Matematik 3 MI

Mål– og integralteori

Christian Berg

og

Tage Gutmann Madsen

FORORD

Nærværende notesæt er forfattet af Christian Berg, og har tidligere været anvendt til kurset 2MA, hvor det indgik som kapitel II udaf ialt tre kapitler. Kapitel I omhandlede metriske rum.

Notesættet er baseret på noter forfattet af Tage Gutmann Madsen i 1970-erne til brug for kurset Mat 212.

Til notesættet er føjet et appendix af Michael Rørdam med et bevis for Lebesguemålets eksistens.

Januar 2001

Christian Berg

Mål- og integralteori

Kapitel II. Mål- og integralteori

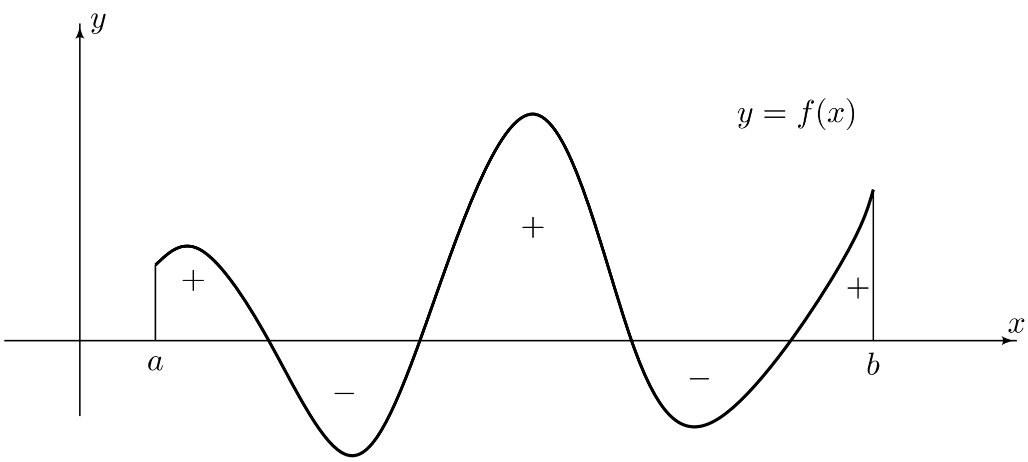
§i. Indledning

Når der i dette kapitel tales om integralet af en funktion eller skrives $\int f(x)dx$, $\int f(x)d\mu(x)$, $\int f d\mu$ o.lign., menes altid et tal, nemlig en grænseværdi for visse summer. Integraltegnet $\int$, indført af Leibniz (1675), er i øvrigt afledt af bogstavet S for det latinske ord summa.

For os er et integral således, hvad man også kalder et bestemt integral. Gængse betegnelser som $\int_a^b f(x)dx$, der skyldes Fourier (1816), vil naturligvis blive benyttet, når der er behov for at præcisere integrationsområdet.

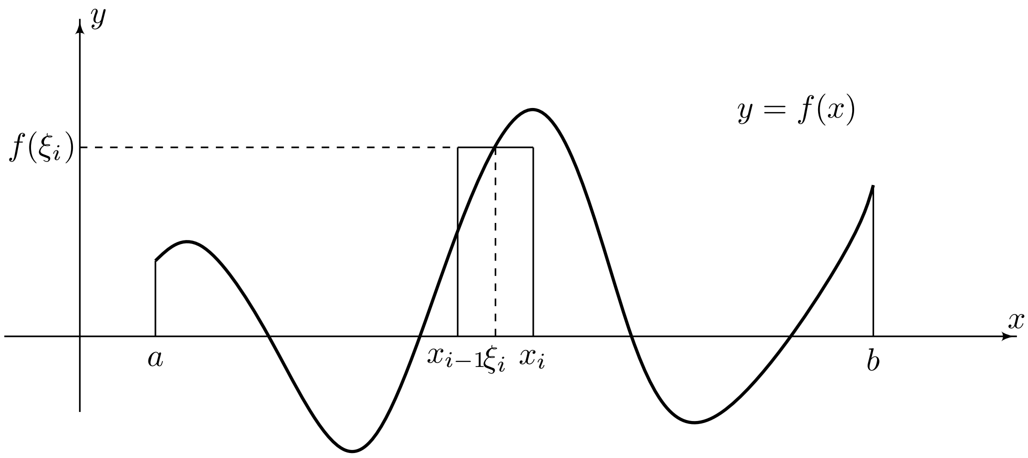
Om integralbegrebets udvikling

Før Cauchy lod man sig nøje med at sige, hvilke arealer man skulle addere eller subtrahere for at opnå integralet $\int_a^b f(x)dx$ af en funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.



Til tilnærmet beregning af en sådan arealstørrelse har vel landmålere og matematikere til alle tider brugt *middelsummer*

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$



med $a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \leq \ldots \leq x_n = b$. Cauchy tager ikke længere arealstørrelsen for givet. Han *beviser*, at hvis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er *kontinuert*, da findes et tal I, således at $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |S - I| < \varepsilon$ for enhver inddeling med $\max_i(x_i - x_{i-1}) < \delta$, og *definerer derpå* $\int_a^b f(x)dx$ som grænseværdien I for middelsummerne. (1823).

Riemann definerer $\int_a^b f(x)dx$ på samme måde, men for enhver funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, hvor middelsummerne har en grænseværdi. (1854).

Riemann integralet, som det nu kaldes, vil vi dog foretrække at indføre som først gjort af den franske matematiker Darboux (1873):

Lad $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ være en begrænset funktion.

Et tal $U \in \mathbb{R}$ kaldes da en *undersum* for f, hvis der findes en inddeling $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ samt tal $u_1, \cdots, u_n$, hvor

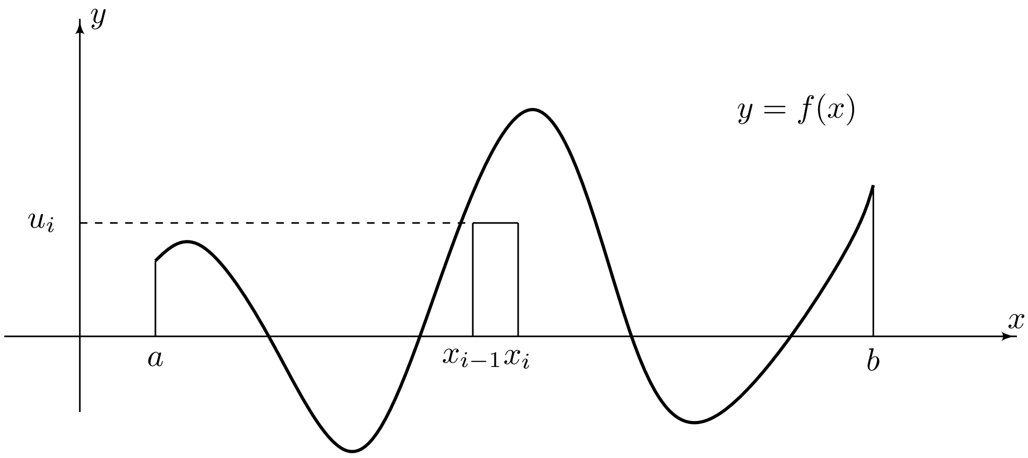
$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i] : u_i \leq f(x)\,, \qquad i = 1, \cdots, n\,,$$

således at $U = \sum_{i=1}^n u_i(x_i - x_{i-1})$. – Se figur på side i.3.

Nedre Riemann integral af f, $\underline{\int}_a^b f(x)dx$, defineres nu som øvre grænse for alle undersummer. *Øvre Riemann integral* af f, $\overline{\int}_a^b f(x)dx$ defineres ganske analogt som nedre grænse for alle *oversummer*.

Idet enhver undersum er mindre eller lig enhver oversum, har man

$$\underline{\int}_a^b f(x)dx \leq \overline{\int}_a^b f(x)dx\,.$$



Hvis der her gælder lighedstegn, siges f at være *Riemann integrabel*, den fælles værdi kaldes *Riemann integralet* af f og betegnes $\int_a^b f(x)dx$.

Riemanns integralbegreb har desværre en alvorlig mangel: De Riemann integrable funktioner udgør ikke noget velafrundet område ved grænseovergang.

