. Ved at indsætte $x = 0$ ser vi at $c = 1$, og sætningen er vist. □

Bemærk at $\binom{\alpha}{n}$ er de almindelige binomialkoefficienter når $\alpha \in \mathbb{N}_0$ med $n \leq \alpha$, og at $\binom{\alpha}{n} = 0$ når $\alpha \in \mathbb{N}_0$ med $n > \alpha$. Newtons formel

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

gælder således for alle $\alpha \in \mathbb{R}$ og alle $x \in (-1, 1)$.

4.4 Entydighed og konsekvenser

Nu er vi klar til at formulere det lovede entydighedsresultat:

$\boxed{\mathbb{C} \to \mathbb{C}}$

Sætning 4.35. *Antag at to potensrækker $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ begge har konvergensradius mindst $r > 0$, og at*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

gælder for alle $x \in (-r, r)$; altså at sumfunktionerne stemmer overens på intervallet. Så er $a_n = b_n$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Bevis. Når f betegner den fælles sumfunktion fandt vi i Sætning 4.28 at

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n$$

□

Eksempel 4.36. Lad $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ være givet som

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

(konstanten ϕ kaldes “det gyldne snit”) og bemærk at der gælder

$$\phi\psi = -1 \qquad \phi + \psi = 1 \qquad \phi - \psi = \sqrt{5},$$

hvilket medfører

$$(x+\phi)(x+\psi) = x^2 + (\phi+\psi)x + \phi\psi = x^2 + x - 1.$$

og

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\phi x} - \frac{1}{1-\psi x} &= \frac{\psi}{x+\psi} - \frac{\phi}{x+\phi} \\
&= \frac{\psi(x+\phi) - \phi(x+\psi)}{(x+\psi)(x+\phi)} \\
&= \frac{(\psi-\phi)x}{x^2+x-1} \\
&= \frac{\sqrt{5}x}{1-x-x^2} \\
&= \sqrt{5}s(x)
\end{aligned}$$

hvor $s(x)$ er sumfunktionen for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ knyttet til Fibonaccitallene, jf. Eksempel 4.6 og 4.20. Vi får altså at sumfunktionen kan skrives alternativt som

$$s(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi x} - \frac{1}{1-\psi x}\right)$$

for x med $|x| < r$, med r konvergensradien for $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. Men højresiden er jo tæt knyttet til den geometriske række, idet vi har

$$\frac{1}{1-\phi x} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^n x^n$$

for x med $|x| < |\phi^{-1}| = |\psi| \simeq 0.61$ og

$$\frac{1}{1-\psi x} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n x^n$$

for x med $|x| < |\psi^{-1}| = |\phi| \simeq 1.61$. Vi ser herfra at

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n)x^n$$

for alle x med $|x| \leq \frac{1}{2}$, så Korollar 4.35 giver at koefficienterne er ens, altså at

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n)$$

Denne lukkede formel for Fibonaccitallene er kendt som *Binets formel.*

Bemærk at analysen her også giver den eksakte konvergensradius af $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. Den er $|\psi| = |\phi|^{-1}$ fordi

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi^n - \psi^n} = \frac{\phi - \psi(\psi/\phi)^n}{1 - (\psi/\phi)^n} \to \phi$$

når $n \to \infty$.

Man kan systematisk analysere alle potensrækker hvis sumfunktioner er givet som en kvotient af to polynomier på denne måde ved hjælp af teorien for partialbrøker, og man kan vise at konvergensradius altid er den reciprokke absolutværdi af den største rod i polynomiet i nævneren. Vi afstår fra at beskrive dette nærmere.

Den komplekse eksponentialfunktion Taylorrækkerne har hjulpet os til at lokalisere potensrækkefremstillinger for vigtige funktioner som $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ for reelle x, men kun for reelle x, fordi vi undervejs trak på differentiabilitetsresultater der kun er til vores rådighed der. Men vi ved jo at disse potensrækker konvergerer for alle komplekse tal med modulus strengt mindre end konvergensradien (som er ∞ for de tre funktioner), så nu kan vi uden videre udvide exp, sin, cos til funktioner defineret på hele $\mathbb{C}$ ved

$$\begin{aligned}
\exp(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
\cos(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\
\sin(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Nu får vi:

Sætning 4.37 (De Moivre)**.** *For alle $x \in \mathbb{C}$ gælder*

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$$

Bevis. Vi sammenligner koefficienterne i de to potensrækker på hver side af lighedstegnet. Til venstre har vi koefficienterne

$$\frac{i^n}{n!}$$

og til højre har vi

$$\frac{(-1)^{n/2}}{n!}$$

når n er lige, og

$$i\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}$$

når n er ulige. Og det er jo præcis det samme i alle tilfælde, jf. Eksempel 1.65. □

Da vi i Definition 1.10 satte $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ for reelle x gav vi blot et praktisk navn for de komplekse tal med modulus 1. Men nu har vi retfærdiggjort brugen af symbolet "e" og den underliggende reference til eksponentialfunktionen er ved at sammenligne funktionernes potensrækker.

Vi får også at den udvidede eksponentialfunktion opfylder den sædvanlige funktionalligning:

Sætning 4.38. *For alle $x, y \in \mathbb{C}$ gælder*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Bevis. Vi regner

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\end{aligned}$$

hvor vi i midterste trin brugte binomialformlen (4.8). Men vi ved også at $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}$ og $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}$ er absolut konvergente, så vi kan bruge Korollar 2.47 til at fortsætte

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\\ &= \exp(x)\exp(y)\end{aligned}$$

som ønsket. □

Korollar 4.39. *For alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *gælder*

$$\exp(a + ib) = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Bevis. Udsagnet er selvfølgelig sandt for $b = 0$, og vi har netop bevist det i Sætning 4.37 for $a = 0$. Det generelle udsagn følger af

$$\exp(a + ib) = \exp(a)\exp(ib) = e^a(\cos b + i \sin b)$$

ved brug af Sætning 4.38. □

Vi behøver nu ikke længere at skelne mellem e^x defineret som i Definition 1.11 og $\exp(x)$ defineret med potensrækker, og vil herfra bruge den notation der er mest læselig i sammenhængen. På falderebet noterer vi:

Korollar 4.40 (Eulers formler)**.** *For alle* $x \in \mathbb{C}$ *gælder*

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

og

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Bevis. Vi har allerede set at

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

for alle komplekse x, og det følger af potensrækkefremstillingerne at

$$\sin(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(-x)^{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = -\sin(x)$$

og

$$\cos(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(-x)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \cos(x)$$

også udenfor $\mathbb{R}$. Det viser

$$e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$$

og dermed

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$$

og

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin(x)$$

□

Kapitel 5

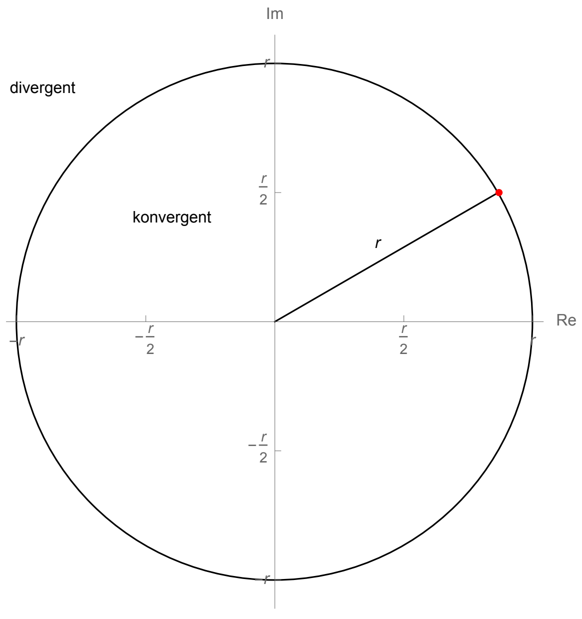
Fourierrækker

5.1 Introduktion

Udgangspunkt Hovedresultatet fra vores undersøgelse af potensrækker var, at enhver potensrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(tænk $x \in \mathbb{C}$) har en konvergensradius $r \in [0, \infty]$, sådan at rækken divergerer for alle x uden for radien ($|x| > r$), mens rækken konvergerer for alle x inden for radien ($|x| < r$).



Situationen er noget mere kompliceret for x, som ligger nøjagtig på konvergenscirklen ($|x| = r$), og vi har kun formået at se på nogle enkelte tal på cirklen. For bedre at kunne forstå denne situation, sætter vi $r = 1$. På sådan en cirkel kan alle punkter x skrives som $x = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ for et $\theta \in [-\pi, \pi)$ (eller faktisk $\theta \in \mathbb{R}$). Nu begrænser vi potensrækken til disse værdier ved at erstatte x med $e^{i\theta}$ og får derved funktionsrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Bemærk, at denne funktionsrække har $e_n(\theta) = e^{in\theta}$ i stedet for monomierne. Da alle $e^{in\theta}$ er periodiske med periode 2π, dvs.

$$e_n(\theta + 2\pi) = e^{in(\theta+2\pi)} = e^{in\theta} \cdot e^{in2\pi} = e^{in\theta} = e_n(\theta), \tag{5.1}$$

er deres sum (og dermed afsnitsfølgerne samt den potentielle sumfunktion), 2π-periodisk.

Emnet Fourierrækker beskæftiger sig med konvergens af sådanne rækker og mere generelle trigonometriske rækker, hvor vi også inddrager $e^{-in\theta}$, hvilket fører til udtryk af formen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Opbygning Vi begynder denne del af kurset med at definere trigonometriske rækker og udlede deres grundlæggende egenskaber (Afsnit 5.2). Bagefter fremlægger vi strukturen af vektorrummet af 2π-periodiske funktioner og definerer et indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ på rummet (Afsnit 5.3). Rummet er uendeligdimensionelt, men ud fra vores viden fra lineær algebra har vi et godt grundlag for at kunne forstå, at funktionerne e_n skal betragtes som en basis for rummet, og at vi skal forvente

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Mere eksplicit lærer vi den højre side at kende som *Fourierrækken*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{in\theta}$$

for f, hvor $c_k(f) := \langle f, e_k \rangle$ (Afsnit 5.4). Vi diskuterer den vigtige lighed, der findes mellem summen af kvadraterne af Fourierkoefficienterne og funktionens norm (Parsevals identitet). Til sidst analyserer vi punktvis konvergens mod dens forventede sumfunktion f (Afsnit 5.6) og uniform konvergens (Afsnit 5.7)

Opsummering I vores undersøgelser skal vi opdage, at Fourierrækkerne er for 2π-periodiske funktioner, hvad Taylorrækker er for analytiske funktioner, og at den Fourierteoretiske analogi til polynomier er trigonometriske polynomier og det samme for potensrækker og trigonometriske rækker:

analytisk	periodisk
polynomier	trigonometriske polynomier
potensrækker	trigonometriske rækker
Taylorrækker	Fourierrækker

Vi vælger at fremlægge teorien bag Fourierrækker ved hjælp af $e^{i\theta}$, da den derved opnår sin mest elegante form. I kraft af de Moivres formel $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ omskrives rækkerne ofte til cosinus- og sinusrækker, når vi skal illustrere eksempler. Fourierrækker, og mere generelt, Fourieranalyse er vigtigt både i abstrakt matematik (harmonisk analyse), anvendt matematik (signalbehandling) og fysik (kvanteteori).

5.2 Periodiske funktioner og trigonometriske rækker

I dette afsnit definerer vi periodiske funktioner, trigonometriske polynomier og trigonometriske rækker samt præsenterer vigtige eksempler og udleder grundlæggende egenskaber.

Periodiske funktioner Vi skifter fra θ til x, da det er mere standard.

Definition 5.1 (Periodisk funktion)**.** En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er 2π-*periodisk*, hvis $f(x + 2\pi) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Når vi taler om konkrete 2π-periodiske funktioner, så er det tilstrækkeligt, at definere dem på et interval $[a, a + 2\pi)$. Vi vælger ofte $a = -\pi$, dvs. intervallet $[-\pi, \pi)$.

Definition 5.2 (Lige og ulige)**.** En funktion kaldes *lige*, hvis $f(-x) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og *ulige*, hvis $f(-x) = -f(x)$.

Eksempel 5.3 (Cosinus, sinus og den komplekse eksponentialfunktion)**.** $\cos kx$ og $\sin kx$ er de mest velkendte 2π-periodiske funktioner, da

$$\cos k(x + 2\pi) = \cos(kx + k2\pi) = \cos kx$$

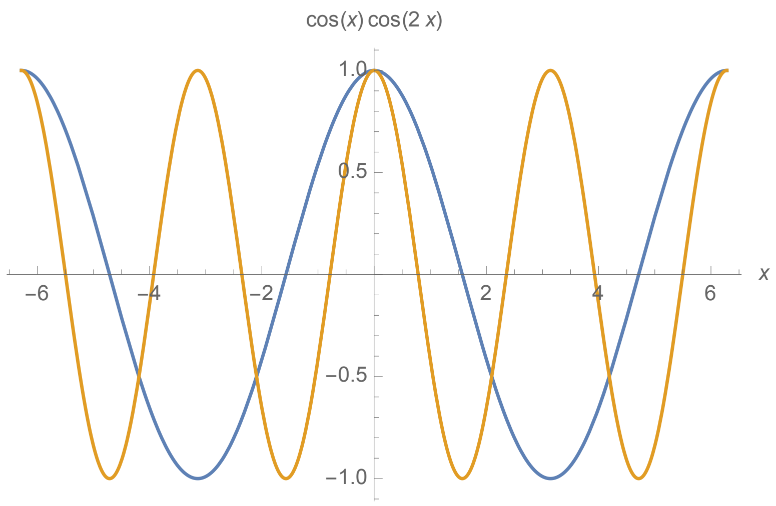
$$\sin k(x + 2\pi) = \sin(kx + k2\pi) = \sin kx.$$

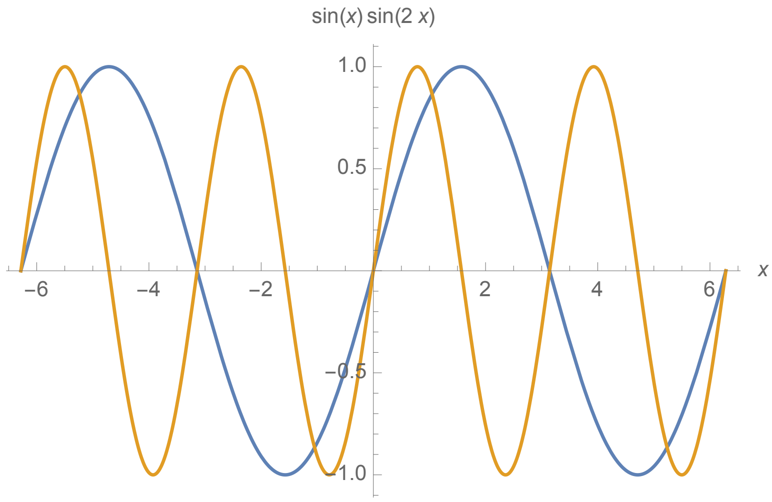
Faktisk er perioden $2\pi/k$ og cosinus er lige mens sinus er ulige:

$$\cos kx = \cos(-kx).$$

$$\sin kx = -\sin(-kx).$$

Graferne viser situationen for $k = 1, 2$ i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$, dvs. vi ser 2 perioder for tilfældet $k = 1$, og 4 perioder for $k = 2$:





Vi kan ydermere fortolke graferne som real- og imaginærdel af e^{ikx}, da ved de Moivre

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx.$$

2π-periodiciteten

$$e^{ik(x+2\pi)} = e^{ikx}$$

følger umiddelbart fra periodiciteten af cosinus og sinus, eller fra (5.1). Bemærk, at e^{ikx} hverken er lige eller ulige.

Undersøgelse af Fourierrækker er ofte integraltungt. Vi bemærker derfor den ofte brugte observation, at for $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{i}{k}e^{ikx}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-i}{2k\pi}((e^{i\pi})^k - (e^{-i\pi})^k) = 0$$

ved brug af Lemma 1.13 og observationen

$$e^{i\pi} = -1 = e^{-i\pi}$$

mens

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 1$$

Vi noterer dette effektivt som

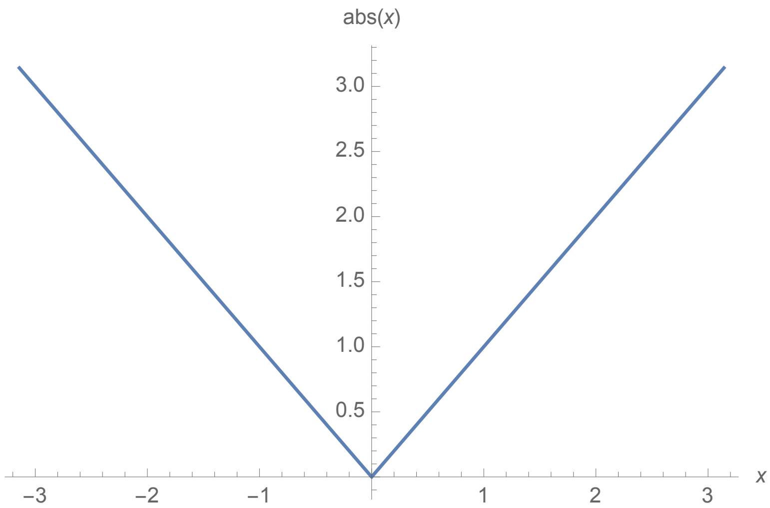
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}dx = \delta_{k,0}, \tag{5.2}$$

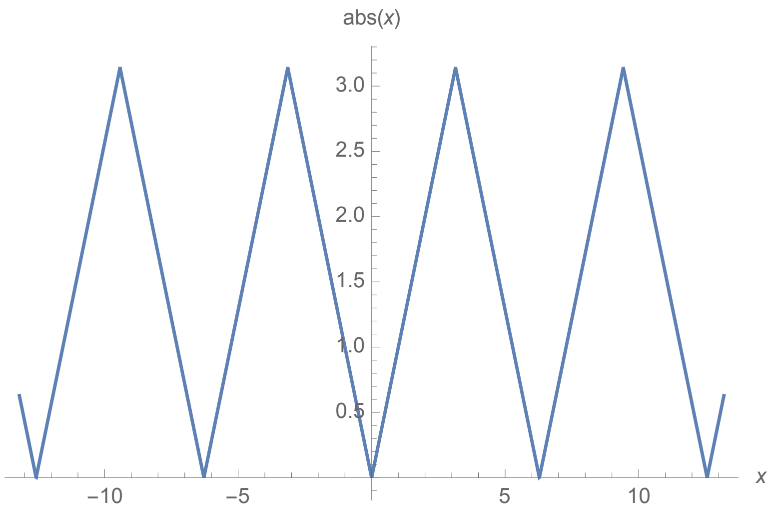
hvor Kroneckers delta $\delta_{m,n}$ er defineret sådan, at $\delta_{m,n} = 0$, hvis $m \neq n$, og $\delta_{m,n} = 1$ hvis $m = n$.

Eksempel 5.4 (Absolutværdifunktion)**.** Betragt funktionen givet ved

$$\mathrm{abs}(x) = |x|$$

i intervallet $[-\pi, \pi)$ og udvidet periodisk til hele $\mathbb{R}$, sådan at: $\mathrm{abs}(x + 2\pi) = \mathrm{abs}(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$. Graferne viser definitionsperioden og dens periodiske fortsættelse.





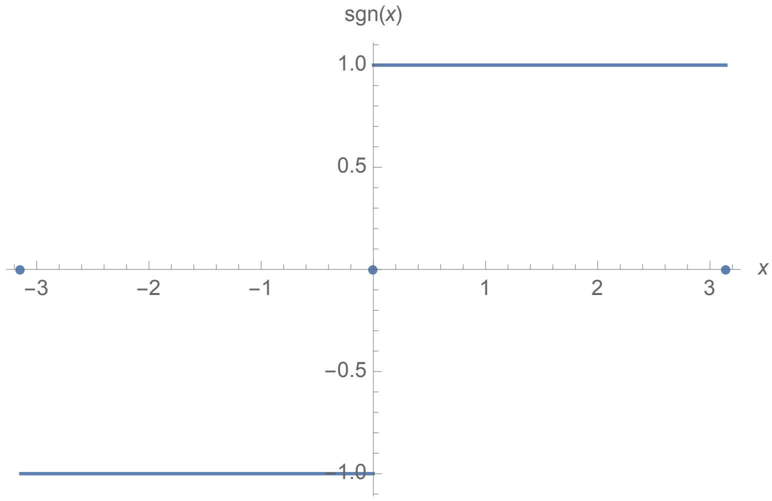
Eksempel 5.5 (Signumfunktion)**.** Vi ser også på fortegnsfunktionen med definitionsperioden

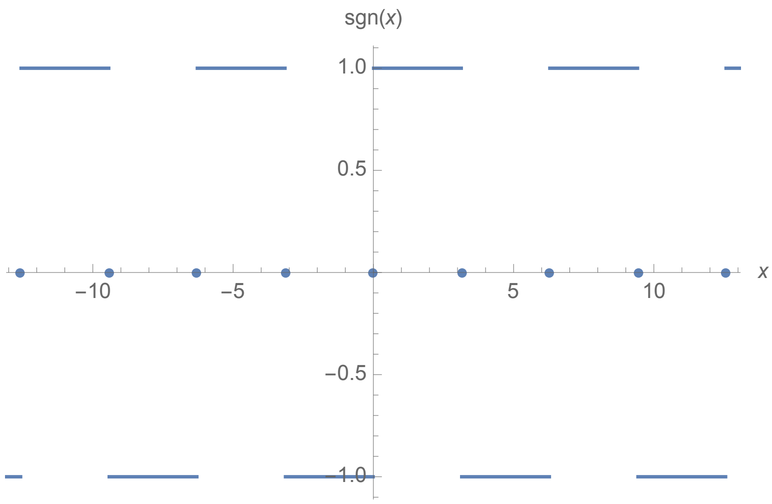
$$\mathrm{sign}(x) = -1 \qquad x \in (-\pi, 0)$$

$$\mathrm{sign}(x) = 1 \qquad x \in (0, \pi)$$

$$\operatorname{sign}(0) = \operatorname{sign}(-\pi) = 0$$

og periodisk fortsættelse. Graferne viser definitionsperioden og dens periodiske fortsættelse.





Bemærk, at sign er den afledte af abs i alle punkter, hvor abs er differentiabel. I de resterende punkter $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ er $\operatorname{sign}(x)$ sat til nul, hvilket er middelværdien af $f^+(n\pi) := \lim_{x \to n\pi^+} f(x)$ og $f^-(n\pi) := \lim_{x \to n\pi^-} f(x)$, hvor $f = \operatorname{sign}$.

sign og abs er et karakteristisk par af eksempler i Fourierrækkernes analyse. Mere generelt skal vi senere se på stykkevist kontinuerte funktioner og deres integraler.

Trigonometriske polynomier Analogt til polynomier, som er endelige linearkombinationer af monomier (dvs. potenser x^n), er trigonometriske polynomier endelige linearkombinationer af e^{ikx}.

Definition 5.6 (Trigonometrisk polynomium)**.** Lad $c_{-N}, \ldots, c_N$ være komplekse tal. Det tilhørende *trigonometriske polynomium* er givet ved

$$\tau_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}. \tag{5.3}$$

Vi siger, at τ_N har grad N hvis $c_N \neq 0$ eller $c_{-N} \neq 0$.

Lemma 5.7 (Cosinus-sinus form)**.** *Det trigonometriske polynomium*

$$\tau_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

er lig med

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \tag{5.4}$$

hvor $a_0, a_1, \ldots a_N$ *og* $b_1, \ldots, b_N$ *er komplekse tal givet ved*

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k}, \qquad k \in \{1, \ldots, N\} \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}), \qquad k \in \{1, \ldots, N\} \end{aligned}$$

Bevis. Vi bruger de Moivres formel (Definition 1.10, Sætning 4.37) til at omskrive τ_N til:

$$\tau_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(\cos kx + i \sin kx).$$

Den højre side er lig med

$$\begin{aligned} & c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k(\cos kx + i \sin kx) + \sum_{k=1}^{N} c_{-k}(\cos(-kx) + i \sin(-kx)) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k(\cos kx + i \sin kx) + \sum_{k=1}^{N} c_{-k}(\cos kx - i \sin kx), \end{aligned}$$

da cosinus er lige og sinus ulige. Udsagnet følger, da den sidste formel kan omskrives til

$$c_0 + \sum_{k=1}^{N} (c_k + c_{-k}) \cos kx + \sum_{k=1}^{N} i(c_k - c_{-k}) \sin kx.$$

□

Observation 5.8. Hvis vi kender a- og b-værdierne kan c-værdierne bestemmes som

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \qquad k \in \{1, \ldots, N\} \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \qquad k \in \{1, \ldots, N\} \end{aligned}$$

Vores konvention om at $a_0 = 2c_0$ er standard, og motiveret af de øvrige halve i udtrykkene.

Da trigonometriske polynomier er endelige linearkombinationer af 2π-periodiske funktioner, er de selvfølgelig også 2π-periodiske. Det følgende eksempel kommer vi til at se igen og igen, specielt i vores undersøgelse af punktvis konvergens.

Eksempel 5.9 (Dirichlets kerne)**.** Dirichles kerne af grad N er det trigonometriske polynomium givet ved

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}.$$

Da c_k er lig med 1 for alle k med $|k| \leq N$, finder vi ved hjælp af Lemma 5.7, for alle $k \in \{0, \ldots, N\}$: $a_k = 2$ og for alle $k \in \{1, \ldots, N\}$: $b_k = 0$, dvs.

$$D_N(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(kx).$$

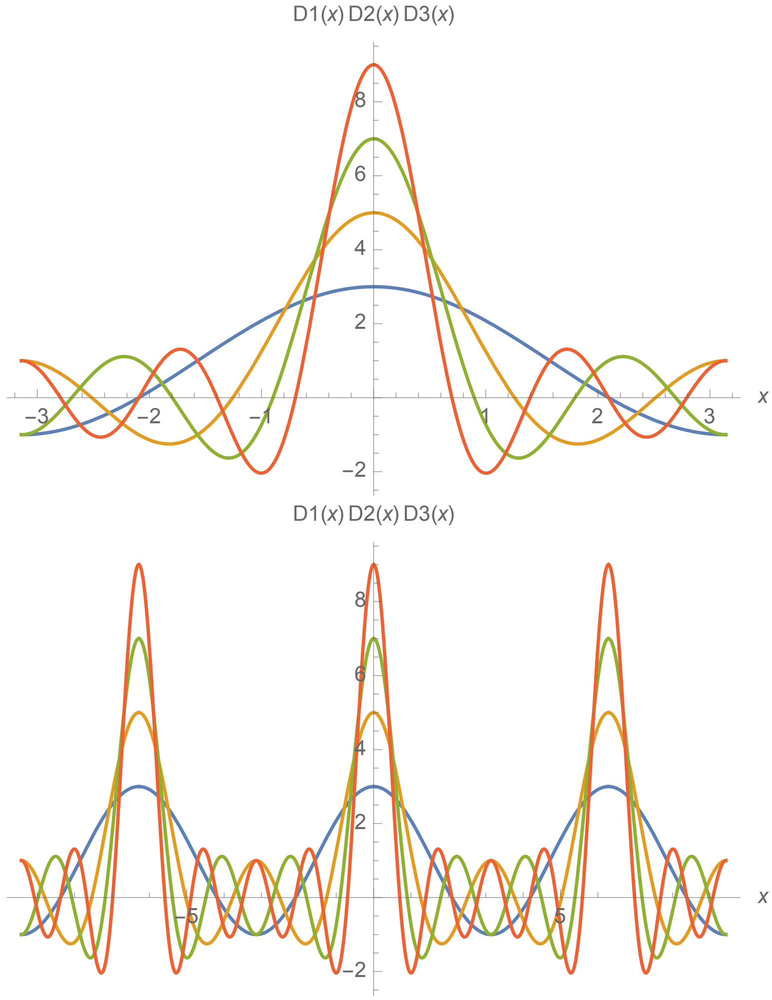
Vi bemærker følgende:

- Dirichlets kerner antager kun reelle værdier

- Dirichlets kerner er lige funktioner
- Ved (5.2) har Dirichlets kerner følgende integral:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1.$$

Her er D_N plottet for $N = 1$ (blå), 2 (orange), 3 (grøn), 4 (rød) i intervallet $[-\pi, \pi]$, og $[-3\pi, 3\pi]$ for at illustrere periodiciteten.



Da vi udelukkende ser på 2π-periodiske funktioner, vil vi ofte kun plotte funktioner i intervallet $[-\pi, \pi]$.

Graferne motiverer os til at bevise følgende udsagn, som vi får gavn af senere hen.

Lemma 5.10 (Dirichlets kerne)**.** *Dirichlets kerner opfylder følgende formel*

$$D_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})},$$

for alle $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Bevis. For at kunne se at ligheden er sand, beregner vi

$$(e^{ix}-1)D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{i(k+1)x} - \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = e^{i(N+1)x} - e^{-iNx},$$

da resten af leddene i de to summer går ud med hinanden. Ganger vi begge sider med $e^{-i\frac{x}{2}}$ finder vi

$$(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})D_N(x) = e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x},$$

hvilket er ækvivalent med udsagnet på grund af de Moivres formel. □

Trigonometriske rækker Vi udvider nu begrebet trigonometrisk polynomium til trigonometrisk række, helt i analogi med det skridt vi foretog, da vi udvidede begrebet polynomium til potensrække.

Definition 5.11 (Trigonometrisk række)**.** Lad $c_k \in \mathbb{C}$ for alle $k \in \mathbb{Z}$. Den tilhørende *trigonometriske række* er givet ved

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx}).$$

Det er kutyme at skrive

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

i stedet. Afsnitssummerne $\tau_N(x)$ af denne række er givet ved (5.3).

Følgende lemma er en direkte konsekvens af Lemma 5.7 anvendt på afsnitssummerne.

Lemma 5.12. *Den trigonometriske række*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

er lig med funktionsrækken

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

for $2c_0 = a_0, c_k + c_{-k} = a_k, i(c_k - c_{-k}) = b_k, k \in \mathbb{N}_0$.

Ved hjælp af Weierstrass' Majoranttest (Sætning 3.24) får vi et første konvergenskriterium for trigonometriske rækker.

Sætning 5.13 (Uniform konvergens af trigonometriske rækker)**.** *Hvis*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$$

er konvergent, så er $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ *uniformt konvergent med kontinuert sumfunktion.*

Udsagnet at $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$ er konvergent har vi defineret som at den symmetriske afsnitssum $\sum_{k=-N}^{N} |c_k|$ konvergerer. Men da alle leddene er positive, er det det samme som at $\sum_{k=1}^{\infty}(|c_k| + |c_{-k}|)$ er konvergent, eller at $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ og $\sum_{k=1}^{\infty} |c_{-k}|$ er konvergente hver for sig.

Bevis. Da $|e^{-ikx}| = 1$, gælder det at

$$|c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}| \leq |c_k e^{ikx}| + |c_{-k} e^{-ikx}| = |c_k| + |c_{-k}|,$$

hvor vi har brugt trekantsuligheden. Da $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$ er konvergent ifølge antagelsen, er den trigonometriske række uniformt konvergent ifølge Weierstrass' majoranttest (Sætning 3.24). Afsnitssummerne er trigonometriske polynomier og derfor kontinuerte. Da konvergensen er uniform, er sumfunktionen kontinuert ifølge Sætning 3.13. □

Eksempel 5.14 (Absolutværdifunktion)**.** Betragt den trigonometriske række

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

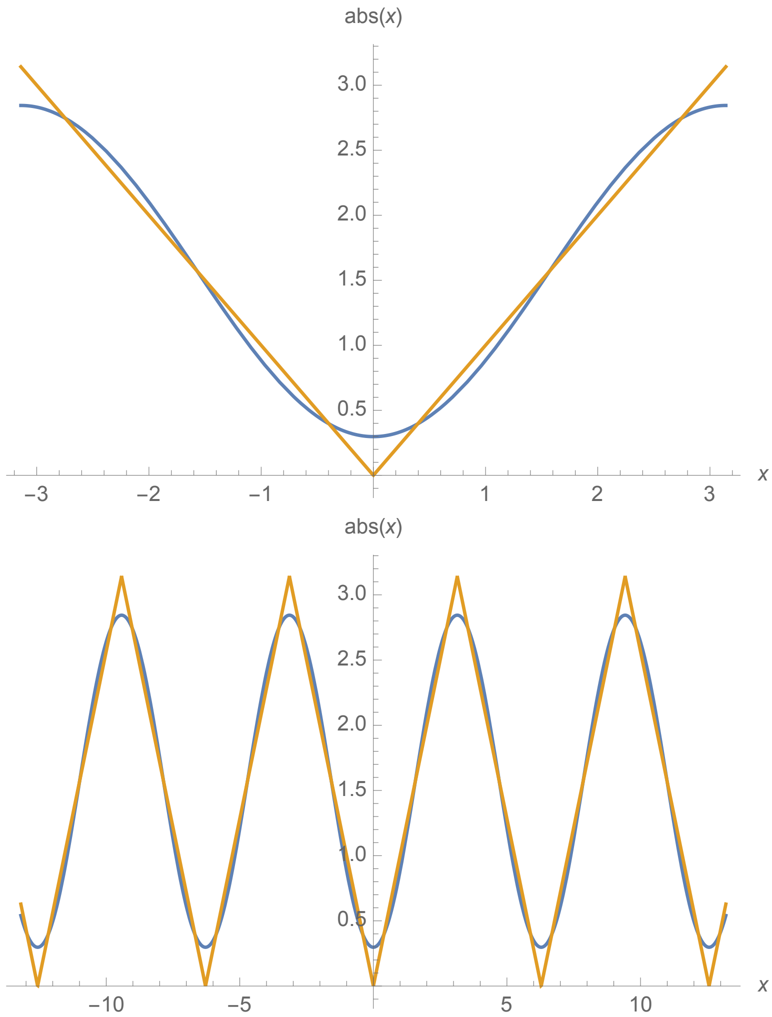
Ved Lemma 5.12 og Observation 5.8 er c-koefficienterne givet ved

$$c_{2k-1} = c_{-(2k-1)} = \frac{-2}{\pi(2k-1)^2},$$

og

$$c_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad c_{2k} = c_{-2k} = 0$$

for $k \in \mathbb{N}$. Talrækken $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$ er altså konvergent ved sammenligning med p-rækken for $p = 2$, og ifølge Sætning 5.13 er den trigonometriske række uniformt konvergent med kontinuert sumfunktion f. Men hvad er f? En tegning af de første afsnitssummer (grafen viser den første) indikerer, at f er lig med abs:



Men bemærk, at vi ikke har bevis for det endnu. Selv hvis det er rigtigt, fordrer det spørgsmålet om, hvordan man finder en sådan række for et givet f. Dette vil blive behandlet i det næste afsnit.

Eksempel 5.15 (Signumfunktionen)**.** Betragt den trigonometriske række

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

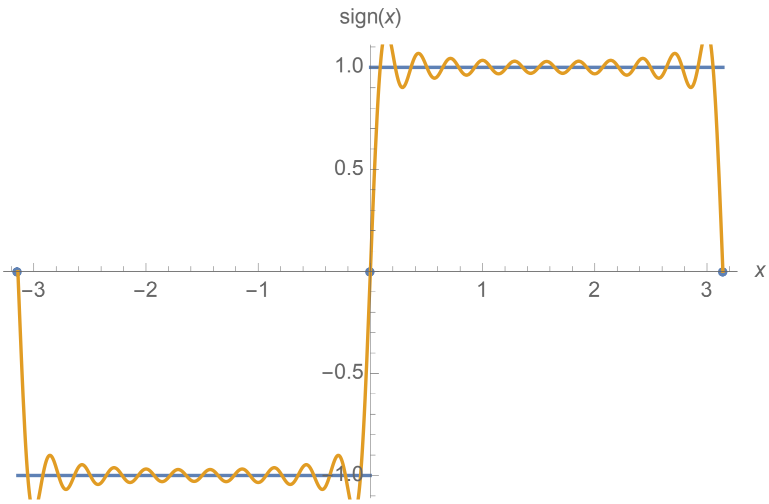
Ved Lemma 5.12 og Observation 5.8 er c-koefficienterne givet ved

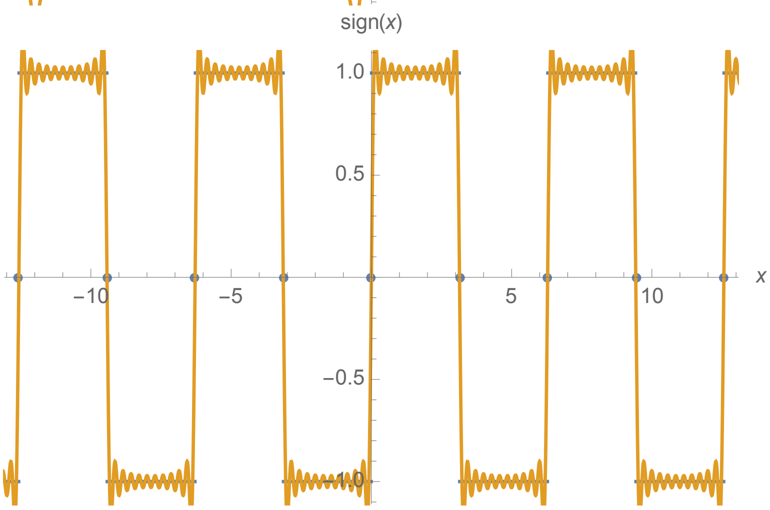
$$c_{2k+1} = -c_{-(2k+1)} = \frac{-2i}{\pi(2k+1)},$$

og

$$c_{2k} = 0$$

$k \in \mathbb{N}_0$. Grafen viser τ_{10} sammen med signum funktionen, som rækken ser ud til at konvergere imod:





Bemærk, at konvergensen ikke kan være uniform, da signumfunktionen ikke er kontinuert. Bemærk også, at kriteriet fra Sætning 5.13 ikke er opfyldt, da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$$

er divergent (det er jo essentielt den harmoniske række). Bemærk, at leddene i rækken er de afledte af leddene i den cosinusrække, som vi har set på. Dette harmonerer derfor godt med observationen af, at signumfunktionen — i næsten alle punkter — er den afledte af absolutværdifunktionen.

Eksempel 5.16 (Weierstrass funktion)**.** Den Weierstrass-funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n!^2 x)}{n!}$$

vi så på i Eksempel 3.25 er en trigonometrisk række med $b_1 = 2$ og $b_{(n!)^2} = \frac{1}{n!}$ for alle $n \geq 2$, og øvrige b_m-værdier lig nul.

Eksempel 5.17 (Geometriske række versus Dirichlets kerne)**.** Hvis vi betragter den geometriske række

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

på cirklen $z = e^{ix}$ finder vi den trigonometriske række

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{ikx}.$$

Bemærk, at realdelene af afsnitssummerne er lig med $\frac{1}{2}(D_N + 1)$. Den geometriske række har konvergensradius lig med 1 og har sumfunktion $\frac{1}{1-z}$, dvs. divergerer ved $z \to 1$. Den trigonometriske række divergerer for alle x (reel) på grund af divergenstesten.

5.3 Vektorrumstruktur

Vi vil nu betragte 2π-periodiske funktioner som vektorer i et vektorrum og bruge vores metoder fra lineær algebra og [HW] til at skrive vilkårlige funktioner som linearkombinationer af basisfunktioner (e^{ikx}).

Da vi har brug for nogle integrationsegenskaber af funktionerne vil vi gerne se på kontinuerte 2π-periodiske funktioner. Desværre er det en for fattig mængde af eksempler, da den udelukker f.eks. signumfunktionen. Mængden af 2π-periodiske Riemann-integrable funktioner er til gengæld en lidt for stor mængde, hvor teorien vil blive alt for indviklet. Fourieranalyse er smukkest formuleret ved hjælp af Lebesgue-integralet, men da det først er Analyse 2-materiale satser vi her på mængden $\mathrm{PC}_{2\pi}$ af 2π-periodiske funktioner f, som er såkaldt stykkevis kontinuerte. Vi foretrækker videre at funktionerne ved en diskontinuitet c tager middelværdien

$$f(c) = \frac{f_+(c) + f_-(c)}{2},$$

hvor $f_\pm(c) := \lim_{x \to c^\pm} f(x)$, og kalder delrummet af sådanne funktioner $\mathrm{PCN}_{2\pi}$.

Lidt mere præcist:

Definition 5.18. En 2π-periodisk funktion er *stykkevist kontinuert*, hvis der findes et $m \in \mathbb{N}$ og en inddeling

$$-\pi = d_0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_m = \pi \tag{5.5}$$

således, at for alle $i = 1, \ldots, m$:

$$f : (d_{i-1}, d_i) \to \mathbb{C},$$

er kontinuert og alle de ensidede grænseværdier

$$f_+(d_0), f_\pm(d_1), \ldots, f_\pm(d_{m-1}), f_-(d_m)$$

eksisterer.

Vi siger videre, at f er *normaliseret*, hvis for alle $i \in \{1, \ldots, m-1\}$:

$$f(d_i) = \frac{f_-(d_i) + f_+(d_i)}{2}.$$

og

$$f(d_0) = f(d_m) = \frac{f_-(d_m) + f_+(d_0)}{2}.$$

Mængden af 2π-periodiske funktioner, som er stykkevist kontinuerte på $[-\pi, \pi]$ betegnes med $\mathrm{PC}_{2\pi}$. Mængden af funktioner som er stykkevist kontinuerte og normaliserede på $[-\pi, \pi]$ betegnes med $\mathrm{PCN}_{2\pi}$.