Eksempelvis kunne man ønske sig bekvemme regler af form

$$\int_0^1 (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)dx\,.$$

Betragt imidlertid for hvert $q \in \mathbb{Q}$, $0 < q \leq 1$, funktionen $f_q :]0,1] \to [0,\infty[$ givet ved

$$f_q(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = q \\ 0 & \text{for } x \neq q\,. \end{cases}$$

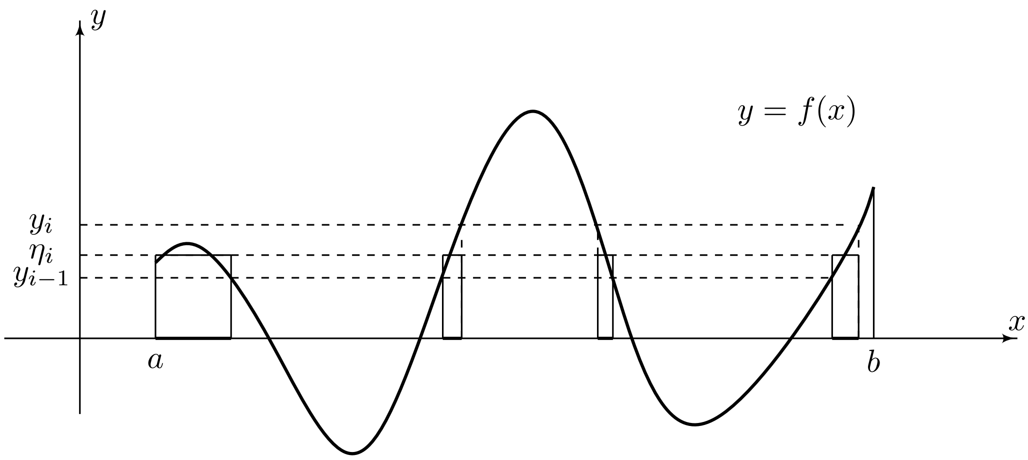
Alle funktionerne er Riemann integrable med integralet 0, således at

$$\sum_q \int_0^1 f_q(x)dx = 0\,,$$

men sum- og integraltegn kan ikke ombyttes; funktionen $\sum_q f_q$ er ikke Riemann integrabel. Det er den såkaldte *Dirichlet funktion*, med værdi 1 i hvert rationalt, 0 i hvert irrationalt punkt i intervallet $]0,1]$; øvre Riemann integral er lig 1, nedre Riemann integral lig 0.

Det er imidlertid lykkedes den franske matematiker Lebesgue (Intégrale, longueur, aire. Thèse. Paris 1902) at indføre et nyt integralbegreb, der indfrier alle rimelige forventninger vedrørende grænseovergang. Lebesgue integralet blev et afgørende gennembrud, en væsentlig forudsætning for den matematiske analyses udvikling i indeværende århundrede.

På dette sted vil vi nøjes med at skitsere, hvordan Lebesgue definerede integralet af en begrænset funktion $f :]a, b] \to \mathbb{R}$.



En *Lebesgue middelsum* har formen

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \cdot m(E_i)\,,$$

hvor

$$\forall x \in]a, b] : y_0 < f(x) \le y_n$$
$$y_0 \le \eta_1 \le y_1 \le \eta_2 \le \ldots \le y_{i-1} \le \eta_i \le y_i \le \ldots \le \eta_n \le y_n$$
$$E_i = \{x \in]a, b] \mid y_{i-1} < f(x) \le y_i\}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

og $m(E_i)$ betyder "den samlede længde" af E_i.

Man bemærker, at der inddeles efter funktionsværdier.

Lebesgue indførte så integralet $\int_a^b f(x)dx$ som den eventuelle grænseværdi for middelsummer, svarende til $\max_i(y_i - y_{i-1}) \to 0$.

Til belysning af forskellen fra Riemanns fremgangsmåde giver vi Lebesgue ordet (Foredrag i Dansk Matematisk Forening, se Matematisk Tidsskrift B 1926, p.54 ff):

> ... . On peut dire encore que, avec le procédé de Riemann, on essayait de sommer les valeurs de la fonction en les prenant dans l'ordre où ils étaient fournis par la variation de x, on opérait donc comme le ferait un commerçant sans méthode qui compterait pièces et billets au hasard de l'ordre où ils lui tomberaient sous la main; tandis que nous opérons comme le commerçant méthodique qui dit:
>
> j'ai $m(E_1)$ pièces de 1 couronne valant $1 \cdot m(E_1)$,
> j'ai $m(E_2)$ pièces de 2 couronnes valant $2 \cdot m(E_2)$,
> j'ai $m(E_3)$ billets de 5 couronnes valant $5 \cdot m(E_2)$,
>
> etc., j'ai donc en tout:
>
> $$S = 1 \cdot m(E_1) + 2 \cdot m(E_2) + 5 \cdot m(E_3) + \cdots .$$
>
> Les deux procédés conduiront, certes, le commerçant au même résultat parceque, si riche qu'il soit, il n'a qu'un nombre fini de billets à compter; mais pour nous, qui avons à additionner une infinité de valeurs, la différence entre les deux façons de faire est capitale.

Til Lebesgues integraldefinition knytter vi nogle bemærkninger.

1. Mængderne E_i kan være yderst komplicerede. Dannelsen af Lebesgue middelsummer forudsætter derfor et nærmere studium af begrebet "samlet længde", også kaldet Lebesgue mål, for vilde delmængder af $\mathbb{R}$.
2. Under forudsætning af et tilsvarende hold på areal, volumen, ... , ligeledes kaldet Lebesgue mål, for vilde delmængder af $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$ kan Lebesgue integralet for funktioner af 2, 3 eller flere reelle variable indføres ganske som for funktioner af 1 variabel. Ovenfor erstattes blot intervallet $]a, b]$ med funktionens definitionsmængde.
3. Tænker man sig en massefordeling på linien (eller i planen, rummet,...) får man ved at lade $m(E_i)$ betyde den samlede masse i E_i, men i øvrigt gå frem som før, hvad der kaldes *integralet* af f med hensyn til den givne massefordeling. (Johann Radon 1913.) Videre:
4. Det er kun få, fundamentale egenskaber ved længde, areal, volumen,... der benyttes ved definitionen af Lebesgue integralet og ved beviserne vedrørende grænseovergang med dette. Idet man af et *mål* μ i en (abstrakt) mængde netop kræver disse egenskaber, kan så hovedtræk af teorien overføres til integration med hensyn til et vilkårligt mål. (Maurice Fréchet 1915.)

Nærmere om integralbegrebets udvikling kan man læse i I. Pesin: Classical and modern integration theories (Moskva 1966; Academic Press 1970). Se også Lebesgues ovennævnte foredrag samt N. Bourbaki: Éléments d'histoire des mathématique (Hermann 1960) for kortere oversigter.

Her går vi frem modsat den historiske udvikling, idet vi starter med den abstrakte mål- og integralteori. (Se 4. ovenfor.) Selv om vi ikke havde andet sigte end Lebesgue integralet, ville denne fremgangsmåde dog have den fordel, at hovedtrækkene fremstår klarere, når teorien er befriet for irrelevante forudsætninger. På den anden side bør man stedse have det konkrete hovedtilfælde i tankerne: Lebesgue integralet i $\mathbb{R}^k$.

Vi vil i øvrigt ikke i detaljer følge Lebesgue i definitionen af integral, men benytte en af de mange mulige varianter, der bl.a. tillader os straks at inddrage også ubegrænsede funktioner, defineret f.eks. på hele $\mathbb{R}^k$.

En anden fordel ved den abstrakte teori er, at den omfatter grundlaget for sandsynlighedsregning. En sandsynlighed er et mål med total masse en. En stokastisk variabel er en målelig afbildning og middelværdi er integralet med hensyn til en sandsynlighed.

Lad os slutte denne historiske indledning med at sammenligne talbegrebet med integralbegrebet.

Til praktiske formål er de rationale tal tilstrækkelige. En regnemaskine kan kun give os et rationalt facit. Alligevel er det fra et teoretisk synspunkt fundamentalt at have alle reelle tal til rådighed. (En begrænset talmængde har et supremum, Cauchy-følger er konvergente).

I praksis møder man hovedsagelig integralet af kontinuerte funktioner, eventuelt af stykkevis kontinuerte funktioner. Alligevel er det fra et teoretisk synspunkt fundamentalt, at kunne integrere en større klasse af funktioner – de Lebesgue integrable – fordi denne klasse af funktioner er lukket overfor grænseprocesser, der svarer til at en voksende begrænset talfølge er konvergent.

At stoppe ved Riemann integralet ville være som at nøjes med en del af de reelle tal.

Henri Lebesgue (1875–1941)

§0. Regning med $\pm\infty$.

0.1. Den udvidede tallinie

Det er undertiden bekvemt at udvide mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal med to ekstra elementer, som vi vil betegne ∞ og $-\infty$.

Vi sætter $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, (i Mat 1 MA betegnet $\mathbb{R}^*$).

Enhver ikke tom mængde $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ har et *mindste overtal* $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}$ og et *største undertal* $\inf A \in \overline{\mathbb{R}}$.

For en talfølge (a_n) fra $\overline{\mathbb{R}}$ minder vi om *limes superior*

$$\limsup_n a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{p\geq 1} \sup\{a_n \mid n \geq p\} \in \overline{\mathbb{R}},$$

som altså er grænseværdien (=infimum) af den dalende talfølge $\lambda_p = \sup\{a_n \mid n \geq p\}$.

Tilsvarende defineres *limes inferior* ved

$$\liminf_n a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{p\geq 1} \inf\{a_n \mid n \geq p\} \in \overline{\mathbb{R}},$$

altså som grænseværdien (=supremum) af den stigende talfølge $\delta_p = \inf\{a_n \mid n \geq p\}$.

SÆTNING 0.1. *En talfølge (a_n) fra $\overline{\mathbb{R}}$ er konvergent hvis og kun hvis*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Beviset henvises til opg. 0.9.

Når ∞ indgår som led i en sum $\sum_{i=1}^n a_i,\ a_i \in \overline{\mathbb{R}}$ men $-\infty$ ikke gør det, sættes $\sum_{i=1}^n a_i = \infty$.

Når $-\infty$ indgår som led i en sum $\sum_{i=1}^n a_i,\ a_i \in \overline{\mathbb{R}}$, men ∞ ikke gør det, sættes $\sum_{i=1}^n a_i = -\infty$.

En sum, hvor både ∞ og $-\infty$ indgår som led, *tillægges ikke mening.* F.eks. er $\infty + (-\infty)$ *ikke* defineret.