Stykkevis kontinuerte funktioner er Riemann-integrable ved [EHM, Eksempel 5.19]. Bemærk, at $\mathrm{PCN}_{2\pi}$ inkluderer vores to eksempler abs og sign, som er karakteristiske for teorien.

Det er nemt at tjekke, at $\mathrm{PC}_{2\pi}$ og $\mathrm{PCN}_{2\pi}$ er komplekse vektorrum:

Lemma 5.19. $\mathrm{PC}_{2\pi}$ *og* $\mathrm{PCN}_{2\pi}$ *er komplekse vektorrum udstyret med de punktvise operationer*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

Bevis. Det er nemt at se, jf. [HW], at mængden af funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bliver et komplekst vektorrum udstyret med de angivne funktioner. Vi skal derfor blot eftervise at $\mathrm{PC}_{2\pi}$ og $\mathrm{PCN}_{2\pi}$ er underrum heraf; det vil sige at nulfunktionen er indeholdt begge steder, og at mængderne er lukket under addition og skalarmultiplikation. Det første og sidste udsagn er klart, og til det midterste bemærker vi at hvis f er kan udvides kontinuert på alle delintervallerne i en inddeling D, og hvis g er kan udvides kontinuert på alle delintervallerne i en inddeling D', så kan $f+g$ udvides kontinuert på alle delintervallerne i den fælles videreinddeling D'' af D og D'.

Vi skal sikre os at hvis normaliseringsbetingelsen er opfyldt for f i alle delepunkterne for D og for g i alle delepunkterne for D', så er den opfyldt for $f+g$ i alle delepunkterne for D''. Men normaliseringsbetingelsen er jo automatisk opfyldt i kontinuitetspunkter for f og g, idet grænseværdierne fra venstre og højre der er ens. □

Bemærk at en kontinuert funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ligger i $\mathrm{PCN}_{2\pi}$ netop når den er 2π-periodisk.

$\mathrm{PCN}_{2\pi}$ kan udstyres med et indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{PCN}_{2\pi} \times \mathrm{PCN}_{2\pi} \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx. \tag{5.6}$$

Definitionen opfylder betingelserne for et indre produkt, da for alle $f, g, h \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

- $\langle f, f \rangle \geq 0$ for alle f med lighed kun for $f = 0$
- $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$

- $\overline{\langle f, g\rangle} = \langle g, f\rangle$.

Alle disse egenskaber er uden videre opfyldt på $\mathrm{PCN}_{2\pi}$, bortset fra kravet om at $\langle f, f\rangle = 0$ kun forekommer for $f = 0$. Det beviser vi nu:

Lemma 5.20. *Hvis $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ med $\langle f, f\rangle = 0$, så er $f = 0$.*

Bevis. Vi opdeler $(-\pi, \pi)$ i kontinuitetsintervaller for f som i (5.5). Hvis $f(x_0) = c \neq 0$ med $x_0 \in (d_{i-1}, d_i)$ så er f kontinuert i x_0, og dermed findes et $\delta > 0$ sådan at $|f(x)| \geq |c|/2$ for alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (d_{i-1}, d_i)$. Det giver

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \geq \frac{1}{2\pi}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|^2 dx \geq \frac{1}{2\pi}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{|c|^2}{4} dx > 0$$

som er en modstrid. Altså er $f(x) = 0$ for alle $x \in (d_{i-1}, d_i)$, og ved normaliseringsbetingelsen gælder det samme i alle d_i. □

Det indre produkt definerer størrelsen

$$||f||_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}$$

på $\mathrm{PCN}_{2\pi}$ som vi i fuldkommen analogi med $|\cdot|$ for tal og $\|\cdot\|_A$ for funktioner skal bruge til at måle afstanden mellem to funktioner $f, g \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ som $||f - g||_2$. Normudtrykket $||\cdot||_2$ opfylder trekantsuligheden ved [HW, Sætning 6.1.5]

Lemma 5.21 (Ortonormalitet af e^{ikx})**.** *Funktionerne givet ved $e_k(x) := e^{ikx}$ udgør en ortonormal familie af funktioner i $\mathrm{PCN}_{2\pi}$, dvs. det gælder for alle $k, k' \in \mathbb{Z}$, at*

$$\langle e_k, e_{k'}\rangle = \delta_{k,k'}.$$

Bevis.

$$\begin{aligned}\langle e_k, e_{k'}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ik'x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-k')x} dx \\ &= \delta_{k-k',0} = \delta_{k,k'}\end{aligned}$$

ifølge (5.2). □

I $\mathbb{C}^d$ med indre produkt $\langle v, w\rangle_{\mathbb{C}^d} := \sum_{i=1}^d v_i\overline{w}_i$ udgør vektorerne $b_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (med 1 på plads i) for $i = 1, 2, \ldots, d$, en ortonormalbasis.

5.4 Fourierrækker

Hvis vi har et endelig-dimensionalt vektorrrum $\mathbb{C}^d$ med et indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^d}$ og en ortonormalbasis $\{b_i\}_{i=1}^d$, så kan vi skrive enhver vektor v som linearkombination af basisvektorerne,

$$v = \sum_{i=1}^{d} c_i b_i,$$

med koefficienter $c_i = \langle v, b_i\rangle_{\mathbb{C}^d}$ givet ved det indre produkt mellem v og b_i.

I vores tilfælde vil vi gerne skrive en 2π-periodisk funktion $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ som linearkombination af de ortonormale funktioner $e_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k, \tag{5.7}$$

men komplikationer optræder, fordi $\mathrm{PC}_{2\pi}$ er et uendeligt dimensionalt rum:

- Den højre side af (5.7) er en række, så f kan i bedste tilfælde være rækkens sumfunktion.
- En mulig konvergens forventes i afstandsfunktionen tilhørende til normen $||\cdot||_2$ og det er ikke oplagt, hvordan denne konvergenstype forholder sig til punktvis konvergens eller uniform konvergens.
- Funktionerne e_k er ortonormale, og dermed en basis for et underrum af $\mathrm{PCN}_{2\pi}$. Men det er er ikke klart, om dette underrum er hele $\mathrm{PCN}_{2\pi}$.

Uanset disse matematiske vanskeligheder starter vi med at navngive den højre side af (5.7):

Definition 5.22 (Fourierrække til f)**.** Lad $f \in \mathrm{PC}_{2\pi}$, så kaldes

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

for *Fourierkoefficienter* for f, og

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$$

for *Fourierrække* af f. Bemærk, at den Nte afsnitssum er givet ved det trigonometriske polynomium:

$$\tau_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{ikx}$$

Observation 5.23. Når f videre er normaliseret, dvs. når $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$, så kan vi skrive

$$c_k(f) = \langle f, e_k \rangle.$$

Det er ikke noget problem, men en besværlig distraktion, at normalisere et element $f \in \mathrm{PC}_{2\pi}$ til $\widetilde{f} \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ ved om nødvendigt at ændre funktionens værdier i de endeligt mange diskontinuitetspunkter. Så har vi

$$c_k(f) = c_k(\widetilde{f})$$

fordi et integral ikke afhænger af værdien i et endeligt antal punkter, jf. [EHM, Lemma 5.14], så arbejdet med Fourierkoefficienter er stort set det samme for f i $\mathrm{PC}_{2\pi}$ som for $\widetilde{f}$ i $\mathrm{PCN}_{2\pi}$, med den distinktion at vi kun har adgang til det indre produkt for funktioner i $\mathrm{PCN}_{2\pi}$.

Hovedspørgsmålet indenfor Fourieranalysen er, under hvilke betingelser, sumfunktionen af Fourierrækken til f er lig med selve funktionen f, og hvilken type konvergens (punktvis eller uniform) vi kan forvente. Med andre ord undersøger Fourieranalysen hvornår og hvor godt, de nævnte komplikationer kan overkommes.

Eksempel 5.24 (Trigonometrisk polynomium)**.** I det nemmeste tilfælde er f selv et trigonometrisk polynomium $\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$ for et endeligt $N \in \mathbb{N}_0$.

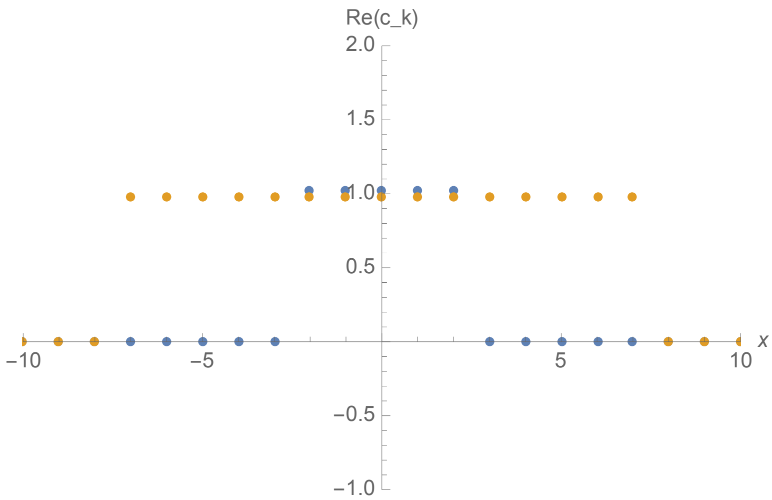
Fourierkoefficienterne er

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k'=-N}^{N} c_{k'}e^{ik'x}e^{-ikx}dx \\ &= \sum_{k'=-N}^{N} c_{k'}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik'x}e^{-ikx}dx \\ &= \sum_{k'=-N}^{N} c_{k'}\delta_{k,k'} \end{aligned}$$

For $|k| \leq N$ er det ovenstående lig c_k, mens det for $|k| > N$ er lig 0. Dermed er sumfunktionen til Fourierrækken

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$$

lig med f. Dette resultat er fuldstændig analogt med resultatet (Eksempel 4.27), at Taylor-udviklingen af et polynomium er lig med polynomiet selv. Som konkret eksempel, betragt Dirichlets kerne af grad N: $D_N(x)$, som er et trigonometrisk polynomium for hvert $N \in \mathbb{N}$. Grafen viser Fourierkoefficienterne for D_2 (blå) og D_7 (orange).



Situationen kan direkte generaliseres til uniformt konvergente trigonometriske rækker.

Proposition 5.25. *Lad* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ *være en uniformt konvergent trigonometrisk række med sumfunktion* f*. Da er* $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$*, og Fourierkoefficienterne for* f *er givet ved* $c_k(f) = c_k$*. Dermed er* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ *Fourierrækken for* f*.*

Bevis. Da afsnitssummen τ_N er kontinuert og 2π-periodisk og konvergerer uniformt mod f, er f kontinuert og 2π-periodisk. Da e_{-k} er kontinuert og begrænset, konvergerer $\tau_N e_{-k}$ uniformt mod $f e_{-k}$. Da integration og $\lim_{N\to\infty}$ bytter plads for uniformt konvergente funktioner (Sætning 3.16) finder vi, at

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau_N(x) e^{-ikx} dx \right)$$

eksisterer og er lig med

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lim_{N\to\infty} \tau_N(x) e^{-ikx} \right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = c_k(f).$$

Udsagnet følger, hvis vi bemærker at

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau_N(x) e^{-ikx} dx = c_k$$

for alle $N \geq k$ ifølge Eksempel 5.24. □

Husk, at cosinus og sinus var vores standardeksempler på lige og ulige funktioner. Følgende lemma siger, at Fourierrækken til en lige funktion kan skrives som ren cosinusrække og at Fourierrækken til en ulige funktion kan skrives som en ren sinusrække.

Lemma 5.26. *Hvis* $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ *er lige medfører det, at* $c_k(f) = c_{-k}(f)$ *dvs.* $b_k(f) = 0$*; Fourierrækken til* f *er i det tilfælde givet ved*

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx.$$

Er $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ *ulige medfører det,* $c_k(f) = -c_{-k}(f)$ *dvs.* $a_k(f) = 0$*; Fourierrækken er her givet ved*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) \sin kx.$$

Bevis. For lige f:

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)e^{-ikx}dx \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(x')e^{ikx'}(-1)dx' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x')e^{ikx'}dx' \\ &= c_{-k}(f), \end{aligned}$$

hvor (*) sker ved substitutionen $x' = -x$. På lignende vis bevises tilfældet, hvor f er ulige. □

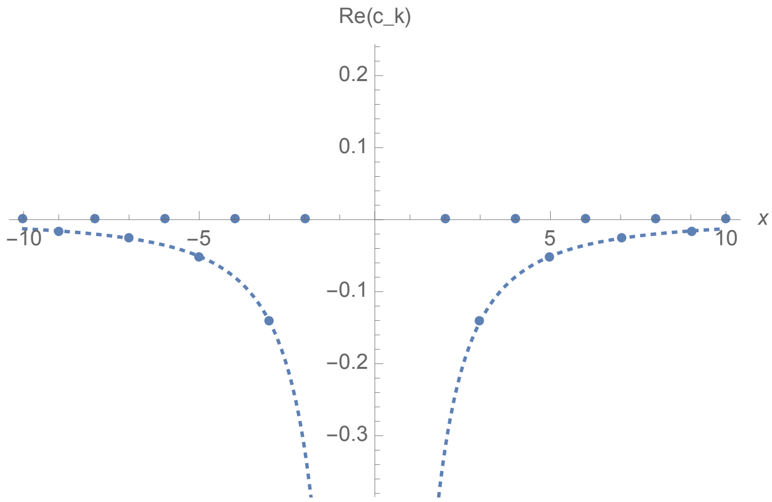
Eksempel 5.27 (Absolutværdifunktion)**.** Vi kan nu beregne Fourierrækken til abs: Vi ser at

$$c_0(\text{abs}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}xdx = \frac{\pi}{2}.$$

For alle andre $k \neq 0$ udregner vi at

$$\begin{aligned} c_k(\text{abs}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{abs}(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)e^{-ikx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}xe^{-ikx}dx \\ &\overset{(*)}{=} -\frac{1}{2\pi}\left[x\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{-ikx}}{-ik}dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\left[x\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{0}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{-ik}dx \\ &= \frac{-1}{2}\left(\frac{(-1)^k}{-ik}\right) + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-ikx}}{(-ik)^2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^k}{-ik}\right) - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-ikx}}{(-ik)^2}\right]_{0}^{\pi} \\ &= -\frac{1-(-1)^k}{\pi k^2}, \end{aligned}$$

hvor (*) sker ved partiel integration ($\int f'g = [fg] - \int fg'$). Grafen illustrerer Fourierkoefficienterne og understreger med den stiplede linje at koefficienterne aftager som $\frac{1}{k^2}$.



Fordi abs(x) er en lige funktion er det naturligt at skrive rækken i cosinusform (ved Lemma 5.7 og 5.26)

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2},$$

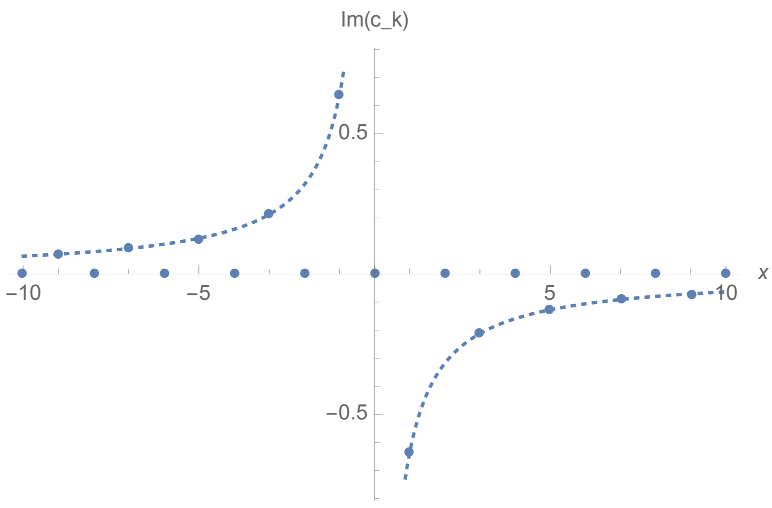
hvilket afmystificerer vores tidligere valg af denne trigonometriske række. Selvom vi nu ved, at denne række er Fourierrækken til abs og at rækken konvergerer uniformt mod en funktion f (se Eksempel 5.14), har vi endnu ikke bevis for, at $f = \text{abs}$. (Vi ved dog at f og abs har samme Fourierrække ved Proposition 5.25) Men hvis det er tilfældet, så kan vi evaluere både rækken og absolutværdifunktionen i punktet $x = 0$ og finder

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{5.8}$$

Eksempel 5.28 (Signumfunktion)**.** Fourierkoefficienterne for sign-funktionen er givet ved

$$
\begin{aligned}
c_k(\text{sign}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} (-1)\cdot e^{-ikx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot e^{-ikx}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{0}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-(-1)^k}{-ik}\right) + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^k-1}{-ik}\right) \\
&= -\frac{i}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^k}{k}\right).
\end{aligned}
$$

$c_k(\text{sign})$ er derfor nul for lige k og lig med $\frac{-2i}{\pi k}$ for ulige k. Grafen illustrerer Fourierkoefficienternes imaginærdele (realdelene er nul). Den stiplede linje understreger, at koefficienterne aftager som $\frac{1}{k}$.



Ved hjælp af Lemma 5.12 omskriver vi rækken til cosinus og sinus form. Vi får den rene sinusrække

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x),
$$

da signumfunktionen er en ulige funktion. Denne udregning forklarer vores tidligere valg af denne række.

5.5 Pythagoras, Bessel, Parseval

Formålet ved dette afsnit er argumentere for at $||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ er lig med summen af rækken $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$. Udsagnet kommer i forskellige sværhedsgrader, som hver har sit navn, og som vi viser i dette afsnit:

- Hvis f er et trigonometrisk polynomium, hedder udsagnet Pythagoras' formel (Lemma 5.29).
- Hvis $f \in \mathrm{PC}_{2\pi}$ hedder uligheden $\leq$ Bessels ulighed (Korollar 5.35).
- Hvis $f \in L^2[-\pi, \pi]$ (Funktioner med $||f||_2 < \infty$ og det såkaldte Lebegue-integral) hedder udsagnet Parsevals identitet, hvilket vi viser i det specialtilfælde, hvor f er sumfunktion af en uniformt konvergent trigonometrisk række (Lemma 5.31)

Lemma 5.29 (Pythagoras)**.** *Lad f være et trigonometrisk polynomium af grad N, da gælder*

$$||f||_2^2 = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2.$$

Bevis.

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \left\langle \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e_k, \sum_{k'=-N}^{N} c_{k'}(f)e_{k'} \right\rangle \\
&= \sum_{k=-N}^{N} \sum_{k'=-N}^{N} c_k(f)\overline{c_{k'}(f)}\langle e_k, e_{k'}\rangle \\
&= \sum_{k=-N}^{N} \sum_{k'=-N}^{N} c_k(f)\overline{c_{k'}(f)}\delta_{k,k'} \\
&= \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2
\end{aligned}$$

hvor vi brugte ortonormaliteten af e_k. □

Eksempel 5.30 (Dirichlets kerne)**.** Betragt den trigonometriske række med $c_k = 1$ for alle k:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$$

Den N'te afsnitssum af denne række er Dirichlets kerne af grad N: $D_N(x)$. Det er ikke svært at se, at $||D_N||_2^2 = 2N+1$, hvilket er lig med

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k(D_N)|^2 = \sum_{k=-N}^{N} 1^2.$$

Det følgende lemma generaliserer Lemma 5.29.

Lemma 5.31 (Parseval for uniformt konvergent række)**.** *Lad*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

være en uniformt konvergent trigonometrisk række med sumfunktion f. Da er

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

konvergent med sum $||f||_2^2$.

Bevis. Vi har tidligere vist, at f er kontinuert på $[-\pi,\pi]$ og dermed begrænset. Da τ_N konvergerer uniformt mod f, konvergerer også $\overline{\tau_N} f$ uniformt mod $|f|^2$. Da integral og $\lim_{N\to\infty}$ bytter plads ved uniform konvergens, konkluderer vi, at

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\tau_N(x)} f(x) dx \right)$$

konvergerer mod

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lim_{N\to\infty} \overline{\tau_N(x)} f(x) \right) dx = ||f||_2^2$$

Udsagnet følger, da

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\tau_N(x)} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-N}^{N} \bar{c}_k e^{-ikx} f(x) dx = \sum_{k=-N}^{N} \bar{c}_k c_k(f)$$

og den højre side er lig med

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$$

ved Proposition 5.25, som fastslår $c_k(f) = c_k$. □

Eksempel 5.32 (Absolutværdifunktion)**.** Fourierrækken af abs konvergerer uniformt. Den ser ud til at konvergere mod absolutværdifunktionen. Hvis dette viste sig at være rigtigt, kunne vi bruge Lemma 5.31 til at beregne summen af

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(\mathrm{abs})|^2 = \frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^4}$$

ved at udregne

$$||\mathrm{abs}||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{2\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Vi ser, at Fourierrækker kunne fortælle os noget om den eksakte sum af en talrække, hvor vi tidligere kun har formået at vise konvergens (rækken er jo essentielt en p-række med $p = 4$, jf. Eksempel 2.23). Vi skal bare kunne vise, at Fourierrækken konvergerer mod abs.

Eksempel 5.33 (Signumfunktion)**.** Bemærk, at vi ikke kan bruge Lemma 5.31 til at regne summen ud, selv hvis vi vidste, at den trigonometriske række ville konvergere til sign, da vi ved at konvergensen ikke er uniform.

Bessels ulighed er en konsekvens af den følgende sætning, som bekræfter vores intuition om, at f kunne være lig med Fourierrækkens sumfunktion. Mere præcist siger sætningen, at Fourierrækkens afsnitssummer leverer den bedste approksimation til f (i $||\cdot||_2$-normen) blandt alle trigonometriske polynomier.

Sætning 5.34 (Bedste approksimation)**.** *Lad* $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ *og lad*

$$\tau_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\, e^{ikx}$$

være den N*-te afsnitssum af Fourierrækken for* f*.*

(1) *For enhvert trigonometrisk polynomium*

$$t_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} d_k\, e^{ikx}$$

af grad $\leq N$ *gælder*

$$\|f - \tau_N\|_2 \leq \|f - t_N\|_2,$$

og der gælder lighed hvis og kun hvis $d_k = c_k(f)$ *for* $k = -N, \ldots, N$*.*

(2) $\|\tau_N\|_2 = \left(\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_2$.

Bevis. Et tilsvarende resultat gælder helt generelt i ethvert vektorrum med indre produkt, og vi giver beviset i denne ramme, idet det derved fremstår mere klart.

Lad derfor E være et reelt eller komplekst vektorrum med indre produkt, og lad $e_1, \dots, e_m \in E$ være et ortonormalt sæt af vektorer. Lad $x \in E$ og sæt $u = \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k$. Vi vil vise følgende:

(1) For enhver vektor $v = \sum_{k=1}^{m} d_k e_k \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_m\}$ gælder

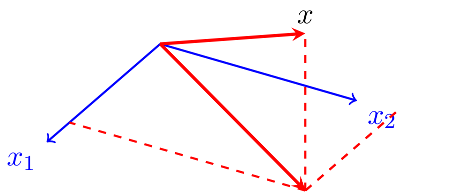
$$\|x - u\| \leq \|x - v\|,$$

og med lighed kun for $v = u$, dvs. $d_k = \langle x, e_k \rangle$ for $k = 1, \dots, m$.

(2) $\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|$.

Med $E = \mathrm{PCN}_{2\pi}$ og $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ fås sætningen straks herfra, idet vi netop har defineret Fourierkoefficienterne ved $c_k(f) = \langle f, e_k \rangle$.

Figuren viser i $\mathbb{R}^3$, at u er den vektor i x_1-x_2-planen, som approksimerer x bedst.



Da $e_1, \dots, e_m$ er ortonormale er $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$ og dermed

$$\langle u, e_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{m} \langle x, e_j \rangle e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle$$

for alle k. Det medfører at $x - u$ er ortogonal til alle e_k:

$$\langle x - u, e_k \rangle = \langle u, e_k \rangle - \langle u, e_k \rangle = 0,$$

og da både u og v er linearkombinationer af $x_1, \dots, x_m$ fås derfor også

$$\langle x - u, u - v \rangle = 0.$$

Vi kan nu anvende Pythagoras på $x - v = (x - u) + (u - v)$ og får

$$\|x - v\|^2 = \|x - u\|^2 + \|u - v\|^2.$$

Heraf fås både

$$\|x - v\| \geq \|x - u\| \quad \text{og} \quad \|x - v\| \geq \|u - v\|.$$

Den første ulighed er (1), og der gælder = kun hvis $u = v$. Den anden giver uligheden i (2), hvis vi indsætter $v = 0$.

At $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2$ fås ved udregningen

$$\begin{aligned}\langle u, u\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{m} \langle x, e_j\rangle\, e_j, \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k\rangle e_k \right\rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^{m} \langle x, e_j\rangle \overline{\langle x, e_k\rangle} \delta_{j,k} = \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2\end{aligned}$$

(det er Pythagoras generaliseret til en ortogonal sum af m vektorer). □

Skrevet mere udførligt er udsagnet i (2)

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \tag{5.9}$$

for alle $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$.

Korollar 5.35 (Bessels ulighed)**.** *Lad* $f \in \mathrm{PC}_{2\pi}$*. Da er* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$ *konvergent med*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Bevis. Lad først $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$. Da uligheden (5.9) gælder for alle N, gælder det også for summen S af rækken

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2,$$

at

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \geq S.$$

Hvis f kun ligger i $\mathrm{PC}_{2\pi}$ kan vi normalisere til $\widetilde{f} \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ og drage samme konklusion for f, jf. Observation 5.23. □

Bessels ulighed har som konsekvens, at rækken $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$ er konvergent. $|c_k(f)|$ går derfor mod nul for $k \to \pm\infty$ ifølge divergenstesten.

Korollar 5.36 (Riemanns lemma). *Hvis $f \in \mathrm{PC}_{2\pi}$, så gælder $|c_k(f)| \to 0$ for $k \to \pm\infty$.*

Eksempel 5.37 (Absolutværdifunktion). Da abs $\in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ finder vi, at rækken

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(\mathrm{abs})|^2 = \frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^4}$$

har sum mindre end eller lig med $||\mathrm{abs}||_2^2 = \frac{\pi^2}{3}$. Bemærk, at $|c_k(\mathrm{abs})|$ går mod nul, hvilket er konsistent med Riemanns lemma.

Eksempel 5.38 (Signumfunktionen). Da sign $\in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ finder vi at

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

er konvergent ifølge Bessels ulighed med sum mindre end eller lig med

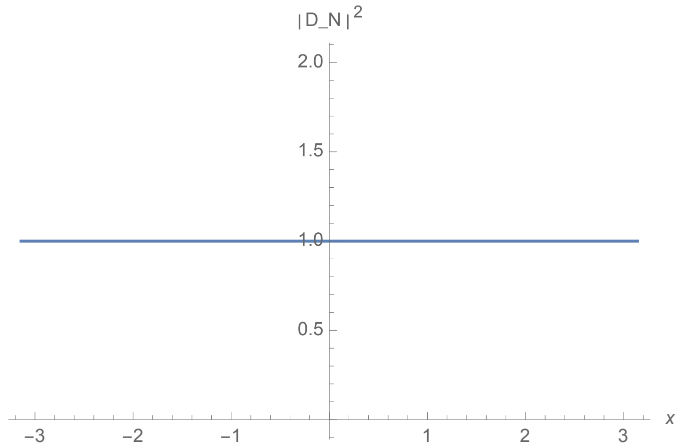
$$||\mathrm{sign}||_2^2 = 1.$$

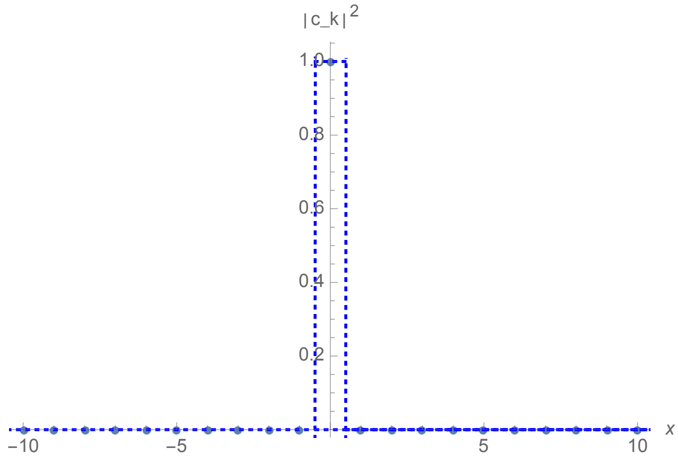
Bemærk, at $|c_k(\mathrm{sign})|$ går mod nul, hvilket er konsistent med Riemanns lemma.

Usikkerhedsprincip Som vi vil diskutere i det følgende, leder vores eksempler til den observation, at jo mere spids og diskontinuert f er, jo mere spredt og langsommere aftagende er Fourierkoefficienterne — og omvendt.

For bedre at kunne sammenligne funktionerne, normaliserer vi dem, sådan at $||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int |f(x)|^2 dx = 1$, og $\frac{1}{2\pi}|f(x)|^2 dx$ kan derved tolkes som et sandsynlighedsmål på $[-\pi, \pi]$. Når Parsevals identitet holder, er også $\sum_k |c_k|^2 = 1$ og dermed er $|c_k|^2$ en sandsynlighedsfordeling på $\mathbb{Z}$. Vi vil nu undersøge, hvordan disse sandsynlighedsfordelinger spiller sammen ved at se på tre eksempler mere detaljeret:

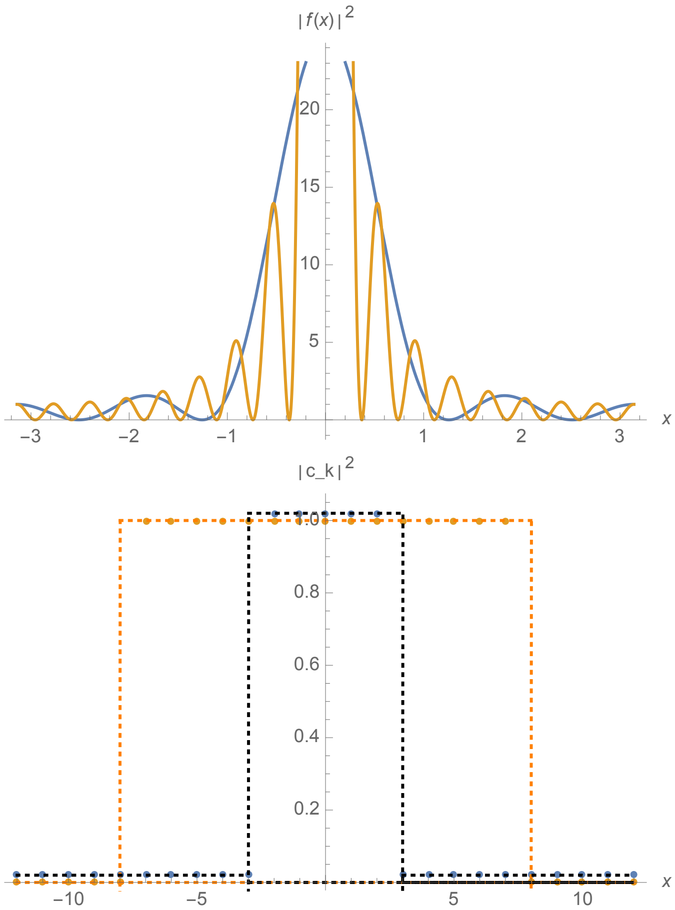
1. (Den konstante funktion) $f(x) = 1$, $|f(x)|^2 = 1$, $|c_k(f)|^2 = \delta_{k,0}$





Vi observerer, at $|f(x)|^2$ er konstant og dermed er x fuldstændig delokaliseret på cirklen, mens fordelingen af Fourierkoefficienterne er lokaliseret omkring $k = 0$.

2. (Dirichlets kerne) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} D_N(x)$, $|f(x)|^2 = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin^2((N+\frac{1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}$, $|c_k(f)|^2 = \frac{1}{2N+1}$ hvis $|k| \leq N$, nul ellers

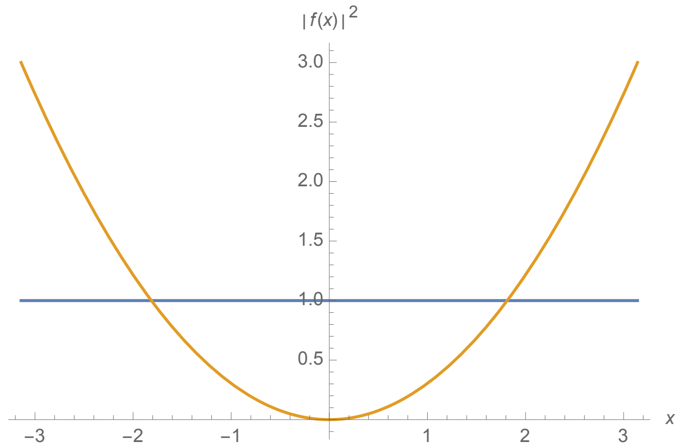


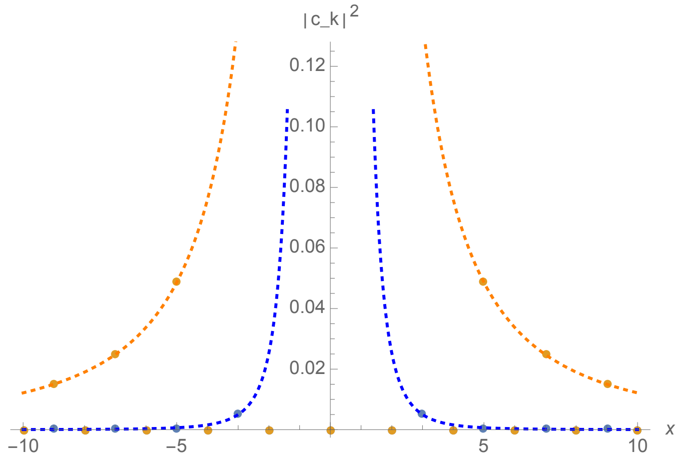
Vi ser at jo større N i D_N, jo mere lokaliseret bliver x. Grafen illustrerer dette ved D_2, som har en smal fordeling af Fourierkoefficienter og en spids, men ikke alt for spids distribution af x på cirklen (blå). For D_7 derimod, som er tegnet i orange, er Fourierkoefficienterne bredere fordelt, mens distributionen på cirklen er spidsere og mere lokaliseret.

3. (Absolutværdi- og signumfunktion) Hvis $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\mathrm{abs}(x)$, hvor

$$|f(x)|^2 = \frac{3}{\pi^2}|x|^2$$

gælder at $|c_k(f)|^2 = \frac{12}{\pi^2 k^2}$ hvis k er ulige, ellers er $c_k = 0$ (orange i grafen). Hvis $f(x) = \mathrm{sign}(x)$, som opfylder $|f(x)|^2 = 1$, gælder at $|c_k(f)|^2 = \frac{4}{\pi^2 k^4}$ hvis k er ulige, ellers er $c_k = 0$ (blå i grafen).





Vi ser, at Fourierkoefficienterne (orange), for den kontinuerte absolutværdifunktion (ved $x = -\pi$) aftager hurtigere end dem for den diskontinuerte signumfunktion (blå).

Vores eksemper leder til følgende generelle observation:

- højere usikkerhed af værdien x (fordelt med sandsynlighed $\frac{1}{2\pi}|f(x)|^2dx$) medfører en lavere usikkerhed af værdien k (fordelt med sandsynlighed $|c_k|^2$)

- lavere usikkerhed af værdien x medfører en højere usikkerhed af værdien k.

Med andre ord observerer vi, at enten x eller k har en høj usikkerhed.

Dette udsagn er sandt for alle $f \in \mathrm{PC}_{2\pi}$ og vi vil nu formulere dette mere præcist. Der findes flere måder, at måle usikkerheden på, f.eks. variansen eller entropien. Vi vælger en entropisk formulering, da variansen af en størrelse fordelt på en cirkel er vanskeligt at definere. Da sandsynlighedsmål ofte er komplicerede at håndtere, indfører vi en diskretisering af cirklen i T dele med størrelse $2\pi\Delta$, hvor $\Delta = 1/T$ (vi vælger T ulige). Den diskretiserede version af f bliver så til $g(\chi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\chi\Delta 2\pi}^{-\pi+(\chi+1)\Delta 2\pi} |f(x)|^2 dx$ for $\chi = 0, \dots T-1$. $g(\chi)$ er nu en sandsynlighedsfordeling på $0, \dots, T-1$, og vi kommer ikke ind i noget matematisk vanskeligt terræn.

Shannon entropi er et mål for usikkerheden for en given sandsynligheds-fordeling. Shannon entropien af $g(\chi)$ og $|c(k)|^2$ er givet henholdsvis ved

$$H(K) = -\sum_k |c(k)|^2 \log |c(k)|^2$$

og

$$H(\chi) = -\sum_\chi g(\chi) \log g(\chi),$$

og vi ved, at

- høj usikkerhed $\Leftrightarrow$ høj entropi
- lav usikkerhed $\Leftrightarrow$ lav entropi

Lad os se på de første to eksempler:

1. $|c_k|^2 = \delta_{k,0}$ og dermed er $H(K) = 0$; vi kender værdien k præcist ($k = 0$!), og derfor er der ingen usikkerhed. Derimod er $|f(x)|^2 = 1$ of $g(\chi) = \Delta$ konstant. $H(\chi) = \log \frac{1}{\Delta}$, og usikkerheden, omkring i hvilket af de $T = \frac{1}{\Delta}$ intervaller x falder, maximal.
2. k er uniformt fordelt på $T = \frac{1}{\Delta}$ værdier og har derfor $H(K) = \log \frac{1}{\Delta}$, men vi ser, at $|f(x)|^2$ er mest koncentreret i intervallet omkring nul, derfor, $H(\chi) \approx 0$.

Dette motiverer følgende *usikkerhedsprincip*, som Biralynicki-Birula beviste generelt: For alle $f \in \mathrm{PC}_{2\pi}$ gælder at

$$H(\chi) + H(K) \geq \log \frac{1}{\Delta}.$$

Usikkerhedsprincipper gælder mere generelt i Fourieranalysen på andre funktionsrum. Hvis man f. eks. ser på en arbitrær funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (som ikke nødvendigvis er perodisk), så afbilder den såkaldte Fouriertransformation den til en funktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (og ikke kun på $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ som for periodiske funktioner) og man kan vise, at

$$H(\chi) + H(K) \geq \log \frac{1}{\Delta^2},$$

hvilket er den diskretiserede, entropiske form af det berømte Heisenberg usikkerhedsprincip

$$\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(K) \geq \frac{1}{2},$$

hvor x (uden diskretisering) bliver fortolket som position, og k som impuls (=masse · hastighed):

5.6 Punktvis konvergens

Indtil nu har vi kun haft indicier for vores forventede udsagn om, at f er sumfunktionen til Fourierrækken

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e_k.$$

I dette afsnit skal vi finde et kriterium, som medfører *punktvis* konvergens af Fourierrækken i et punkt x til $f(x)$. I modsætning til vores undersøgelser af punktvis konvergens af potensrækker, inddrager vores kriterium ikke kun Fourierrækken i punktet x, men også i en omegn af x (ved at fordre en lidt overraskende blanding af kontinuitet og differentiabilitet). Før vi kommer til kriteriet for punktvis konvergens, er vi dog nødt til at have et kort lemma om afsnitssummer af Fourierrækker på plads.

Lemma 5.39 (Fourierrækkens afsnitssum)**.** *Lad $f \in \mathrm{PC}_{2\pi}$ med afsnitssummerne τ_N til Fourierrækken. Da gælder:*

$$\tau_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_N(t)dt.$$

Udtrykket fremkommer ved en såkaldt *foldning* af f og D_N. Foldningen af to generelle funktioner $g, h \in \mathrm{PC}_{2\pi}$ er givet som

$$(g * h)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)h(t)dt$$

der også kan skrives

$$(g * h)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x+t)h(-t)dt$$

ved en substitution af $-t$ for t. Da $h = D_N$ i vores tilfælde er lige, kan vi skrive foldningen på den lidt simplere form i lemmaet.

Bevis. Vi starter med at omformulere definitionen af afsnitssummen:

$$\begin{aligned}
\tau_N(x) &= \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}du \right) e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-N}^{N} f(u)e^{-iku}e^{ikx}du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-u)}du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_N(x-u)du.
\end{aligned}$$

Substituerer vi $u = x + t$, finder vi

$$\begin{aligned}
\tau_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_N(x-u)du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)D_N(-t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_N(t)dt.
\end{aligned}$$

Den sidste lighed er sand, fordi både f og D_N er 2π-periodiske. □

Vi er nu klar til konvergenstesten, som vi formulerer for de normaliserede stykkevist kontinuerte funktioner f i $\mathrm{PCN}_{2\pi}$. Vi kræver ikke at f skal være kontinuert i det givne punkt x_0, men vi kræver at den er differentiabel både fra højre og fra venstre der, altså at

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f_-(x_0)}{x - x_0}$$

findes og at

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f_-(x_0)}{x - x_0}$$

findes, hvor jo $f_-(x_0)$ og $f_+(x_0)$ er grænseværdierne fra venstre og højre for f selv. Vi husker på at vi har krævet

$$f(x_0) = \frac{f_-(x_0) + f_+(x_0)}{2}$$

for den normaliserede funktion f, og denne betingelse kommer essentielt i spil her i den ækvivalente form

$$f_+(x_0) - f(x_0) = f(x_0) - f_-(x_0) \tag{5.10}$$

Sætning 5.40 (Konvergenstest)**.** *Lad $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$. Hvis f er differentiabel både fra venstre og fra højre i x_0, så er Fourierrækken for f konvergent i x_0 med sum $f(x_0)$.*

Bevis. Vi skal vise, at differencen mellem $\tau_N(x_0)$ og $f(x_0)$ går mod nul, og starter med at omskrive den til

$$\begin{aligned}\tau_N(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)D_N(t)dt - f(x_0)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x_0+t) - f(x_0)\right) D_N(t)dt\end{aligned}$$

hvor vi har brugt Lemma 5.39 og at $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1$ i det første lighedstegn, og integralets linearitet i det andet.