En differens $b - a$ tolkes som $b + (-a)$. F.eks. er da $\infty - \infty$ *ikke* defineret.

Ethvert produkt ab med $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tillægges en mening, idet vi sætter

$$\begin{aligned} &0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0 \\ &c(\pm\infty) = (\pm\infty)c = \pm\infty \qquad \text{når } 0 < c \leq \infty, \\ &c(\pm\infty) = (\pm\infty)c = \mp\infty \qquad \text{når } -\infty \leq c < 0. \end{aligned}$$

Multiplikationen i $\overline{\mathbb{R}}$ er da kommutativ og associativ.

Der er ikke meget pænt at sige om regneoperationerne i $\overline{\mathbb{R}}$. I almindelighed arbejder vi da også i $\mathbb{R}$ eller i $[0, \infty]$.

Lad os dog til senere brug nævne følgende regler:

$$\begin{aligned} a+b=c \Leftrightarrow a=c-b \quad & \text{når } b \in \mathbb{R} \quad \text{og } a, c \in \overline{\mathbb{R}} \\ a+b \leq a+c \Leftrightarrow b \leq c \quad & \text{når } a \in \mathbb{R} \quad \text{og } b, c \in \overline{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

0.2. Summer $\sum_{j \in J} a_j$ med $0 \leq a_j \leq \infty$.

I $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ kan og vil vi boltre os, hvad angår multiplikation og især addition. Først bemærkes, at begge regneoperationer inden for $\overline{\mathbb{R}}_+$ er kommutative og associative, og at den distributive lov gælder. Herved vil vi dog ikke blive stående.

Vi definerer *summen* $\sum_{j \in J} a_j$ af en *vilkårlig* familie $(a_j)_{j \in J}$ af tal $a_j \in \overline{\mathbb{R}}_+$ som supremum af alle endelige delsummer, altså

$$\sum_{j \in J} a_j = \sup \sum_{j \in I^*} a_j \ ,$$

hvor supremum tages over alle endelige delmængder I^* af indeksmængden J.

Dette er naturligvis kun noget nyt, hvis J er uendelig.

Vi nævner 3 vigtige resultater om summer:

1° *Splittes J i (gerne uendelig mange) delmængder J_k, $k \in K$ da er $\sum_{j \in J} a_j$ lig summen af summerne $\sum_{j \in J_k} a_j$. Mere formelt skrevet*

$$\sum_{j \in J} a_j = \sum_{k \in K} \sum_{j \in J_k} a_j$$

når $J = \bigcup_{k \in K} J_k$ med $J_{k_1} \cap J_{k_2} = \varnothing$ for $k_1 \neq k_2$. (Vi regner $\sum_{j \in \varnothing} a_j = 0$, for det tilfælde at $J_k = \varnothing$ for et eller flere k.)

For bevis, se opg. 0.6. – Resultatet finder specielt anvendelse på dobbeltsummer: For enhver familie $(b_{hk})_{(h,k) \in H \times K}$ af tal $b_{hk} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ er

$$\sum_h \sum_k b_{hk} = \sum_{h,k} b_{hk} = \sum_k \sum_h b_{hk} \, .$$

I almindeliggørelse af den distributive lov gælder der i $\overline{\mathbb{R}}_+$

2° $\quad b \sum_{j \in J} a_j = \sum_{j \in J} (b a_j)$.

Endelig gælder:

3° *Hvis en sum* $\sum_{j\in J} a_j,\ a_j \in \overline{\mathbb{R}}_+$, *har en endelig værdi, altså hvis*

$$\sum_{j\in J} a_j < \infty\,,$$

så er $a_j \neq 0$ *for kun tælleligt mange indices* $j \in J$.

Antag nemlig $\sum_{j\in J} a_j = s < \infty$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er der da højst endelig mange $j \in J$ med $a_j \geq 1/n$; antallet er begrænset af ns.

En sum $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j,\ a_j \in \overline{\mathbb{R}}_+$, med $\mathbb{N}$ som indeksmængde kan tolkes som en *rækkesum:* Der gælder nemlig

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \nearrow \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \quad \text{for } n \to \infty\,.$$

Summen betegnes derfor også $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Eksempelvis er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty\,.$$

(Summer $\sum_{j\in J} a_j$ med $a_j \in \mathbb{R}$, eller $a_j \in \mathbb{C}$, behandles i §4.6.)

Opgaver til §0

0.1. For en vilkårlig følge $A_1, A_2, \dots$ af delmængder af en grundmængde X sættes

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{p\geq 1} \bigcap_{n\geq p} A_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{n\geq p} A_n.$$

1° Vis, at

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n\,.$$

2° Vis, at

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X \mid \exists p\ \forall n \geq p : x \in A_n\}\,,$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X \mid \forall p\ \exists n \geq p : x \in A_n\}\,.$$

(Bemærk, at

$\exists p\ \forall n \geq p : x \in A_n \Leftrightarrow x$ tilhører alle A_n fra et vist trin,

$\forall p\ \exists n \geq p : x \in A_n \Leftrightarrow x$ tilhører mængder A_n med vilkårligt høje numre.)

3° Gør rede for, at $\liminf_n A_n$ og $\limsup_n A_n$ bevares ved omordning af følgen $A_1, A_2, \dots$.

0.2. Bestem limes inferior og limes superior (se opg. 0.1) for følgerne

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \text{og}\ \ B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots\,,$$
$$\varnothing, X, \varnothing, X, \varnothing, X, \dots\,,$$
$$C_1, C_2, \dots\,, \quad \text{hvor}\ \ C_n = \left]\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[\subseteq \mathbb{R}\,.$$

Ved *indikatorfunktionen* (med grundmængde X) for en delmængde A af en given mængde $X \neq \varnothing$ forstås funktionen $1_A : X \to \{0,1\}$, hvor

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{for } x \in \complement A = X \setminus A\,. \end{cases}$$

0.3.

1° Lad A og B være delmængder af en (grund)mængde X. Gør rede for, at

$$\begin{aligned} 1_{\complement A} &= 1 - 1_A \,, \\ 1_{A\cup B} &= \sup\{1_A, 1_B\} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B} \,, \\ 1_{A\cap B} &= \inf\{1_A, 1_B\} = 1_A + 1_B - 1_{A\cup B} \,. \end{aligned}$$

2° Lad $(A_j)_{j\in J}$ være en familie af delmængder af X. Gør rede for, at

$$1_{\cup_j A_j} = \sup_j 1_{A_j} \ , \ 1_{\cap_j A_j} = \inf_j \ 1_{A_j} \,.$$

0.4. Lad $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af delmængder af en grundmængde X. Gør rede for, at

$$1_{\liminf A_n} = \liminf 1_{A_n} \ , \ 1_{\limsup A_n} = \limsup 1_{A_n} \,.$$

(Se opg. 0.1.)

0.5.

1° Idet $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ og $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+$ er ikke tomme, skal man vise, at

$$\begin{aligned} \sup(a+B) &= a + \sup B \,, \\ \sup aB &= a \cdot \sup B \,, \\ \sup(A+B) &= \sup A + \sup B \,, \\ \sup(AB) &= \sup A \cdot \sup B \,. \end{aligned}$$

Her er

$$\begin{aligned} &a + B = \{a + b \mid b \in B\}, \qquad \{aB = ab \mid b \in B\} \\ &A + B = \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\},\ AB = \{ab \mid a \in A,\, b \in B\}. \end{aligned}$$

2° Gælder det samme med infimum i stedet for supremum?

0.6. Lad $(a_j)_{j\in J}$ være en familie af tal $a_j \in [0, \infty]$.

1° Vis, at

$$\sum_{j\in J_1\cup J_2} a_j = \sum_{j\in J_1} a_j + \sum_{j\in J_2} a_j \,,$$

når $J_1, J_2 \subseteq J$ er disjunkte, dvs. $J_1 \cap J_2 = \varnothing$.

(*Vink:* Man kan benytte opg. 0.5.)

2° Vis, at

$$\sum_{j \in \bigcup_{k=1}^{n} J_k} a_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in J_k} a_j \,,$$

når $J_1, \dots, J_n \subseteq J$ er parvis disjunkte.

3° Vis, at

$$\sum_{j \in J} a_j = \sum_{k \in K} \sum_{j \in J_k} a_j \,,$$

når $J = \cup_{k \in K} J_k$, hvor $(J_k)_{k \in K}$ er en familie af parvis disjunkte mængder.

0.7. Gør rede for, at reglen om dobbeltsummer i noterne er et specialtilfælde af resultatet i opg. 0.6.3°.

0.8. Vi regner i $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$. Gør rede for, at

1° multiplikationen er distributiv med hensyn til additionen.

2° $a \sum_{j \in J} b_j = \sum_{j \in J} a b_j \,,$

3° $\left(\sum_{i \in I} a_i\right) \left(\sum_{j \in J} b_j\right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j \,,$

hvor $a \in [0, \infty]$, medens $(a_i)_{i \in I}$ og $(b_j)_{j \in J}$ er vilkårlige familier med $a_i \in [0, \infty]$, $b_j \in [0, \infty]$.

(*Vink:* Man kan benytte opg. 0.5.)

0.9. Gennemfør beviset for Sætning 0.1.

0.10. Vis, at en vilkårlig reel talfølge (x_n) altid har en monoton delfølge.

(*Vink:* Betragt mængden

$$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid \forall m > n : x_m \geq x_n \}$$

og del op i de to tilfælde 1) A er endelig 2) A er uendelig.)