Vi indfører to hjælpefunktioner $h, j \in \mathrm{PC}_{2\pi}$ givet som

$$h(t) = \begin{cases} f(x_0+t) - f_-(x_0) & -\pi < t < 0 \\ f(x_0+t) - f_+(x_0) & 0 < t < \pi \\ 0 & t \in \{-\pi, 0, \pi\} \end{cases}$$

og

$$j(t) = \begin{cases} f_-(x_0) - f(x_0) & -\pi < t < 0 \\ f_+(x_0) - f(x_0) & 0 < t < \pi \\ 0 & t \in \{-\pi, 0, \pi\} \end{cases},$$

og ser uden videre at

$$f(x_0+t) - f(x_0) = h(t) + j(t)$$

undtagen i $\{-\pi, 0, \pi\}$, samt at normaliseringsbetingelsen (5.10) giver at j er ulige. Vi bemærker også at h er differentiabel fra venstre og højre i $t = 0$, med

$$h'_+(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t) - f_+(x_0)}{t} = f'_+(x_0)$$

og

$$h'_-(0) = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x_0 + t) - f_-(x_0)}{t} = f'_-(x_0)$$

Nu fortsætter vi omskrivningen af $\tau_N(x_0) - f(x_0)$:

$$\begin{aligned}
\tau_N(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + t) + f(x_0))\, D_N(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (h(t) + j(t))\, D_N(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t)D_N(t)dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j(t)D_N(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t)D_N(t)dt
\end{aligned}$$

hvor integralet med j forsvinder da $j \cdot D_N$ er en ulige funktion idet j er ulige og D_N er lige. Vi har også brugt at integralet ikke ændres af integrandens værdi på tre punkter.

Lemma 5.10 giver videre at

$$h(t)D_N(t) = h(t) \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t}{\sin(\frac{1}{2}t)}$$

for alle $t \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$, så med en tredje hjælpefunktion

$$k(t) = \begin{cases} \dfrac{h(t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} & t \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \\ 0 & t \in \{-\pi, 0, \pi\} \end{cases}$$

(der fortsættes periodisk som sædvanlig) har vi at

$$h(t)D_N(t) = k(t) \sin((N + \frac{1}{2})t)$$

for alle $t \in [-\pi, \pi]$. Det giver

$$\begin{aligned}
\tau_N(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)D_N(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(t)\sin\left((N+\frac{1}{2})t\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(t)\frac{1}{2i}\left(e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}\right)dt \\
&= \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} k_+(t)e^{iNt}dt - \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} k_-(t)e^{-iNt}dt,
\end{aligned}$$

hvor $k_\pm(t) := k(t)e^{\pm i\frac{t}{2}}$.

Vores endelige træk bliver at omskrive det sidste udtryk ved hjælp af Fourierkoefficienterne for $k_\pm$, men de er jo kun definerede hvis $k_\pm \in \mathrm{PC}_{2\pi}$, så vi skal undersøge om funktionerne er stykkevist kontinuerte. Det er de uden videre alle andre steder end i $t = 0$, og der har vi

$$\lim_{t\to 0^+} k(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{h(t)}{\sin\frac{1}{2}t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{h(t)}{t}\frac{t}{\sin(\frac{1}{2}t)} = 2f'_+(x_0)$$

og

$$\lim_{t\to 0^-} k(t) = \lim_{t\to 0^-} \frac{h(t)}{\sin\frac{1}{2}t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{h(t)}{t}\frac{t}{\sin(\frac{1}{2}t)} = 2f'_-(x_0)$$

hvor vi har brugt at

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin(\frac{1}{2}t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}t)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

ved L'Hospitals regel.

Vi konkluderer, at $k_\pm(t) \in \mathrm{PC}_{2\pi}$, og får endelig

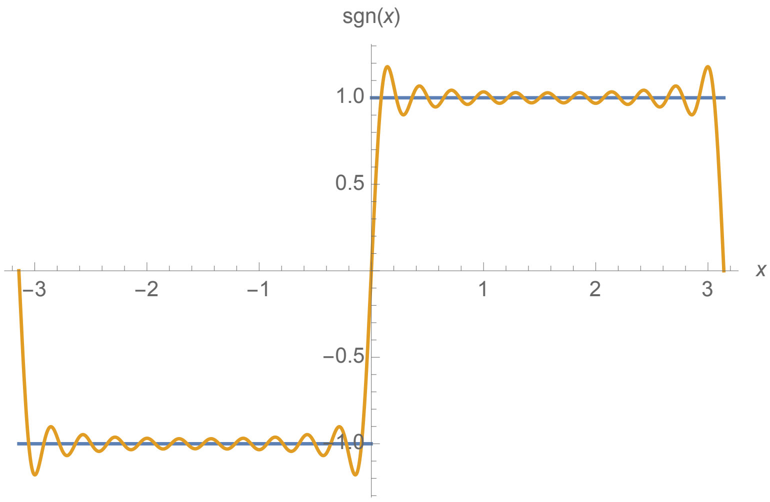
$$\tau_N(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2i}c_{-N}(k_+) - \frac{1}{2i}c_N(k_-) \to 0 \text{ når } N \to \infty$$

ved at anvende Riemanns lemma (Korollar 5.36) på $k_\pm(t)$. □

Eksempel 5.41 (Signum funktion)**.** Vi har at sign $\in \mathrm{PCN}_{2\pi}$, og funktionen er også differentiabel fra venstre og højre overalt. Den er jo differentiabel i almindelig forstand i alle $x \notin \{-\pi, 0, \pi\}$ og har ensidede afledede 0 i de øvrige punkter. Vi konkluderer, at dens Fourierrække

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

konvergerer punktvis til sign overalt. Grafen viser signumfunktionen sammen med τ_{10}.



Konvergensen er ikke uniform, da sign ikke er kontinuert. Indsættes $x = \frac{\pi}{2}$, finder vi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4},$$

da $\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^k$. Denne smukke formel følger også ved at bruge Abels sætning på konklusionen af Eksempel 4.25, da $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Eksempel 5.42 (Absolutværdifunktion)**.** Vi har at abs $\in \mathrm{PCN}_{2\pi}$, og funktionen er også differentiabel fra venstre og højre overalt. Den er jo differentiabel i almindelige forstand i alle $x \notin \{-\pi, 0, \pi\}$ og har ensidede afledede ± 1 i de øvrige punkter. Vi konkluderer, at Fourierrækken for abs konvergerer punktvis mod abs overalt. Konvergensen er ydermere uniform ifølge vores tidligere diskussion, så nu ved vi at (5.8) er sand, altså at

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Vi har vidst længe (Eksempel 2.23) at 2-rækken

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

er konvergent, og estimeret summen s til 1.645 i Eksempel 2.49. Men nu kan vi bestemme summen eksakt! Vi har jo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{s}{4}$$

og (ved ombytning af led, der jo altid er tilladt for positive rækker)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = s.$$

Det giver samlet set

$$\frac{s}{4} + \frac{\pi^2}{8} = s$$

og dermed

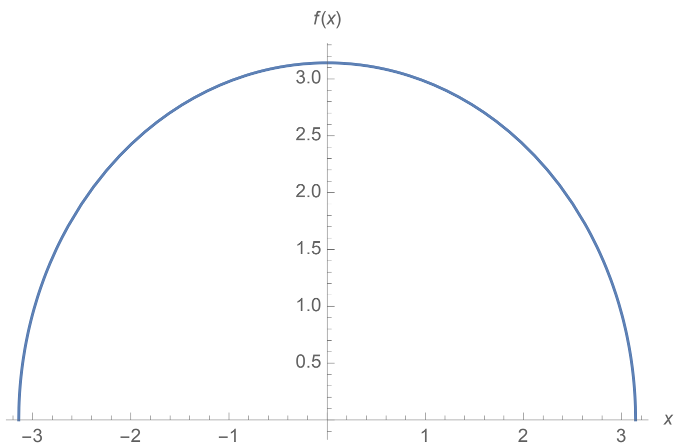
$$s = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} \simeq 1.644934068$$

Bestemmelsen af 2-rækkens sum går tilbage til Euler, der døde inden Fourier grundlagde Fourieranalysen og således benyttede helt andre metoder.

Eksempel 5.43 (Halvcirkelfunktionen)**.** Funktionen

$$\pi\sqrt{1-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}, \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

som vi ser i grafen



kan fortsættes periodisk til en funktion $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$, men har ingen højre eller venstre-afledte i $x = -\pi$. Konvergenstesten kan derfor ikke anvendes der.

5.7 Uniform konvergens

Vi bemærker at vi har vist, at

- Fourierrækken til abs konvergerer punktvist mod abs ifølge Sætning 5.40. Konvergensen er uniform ifølge Sætning 5.13, da Fourierkoefficienterne aftager med $\frac{1}{k^2}$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\text{abs})e_k =^{\text{uniform}} \text{abs}.$$

- Fourierrækken til sign konvergerer punktvist, men ikke uniformt mod sign:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\text{sign})e_k =^{\text{punktvis}} \text{sign}$$

Bemærk også, at sign er den afledte af abs i alle punkter x, hvor abs er differentiabel.

$$\text{abs}'(x) = \text{sign}(x) \qquad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$$

Omvendt er abs integralet af sign i alle punkter.

$$\text{abs}(x) := \int_0^x \text{sign}(t)dt \qquad x \in [-\pi, \pi],$$

og vi ser at abs har den egenskab vi i Analyse 0 kaldte *stykkevis* C^1 – funktionen er kontinuert overalt på $[-\pi, \pi]$, og den har kontinuerte afledede på $[-\pi, 0]$ og på $[0, \pi]$ (også fra højre og venstre i endepunkterne), der så ikke passer sammen i 0.

Vi bemærker også et mønster, når vi ser på leddene i Fourierrækkerne af abs og sign – de er koblet sammen som

$$c_k(\text{sign}) = ikc_k(\text{abs}),$$

for alle k. Vi kunne derfor have en formodning om, at det generelt gælder, at Fourierrækken til en stykkevist C^1 funktion F konvergerer uniformt, og at dens Fourierkoefficienter er relateret til Fourierkoefficienterne for den funktion f der er meget tæt på at være den afledede af F.

Dette er præcis det, som vil vi vise i det følgende afsnit. Vi formaliserer først begrebet stykkevis C^1:

Definition 5.44. Vi siger at $F \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ er *stykkevis* C^1 hvis F er kontinuert, og der findes en inddeling (5.5) således at alle restriktioner

$$F : [d_{i-1}, d_i] \to \mathbb{C}$$

er C^1 som defineret i Definition 3.19.

Vi kalder i denne kontekst delepunkterne d_i for *knækpunkter*. Bemærk at da $F(-\pi) = F(\pi)$ kan vi tænke på F som parametriseringen af en lukket kurve i $\mathbb{C}$, der er stykkevis C^1 i samme forstand som [EHM, p. 268].

Lemma 5.45. *Når $F \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ er stykkevis C^1, så findes en entydigt bestemt funktion $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ med den egenskab at*

$$F'(x) = f(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ der ikke er knækpunkter for F. Videre gælder for alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k(f) = ikc_k(F).$$

Bevis. Det følger direkte fra Definition 5.44 at der er netop én funktion i hvert delinterval (d_{i-1}, d_i) der svarer til F' og konvergerer ved grænseovergang mod endepunkterne. Værdien for f i delepunkterne er entydigt givet ved normaliseringsbetingelsen, og f fortsættes periodisk på entydig vis.

Nu finder vi ved hjælp af partiel integration på hvert interval (a, b) hvor F er differentiabel at

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)e^{-ikx}dx &= [F(x)e^{-ikx}]_a^b - \int_a^b F(x)(-ike^{-ikx})dx \\ &= \left(F(b)e^{-ikb} - F(a)e^{-ika}\right) + ik\int_a^b F(x)e^{-ikx}dx\end{aligned}$$

som med indskudsreglen ([EHM, sætning 5.13]) kan samles til

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx &= \sum_{i=1}^{N}\int_{d_{i-1}}^{d_i} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left([F(x)e^{-ikx}]_{d_{i-1}}^{d_i} + ik\int_{d_{i-1}}^{d_i} F(x)e^{-ikx}dx\right) \\ &= \left(F(d_N)e^{-ikd_N} - F(d_0)e^{-ikd_0}\right) + ik\int_{d_0}^{d_N} F(x)e^{-ikx}dx \\ &= \left(F(\pi)e^{-ik\pi} - F(-\pi)e^{ik\pi}\right) + ik\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx\end{aligned}$$

fordi leddene $F(d_i)e^{-ikd_i}$ går ud med hinanden.

Det første led er lig med nul, fordi F og eksponentialfunktionen er 2π-periodiske og dermed

$$F(\pi)e^{-ik\pi} = F(-\pi)e^{-ik(-\pi)}.$$

Det andet led er lig med $ikc_k(F)$ som ønsket. □

Bemærk at den ledvist afledede af Fourierrækken

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(F)e^{ikx}$$

netop er

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k(F)e^{ikx},$$

men vi ved alt for lidt om konvergensen her til at udlede det direkte fra at $F' = f$, selv hvis F var C^1 i global forstand. Det er dog stadig en god huskeregel!

Sætning 5.46 (Uniform konvergens)**.** *Når $F \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ er stykkevis C^1, så konvergerer Fourierrækken for F uniformt mod F overalt på $\mathbb{R}$.*

Bevis. Vi bemærker først at Sætning 5.40 giver at Fourierrækken for F konvergerer punktvist mod F. For at etablere at konvergensen er uniform, inddrager vi f som defineret i Lemma 5.45.

Bessels ulighed anvendt på f giver at $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$ er konvergent. Ifølge Lemma 5.45 gælder at

$$c_k(f) = ikc_k(F) \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

så ved brug af uligheden $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ finder vi at

$$|c_k(F)| = \frac{1}{|k|}|c_k(f)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|k|^2} + |c_k(f)|^2\right),$$

for $k \neq 0$. Sammenligningskriteriet for rækker, og det faktum, at både $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ og

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$$

er konvergente rækker, medfører at $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(F)|$ er konvergent, og dermed er betingelserne i Sætning 5.13 opfyldt for F. □

Bemærk at Bessels ulighed giver os direkte at $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(F)|^2$ er konvergent, men at dette ikke direkte medfører at $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(F)|$ er det. Vi kender jo følger som fx $a_k = \frac{1}{k}$ der opfylder $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ men $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$. Derfor er det essentielt for argumentet herover at gå omvejen via f.

Dette afslutter vores undersøgelse af uniform konvergens og Fourierrækker mere generelt.

Kapitel 6

Metriske rum

I dette afsluttende kapitel indfører vi det teoretiske fundament for begrebet *afstand*. Ved et tilbageblik på kurset ses at grænseovergange spiller en vigtig rolle i hele dets indhold. Forståelse af konvergens hviler på en opfattelse af hvad det vil sige at to størrelser nærmer sig hinanden. Det gør de når afstanden mellem dem går mod nul, og dermed får begrebet afstand en afgørende rolle.

For to reelle tal x, y har vi omtalt absolutværdien $|x - y|$ som deres indbyrdes afstand, og for talsæt $x, y \in \mathbb{R}^n$ definerede vi deres euklidiske afstand som længden af linjestykket der forbinder dem, hvilket er det samme som længden $\|x - y\|$ af vektoren $x - y$. Det stemmer naturligvis overens med hvordan man i praksis måler afstande, for eksempel med en lineal.

Vores brug af begrebet afstand har imidlertid ikke været indskrænket til tal og talsæt, idet vi i forbindelse med uniform konvergens (se Definition 3.6) også har omtalt og opfattet den uniforme norm $\|f - g\|_A$ som "afstanden" mellem de to funktioner f og g. Fra lineær algebra ved vi at vidt forskellige størrelser som talsæt og funktioner har nogle fælles træk, som det kan være fordelagtigt at behandle under ét. Til det formål blev abstraktionen vektorrum indført med nogle aksiomer som lige netop udtrykker de fælles træk. Målet i dette kapitel er i et lignende skridt at indføre en aksiomatisk ramme for afstandsbegrebet.

Indenfor den nye ramme vil vi definere åbne og afsluttede mængder, og de tilhørende begreber som indre og afslutning. Vi vil endvidere udvide tidligere begreber som konvergens og kontinuitet til nye generelle rammer, og vi slutter af med at se på ekstremalværdisætningen i denne sammenhæng.

6.1 Metriske rum

Vi starter med at definerere, hvad et metrisk rum er og betragter derefter den vigtigste klasse af eksempler, normerede vektorrum.

Metriske rum Med den følgende definition opsamler vi de væsentlige egenskaber ved begrebet afstand, herunder den helt fundamentale trekantsulighed.

Definition 6.1 (Afstandsfunktion)**.** Lad M være en vilkårlig mængde. Vi kalder en funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$ for en *afstandsfunktion*, hvis der gælder

(i) (ikke-negativitet) $d(x, y) \geq 0$, med lighed hvis og kun hvis $x = y$,

(ii) (symmetri) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iii) (trekantsulighed) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

for alle $x, y, z \in M$. Når der er givet en afstandsfunktion kaldes $d(x, y)$ for *afstanden* mellem x og y.

Alle aksiomerne i definitionen er uundværlige, men det er trekantsuligheden som er det bærende element. Den udtrykker løst sagt et krav om at afstanden mellem x og y skal udtrykke længden af den korteste "tur" fra x til y. Hvis vi kan komme fra x til y ved at slå genvej gennem z, så skal det ikke gøre den samlede tur kortere end den faktiske afstand fra x til y.

Trekantsuligheden får naturligvis sit navn fra $\mathbb{R}^2$, hvor den blev bevist af euklid (Elementer, Bog I, Proposition 20): *To vilkårlige sider af en trekant er tilsammen større end den tredje.*

Definition 6.2 (Metrisk rum)**.** Et *metrisk rum* er en mængde M udstyret med en afstandsfunktion d. Funktionen d kaldes *metrikken* på M.

Formelt set er et metrisk rum altså et par (M, d) bestående af en mængde og en tilhørende metrik. Der er en pointe i at nævne d sammen med M, nemlig at den samme mængde M godt kan udstyres med forskellige afstandsfunktioner (for eksempel får man igen en afstandsfunktion hvis man ganger en givet afstandsfunktion med en vilkårlig positiv konstant).

Eksempel 6.3 (Talrum)**.** Egenskaberne (i)-(iii) er velkendte (se [EHM, Kapitel 1]) både for $d(x,y) = |x-y|$ på $\mathbb{R}$ og for $d(x,y) = \|x-y\|$ på $\mathbb{R}^n$, hvor $\|\cdot\|$ defineres som $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$ ved hjælp af skalarproduktet. Altså er $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^n$ metriske rum med disse afstandsfunktioner. På samme måde er $\mathbb{C}$ (og dermed $\mathbb{C}^n$) metriske rum, jf. diskussionen i Afsnit 1.1.

Bemærk, at hvis (M,d) er et metrisk rum, og $X \subseteq M$ en delmængde, så er X udstyret med restriktionen af d til $X \times X$ også et metrisk rum. Vi kalder det et *delrum* af M. For eksempel er (I,d) dermed et metrisk rum for ethvert interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

Udover at tilgangen til afstandsbegrebet med aksiomer giver mulighed for at behandle forskellige metrikker med et fælles værktøj, er der også en mere teoretisk pointe. Når alle resultater skal bevises ud fra nogle få enkle aksiomer klarlægges det, hvor sætningerne kommer fra. Nogle egenskaber ved talrummene gælder generelt for alle metriske rum, men vi skal også se eksempler som ikke gør det. De beror derfor nødvendigvis på andet end tallenes metriske egenskaber.

Det følgende lemma er et eksempel på en ulighed vi har set før, og som gælder generelt for metriske rum.

Lemma 6.4 (Omvendt trekantsulighed)**.** *For alle punkter x, y, z i et metrisk rum (M,d) gælder*

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

Bevis. Beviset er en god anledning til at se aksiomerne (i)-(iii) i brug. Idet $d(x,y) \geq 0$ skal vi vise at $-d(x,y) \leq d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$. Den højre ulighed omskrives direkte til trekantsuligheden

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Den venstre omskrives til

$$d(y,z) \leq d(x,y) + d(x,z),$$

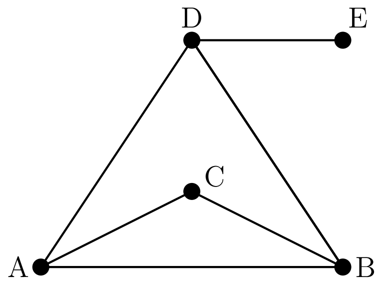
som fås fra trekantsuligheden og symmetri ved ombytning af x og y. $\square$

I dette kursus fremkommer alle væsentlige metriske rum (M, d) i en forbindelse hvor M er et vektorrum. Inden vi uddyber dette nærmere skal vi lige se et par eksempler der *ikke* er baseret på en vektorrumsstruktur.