§1. Målelige mængder

1.1. Indledende om længde–, areal– og volumenproblemet

Problemet består i til passende delmængder A af $\mathbb{R}$ (hhv. af $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$) at knytte tal $m(A)$, som med rimelighed kan kaldes længden (hhv. arealet, voluminet,...) af A.

Ud over kravet om, at kongruente mængder bør have samme længde (areal, volumen,...), havde man tidligere fæstet sig ved *additivitet:* når en mængde A i $\mathbb{R}$ (henh. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ...$) kan stykkes sammen af endelig mange, parvis disjunkte dele, der hver har en længde (areal, volumen,...), da bør A som længde (areal, volumen,...) have summen af delenes.

Émile Borel peger i stedet på *numerabel additivitet:* her tillades sammenstykninger også af numerabelt mange, parvis disjunkte dele; summen af længderne (arealerne, voluminerne,...) er da en rækkesum. (Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898.) Denne drejning er afgørende for Lebesgue integralet.

Hvis man kunne tillægge *alle* delmængder A i $\mathbb{R}$ (henh. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ...$) en længde (areal, volumen,...) og samtidig indfri ønsket om numerabel additivitet, og at kongruente mængder tillægges samme værdi, var situationen optimal. Dette kan lade sig gøre, hvis man bygger på *Solovays model* for mængdelæren (1970). I denne model gælder bl.a. det *numerable udvalgsaxiom*, men *udvalgsaxiomet* gælder ikke. Udvalgsaxiomet kan formuleres således: *For enhver familie $(A_i)_{i\in I}$ af ikke tomme mængder A_i findes en funktion f på I så $f(i) \in A_i$ for hvert $i \in I$.* Hvis man kun betragter numerable familier (dvs. I forudsættes numerabel), får man det numerable udvalgsaxiom.

Ønsker man at operere i en version af mængdelæren, hvor udvalgsaxiomet gælder, og det gør man normalt, kan man vise, at der er delmængder f.eks. af $\mathbb{R}$, der ikke kan tillægges en længde på fornuftig måde. (Se §5.8, Sætning 5.30).

Dette betyder, at vi skal finde et passende stort system af delmængder A af $\mathbb{R}^k$ og tillægge dem en værdi $m_k(A)$ kaldet det *k-dimensionale Lebesgue mål* af A, så vi for $k = 1, 2, 3$ opnår længde, areal og volumen. Mængderne i systemet vil blive kaldt *Lebesgue målelige*, jf.§5.8. Af tekniske grunde studerer vi først et mindre system, hvis mængder kaldes *Borel målelige* eller *Borel mængder.*

1.2. Begrebet σ-algebra

Definition 1.1. Et system $\mathbb{E}$ af delmængder af en mængde X kaldes en *σ-algebra* i X, hvis følgende tre aksiomer gælder:

(i) $X \in \mathbb{E}$
(ii) $\complement A = X \setminus A \in \mathbb{E}$, når $A \in \mathbb{E}$

(iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{E}$, når $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{E}$.

(Et system $\mathbb{E}$ af delmængder af X kaldes en *algebra* hvis (i) og (ii) gælder og $\mathbb{E}$ desuden er stabil overfor endelige foreningsmængder. Præfixet σ hentyder til stabiliteten (iii) overfor numerable foreningsmængder.)

For en σ-algebra $\mathbb{E}$ gælder tillige

$$\varnothing \in \mathbb{E}$$
$$A\cup B, A\cap B, A\setminus B \in \mathbb{E}, \quad \text{når } A, B \in \mathbb{E},$$
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{E}, \quad \text{når } A_1, A_2, \dots \in \mathbb{E}.$$

En σ-algebra er altså stabil over for de sædvanlige mængdeoperationer anvendt på endelig eller numerabelt mange mængder.

Påstandene fremgår af

$$\begin{aligned}
\varnothing &= \complement X = X\setminus X,\\
A\cup B &= A\cup B\cup\varnothing \quad \cup\cdots\cup\varnothing\cup\cdots,\\
A\cap B &= \complement(\complement A\cup\complement B),\\
A\setminus B &= A\cap\complement B,\\
\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n &= \complement\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\complement A_n\right).
\end{aligned}$$

Systemet $\mathcal{P}(X)$ af alle delmængder af en mængde X er naturligvis en σ-algebra i X, den størst mulige. Systemet $\{\varnothing, X\}$ er den mindste σ-algebra i X.

Enhver fællesmængde af σ-algebraer i X er igen en σ-algebra i X. Det verificeres umiddelbart.

Sætning 1.2. *Lad $\mathbb{D}$ være en vilkårlig mængde af delmængder af en mængde X. Der findes da en mindste σ-algebra $\sigma(\mathbb{D})$ i X, der indeholder $\mathbb{D}$, dvs.*

(i) *$\sigma(\mathbb{D})$ er en σ-algebra i X så $\mathbb{D}\subseteq\sigma(\mathbb{D})$,*

(ii) *for enhver σ-algebra $\mathbb{F}$ i X med $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{F}$ gælder $\sigma(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{F}$.*

Bevis. Fællesmængden $\sigma(\mathbb{D})$ af alle σ-algebraer $\mathbb{F}$ i X, der indeholder $\mathbb{D}$, er selv en σ-algebra indeholdende $\mathbb{D}$, – og åbenbart den mindste. Strengt taget burde først bemærkes, at der er noget at tage fællesmængden af, altså at der findes i hvert fald én σ-algebra $\mathbb{F}$ i X, der indeholder $\mathbb{D}$. Men det er oplagt: $\mathcal{P}(X)$. □

Bemærk, at beviset er et rent eksistensbevis. Det giver ikke nogen eksplicit betingelse for, om en forelagt mængde $A\subseteq X$ tilhører $\sigma(\mathbb{D})$ eller ej. Man siger, at $\sigma(\mathbb{D})$ er *σ-algebraen frembragt af* $\mathbb{D}$, og $\mathbb{D}$ kaldes et *frembringersystem* for $\sigma(\mathbb{D})$.

Når man i en mængde X har udvalgt en σ-algebra $\mathbb{E}$ kaldes parret $(X, \mathbb{E})$ et *målbart rum*, jf. terminologien topologisk rum, hvor man på X har udvalgt et mængdesystem $\mathcal{G}$ med helt andre egenskaber, kaldet en topologi. Mængderne i $\mathbb{E}$ siges at være *målelige* eller mere præcist $\mathbb{E}$- *målelige*.

Cl. Eug. Pirau

EMILE BOREL
1871-1956

1.3. Borel mængder

Et *interval* i $\mathbb{R}^k$ er en mængde

$$I = I_1 \times \cdots \times I_k = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \in I_i\,,\ i = 1, \ldots, k\},$$

hvor hvert I_i er et (begrænset eller ubegrænset) interval i $\mathbb{R}$. Er alle I_i åbne, henholdsvis afsluttede i $\mathbb{R}$, fås et åbent, henholdsvis afsluttet interval I i $\mathbb{R}^k$.

Er alle I_i begrænsede og af samme længde, kaldes I også en *terning*.

Vi skal især betragte intervaller $I = I_1 \times \cdots \times I_k$, hvor hvert I_i er af form $]a_i, b_i]$ med $-\infty < a_i < b_i < \infty$. For at have et navn vil vi kalde dem *standard intervaller*. Standard intervallet I tillægges et k-dimensionalt Lebesgue mål lig med produktet af længderne af de indgående intervaller, dvs.

$$m_k(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_k - a_k).$$

Standard intervaller er velegnede som byggeklodser. F.eks. gælder:

SÆTNING 1.3. *Enhver åben mængde $G \neq \varnothing$ i $\mathbb{R}^k$ kan fås som forening af numerabelt mange parvis disjunkte standard terninger.*

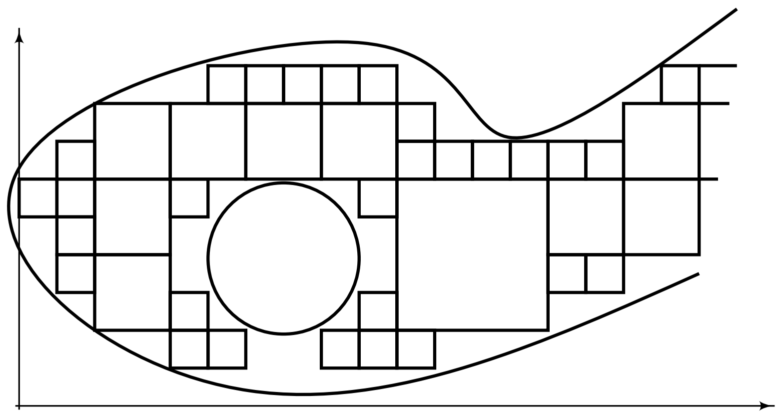
Bevis. De numerabelt mange terninger

$$\{(x_1, \ldots, x_k) \mid n_i < x_i \leq n_i + 1\,,\ i = 1, \ldots, k\}$$

med $n_i \in \mathbb{Z}$ danner en klassedeling af $\mathbb{R}^k$, som maskerne i et net. Lad os kalde dem masker af 0^{te} orden. For hvert $p \in \mathbb{N}$ betragtes en tilsvarende klasseinddeling af $\mathbb{R}^k$ i masker af p^{te} orden

$$\{(x_1, \ldots, x_k) \mid n_i \cdot 2^{-p} < x_i \leq (n_i + 1)2^{-p}\,,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

Enhver åben mængde $G \neq \varnothing$ i $\mathbb{R}^k$ kan nu opbygges af de masker af 0^{te} orden, der er indeholdt i G; de masker af 1^{ste} orden, der er indeholdt i G uden at være del af en maske af 0^{te} orden indeholdt i G; osv. Vi får hele G med fordi hvert punkt af G er indre punkt. □



Det er nu nærliggende at tillægge G et k-dimensionalt Lebesgue mål lig med summen af Lebesgue målene af de indgående standard terninger i ovenstående fremstilling. Vi ønsker imidlertid at indføre Lebesgue målet for et meget større mængdesystem end de åbne mængder, så derfor lader vi den problematik ligge indtil §5.