Eksempel 6.5 (Graf)**.**

Her er M mængden af knuder i en endelig og sammenhængende graf, og $d(x, y)$ er antallet af kanter i den korteste forbindelse mellem x og y.

Feks $d(C, E) = 3$ gennem $CBDE$



Det overlades til læseren at verificere (i)-(iii) i dette eksempel.

Eksempel 6.6 (Diskret metrik)**.** Lad M være en vilkårlig mængde og lad for alle $x, y \in M$:

$$d_{\text{disk}}(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

Det er oplagt at der gælder både ikke-negativitet og symmetri for denne funktion. At trekantsuligheden

$$d_{\text{disk}}(x, z) \leq d_{\text{disk}}(x, y) + d_{\text{disk}}(y, z)$$

gælder indses således: Hvis $d_{\text{disk}}(x, z) = 0$ gælder uligheden oplagt, og hvis $d_{\text{disk}}(x, z) = 1$ er $x \neq z$. I så fald kan y ikke være lig med både x og z, og dermed kan $d_{\text{disk}}(x, y)$ og $d_{\text{disk}}(y, z)$ ikke begge være nul. Altså er deres sum større end eller lig 1.

Vi konkluderer, at (M, d_{disk}) er et metrisk rum. Det kan virke uinteressant, fordi afstandsfunktionen er primitiv, men det kan af og til bruges til at vise ting som *ikke* gælder generelt for metriske rum.

6.2 Normerede vektorrum

Hvis det på forhånd vides at mængden M har struktur af et vektorrum er det naturligt at stille nogle krav til metrikken om hvordan den skal spille sammen med den lineære struktur. Det opnår vi ved først at definere det vi kalder *normen* af en vektor, som i metrisk sammenhæng skal fortolkes som dens *længde*. I det efterfølgende lemma konstrueres ved hjælp af lineariteten en afstandsfunktion ud fra normen.

Definition 6.7 (Normeret vektorrum)**.** Lad E være et reelt eller komplekst vektorrum. En *norm* på E er en funktion $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, som opfylder

(i) (ikke-negativitet) $\|x\| \geq 0$, med lighed hvis og kun hvis $x = 0$

(ii) (skalering) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(iii) (trekantsulighed) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

for alle $x, y \in E$, og $\lambda \in \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Et *normeret vektorrum* er et vektorrum udstyret med en norm.

Eksempel 6.8. Absolutværdifunktionen $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en norm på det reelle vektorrum $\mathbb{R}$. Det samme gælder absolutværdifunktionen på det komplekse vektorrum $\mathbb{C}$. Faktisk er enhver norm på $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ en positiv konstant gange absolutværdien (bevis overlades til læseren).

Eksempel 6.9. Den euklidiske norm på $\mathbb{R}^n$ kendes allerede fra Eksempel 6.3. Den er direkte relateret til den euklidiske afstand ved at der gælder $\|x\| = d(x, 0)$ og $d(x, y) = \|x - y\|$. Ikke overraskende er den euklidiske norm en norm i henhold til ovenstående definition. Det ses let at den opfylder (i) og (ii), og trekantsuligheden (iii) blev bevist i [EHM, Sætning 1.4].

Eksempel 6.10. Lad E være et reelt eller komplekst vektorrum, på hvilket der er givet et indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Med $\|x\| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ for $x \in E$ opnås, at E er et normeret vektorrum. Betingelserne (i) og (ii) ses let, og trekantsuligheden (iii) følger i dette tilfælde fra Cauchy-Schwarz uligheden (jævnfør [HW, Sætning 6.1.5]). Specielt får vi derved, at $\mathrm{PCN}_{2\pi}$ udstyret med 2-normen

$$\|f\|_2 := \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

er et normeret vektorrum, idet det blev bevist med Lemma 5.20 at (5.6) definerer et indre produkt på $\mathrm{PCN}_{2\pi}$.

Det følgende lemma viser at relationen mellem norm og metrik i eksemplerne herover er generel for alle normer.

Lemma 6.11. *Lad $(E, \|\cdot\|)$ være et normeret vektorrum. Da fås med*

$$d(x,y) := \|x - y\|$$

en afstandsfunktion på E.

Bevis. (i) Fås umiddelbart fra den tilsvarende betingelse for en norm.

(ii) Ved skalering med -1 fås $\|y - x\| = \|x - y\|$. Altså er $d(y,x) = d(x,y)$.

(iii) (trekantsulighed) Af trekantsuligheden for normen fås

$$\|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|,$$

det vil sige $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. □

Lemma 6.12. *Lad $E = \mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$ og skriv $x = (x_1, \ldots, x_n)$ for $x \in E$. Da defineres ved hver af følgende ligninger en norm på vektorrummet E:*

- *(1-norm)* $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|$
- *(2-norm)* $\|x\|_2 := \Big(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$
- *(max-norm)* $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

Her er 2-normen blot en gentagelse af den euklidiske norm. For $n = 1$ er alle tre normer lig med absolutværdien.

Bevis. Vi mangler kun at vise normegenskaben for $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_\infty$. Det er klart at de er ikke-negative og også at de er lig med nul, hvis og kun hvis $x = 0$. Vi verificerer først skaleringsegenskaberne:

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_1 &= \sum_{j=1}^n |\lambda x_j| = \sum_{j=1}^n |\lambda||x_j| = |\lambda|\ \|x\|_1, \\
\|\lambda x\|_\infty &= \max\{|\lambda x_1|, \ldots, |\lambda x_n|\} \\
&= \max\{|\lambda||x_1|, \ldots, |\lambda||x_n|\} \\
&= |\lambda| \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = |\lambda|\ \|x\|_\infty,
\end{aligned}$$

og dernæst trekantsuligheden:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_1 &= \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| + |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1, \\
\|x+y\|_\infty &= \max\{|x_1+y_1|, \dots, |x_n+y_n|\} \\
&\leq \max\{|x_1|+|y_1|, \dots, |x_n|+|y_n|\} \\
&\leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\} \\
&= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty
\end{aligned}$$

Vi har dermed vist at alle tre er normer, både for $\mathbb{R}^n$ og for $\mathbb{C}^n$. $\square$

Notationen skyldes at $\|x\|_1$ og $\|x\|_2$ er del af en familie af normer

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

hvor $1 \leq p < \infty$, men dem har vi ikke brug for i dette kursus.

Lemma 6.13 (Funktionsrum)**.** *Lad $A \subseteq \mathbb{C}$ og lad $\mathrm{F}(A,\mathbb{R})$ være vektorrummet af funktioner $f : A \to \mathbb{R}$. Sæt*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in A\} \in [0,\infty]$$

for $f \in \mathrm{F}(A,\mathbb{R})$. Da gælder følgende:

(I) *Mængden*

$$\mathrm{B}(A,\mathbb{R}) := \{f \in \mathrm{F}(A,\mathbb{R}) \mid f \text{ er begrænset}\}$$

er et underrum af $\mathrm{F}(A,\mathbb{R})$ og $\|f\|_\infty$ er en norm derpå.

(II) *Antag A er afsluttet og begrænset. Da er*

$$\mathrm{C}(A,\mathbb{R}) := \{f \in \mathrm{F}(A,\mathbb{R}) \mid f \text{ er kontinuert}\}$$

et underrum af $\mathrm{B}(A,\mathbb{R})$ og $\|f\|_\infty$ er en norm derpå.

Bemærk at $\|f\|_\infty < \infty$ for enhver begrænset funktion. Normen $\|\cdot\|_\infty$ kaldes den *uniforme norm.* Betegnelsen blev indført i Definition 3.6 for alle $f \in \mathrm{F}(A,\mathbb{R})$, men i den generalitet er den faktisk slet ikke en norm, idet normer ikke tillades at antage værdien ∞.

Vi kan indføre og analysere $\mathrm{F}(A,\mathbb{C})$, $\mathrm{B}(A,\mathbb{C})$ og $\mathrm{C}(A,\mathbb{C})$ på præcis samme måde.

Bevis. Det er ikke svært at verificere at $\mathrm{B}(A,\mathbb{R})$ og $\mathrm{C}(A,\mathbb{R})$ er stabile overfor addition og skalarmultiplikation, og dermed er underrum. Desuden gælder der

$$\mathrm{C}(A,\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{B}(A,\mathbb{R}),$$

idet A er begrænset og afsluttet, således at enhver kontinuert funktion er begrænset. Dermed behøver vi kun at verificere norm-betingelserne for funktioner i $\mathrm{B}(A,\mathbb{R})$, idet de naturligvis så også gælder for funktioner i $\mathrm{C}(A,\mathbb{R})$.

(i). Det ses let at $\sup\{|f(x)|\,|x \in A\} \geq 0$, og at der gælder lighed hvis og kun hvis $f(x) = 0$ for alle $x \in A$, det vil sige f er nulfunktionen.

(ii) $\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(x)|\,|x \in A\} = |\lambda| \sup\{|f(x)|\,|x \in A\} = |\lambda|\,\|f\|_\infty$.

(iii) $$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \sup\{|f(x)+g(x)|\,|x \in A\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| + |g(x)|\,|x \in A\} \\ &\leq \sup\{|f(x)|\,|x \in [a,b]\} + \sup\{|g(x)|\,|x \in A\} \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

Altså er $(\mathrm{B}(A,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ og $(\mathrm{C}(A,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normerede vektorrum. □

Eksempel 6.14. Man kan også indføre

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$$

på $\mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$: Vi undlader at bevise at det faktisk er en norm da vi ikke får brug for den her.

Eksempel 6.15. For to funktioner $f, g \in \mathrm{F}(A,\mathbb{R})$ defineres den *indbyrdes afstand*

$$d_\infty(f,g) := \|f-g\|_\infty.$$

Det følger af Lemma 6.13 og Lemma 6.11 at $(\mathrm{B}(A,\mathbb{R}), d_\infty)$ er et metrisk rum. Det samme gælder $(\mathrm{C}(A,\mathbb{R}), d_\infty)$ når A er afsluttet og begrænset.

6.3 Konvergens

Begrebet talfølge generaliseres umiddelbart til en hvilken som helst mængde.

Definition 6.16 (Følge)**.** Lad M være en vilkårlig mængde, og lad $x_n \in M$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi kalder

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad x_1, x_2, x_3, \dots$$

en *følge* i M.

En følge i M er altså intet andet end en funktion fra $\mathbb{N}$ til M, skrevet x_n i stedet for $x(n)$.

Vi er interesseret i *konvergens*, og det er her afstand kommer ind i billedet. En afstandsfunktion giver os mulighed for at tale om konvergens af en følge.

Definition 6.17 (Konvergens)**.** Lad (M, d) være et metrisk rum og betragt en følge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i M. Vi siger, at følgen *konvergerer mod* $x \in M$, hvis der for talfølgen af afstande $d(x_n, x)$ gælder

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

I så fald skriver vi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ eller $x_n \to x$ for $n \to \infty$, og vi kalder x *grænsepunkt* for følgen. Vi siger, at følgen er *konvergent*, hvis der findes et grænsepunkt $x \in M$.

Definitionen udtrykker præcist at x_n skal nærme sig x for $n \to \infty$. Skrevet med epsilon og N vil det sige

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : \quad d(x_n, x) < \epsilon.$$

Eksempel 6.18 (Talfølge)**.** For talfølger fra $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ er konvergens med hensyn til metrikken $d(x, y) = |x - y|$ præcis det konvergensbegreb som blev defineret i Kapitel 1.

Eksempel 6.19 (Funktionsfølge)**.** Tilsvarende gælder for funktionsfølger af begrænsede funktioner på $[a, b]$ (med værdier i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) at konvergens med hensyn til metrikken $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ er det samme som uniform konvergens.

Med Definition 6.17 kan vi altså slå to fluer med et smæk og behandle konvergens af talfølger og uniform konvergens af funktionsfølger under et. Ligesom vi har set før kan en følge ikke have flere grænsepunkter:

Lemma 6.20. *Hvis der for en følge i et metrisk rum gælder både $x_n \to x$ og $x_n \to y$ for $n \to \infty$, så er $x = y$.*

Bevis. Her kommer trekantsuligheden straks ind i billedet. For alle n er

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) = d(x_n, x) + d(x_n, y),$$

og da både $d(x_n, x)$ og $d(x_n, y)$ går mod nul, slutter vi at $d(x, y) = 0$. $\square$

Eksempel 6.21 (Konvergens i $\mathbb{R}^k$)**.** Vi har defineret tre forskellige metrikker på $\mathbb{R}^k$, ud fra normerne

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_k| \\
\|x\|_2 &= (x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{\frac{1}{2}} \\
\|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, \ldots, |x_k|\}
\end{aligned}$$

Vi skal se, at for alle tre metrikker betyder konvergens mod x for $n \to \infty$ det samme, nemlig koordinatvis konvergens.

Vi betragter en følge i $\mathbb{R}^k$. For at undgå konklikt mellem numrene for følgens elementer og numrene for koordinaterne i $\mathbb{R}^k$ vælger vi i dette eksempel benytte notation som en funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ for følgen, det vil sige det n-te element skrives $x(n)$. Koordinaterne for dette element skriver vi på formen

$$x(n) = (x_1(n), \ldots, x_k(n)) \in \mathbb{R}^k$$

Påstanden er at

$$\lim_{n\to\infty} \big(x_1(n), \ldots, x_k(n)\big) = \big(\lim_{n\to\infty} x_1(n), \ldots, \lim_{n\to\infty} x_k(n)\big)$$

uanset hvilken af de tre metrikker vi har udstyret $\mathbb{R}^k$ med.

For hver af de tre normer gælder $|x_i| \leq \|x\|$ for hvert $i = 1, \ldots, k$. Derfor er $|x_i(n) - x_i| \leq \|x(n) - x\|$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så hvis $\|x(n) - x\| \to 0$ for $n \to \infty$ så gælder der også at $|x_i(n) - x_i| \to 0$ for hvert i. Konvergens med hensyn til $\|\cdot\|$ medfører altså koordinatvis konvergens.

Omvendt medfører regnereglerne for konvergens af talfølger umiddelbart at hvis $|x_i(n) - x_i| \to 0$ for $n \to \infty$ for hvert $i = 1, \ldots k$, så vil også

$$\|x(n) - x\|_1 = |x_1(n) - x_1| + \cdots + |x_k(n) - x_k| \to 0$$

Koordinatvis konvergens medfører altså konvergens med hensyn til $\|\cdot\|_1$.

Endelig gælder der både $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ og $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ for alle $x \in \mathbb{R}^k$, og derfor medfører konvergens med hensyn til $\|\cdot\|_1$ også konvergens med hensyn til de to andre normer.

At $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ fås fra følgende udregninger

$$\|x\|_\infty^2 = (\max_i |x_i|)^2 = \max_i |x_i|^2 \leq |x_1|^2 + \cdots + |x_k|^2 = \|x\|_2^2$$
$$\|x\|_2^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_k|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{k} |x_i|\,|x_j| = (|x_1| + \cdots + |x_k|)^2 = \|x\|_1^2.$$

Lemma 6.22. *Hvis $x_n \to x$ for $n \to \infty$ gælder*

$$d(x_n, y) \to d(x, y) \quad \textit{for } n \to \infty$$

for alle $y \in M$.

Bevis. Det følger fra uligheden $|d(x,y) - d(x_n,y)| \leq d(x_n, x)$, som fås af den omvendte trekantsulighed. □

Delfølger Dem får vi også brug for. Definitionen er den samme som før.

Definition 6.23 (Delfølge)**.** Lad $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i M, og $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en strengt voksende følge i $\mathbb{N}$. Da kaldes $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ en *delfølge* af $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Vi husker på, at når vi tænker på følger som funktioner defineret på $\mathbb{N}$, så er delfølgen dermed den sammensatte funktion

$$k \mapsto n_k \mapsto x_{n_k}$$

af x med en strengt voksende funktion fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{N}$. Ligesom for talfølger arver enhver delfølge moder-følgens konvergensegenskaber:

Lemma 6.24. *Lad $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en konvergent følge i et metrisk rum (M, d) med grænsepunkt $x \in M$. Da er enhver delfølge af $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent med grænsepunkt x.*

Bevis. Det følger umiddelbart af Definition 6.17 og det tilsvarende Lemma 1.62 for talfølger, idet $d(x_{n_k}, x)$ er en delfølge af talfølgen $d(x_n, x)$. □

6.4 Fuldstændighed

Begrebet Cauchy-følge kan også generaliseres direkte til metriske rum.

Definition 6.25. Lad $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i et metrisk rum (M,d). Vi siger, at følgen er en *Cauchy-følge* (eller blot at den "er Cauchy"), hvis der for alle $\epsilon > 0$ findes et N, således at

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$

for alle $n, m \geq N$.

De følgende to lemmaer er generaliseringer af Lemma 1.69 og Lemma 1.73.

Lemma 6.26. *Enhver konvergent følge i et metrisk rum er en Cauchy-følge.*

Bevis. Antag $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ i (M,d), og lad $\epsilon > 0$. Da findes der et N, sådan at for alle $n \geq N$ er

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Hvis $n, m \geq N$ finder vi så ved hjælp af trekantsuligheden

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

og derfor er $\{x_n\}$ en Cauchy-følge. □

Lemma 6.27. *Lad $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en Cauchy-følge i et metrisk rum (M,d), og antag, at den har en konvergent delfølge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ med grænsepunkt x. Da konvergerer følgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ også selv mod x.*

Bevis. Det følger af den omvendte trekantsulighed at

$$|d(x_n, x) - d(x_m, x)| \leq d(x_n, x_m).$$

Fra Definition 6.25 fås da, at for alle ϵ findes N så $|d(x_n, x) - d(x_m, x)| \leq \epsilon$ for $m, n \geq N$. Det viser at talfølgen $d(x_n, x)$ er Cauchy. På den anden side følger det fra Definition 6.17 at $d(x_{n_k}, x) \to 0$ for $k \to \infty$. Lemma 1.73 medfører så at $d(x_n, x)$ går mod nul, og dermed er Lemma 6.27 vist. □

Eksempel 6.28. Lad f_n være givet ved Dirichlets kerne (jf. Eksempel 5.9)

$$f_n(x) = D_n(x).$$

Funktionsfølgen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er ikke konvergent i $(\mathrm{C}([-\pi,\pi]), d_\infty)$, da den ikke er Cauchy. For eksempel gælder der

$$\|D_n - D_{n-1}\|_\infty^2 = \|e_n + e_{-n}\|_\infty^2 = 2$$

idet $e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos(nx)$ og $\max|\cos(nx)| = 1$.

Indtil nu har alle vores resultater om talfølger ladet sig generalisere til metriske rum. Men festen stopper her, idet Cauchys fundamentale resultat, Sætning 1.75 ikke lader sig generalisere. Det er endda nemt at komme med et modeksempel.

Eksempel 6.29 (Ikke konvergent Cauchy følge)**.** Betragt $M = (0,\infty)$ som delrum af $\mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik $d(x,y) = |x-y|$. Følgen givet ved $x_n = \frac{1}{n}$ er konvergent i $\mathbb{R}$ og derfor også Cauchy i $\mathbb{R}$. Det vil sige at for hvert ϵ findes N så $d(x_n, x_m) < \epsilon$ for alle $n, m \geq N$. Det betyder per definition at den også er Cauchy i M. Men den er *ikke* konvergent i M. Definition 6.17 siger jo udtrykkeligt at grænsepunktet skal tilhøre M, og hvis den havde et grænsepunkt i M ville den have to grænsepunkter i $\mathbb{R}$, da den også konvergerer mod 0.

Denne skuffelse fører straks frem til en ny definition.

Definition 6.30 (fuldstændighed)**.** Et metrisk rum (M, d) kaldes *fuldstændigt*, såfremt enhver Cauchy følge er konvergent i M.

Med andre ord siger vi, at et rum M er fuldstændigt, hvis udsagnet i Sætning 1.75 gælder i M. Det illustrerer pointen at skuffelser ikke nødvendigvis er slutpunkter i en matematisk udvikling, men kan markere en ny begyndelse grundet i en dybere forståelse af emnet.

Som vi har nævnt tidligere, er mange af vores eksempler oprindeligt normerede vektorrum. Vi definerer derfor

Definition 6.31 (Banachrum)**.** Et normeret vektorrum kaldes et *Banachrum*, hvis det tilhørende metriske rum er fuldstændigt.

Sætning 6.32 (Talrum)**.** *Med en hvilken som helst af normerne* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *og* $\|\cdot\|_\infty$ *er* $\mathbb{R}^k$ *et Banachrum.*

Bevis. Lad $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en Cauchy følge i $\mathbb{R}^k$, altså

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq N : \quad \|x(m) - x(n)\| < \epsilon$$

hvor $\|\cdot\|$ står for en af de tre normer. For hvert $i = 1, \dots, k$ er talfølgen af koordinater $\{x_i(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ også Cauchy, idet $|x_i(m) - x_i(n)| \leq \|x(m) - x(n)\|$, og fra Cauchys sætning ved vi derfor at der findes et tal $x_i \in \mathbb{R}$ som $x_i(n)$ konvergerer mod. Vi samler disse k tal i et talsæt $x := (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Fra Eksempel 6.21 vides, at en følge i $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ er konvergent netop hvis alle k talfølger af koordinater konvergerer. Altså konvergerer $x(n)$ mod x. □

Sætning 6.33 (Funktionsrum)**.** *De følgende rum er Banachrum:*

- $(\mathrm{B}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *og* $(\mathrm{B}([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$
- $(\mathrm{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *og* $(\mathrm{C}([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Bevis. Vi viser fuldstændighed for funktioner med værdier i $\mathbb{R}$. Argumentet for $\mathbb{C}$ er ikke anderledes.

Vi starter med at betragte $\mathrm{B}([a, b], \mathbb{R})$. Lad $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en Cauchy følge af begrænsede funktioner. Ved hjælp af Sætning 3.12 ser vi, at der findes en funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ som f_n konvergerer uniformt imod. Vi mangler derfor blot at vise at denne funktion f faktisk tilhører $\mathrm{B}([a, b], \mathbb{R})$.

For alle $\epsilon > 0$, findes der et $N \in \mathbb{N}$, sådan at for alle $n \geq N$ gælder at

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon$$

Vi behøver kun dette for $\epsilon = 1$ og $n = N$, det vil sige at der findes der et N, sådan at

$$\|f_N - f\|_\infty \leq 1.$$

Vi ser nu, at f er begrænset, da $f_N \in \mathrm{B}([a, b], \mathbb{R})$ og

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq \|f - f_N\|_\infty + \|f_N\|_\infty \leq 1 + \|f_N\|_\infty$$

for alle x. Det viser at f tilhører $\mathrm{B}([a, b], \mathbb{R})$, som dermed er fuldstændigt.

For at vise, at $(\mathrm{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ er fuldstændigt, mangler vi tilsvarende blot at vise, at grænsefunktionen er kontinuert, hvis funktionsfølgen består af kontinuerte funktioner. Men dette er sandt ifølge Sætning 3.13. Dermed er $(\mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$ fuldstændigt. □

Eksempel 6.34 (Normeret vektorrum som ikke er Banach)**.** Lad $A = [a,b]$ være et begrænset og afsluttet interval med $a < b$, og betragt vektorrummet $P(A)$ af alle reelle polynomier

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in A.$$

$P(A)$ er et underrum af $\mathrm{C}(A,\mathbb{R})$, og restriktion af den uniforme norm giver derfor en norm på $P(A)$. Vi vil vise rummet ikke er fuldstændigt med denne norm.

Lad

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$$

Denne følge er uniformt konvergent i $\mathrm{C}([-r,r],\mathbb{R})$ for ethvert $r > 0$, da den er afsnittet for en potensrække med konvergensradius ∞. Grænsefunktionen er e^x, jf. Eksempel 3.26. Det samme gælder dermed også på A fordi $A \subseteq [-r,r]$ for r tilstrækkelig stor.

Da p_n er uniform konvergent i $\mathrm{C}(A,\mathbb{R})$ er den også Cauchy i dette rum, og da normen er den samme, er den dermed også Cauchy i $P(A)$.

Hvis den var uniformt konvergent i $P(A)$ mod en funktion $p(x)$, ville den også være uniformt konvergent mod $p(x)$ i $C(A)$. Altså ville $p(x) = e^x$, men det er ikke et polynomium (fx ved brug af Sætning 4.35), og følgen kan dermed ikke konvergere i $P(A)$.

6.5 Kontinuitet

Kontinuitet af funktioner er som begreb tæt knyttet til grænseværdier, og det har en naturlig generalisation til alle metriske rum. Det skal vi nu se på.

Ligesom for reelle funktioner skelner man mellem *kontinuitet i et punkt* og *kontinuitet*. Standarddefinitionen af at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuert i $a \in \mathbb{R}$ er som bekendt, at for alle $\epsilon > 0$ eksisterer der $\delta > 0$, sådan at for alle $x \in \mathbb{R}$ med $|x - a| < \delta$ gælder der $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Den definition kan vi umiddelbart udvide til en general situation, hvor vi har en afbildning mellem to metriske rum, som endda ikke behøver være ens.

Definition 6.35 (Kontinuitet i et punkt)**.** Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum, og lad $a \in X$. En afbildning $f : X \to Y$ kaldes *kontinuert* i a dersom der for alle $\epsilon > 0$ eksisterer $\delta > 0$, sådan at for alle $x \in X$ med $d_X(x, a) < \delta$ gælder der $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Definitionen af kontinuitet udvides ligeledes direkte.

Definition 6.36 (Kontinuitet)**.** Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum. En afbildning $f : X \to Y$ kaldes *kontinuert* dersom den er kontinuert i alle $a \in X$.

Den følgende sætning udtrykker sammenhængen mellem kontinuitet og grænseovergang for følger. Den kan bevises på præcis samme måde som Sætning 1.43, som den generaliserer.

Sætning 6.37 (Følgekontinuitet)**.** *Lad $f : X \to Y$ være en afbildning mellem to metriske rum, og lad $a \in X$. Da er f kontinuert i a hvis og kun hvis der for enhver følge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i X gælder*

$$x_n \to a \textit{ for } n \to \infty \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(a) \textit{ for } n \to \infty.$$

Med Lemma 6.22 får vi dermed straks at funktionen $x \mapsto d(x, y)$ er kontinuert for alle y. Ved hjælp af Sætning 6.37 kan vi også nemt vise følgende:

Sætning 6.38 (Sammensætning)**.** *Lad $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ være afbildninger mellem metriske rum, og lad $a \in X$. Hvis f er kontinuert i a og g er kontinuert i $f(a)$, så er $g \circ f$ også kontinuert i a.*

Bevis. For enhver følge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i X som konvergerer mod a får vi fra Sætning 6.37 at $f(x_n)$ konvergerer mod $f(a)$, og dernæst at $g(f(x_n))$ konvergerer mod $g(f(a))$. Ifølge den samme sætning er $g \circ f$ derfor kontinuert i a. □

6.6 Åbne mængder

Vi indfører egenskaben åben for delmængder af et metrisk rum. Det generaliserer en velkendt definition fra $\mathbb{R}^n$ (se [EHM, Afsnit 1.2]). Vi lader et metrisk rum (M, d) være givet.

Kugler

Definition 6.39 (Kugle)**.** Lad $a \in M$ og $r > 0$. Vi kalder

$$K(a, r) := \{x : d(a, x) < r\}$$

kuglen med radius r omkring a.

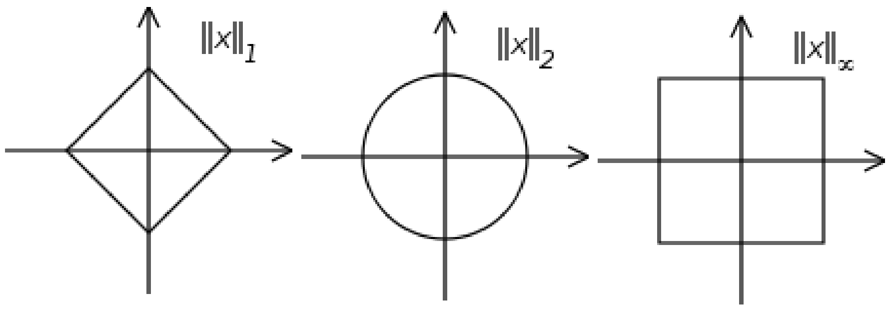
Bemærk det strenge ulighedstegn i definitionen. Ofte omtales $K(a, r)$ som den *åbne* kugle med radius r. Vi skal senere se hvorfor.

Ordet "kugle" kommer naturligvis fra $\mathbb{R}^3$ med euklidisk metrik, men det benyttes helt generelt for alle metriske rum. Når man betragter et metrisk rum kan det ofte understøtte ens intuition at tænke på det som $\mathbb{R}^2$ med euklidisk metrik, og på den metriske kugle $K(a, r)$ som en åben cirkelskive deri. Argumenter bliver derfor illustreret med tegninger af cirkler, selvom kugler med hensyn til andre metrikker kan se helt anderledes ud.

Eksempel 6.40 ($\mathbb{R}^2$)**.** Betragt de tre metriske rum $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$, $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$. De tilsvarende enhedskugler omkring nulpunktet er givet ved:

$$\begin{aligned} K_1(0,1) &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 < 1\}, \\ K_2(0,1) &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\}, \\ K_\infty(0,1) &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty < 1\}, \end{aligned}$$

og er plottet i de følgende grafer.



Eksempel 6.41. Lad $M = [-1, 1] \cup [2, 4] \subset \mathbb{R}$ med den sædvanlige metrik $d(x, y) = |x - y|$ fra $\mathbb{R}$. Her er

$$K(0, 3) = [-1, 1] \cup [2, 3).$$

Indre, ydre og rand Lad $A \subseteq M$ være en delmængde af et metrisk rum. Dens komplementærmængde betegnes A^c.

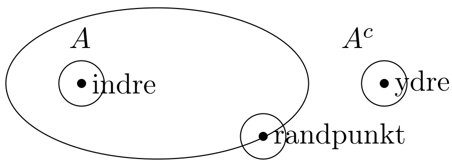
Lemma 6.42. *For hvert $x \in M$ gælder en og kun en af de følgende tre betingelser*

(i) Der findes $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq A$.

(ii) Der findes $r > 0$ så $K(x,r) \subseteq A^c$.

(iii) For hvert $r > 0$ er hverken $K(x,r) \cap A$ eller $K(x,r) \cap A^c$ tom.

Bevis. Hvis $x \in A$ gælder (i) eller (iii), men ikke begge og heller ikke (ii). Tilsvarende gælder (ii) eller (iii) hvis $x \in A^c$, men ikke begge og ikke (i). □



Definition 6.43 (Indre)**.** Et punkt x som opfylder (i) kaldes *indre* i A. Mængden af disse punkter kaldes det *indre* af A og betegnes A°.

Definition 6.44 (Ydre)**.** Et punkt x som opfylder (ii) kaldes *ydre* for A. Mængden af disse punkter kaldes det *ydre* til A.

Der er ingen sæskilt betegnelse for det ydre, idet den kan skrives $(A^c)^\circ$.

Definition 6.45 (Rand)**.** Et punkt x som opfylder (iii) kaldes et *randpunkt*. Mængden af disse punkter kaldes *randen* af A og betegnes ∂A.

Dermed er

$$M = A^\circ \cup \partial A \cup (A^c)^\circ$$

en disjunkt opdeling af M. Vi har $A^\circ \subseteq A$ og $(A^c)^\circ \subseteq A^c$, hvorimod ∂A kan indeholde punkter både fra A og A^c.

Åben mængde

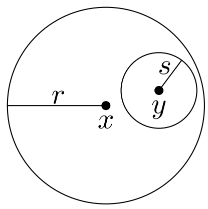
Definition 6.46 (åben)**.** En delmængde $A \subseteq M$ kaldes *åben*, hvis alle dens punkter er indre, altså hvis $A = A^\circ$.

En ækvivalent karakterisering er $A \cap \partial A = \emptyset$.

Eksempel 6.47. For $M = \mathbb{R}^n$ med euklidisk afstand er begrebet præcis det samme som før.

Lemma 6.48. *Kuglen $K(x, r)$ er åben for alle $x \in M$ og alle $r > 0$.*

Bevis. Lad $y \in K(x, r)$. Vi skal vise y er et indre punkt i kuglen.



Vi skal altså finde en kugle $K(y, s)$ omkring y inde i $K(x, r)$.
Da $y \in K(x, r)$ er $d(x, y) < r$. Vi kan derfor vælge s sådan at $0 < s < r - d(x, y)$.

For alle $z \in K(y, s)$ gælder nu ifølge trekantsuligheden

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + s < r$$

Altså er $K(y, s) \subseteq K(x, r)$, og y er dermed indre i $K(x, r)$. □

Lemma 6.49. *For enhver delmængde $A \subseteq M$ er A° åben.*

Resultatet kan også udtrykkes $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

Bevis. Lad $x \in A^\circ$. Vi skal vise x er indre i A°, og vi ved den er indre i A. Det vil sige, vi ved der findes $r > 0$ så $K(x, r) \subseteq A$. Vi viser lemmaet ved at vise, at den samme kugle opfylder $K(x, r) \subseteq A^\circ$.

Lad $y \in K(x, r)$. Ifølge Lemma 6.48 findes $s > 0$ med $K(y, s) \subseteq K(x, r)$. Da $K(x, r) \subseteq A$ slutter vi at $K(y, s) \subseteq A$. Dermed er $y \in A^\circ$, og altså er $K(x, r) \subseteq A^\circ$. □

Kontinuitet udtrykt ved åbne mængder Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum, og lad $f : X \to Y$ være en afbildning. Vi har i Definition 6.36 indført, at f kaldes kontinuert hvis den er kontinuert i hvert punkt $a \in X$. Den følgende alternative karakterisering er vigtig.

For en delmængde $A \subseteq Y$ defineres *originalmængden* ved f som delmængden

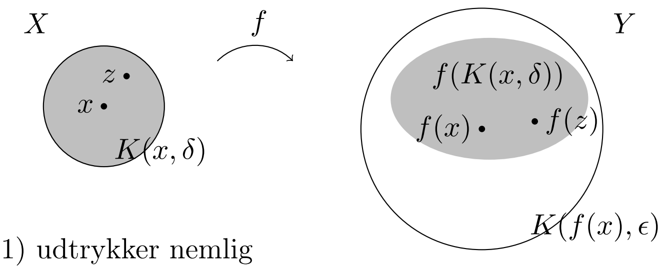
$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

af X.

Sætning 6.50. *En afbildning $f : X \to Y$ er kontinuert, hvis og kun hvis originalmængden $f^{-1}(A)$ er åben i X for enhver åben delmængde A af Y.*

Bevis. Vi starter med at omformulere Definition 6.35 ved hjælp af kugler. Afbildningen f er kontinuert i $x \in X$ hvis og kun hvis

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \quad f(K(x, \delta)) \subseteq K(f(x), \epsilon). \tag{6.1}$$



Inklusionen i (6.1) udtrykker nemlig

$$d_X(z, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(z), f(x)) < \epsilon.$$

Antag f er kontinuert, og lad $A \subseteq Y$ være åben. Vi skal vise, at ethvert $x \in f^{-1}(A)$ er indre i $f^{-1}(A)$. Da A er åben og $f(x) \in A$ findes $\epsilon > 0$ så $K(f(x), \epsilon) \subseteq A$. Da f er kontinuert i x findes ifølge (6.1) et $\delta > 0$ således at $f(K(x, \delta)) \subseteq K(f(x), \epsilon)$. Dermed er $f(K(x, \delta)) \subseteq A$, og $K(x, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$. Det viser x er indre i $f^{-1}(A)$.

Antag omvendt, at $f^{-1}(A)$ er åben i X når A er åben i Y, og lad $x \in X$. For at vise kontinuitet af f i x lader vi $\epsilon > 0$ være givet. Fra Lemma 6.48 ved vi at $K(f(x), \epsilon)$ er åben. Antagelsen om f medfører så, at $f^{-1}(K(f(x), \epsilon))$ er åben. Specielt er x dermed indre punkt i denne originalmængde, hvilket per definition betyder at der findes $\delta > 0$ så $K(x, \delta) \subseteq f^{-1}(K(f(x), \epsilon))$. Altså er $f(K(x, \delta)) \subseteq K(f(x), \epsilon)$ som ønsket i (6.1). $\square$

Eksempel 6.51. I et diskret metrisk rum er alle delmængder åbne, og det følger derfor at hvis X har diskret metrik er alle afbildninger $f : X \to Y$ kontinuerte.

6.7 Afsluttede mængder

Sammen med egenskaben åben har vi også egenskaben afsluttet.

Definition 6.52 (afsluttet)**.** Lad $A \subseteq M$. Mængden $\bar{A} := A \cup \partial A$ kaldes *afslutningen* af A, og vi siger, at A er *afsluttet (lukket)*, hvis $A = \bar{A}$.

Vi har dermed for enhver delmængde at

$$A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}.$$

Mængden A er åben hvis den første inklusion er en lighed, og afsluttet hvis den anden inklusion er en lighed.

Lemma 6.53 (Karakterisering af afslutningen)**.** *Lad $A \subseteq M$ og $x \in M$. Der gælder $x \in \bar{A}$ hvis og kun hvis $K(x, r) \cap A \neq \emptyset$ for alle $r > 0$.*

Bevis. Hvis $x \in \bar{A}$ gælder $x \in A$ eller $x \in \partial A$. I begge tilfælde får vi straks at $K(x, r) \cap A$ aldrig er tom. Det omvendte ses tilsvarende. □

Det følgende eksempel illustrerer, at man skal være lidt forsigtig med intuitionen når det angår det indre og afslutningen af en mængde.

Eksempel 6.54. Lad $M = (0, 2]$ med afstandsfunktionen $|x - y|$ fra $\mathbb{R}$. For dette metriske rum er $\partial[1, 2] = \partial(0, 1) = \{1\}$ og dermed

$$[1, 2]^\circ = (1, 2] \quad \text{og} \quad \overline{(0, 1)} = (0, 1].$$

Sætning 6.55 (dualitet)**.** *Lad (M, d) være et metrisk rum, og lad $A \subseteq M$. Så gælder, at A er afsluttet hvis og kun hvis A^c er åben.*

Bevis. Det følger af den disjunkte opdeling

$$M = A^\circ \cup \partial A \cup (A^c)^\circ \tag{6.2}$$

at begge dele er ækvivalent med at $\partial A \subset A$. □

Det er en hyppig misfortolkning af det ovenstående, at åben og afsluttet er komplementære egenskaber, altså at A er åben hvis og kun hvis A ikke er afsluttet. Det underbygges af ordene åben og lukket (en dør er åben hvis og kun hvis den ikke er lukket). Det er imidlertid forkert. Af de fire typer af intervaller

$$(a,b),\ [a,b),\ (a,b],\ [a,b]$$

er halvdelen jo hverken åbne eller afsluttede i $\mathbb{R}$. Det følgende eksempel viser man også kan komme ud for delmægder som er både åbne og afsluttede.

Eksempel 6.56. Lad $M = [0,1] \cup [2,3]$ med den sædvanlige afstandsfunktion fra $\mathbb{R}$. Delmængden $A = [0,1]$ er både åben og afsluttet i M.

Lemma 6.57. *For enhver delmængde $A \subseteq M$ er $\bar{A}$ afsluttet.*

Bevis. Når vi anvender Lemma 6.49 på A^c får vi at $(A^c)^\circ$ er åben. Fra Sætning 6.55 ses nu at $\bar{A}$ er afsluttet, idet komplementærmængden til $\bar{A}$ netop $(A^c)^\circ$ (se (6.2)). $\square$

Resultatet kan også udtrykkes $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Lemma 6.58. *Lad $A \subseteq M$. Da er $\bar{A}$ mængden af grænsepunkter for konvergente følger med elementer fra A.*

Bevis. Lad $x \in \bar{A}$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ vælges $x_n \in K(x, \frac{1}{n}) \cap A$, hvilket er muligt ifølge Lemma 6.53. Idet $d(x_n, x) \leq \frac{1}{n}$ konvergerer x_n mod x.

Antag omvendt at $x_n \in A$ for alle n, og $x_n \to x \in M$ for $n \to \infty$. Lad $r > 0$. Så findes N så $d(x, x_n) < r$ for alle $n \geq N$. Altså er $K(x,r) \cap A$ ikke tom. Det viser x tilhører $\bar{A}$. $\square$

6.8 Begrænset mængde

Lad $A \subseteq M$ være en delmængde af et metrisk rum.

Definition 6.59 (Diameter og begrænset mængde)**.** Vi siger A er *begrænset* hvis mængden af afstande mellem dens elementer

$$\{d(x,y) \mid x, y \in A\} \subseteq [0, \infty)$$

er begrænset. Den mindste øvre grænse i $[0, \infty[$ kaldes *diameteren* af A og betegnes diam A. For $A \neq \emptyset$ er det

$$\text{diam } A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

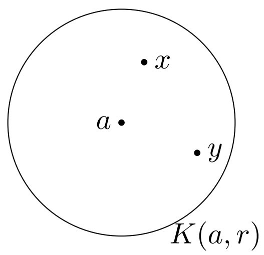
Den tomme mængde er per definition begrænset og har diameter 0.

Det er klart at enhver delmængde af en begrænset mængde også er begrænset.

Eksempel 6.60. Lad $r > 0$.
Kuglen $K(a, r)$ er begrænset, idet

$$d(x, y) \leq d(a, x) + d(a, y) < 2r$$

for alle $x, y \in K(a, r)$.
Altså er diam $K(a, r) \leq 2r$.