Som konsekvens af Sætning 1.3 noteres, at en σ-algebra i $\mathbb{R}^k$, der indeholder ethvert standard interval (eller blot alle terninger i de ovennævnte klasseinddelinger af $\mathbb{R}^k$), også vil indeholde enhver åben mængde.

Omvendt er det klart, at en σ-algebra i $\mathbb{R}^k$, der indeholder alle åbne mængder, også vil indeholde alle intervaller. Thi ethvert interval kan fås som fællesmængde af en følge af åbne intervaller, eksempelvis

$$\{(x_1, \dots, x_k) \mid a_i < x_i \le b_i\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{(x_1, \dots, x_k) \mid a_i < x_i < b_i + \tfrac{1}{n}\}.$$

Definition 1.4. Ved *Borel algebraen* i $\mathbb{R}^k$ forstås den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}^k$, der indeholder alle åbne mængder i $\mathbb{R}^k$. Den betegnes $\mathbb{B}(\mathbb{R}^k)$ eller blot $\mathbb{B}_k$. De $\mathbb{B}_k$-målelige mængder, dvs. mængderne tilhørende $\mathbb{B}_k$, kaldes også *Borel mængder*. Vi sætter $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1$.

Borel mængderne i $\mathbb{R}$ blev første gang angivet af Émile Borel (1898), i forbindelse med en skitse til fastsættelse af længder for disse mængder (se §1.1).

Borel algebraen i $\mathbb{R}^k$ kan, ifølge ovenstående, også karakteriseres som den mindste σ-algebra, der indeholder alle standard intervaller. Med andre ord: De åbne mængder og standard intervallerne er hver for sig frembringersystemer for $\mathbb{B}_k$.

Bemærk, at vi ikke er i besiddelse af en generel, eksplicit betingelse til afgørelse af, om en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er en Borel mængde. Beviser for påstande af formen $\forall B \in \mathbb{B}_k : p(B)$, hvor $p(\cdot)$ er et åbent udsagn, må derfor som regel bevises på følgende måde:

a) Man viser at systemet af de mængder $A \in \mathbb{B}_k$ (eller blot $A \subseteq \mathbb{R}^k$) for hvilke $p(A)$ er sand, udgør en σ-algebra.
b) Man efterviser, at $p(A)$ er sand for alle mængder A i et passende frembringersystem for $\mathbb{B}_k$.

For at klare b) må man ofte udsøge sig et frembringersystem på snedig vis. Vi vil se mange eksempler på ovenstående bevismetode.

Medmindre det går meget underligt til, kan man imidlertid vente, at en eksplicit beskrevet mængde $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er en Borel mængde, og det vil som regel kunne vises ved, at man udtrykker A ved tælleligt mange mængdeoperationer udfra mængder, som man allerede ved er Borel mængder, f.eks. intervaller eller åbne mængder.

Eksempel 1.5. (a) En afsluttet mængde i $\mathbb{R}^k$ er en Borel mængde, som komplementærmængde til en åben mængde.

(b) En endelig delmængde af $\mathbb{R}^k$ er en Borel mængde, da den er afsluttet.

(c) En tællelig delmængde af $\mathbb{R}^k$ er en Borel mængde som foreningsmængde af tælleligt mange etpunktsmængder.

Der findes delmængder af $\mathbb{R}^k$ som ikke er Borel mængder. Det er ikke helt let at vise, men er en konsekvens af resultater om ækvipotente mængder, idet $\mathbb{B}_k$ kan vises at være ækvipotent med $\mathbb{R}^k$ (og dermed med $\mathbb{R}$), medens $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ ikke er ækvipotent med $\mathbb{R}^k$. (To mængder A og B kaldes *ækvipotente*, hvis der findes en bijektiv afbildning af A på B, altså hvis mængderne løst sagt har lige mange elementer.)

For et vilkårligt metrisk rum (X, d) (eller et topologisk rum $(X, \mathcal{G})$) defineres *Borel algebraen* $\mathbb{B}(X)$ som den mindste σ-algebra, der indeholder systemet af åbne mængder, altså $\mathbb{B}(X) = \sigma(\mathcal{G})$, hvor $\mathcal{G}$ er systemet af åbne mængder. Mængderne i $\mathbb{B}(X)$ kaldes *Borel mængder*. Bemærk, at "Borel mængde" er et topologisk begreb. Et topologisk rum kan altid opfattes som målbart rum udstyret med Borel algebraen.

Den udvidede reelle tallinie $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ vil vi også forsyne med en σ-algebra, betegnet $\overline{\mathbb{B}}$ og defineret ved

$$\overline{\mathbb{B}} = \sigma\{]a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

For $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ gælder (opg. 1.6)

$$A \in \overline{\mathbb{B}} \Leftrightarrow A \cap \mathbb{R} \in \mathbb{B}\,.$$

Opgaver til §1

1.1. Vis, at systemet $\mathbb{E}$ af delmængder $A \subseteq X$, så enten A eller $\complement A$ er tællelig, er en σ-algebra i X.

1.2. Vis, at mængdesystemerne

$$\{\,]a,\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}\,,\ \{\,[a,\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}\,,\ \{\,]-\infty,a[\mid a \in \mathbb{R}\}\,,\ \{\,]-\infty,a]\mid a \in \mathbb{R}\}$$

alle er frembringersystemer for $\mathbb{B}$.

1.3. Vis, at systemet $\mathcal{F}$ af afsluttede mængder og systemet $\mathcal{K}$ af kompakte mængder i $\mathbb{R}^k$, begge er frembringersystemer for $\mathbb{B}_k$.

1.4. Vis, at for $A \subseteq X$ gælder $\sigma(\{A\}) = \{\varnothing, A, \complement A, X\}$.

1.5. Lad $A_1, \ldots, A_n$ være delmængder af X. Vis, at den mindste σ-algebra i X, der indeholder $A_1, \ldots, A_n$, har højst 2^{2^n} elementer, og giv et eksempel, hvor $\sigma(\{A_1, \ldots, A_n\})$ har 2^{2^n} elementer.

1.6. Lad $\overline{\mathbb{R}}$ være udstyret som metrisk rum med metrikken

$$d(x,y) = |\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y|\,,$$

idet $\operatorname{Arctan}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$.

Vis, at Borel algebraen $\mathbb{B}(\overline{\mathbb{R}})$ for det metriske rum $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ er frembragt af mængdesystemet $\{]a,\infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$, altså $\overline{\mathbb{B}} = \mathbb{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Vis videre, at der om $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ gælder

$$A \in \overline{\mathbb{B}} \Leftrightarrow A \cap \mathbb{R} \in \mathbb{B}\,.$$

1.7. Vis, at følgende mængdesystemer alle frembringer Borel algebraen $\mathbb{B}$ for $\mathbb{R}$:

a) $\{]-\infty, r[\mid r \in \mathbb{Q}\}$
b) $\{[a,b] \mid a < b\,,\ a,b \in \mathbb{R}\}$
c) $\{[a,b] \mid a < b\,,\ a,b \in T\}$, hvor T er en overalt tæt delmængde af $\mathbb{R}$.

1.8. Lad $\mathbb{Q}$ være udstyret med den sædvanlige metrik. Vis, at $\mathbb{B}(\mathbb{Q}) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

§2. Målelige afbildninger

2.1. Definitioner og simple egenskaber

Lad $(X, \mathbb{E})$ og $(Y, \mathbb{F})$ være målbare rum.

Definition 2.1. En afbildning $\varphi : (X, \mathbb{E}) \to (Y, \mathbb{F})$ kaldes $\mathbb{E} - \mathbb{F}$-*målelig* (eller blot *målelig* når $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ er underforstået af sammenhængen), såfremt

$$\forall F \in \mathbb{F} : \varphi^{-1}(F) \in \mathbb{E}\,,$$

altså såfremt enhver mængde $F \in \mathbb{F}$ "tilbagetransporteres" i en mængde fra $\mathbb{E}$.

Bemærk analogien med kontinuerte afbildninger.