Bemærk, at diameteren af $K(a, r)$ ikke nødvendigvis er lig med $2r$. For eksempel i intervallet $M = [0, 1]$ med sædvanlig afstand $|x-y|$ er diam $K(0, r) = 1$ for ethvert $r \geq 1$.

Lemma 6.61. *Lad $a \in M$. For enhver delmængde $A \subseteq M$ gælder, at A er begrænset hvis og kun hvis der findes $r > 0$ således at $A \subseteq K(a, r)$.*

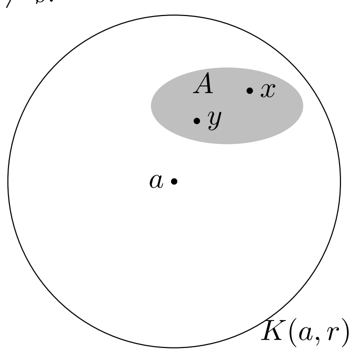
Bevis. Hvis $A \subseteq K(a, r)$ er A begrænset fordi kuglen er det ifølge Eksempel 6.60. Antag omvendt at A er begrænset, det vil sige diam $A < \infty$. Hvis A er tom er konklusionen triviel, så vi antager $A \neq \emptyset$.
Vælg et punkt $y \in A$. For alle $x \in A$ fås

$$d(a, x) \leq d(a, y) + d(y, x).$$

Hvis r vælges så

$$d(a, y) + \text{diam } A < r$$

er $d(a, x) < r$ og dermed $A \subseteq K(a, r)$. $\square$



Eksempel 6.62 (Euklidisk rum)**.** For $M = \mathbb{R}^n$ defineres, at en delmængde A er begrænset, hvis den er indeholdt i en kugle omkring origo, dvs der findes

$r > 0$ så $\|x\| < r$ for alle $x \in A$. Det er ækvivalent med Definition 6.59 ifølge lemmaet herover.

Definitionen er i øvrigt ækvivalent for alle tre normer $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ og $\|x\|_\infty$, idet der gælder

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq d\|x\|_\infty,$$

men diam A er ikke nødvendigvis den samme for de tre metrikker.

6.9 Kompakte mængder

Den sidste og vanskeligste mængdeegenskab vi skal se på er kompakthed. Vi ved fra Analyse 0, at kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$ har fine egenskaber når man betragter dem på en afsluttet og begrænset mængde, for eksempel et interval $[a, b]$. Det giver sig navnlig udtryk i den vigtige ekstremalværdisætning, at en kontinuert funktion defineret på $[a, b]$ antager en største og en mindste værdi. Målet her er at finde en generel betingelse for delmængder af metriske rum, som sikrer noget tilsvarende.

Da vi netop har defineret begge egenskaberne afsluttet og begrænset for et generelt metrisk rum, er et nærliggende gæt, at betingelsen blot generaliseres ved at forlange disse to egenskaber, men det er desværre ikke tilfældet. Som det bliver vist i Eksempel 6.65 herunder, lader ekstremalværdisætningen sig ikke generalisere så let, og der skal mere til for at sikre dens gyldighed.

Vi lægger ud med at give definitionen, hvorefter vi går over til at sammenligne med det vi har set tidligere for talrummene. Dernæst viser vi en generel ekstremalværdisætning for kompakte mængder.

Som før er (M, d) et metrisk rum og $A \subseteq M$ en delmængde. Den følgende definition er inspireret af Bolzano-Weierstrass sætningen (Lemma 1.63):

Enhver begrænset reel talfølge har en konvergent delfølge.

Definition 6.63. A er *kompakt*, hvis enhver følge i A har en delfølge som er konvergent i A.

Det følger af Bolzano-Weierstrass, at i et afsluttet og begrænset interval $[a, b]$ har enhver talfølge en konvergent delfølge med en grænseværdi der ligger i intervallet. Altså er $[a, b]$ kompakt. Det følgende lemma viser den modsatte implikation for et generelt metrisk rum, altså at kompakt medfører både afsluttet og begrænset.

Lemma 6.64. *Lad (M, d) være et metrisk rum, og $A \subseteq M$ en kompakt delmængde. Da er A afsluttet og begrænset.*

Bevis. Vi starter med at vise A er afsluttet, det vil sige $\bar{A} = A$. Lad $x \in \bar{A}$. Vi ved fra Lemma 6.58 at der findes en følge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i A, som konvergerer mod x. Da A er kompakt, har denne følge også en delfølge som konvergerer mod et punkt i A. Ifølge Lemma 6.24 har delfølgen det samme grænsepunkt som moderfølgen, altså x. Vi konkluderer derfor at $x \in A$, og vi har dermed vist $\bar{A} = A$.

Vi viser A er begrænset ved at antage det modsatte og nå en modstrid. Vi vælger et vilkårligt punkt $a \in M$. Ifølge Lemma 6.61 er A ikke indeholdt i $K(a, r)$ for noget $r > 0$. Det medfører, at der findes en følge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i A med $d(x_n, a) \geq n$ for alle n. Da A er kompakt har denne følge en konvergent delfølge x_{n_k}. Ifølge Lemma 6.22 er talfølgen $d(x_{n_k}, a)$ dermed konvergent, selvom den er ubegrænset. Dermed har vi opnået en modstrid. $\square$

Det følgende eksempel viser et metrisk rum, hvor det omvendte udsagn, at enhver afsluttet og begrænset mængde er kompakt, er forkert.

Eksempel 6.65. Lad $M = \mathbb{N}$ udstyret med den diskrete metrik. M er en begrænset delmængde af sig selv, da diameteren er 1. Den er også afsluttet, da et metrisk rum altid er afsluttet som delmængde af sig selv. Til gengæld er den ikke kompakt, da følgen $x_n = n$ ikke har nogen konvergent delfølge. Alle følgens elementer har jo afstand 1 til hinanden. Det samme gælder nødvendigvis også for enhver delfølge, og det umuliggør tydeligvis konvergens.

Bemærk, at funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ defineret ved $f(n) = n$ er kontinuert ligesom enhver funktion $M \to \mathbb{R}$ på et metrisk rum med diskret metrik. Men den antager ikke nogen største værdi, så afsluttet og begrænset er ikke nok til at sikre ekstremalværdisætningens gyldighed.

Bolzano-Weierstrass sætningen for $\mathbb{R}$ (Lemma 1.63) kan generaliseres til alle talrummene $\mathbb{R}^m$. For $\mathbb{R}^2$ er beviset essentielt det samme som for $\mathbb{C}$ (Sætning 1.64), og det generelle tilfælde udnytter den samme metode, som bygger på at tage delfølger af delfølger.

Husk at en delfølge fremkommer fra en følge ved at fjerne nogle af elementerne. Eneste krav, der skal være uendelig mange elementer tilbage, og de skal stå i samme rækkefølge som før.

En del-delfølge fremkommer ved at fjerne endnu flere elementer, med de samme krav igen. Det kunne naturligvis lige så godt have været gjort i et hug, når slutkravet er det samme. Vi konkluderer at en del-delfølge igen er en delfølge af den oprindelige moder-følge.

Det eneste vanskelige i den forbindelse er notationen. Hvis den oprindelige følge betegnes $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fremkommer delfølgen $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ved at sætte ekstra fodtegn k på fodtegnet n for a. En del-delfølge fremkommer derfor ved at sætte ekstra fodtegn på k. Så det bliver til $\{a_{n_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$.

Det er i virkeligheden en sammensat funktion

$$l \mapsto k_l \mapsto n_{k_l} \mapsto a_{n_{k_l}}, \quad \underbrace{\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}}_{\text{strengt voksende}} \to M,$$

og pointen er at sammensætningen af to strengt voksende funktioner $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ selv er en strengt voksende funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Sætning 6.66 (Bolzano-Weierstrass for $\mathbb{R}^m$)**.** *For alle delmængder $A \subseteq \mathbb{R}^m$ gælder, at A er kompakt hvis og kun hvis den er afsluttet og begrænset.*

Bevis. $\Rightarrow$ er vist generelt i Lemma 6.64.
$\Leftarrow$: Lad der være givet en følge i A. Vi skriver følgens elementer på formen $x(n) = (x_1(n), \ldots, x_m(n))$. Da A er begrænset er hver af talfølgerne af koordinater $\{x_j(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ begrænset, idet

$$|x_j(n)|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i(n)|^2 = \|x\|_2^2.$$

For hvert $j = 1, \ldots, m$ kan vi ifølge Bolzano-Weierstrass finde en delfølge $x(n_k)$ af $x(n)$, således at talfølgen $x_j(n_k)$ af de j-te koordinater konvergerer for $k \to \infty$. På forhånd er det bare ikke sikkert at det kan gøres med den samme delfølge for alle j. Det er derfor vi får brug for del-delfølger.

Først vælges delfølgen $x(n_k)$, så der er konvergens for førstekoordinaterne:

$$\lim_{k\to\infty} x_1(n_k) = y_1.$$

Til delfølgen $x(n_k)$ finder vi dernæst en delfølge, for hvilken der er konvergens for andenkoordinaterne:

$$\lim_{l\to\infty} x_2(n_{k_l}) = y_2.$$

Bemærk, at ifølge Lemma 6.24 gælder

$$\lim_{l\to\infty} x_1(n_{k_l}) = \lim_{k\to\infty} x_1(n_k) = y_1.$$

Vi fortsætter på den måde og finder efter m skridt en del-...-delfølge af $x(n)$, for hvilken der er konvergens i alle koordinaterne. Jævnfør Eksempel 6.21 er koordinatvis konvergens det samme som konvergens med hensyn til den euklidiske metrik, så vores del-...-delfølge konvergerer i $\mathbb{R}^m$. Da A er afsluttet ligger grænsepunktet i A, og da del-...-delfølgen i virkeligheden bare er en delfølge har vi opnået det vi skulle. □

Kontinuitet og kompakthed Motivet for vores interesse for kompakte mængder kommer som tidligere nævnt fra korollaret til den følgende sætning.

Sætning 6.67. *Lad $f : X \to Y$ være en kontinuert afbildning mellem to metriske rum. Da er $f(A) \subseteq Y$ kompakt for enhver kompakt mængde $A \subseteq X$.*

Bevis. Vi skal vise at enhver følge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $f(A)$ har en delfølge, som konvergerer mod et element i $f(A)$. For hvert n er $y_n \in f(A)$, så der findes $x_n \in A$ med $f(x_n) = y_n$. Da A er kompakt har følgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en konvergent delfølge x_{n_k} med grænsepunkt $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in A$. Da f er kontinuert får vi fra Sætning 6.37 at $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(A)$ for $k \to \infty$. Dermed er sætningen vist. □

Korollar 6.68 (Ekstremalværdisætningen)**.** *Lad M være et metrisk rum. Enhver kontinuert funktion $f : M \to \mathbb{R}$ antager en største og en mindste værdi på enhver kompakt ikke-tom delmængde A af M.*

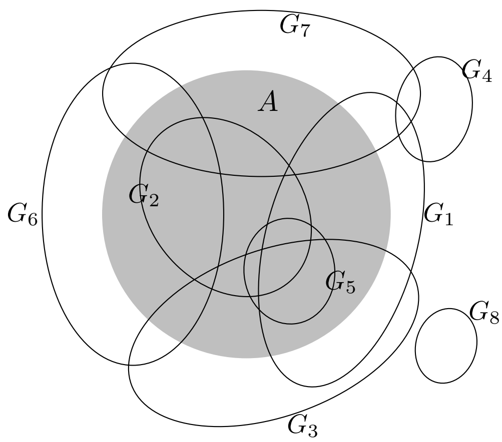
Bevis. Den foregående sætning viser, at $f(A)$ er en kompakt delmængde i $\mathbb{R}$, og Lemma 6.64 viser dernæst, at $f(A)$ er afsluttet og begrænset. Den indeholder derfor sit supremum og sit infimum. □

Udtyndningssætningen Vi afslutter kapitlet med en vigtig sætning, som karakteriserer de kompakte mængder ved hjælp af åbne mængder. Før vi kan formulere sætningen, definerer vi:

Definition 6.69. Lad $A \subseteq M$ være en delmængde af et metrisk rum. En *overdækning* af A er en samling $\{G_i\}_{i\in I}$ af delmængder $G_i \subseteq M$, som opfylder

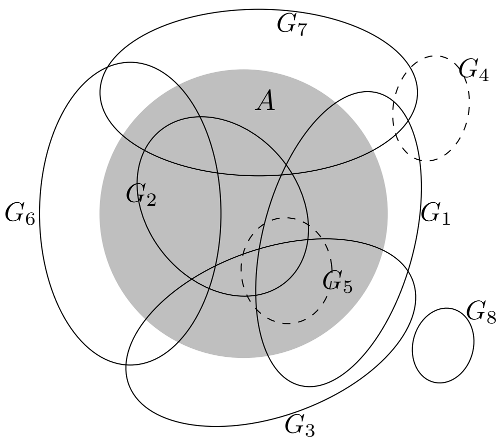
$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i.$$

Hvis alle mængderne G_i er åbne kaldes overdækningen for en *åben overdækning*. Indeksmængden I kan være en hvilken som helst mængde, og overdækningen kaldes *endelig* hvis I er endelig.



Samlingen $\{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8\}$ er en endelig overdækning af A.

Nogle af de mængder der deltager i en overdækning af A kan være overflødige, således at A stadig er overdækket hvis man tager dem fra. Det kaldes at *udtynde* overdækningen.



$\{G_1, G_2, G_3, G_6, G_7, G_8\}$ er en udtynding af $\{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8\}$.

Definition 6.70. Antag samlingen af mængder $\{G_i\}_{i\in I}$ er en overdækning af A, og lad $J \subseteq I$ være en delmængde af I. Hvis $\{G_i\}_{i\in J}$ også er en overdækning af A kaldes den en *udtynding* af den oprindelige overdækning.

Eksempel 6.71. Lad $M = \mathbb{R}$. Samlingen $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ defineret ved

$$G_n = \left(\frac{n}{4}, \frac{n+2}{4}\right)$$

er en åben overdækning af $A = [0,1]$ (den overdækker faktisk hele $\mathbb{R}$). Med

$$\{G_{-1}, G_0, G_1, G_2, G_3\}$$

fås en endelig udtynding. De fem intervaller

$$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

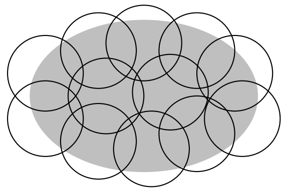
overdækker nemlig stadig $[0,1]$.

Sætning 6.72 (Udtyndingssætningen)**.** *Lad $A \subseteq M$ være en kompakt delmængde af et metrisk rum. Enhver åben overdækning af A kan udtyndes til en endelig overdækning af A.*

Før vi beviser sætningen kigger vi på et specialtilfælde. Vi antager at $A \subseteq M$ er kompakt. For ethvert $r > 0$ kan vi anvende udtyndingssætningen på overdækningen

$$A \subseteq \bigcup_{a\in A} K(a,r)$$

og dermed få en endelig overdækning af A med kugler der alle har samme radius r. Det er udsagnet i det følgende lemma.



Lemma 6.73. *For hvert $r > 0$ findes endelig mange $a_1, \dots, a_m \in A$ så*

$$A \subseteq K(a_1, r) \cup \cdots \cup K(a_m, r).$$

Bevis. Lemmaet er godt nok et specialtilfælde af udtyndingssætningen, men planen er også at bruge det til at vise den. Her er et selvstændigt bevis.

Vi kan antage A ikke er tom, og vælger $x_1 \in A$. Vi vælger dernæst successivt $x_2, x_3, \dots \in A$ således at

$$x_{n+1} \notin K(x_1, r) \cup \cdots \cup K(x_n, r).$$

Hvis denne proces stopper er lemmaets konklusion opfyldt.

Antag den ikke stopper. Så fås en følge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fra A med $d(x_n, x_k) \geq r$ for alle $k \neq n$. Sådan en følge kan umuligt have en konvergent delfølge, eftersom delfølgen ikke ville være Cauchy, i modstrid med Lemma 6.26. □

Det centrale skridt i beviset for udtyndingssætningen giver et resultat, der også har selvstændig interesse. Det formulerer vi derfor også i et lemma.

Lemma 6.74 (Lebesgues overdækningslemma)**.** *Lad $\{G_i\}_{i\in I}$ være en åben overdækning af en kompakt mængde $A \subseteq M$. Der findes et tal $s > 0$ sådan at for hvert $x \in A$ er hele kuglen $K(x, s)$ indeholdt i mindst en af overdækningsmængderne G_i.*

Tallet s er et mål for hvor lidt overlap der er mellem overdækningsmængderne, og lemmaet siger at for enhver overdækning er der et positivt mindste overlap.

Eksempel 6.75. Lad os overdække $A = [0, 1]$ med to åbne intervaller

$$A \subseteq (-1, b) \cup (a, 2)$$

hvor $0 < a < b < 1$. Sæt $s = \frac{1}{2}(b - a)$. Ethvert interval $(x - s, x + s)$ med $x \in [0, 1]$ vil så ligge helt inde i et eller begge intervaller, idet der ikke samtidig kan gælde både $x - s < a$ og $x + s > b$.

Bevis for Lemma 6.74. Antag sådan et tal s ikke eksisterer. Så findes for hvert $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \in A$, sådan at $K(x_n, \frac{1}{n})$ ikke ligger inde i G_i for noget i.

Da A er kompakt har følgen $\{x_n\}$ en delfølge $\{x_{n_k}\}$ som konvergerer mod et $x \in A$. Dette punkt x tilhører en af mængderne G_i, eftersom de overdækker A.

Da G_i er åben findes $r > 0$ så $K(x, r) \subseteq G_i$, og da delfølgen konvergerer mod x findes $n_k > \frac{2}{r}$ så $x_{n_k} \in K(x, \frac{r}{2})$. Nu har vi

$$K(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subseteq K(x_{n_k}, \frac{r}{2}) \subseteq K(x, r) \subseteq G_i$$

Det er en modstrid. □

Bevis for Sætning 6.72. Lad $\{G_i\}_{i \in I}$ være en åben overdækning af A. Vi skal vise den har en endelig udtynding.

Ifølge Lemma 6.74 findes $s > 0$ så ethvert $x \in A$ opfylder

$$K(x, s) \subseteq G_i$$

for mindst et $i \in I$, og ifølge Lemma 6.73 findes $x_1, \dots, x_m \in A$ så

$$A \subseteq K(x_1, s) \cup \cdots \cup K(x_m, s).$$

For $k = 1, \dots, m$ kan vi vælge i_k så $K(x_k, s) \subseteq G_{i_k}$. Så er

$$A \subseteq G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m}$$

og sætningen er vist. □

Det omvendte udsagn til Sætning 6.72 gælder også:

Sætning 6.76. *Lad (M, d) være et metrisk rum og $A \subseteq M$ en delmængde. Antag enhver åben overdækning af A kan udtyndes til en endelig overdækning af A. Da er A kompakt.*

Bevis. Lad $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge i A. Vi skal vise den har en konvergent delfølge.

Vi starter med at gøre en antagelse og vise den ikke kan være sand. Antagelsen er, at omkring hvert $a \in A$ findes en kugle som kun indeholder x_n for endelig mange n. Alle disse kugler udgør en åben overdækning af A

fordi hvert element fra A ligger i mindst en af kuglerne, nemlig den som det selv er centrum i. De har derfor en endelig udtynding. Det vil sige A er overdækket af endelig mange kugler, der hver især kun indeholder endelig mange led af følgen. Det er tydeligvis umuligt.

Altså eksisterer der et punkt $a \in A$, omkring hvilket enhver kugle indeholder x_n for uendelig mange n. Vi kan nu vælge delfølgens indices n_k rekursivt. Vi vælger først n_1 så $x_{n_1} \in K(a, 1)$, dernæst $n_2 > n_1$ så $x_{n_2} \in K(a, \frac{1}{2})$ og så videre. Fordi der er uendelig mange følgeelementer i hver kugle $K(a, \frac{1}{k})$, kan vi altid finde et som kommer efter det seneste vi har valgt. Det giver en delfølge, og da $d(a, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$ for alle k, konvergerer den mod $a \in A$. $\square$

At A er kompakt er altså ækvivalent med at enhver overdækning af A kan udtyndes til en endelig en. Denne ækvivalente betingelse benyttes ofte som en alternativ definition af kompakthed.

Litteratur

[EHM] Søren Eilers, Ernst Hansen og Tage Gutmann Madsen: Indledende matematisk analyse. 12. udgave, 2021. Institut for Matematiske fag, Københavns Universitet.

[HW] Lars Hesselholt og Nathalie Wahl: Lineær algebra. 1. udgave, 2016. Institut for Matematiske fag, Københavns Universitet.

[Li] Tom Lindstrøm: Kalkulus, 4. utgave. Universitetsforlaget, Oslo.

[Lü] Jesper Lützen: Diskrete Matematiske Metoder. 2. udgave, 2019. Institut for Matematiske fag, Københavns Universitet.

Indeks