Det er meget bekvemt, at man i praksis kan *nøjes* med at eftervise betingelsen for delmængder i et frembringersystem for $\mathbb{F}$:

Sætning 2.2. *Lad $\varphi : (X, \mathbb{E}) \to (Y, \mathbb{F})$ være en afbildning og antag, at $\mathbb{D}$ er et frembringersystem for $\mathbb{F}$. Så er φ $\;\mathbb{E} - \mathbb{F}$ – målelig blot*

$$\forall F \in \mathbb{D} : \varphi^{-1}(F) \in \mathbb{E}\,.$$

Bevis. Systemet

$$\widetilde{\mathbb{F}} = \{F \in \mathbb{F} \mid \varphi^{-1}(F) \in \mathbb{E}\}$$

er en σ-algebra i Y, thi

$$\varphi^{-1}(Y) = X\,,\ \varphi^{-1}(\complement F) = \complement\varphi^{-1}(F) \ \text{ og }\ \varphi^{-1}\left(\bigcup_1^\infty F_n\right) = \bigcup_1^\infty \varphi^{-1}(F_n)\,,$$

og antagelsen er, at $\mathbb{D} \subseteq \widetilde{\mathbb{F}}$. Da $\mathbb{F}$ er den mindste σ-algebra i Y indeholdende $\mathbb{D}$ må $\mathbb{F} \subseteq \widetilde{\mathbb{F}}$, men så må $\mathbb{F} = \widetilde{\mathbb{F}}$. □

(Bemærk, at beviset passer i "skemaet" p.1.5).

Ved *sammensætning af målelige afbildninger* $\varphi : (X, \mathbb{E}) \to (Y, \mathbb{F})$, $\psi : (Y, \mathbb{F}) \to (Z, \mathbb{G})$ *fås en målelig afbildning* $\psi \circ \varphi : (X, \mathbb{E}) \to (Z, \mathbb{G})$,

thi for $G \in \mathbb{G}$ har vi

$$(\psi \circ \varphi)^{-1}(G) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(G)) \in \mathbb{E}\,,$$

idet $\psi^{-1}(G) \in \mathbb{F}$.

Betragtes frembringersystemet $\{\,]a, \infty[\mid a \in \mathbb{R}\}$ for $\mathbb{B}$ eller frembringersystemet $\{]a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$ for $\overline{\mathbb{B}}$ fås følgende specialtilfælde af Sætning 2.2:

Sætning 2.3. *En funktion* $f : (X, \mathbb{E}) \to \mathbb{R}$ *(henv.* $\overline{\mathbb{R}}$*) er målelig hvis og kun hvis*

$$\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in X \mid f(x) > a\} \in \mathbb{E} .$$

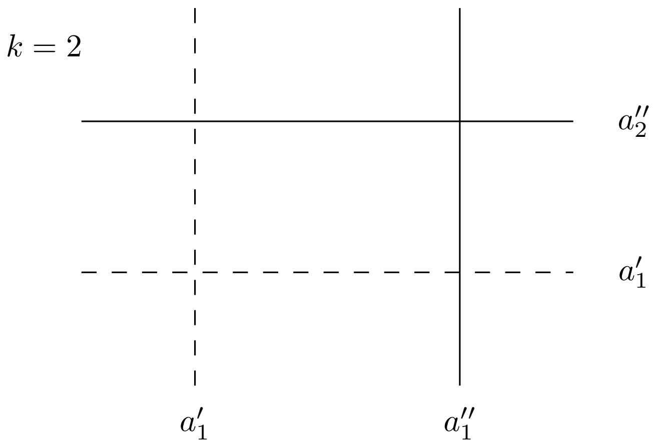
Ved at benytte andre frembringersystemer for $\mathbb{B}$ (jf. opg. 1.2 eller 1.7) kan man formulere tilsvarende specialtilfælde af Sætning 2.2.

En afbildning $f : X \to \mathbb{R}^k$ har k koordinatfunktioner $f_1, \dots, f_k : X \to \mathbb{R}$ så $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ for $x \in X$. Som ved kontinuitet reduceres målelighed af f til koordinatfunktionernes målelighed:

Sætning 2.4. *En afbildning* $f : (X, \mathbb{E}) \to \mathbb{R}^k$ *er målelig, hvis og kun hvis hver koordinatfunktion* f_j *er målelig,* $j = 1, \dots, k$.

Bevis. Lad $\mathbb{D}$ være systemet af åbne halvrum

$$\{y \in \mathbb{R}^k \mid y_j > a_j\} , \quad a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} .$$



For $a_j' < a_j''$, $j = 1, \dots, k$, er

$$\{y \in \mathbb{R}^k \mid a_j' < y_j \leq a_j''\} = \{y \in \mathbb{R}^k \mid a_j' < y_j\} \setminus \{y \in \mathbb{R}^k \mid a_j'' < y_j\}$$

en "parallelstrimmel" som tilhører $\sigma(\mathbb{D})$, og fællesmængden af k sådanne, en for hver koordinat, giver standard intervallet

$$]a_1', a_1''] \times \cdots \times]a_k', a_k''] ,$$

som altså tilhører $\sigma(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{B}_k$. Da $\mathbb{B}_k$ er den mindste σ-algebra, indeholdende standard intervallerne, må $\sigma(\mathbb{D}) = \mathbb{B}_k$. Ifølge Sætning 2.2 er f målelig hvis og kun hvis

$$f^{-1}(\{y \in \mathbb{R}^k \mid y_j > a_j\}) \in \mathbb{E} \quad \text{for alle } a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} ,$$

men

$$f^{-1}(\{y \in \mathbb{R}^k \mid y_j > a_j\}) = \{x \in X \mid f_j(x) > a_j\},$$

så ifølge Sætning 2.3 kommer dette ud på, at f_j er målelig for $j = 1, \dots, k$. □

På analog måde finder vi:

SÆTNING 2.5. *En kompleks funktion* $f : (X, \mathbb{E}) \to \mathbb{C}$ *er målelig, hvis og kun hvis* $\mathrm{Re}\, f$ *og* $\mathrm{Im}\, f$ *er målelige.*

Hvis (X, d_X) og (Y, d_Y) er metriske rum, kaldes en afbildning $\varphi : X \to Y$ *Borel målelig* eller en *Borel afbildning*, såfremt den er $\mathbb{B}(X) - \mathbb{B}(Y)$-målelig. Idet de åbne mængder frembringer Borel algebraen finder vi som specialtilfælde af Sætning 2.2:

SÆTNING 2.6. *En kontinuert afbildning* $\varphi : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ *er en Borel afbildning.*

I almindelighed er de kontinuerte afbildninger kun en "meget lille" delmængde af Borel afbildningerne. Som eksempel kan nævnes, at Dirichlets funktion $1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en Borel funktion, som er diskontinuert i alle punkter. For $a \in \mathbb{R}$ gælder nemlig

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1_{\mathbb{Q}}(x) > a\} = \begin{cases} \varnothing & \text{hvis } a \geq 1 \\ \mathbb{Q} & \text{hvis } 0 \leq a < 1 \\ \mathbb{R} & \text{hvis } a < 0, \end{cases}$$

og $\varnothing, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ er alle Borel mængder.

Medens kontinuitet normalt sættes over styr ved punktvis konvergens, så bevares målelighed ved punktvis konvergens, som vi skal se i næste afsnit.

2.2. Grænseovergang med målelige funktioner

Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde $X \neq \varnothing$.

SÆTNING 2.7. *For enhver følge* $f_1, f_2, \dots$ *af* $\mathbb{E}$*-målelige funktioner* $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$*, er* $\sup_n f_n$*,* $\inf_n f_n$*,* $\limsup_n f_n$ *og* $\liminf_n f_n$ *igen* $\mathbb{E}$*-målelige funktioner.*

Her betegner eksempelvis $\sup_n f_n$ og $\limsup_n f_n$ funktionerne

$$x \mapsto \sup_n f_n(x) \;\text{ og }\; x \mapsto \limsup_n f_n(x), \quad x \in X,$$

dvs. for hvert $x \in X$ er funktionsværdien lig supremum, henholdsvis limes superior for talfølgen $f_1(x), f_2(x), \ldots$.

Bevis. For $a \in \mathbb{R}$ og $x \in X$ gælder

$$\sup_n f_n(x) > a \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : f_n(x) > a\,,$$

altså

$$\{x \in X \mid \sup_n f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) > a\} \in \mathbb{E}$$

og analogt

$$\{x \in X \mid \inf_n f_n(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) < a\} \in \mathbb{E}\,.$$

Dette viser, at $\sup_n f_n$ og $\inf_n f_n$ er $\mathbb{E}$-målelige. Derpå benyttes, at

$$\limsup_n f_n = \inf_{p \geq 1} (\sup_{n \geq p} f_n) \;\text{ og }\; \liminf_n f_n = \sup_{p \geq 1} (\inf_{n \geq p} f_n).$$

□

KOROLLAR 2.8. *Når en følge $f_1, f_2, \ldots$ af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ er punktvis konvergent i $\overline{\mathbb{R}}$, da er grænsefunktionen $\lim_n f_n$ igen $\mathbb{E}$-målelig.*

Konvergensforudsætningen er, at talfølgen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ er konvergent i $\overline{\mathbb{R}}$ for hvert $x \in X$, og $\lim_n f_n$ betegner funktionen

$$x \mapsto \lim_n f_n(x)\,, \quad x \in X\,.$$

Da nu $\lim_n f_n = \liminf_n f_n = \limsup_n f_n$, er resultatet en umiddelbar konsekvens af det foregående.

KOROLLAR 2.9. *Når en følge $f_1, f_2, \ldots$ af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_j : X \to \mathbb{C}$ er punktvis konvergent i $\mathbb{C}$, da er grænsefunktionen $\lim_n f_n$ igen $\mathbb{E}$-målelig.*

Bevis. Sættes $f_n = f_n' + i f_n''$ med $f_n' : X \to \mathbb{R}$, $f_n'' : X \to \mathbb{R}$, da har $\lim_n f_n$ som real- og imaginærdel funktionerne $\lim_n f_n'$ og $\lim_n f_n''$. Resultatet følger nu af det foregående. □

2.3. Regning med målelige funktioner

Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde $X \neq \varnothing$.

Sætning 2.10. *Når $f : X \to \mathbb{R}$ og $g : X \to \mathbb{R}$ er $\mathbb{E}$-målelige og $c \in \mathbb{R}$, da er $|f|$, cf, $f + g$, $f \vee g$, $f \wedge g$ og fg ligeledes $\mathbb{E}$-målelige.*

Her betegner eksempelvis $|f|$ og $f \vee g$ funktionerne

$$x \mapsto |f(x)| \text{ og } x \mapsto f(x) \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \; x \in X .$$

Bevis. Påstanden følger af, at de nævnte funktioner kan fås ved sammensætning af $f : X \to \mathbb{R}$ eller $\varphi = (f, g) : X \to \mathbb{R}^2$ med

$$y \mapsto |y|, \; cy \text{ eller } (y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2, \; y_1 \vee y_2, \; y_1 \wedge y_2, \; y_1 y_2 ,$$

der alle er kontinuerte og dermed Borel funktioner. □

Eksempel 2.11 Lad $f, g : X \to \mathbb{R}$ være målelige funktioner. Så vil mængderne

$$\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}, \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}, \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

tilhøre σ-algebraen $\mathbb{E}$.

Funktionen $\varphi = g - f$ er nemlig målelig, og de tre mængder kan udtrykkes som

$$\varphi^{-1}(]0, \infty[), \varphi^{-1}([0, \infty[), \varphi^{-1}(\{0\}).$$

Sætning 2.12. *Når $f : X \to \mathbb{C}$ og $g : X \to \mathbb{C}$ er $\mathbb{E}$-målelige og $c \in \mathbb{C}$, da er $|f|$, cf, $f + g$ og fg ligeledes $\mathbb{E}$-målelige.*

Bevis. Funktionen $|f|$ kan fås ved sammensætning af f med $z \mapsto |z|$, $z \in \mathbb{C}$. For de tre øvrige kan man benytte Sætning 2.5; eksempelvis er jo $cf = (c'f' - c''f'') + i(c'f'' + c''f')$, når $c = c' + ic''$, $f = f' + if''$. □

2.4. Delrum

Lad $(X, \mathbb{E})$ være et målbart rum. For en ikke tom delmængde $X' \subseteq X$ betragtes mængdesystemet i X'

$$\mathbb{E}_{X'} = \{X' \cap E \mid E \in \mathbb{E}\} ,$$

som er en σ-algebra i X', idet

$$X' \cap X = X', X' \setminus (X' \cap E) = X' \cap (X \setminus E), \; \bigcup_1^\infty (X' \cap E_n) = X' \cap \left(\bigcup_1^\infty E_n \right) .$$

Forsynet med σ-algebraen $\mathbb{E}_{X'}$, som kaldes den *inducerede* eller *nedarvede* σ*-algebra*, er $(X', \mathbb{E}_{X'})$ et målbart rum kaldet *delrummet* bestemt ved X' og $\mathbb{E}$.

Bemærk, at hvis $X' \in \mathbb{E}$ så er

$$\mathbb{E}_{X'} = \{E \in \mathbb{E} \mid E \subseteq X'\} \subseteq \mathbb{E}\,.$$

Hvis på den anden side $\mathbb{E}_{X'} \subseteq \mathbb{E}$, så er $X' \in \mathbb{E}$.

Inklusionsafbildningen $i = i_{X',X} : (X', \mathbb{E}_{X'}) \to (X, \mathbb{E})$ givet ved $i(x) = x$ er målelig, idet

$$i^{-1}(E) = X' \cap E$$

for $E \in \mathbb{E}$. Faktisk er $\mathbb{E}_{X'}$ den mindste σ-algebra på X', så i er målelig.

Hvis $\varphi : (X, \mathbb{E}) \to (Y, \mathbb{F})$ er målelig, og X' er en ikke tom delmængde af X, så er *restriktionen* $\varphi|X' : (X', \mathbb{E}_{X'}) \to (Y, \mathbb{F})$ målelig, idet $\varphi|X' = \varphi \circ i_{X',X}$. Hvis $\varphi(X) \subseteq Y' \subseteq Y$ kan vi betragte φ som en afbildning $\varphi : X \to Y'$. Man ser, at $\varphi : X \to Y'$ er $\mathbb{E} - \mathbb{F}_{Y'}$-målelig, hvis og kun hvis $\varphi : X \to Y$ er $\mathbb{E} - \mathbb{F}$-målelig.

Sætning 2.13. *Lad afbildningen $\varphi : (X, \mathbb{E}) \to (Y, \mathbb{F})$ være givet ved en "Tuborg"*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{for } x \in A_1 \\ \varphi_2(x) & \text{for } x \in A_2 \\ \vdots & \\ \varphi_n(x) & \text{for } x \in A_n\,, \end{cases}$$

hvor $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ er en spaltning af X i parvis disjunkte ikke tomme mængder $A_i \in \mathbb{E}$, og φ_i er en afbildning af A_i ind i Y, $i = 1, \ldots, n$.

Hvis φ_i er $\mathbb{E}_{A_i} - \mathbb{F}$-målelig for hvert $i = 1, \ldots, n$, så er φ $\mathbb{E} - \mathbb{F}$-målelig.

Bevis. For hvert $F \in \mathbb{F}$ har vi nemlig

$$\varphi^{-1}(F) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi^{-1}(F) \cap A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(F) \in \mathbb{E}\,,$$

idet $\varphi_i^{-1}(F) \in \mathbb{E}_{A_i} \subseteq \mathbb{E}$. □

Eksempel 2.14. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0 \\ \cos x & \text{for } x \in \,]0, 2\pi] \\ \log x & \text{for } x \in \,]2\pi, \infty[, \end{cases}$$

er en Borel funktion. Med betegnelserne fra Sætning 2.13 er $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathbb{E} = \mathbb{F} = \mathbb{B}$ og $A_1 = \left]-\infty, 0\right], A_2 = \left]0, 2\pi\right], A_3 = \left]2\pi, \infty\right[$, $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \cos, \varphi_3 = \log$. De tre funktioner er kontinuerte og dermed Borel funktioner på de respektive mængder.

Eksempel 2.15. Lad $f, g : X \to [0, \infty]$ være $\mathbb{E}$-målelige funktioner. Så vil mængderne

$$\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}, \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}, \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

tilhøre $\mathbb{E}$.

Da f, g kan antage værdien ∞, kan vi ikke bare trække dem fra hinanden som i Eksempel 2.11. Vi indfører mængderne

$$\begin{aligned} F &= \{x \in X \mid f(x) < \infty\} = f^{-1}([0, \infty[) \\ F_\infty &= \{x \in X \mid f(x) = \infty\} = f^{-1}(\{\infty\}) \\ G &= \{x \in X \mid g(x) < \infty\} = g^{-1}([0, \infty[) \\ G_\infty &= \{x \in X \mid g(x) = \infty\} = g^{-1}(\{\infty\}), \end{aligned}$$

som alle tilhører $\mathbb{E}$. At $A = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$ tilhører $\mathbb{E}$ følger af formlen

$$A = (F \cap G_\infty) \cup \{x \in F \cap G \mid f(x) < g(x)\},$$

idet den sidste mængde i foreningsmængden er målelig ifølge Eksempel 2.11, da restriktionerne af f og g til $F \cap G$ er $\mathbb{E}_{F \cap G}$-målelige.

De andre mængder behandles analogt.

Opgaver til §2

2.1. Vis, at indikator funktionen $1_A : (X, \mathbb{E}) \to \mathbb{R}$ for en mængde $A \subseteq X$ er målelig, hvis og kun hvis $A \in \mathbb{E}$. ($1_A(x) = 1$ for $x \in A$ og $1_A(x) = 0$ for $x \notin A$).

2.2. Lad $\varphi : X \to Y$ være en afbildning.

a) Vis, at hvis $\mathbb{E}$ er en σ-algebra i X, så findes en *største* σ-algebra $\mathbb{F}$ i Y med egenskaben at φ er $\mathbb{E} - \mathbb{F}$-målelig, og $\mathbb{F}$ er givet ved

$$\mathbb{F} = \{F \subseteq Y \mid \varphi^{-1}(F) \in \mathbb{E}\}\,.$$

b) Vis, at hvis $\mathbb{F}$ er en σ-algebra i Y, så findes en *mindste* σ-algebra $\mathbb{E}$ i X med egenskaben at φ er $\mathbb{E} - \mathbb{F}$-målelig, og $\mathbb{E}$ er givet ved

$$\mathbb{E} = \{\varphi^{-1}(F) \mid F \in \mathbb{F}\}\,.$$

Antag, at $X' \subseteq X$ og $X' \neq \varnothing$.

c) Vis, at hvis $\mathbb{E}'$ er en σ-algebra i X', så findes en *største* σ-algebra $\mathbb{E}$ i X med egenskaben $\mathbb{E}_{X'} \subseteq \mathbb{E}'$, og $\mathbb{E}$ er givet ved

$$\mathbb{E} = \{E \subseteq X \mid E \cap X' \in \mathbb{E}'\}\,.$$

2.3. Betragt $f : (X, \mathbb{E}) \to (Y, \mathbb{F})$. Vis, at hvis $\mathbb{E} = \mathcal{P}(X)$, så er f målelig uanset hvad $\mathbb{F}$ er, og hvis $\mathbb{F} = \{\varnothing, Y\}$, så er f målelig uanset hvad $\mathbb{E}$ er.

2.4. Lad (A_n) være en følge af parvis disjunkte ikke tomme målelige delmængder i $(X, \mathbb{E})$ så $X = \bigcup_1^\infty A_n$, og lad (a_n) være en følge af relle tal. Vis, at $f : X \to \mathbb{R}$ defineret ved $f(x) = a_n$ for $x \in A_n$, $n = 1, 2, \ldots$, er målelig.

2.5. Lad $(X, \mathbb{E})$ være et målbart rum. Undersøg om der om en funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gælder

$$f \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig} \Leftrightarrow |f| \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig}\,.$$

2.6. Lad $(X, \mathbb{E})$ være et målbart rum, og lad (f_n) være en følge af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

1° Vis, at

$$\{x \in X \mid (f_n(x)) \text{ er konvergent i } \overline{\mathbb{R}}\} \in \mathbb{E}\,.$$

2° Samme opgave med $\mathbb{R}$ i stedet for $\overline{\mathbb{R}}$.

3° Samme opgave med $\mathbb{C}$ i stedet for $\overline{\mathbb{R}}$.

2.7.

1° Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i X frembragt af et mængdesystem $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{E}$. Vis, at for $X' \subseteq X$ er den inducerede σ-algebra $\mathbb{E}_{X'}$ frembragt af mængdesystemet

$$\mathbb{D}_{X'} = \{X' \cap D \mid D \in \mathbb{D}\}\,, \text{ dvs. } \sigma(\mathbb{D})_{X'} = \sigma(\mathbb{D}_{X'})\,.$$

(*Vink:* $\{E \subseteq X \mid E \cap X' \in \sigma(\mathbb{D}_{X'})\}$ er en σ-algebra i X som indeholder $\mathbb{D}$).

2° Lad (X, d) være et metrisk rum, og $X' \subseteq X$. Vis, at $\mathbb{B}(X') = \mathbb{B}(X)_{X'}$, altså at Borel algebraen for det metriske delrum (X', d) er lig den af $\mathbb{B}(X)$ inducerede σ-algebra på X'.

2.10

§3. Mål

Det almene begreb mål er udsprunget af længde-, areal- og volumenbegrebet, således som dette har fundet sin udformning i Lebesgue målet, idet man har hæftet sig ved nogle få fundamentale egenskaber som de afgørende ved definitionen af Lebesgue integralet og ved beviserne vedrørende grænseovergang med dette. (Radon 1913, Fréchet 1915, jf. Indledningen.) Blandt disse egenskaber mærkes især numerabel additivitet (første gang fremhævet af Borel 1898, jf. §1.1).

3.1 Mål

Definition 3.1. Ved et *mål* på et målbart rum $(X, \mathbb{E})$ forstås en funktion $\mu : \mathbb{E} \to [0, \infty]$ med egenskaberne

(i) $\mu(\varnothing) = 0$,

(ii) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$, når $E_1, E_2, \dots \in \mathbb{E}$ er parvis disjunkte.

En mængde X forsynet med en σ-algebra $\mathbb{E}$ og et mål $\mu : \mathbb{E} \to [0, \infty]$ kaldes et *målrum*. Som betegnelse benyttes $(X, \mathbb{E}, \mu)$ eller blot (X, μ), hvis $\mathbb{E}$ er underforstået, og man taler om et mål μ i X. Tallet $\mu(E)$ svarende til en mængde $E \in \mathbb{E}$ kaldes *målet* af E.

At (ii) er opfyldt, udtrykker man ved at sige, at μ er *numerabelt additiv.*

Man kan anskue et mål μ i X som beskrivelse af en massefordeling i X. Herved tolkes $\mu(E)$ som massen i mængden E. Tallet $\mu(X)$ kaldes den *totale masse.* Hvis $\mu(X) < \infty$ kaldes μ *endeligt*, og hvis $\mu(X) = 1$ kaldes μ et *sandsynlighedsmål* eller en *fordeling.*

Et mål μ har følgende hyppigt benyttede egenskaber:

(1) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)$, når $E_1, \dots, E_n$ er parvis disjunkte og tilhører $\mathbb{E}$.

Thi $\mu(E_1 \cup \dots \cup E_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots) = \mu(E_1) + \dots + \mu(E_n) + 0 + 0 + \cdots$.

(2) $\mu(E) \le \mu(F)$, når $E, F \in \mathbb{E}\,, E \subseteq F$.

(3) $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$, når $E, F \in \mathbb{E}\,, E \subseteq F$ og $\mu(E) < \infty$.

Begge fås af $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$.

(4) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$, når $E_1, E_2, \dots \in \mathbb{E}$.

$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)$, når $E_1, \dots, E_n \in \mathbb{E}$.

Ad første påstand: Med $F_1 = E_1$ og $F_j = E_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i$, $j = 2, 3, \dots$ er $F_1, F_2, \dots$ parvis disjunkte og $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Thi hvert $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ tilhører netop ét F_j, nemlig F_j med $j = \min\{i | x \in E_i\}$.

Det er klart, at $F_j \in \mathbb{E}$, og idet $F_j \subseteq E_j$, har vi

$$\mu(\bigcup_j E_j) = \mu(\bigcup_j F_j) = \sum_j \mu(F_j) \leq \sum_j \mu(E_j)\,.$$

Anden påstand fås af første, eller vises analogt.

(5) $\quad \mu(E_n) \nearrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$, når $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ og alle E_n tilhører $\mathbb{E}$.

Thi med $F_1 = E_1$ og $F_j = E_j \setminus E_{j-1}$, $j = 2, 3, \ldots$, er $F_1, F_2, \ldots$ parvis disjunkte, $E_n = \bigcup_{j=1}^{n} F_j$, $n = 1, 2, \ldots$, og $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$. Følgelig gælder

$$\mu(E_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu(F_j) \nearrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right).$$

(6) $\quad \mu(E_n) \searrow \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right)$, når $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$, alle E_n tilhører $\mathbb{E}$ og $\mu(E_1) < \infty$.

Thi med $F_n = E_1 \setminus E_n$ har vi $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots$ og $\bigcup_j F_j = E_1 \setminus \bigcap_j E_j$. Følgelig gælder

$$\mu(E_1) - \mu(E_n) = \mu(F_n) \nearrow \mu(\bigcup_j F_j) = \mu(E_1) - \mu(\bigcap_j E_j).$$

Som simple eksempler viser (se nedenfor), kan man i (6) ikke slette forudsætningen $\mu(E_1) < \infty$. (Men selvfølgelig kan man nøjes med $\exists n : \mu(E_n) < \infty$.) I (3) er forudsætningen $\mu(E) < \infty$ væsentlig.

Eksempel 3.2. **A. Lebesgue målet**
(Hovedeksempel.)

Vi skal senere (§5) gøre rede for, at der findes et og kun et mål m defineret på Borel algebraen i $\mathbb{R}$, hvis værdi for ethvert interval er lig intervallængden. Dette mål kalder vi *Lebesgue målet* i $\mathbb{R}$.

Mere generelt skal vi (ligeledes i §5) gøre rede for, at der findes et og kun et mål m_k defineret på Borel algebraen i $\mathbb{R}^k$, hvis værdi for ethvert interval er lig produktet af kantlængderne. Dette mål kalder vi *Lebesgue målet* i $\mathbb{R}^k$. Vi skal videre bevise, at kongruente Borel mængder i $\mathbb{R}^k$ har samme Lebesgue mål; hermed vil det være berettiget at opfatte værdien $m_k(E)$ for en Borel mængde E i $\mathbb{R}^k$ som dennes volumen (specielt areal for $k = 2$, længde for $k = 1$).

Vi vil allerede nu tillade os at benytte Lebesgue målet i eksempler og opgaver.

Ad (3), p.3.1. Med $E =]1,\infty[\subseteq \mathbb{R}$ og $F =]0,\infty[\subseteq \mathbb{R}$ kan $m(F \setminus E) = m(]0,1]) = 1$ ikke findes som $\mu(F) - \mu(E)$. (Det havde ikke hjulpet at regne $\infty - \infty = 0$.)

Ad (6), p.3.2. Med $E_n =]n,\infty[\subseteq \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$, er $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$. Men $m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = m(\emptyset) = 0$, skønt $m(E_n) = \infty$ for hvert n.

B. Tællemål

Funktionen μ defineret på mængden $\mathcal{P}(X)$ af alle delmængder af en vilkårlig (endelig, numerabel eller overnumerabel) mængde X ved

$$\mu(E) = \begin{cases} \text{antal elementer i } E, & \text{når } E \subseteq X \text{ er endelig} \\ \infty\ , & \text{når } E \subseteq X \text{ er uendelig} \end{cases}$$

er et mål, kaldet *tællemålet* i X.

C

Er $\mu : \mathbb{E} \to [0,\infty]$ et mål på $(X,\mathbb{E})$ og $A \in \mathbb{E}$, da vil funktionen

$$E \mapsto \mu(A \cap E), \quad E \in \mathbb{E}\,,$$

igen være et mål på $(X,\mathbb{E})$, som er 0 på alle målelige delmængder disjunkt med A. Det er derfor nærliggende at nøjes med at betragte målet på de målelige delmængder af A, dvs. betragte restriktionen $\mu_A = \mu|\mathbb{E}_A$, idet $\mathbb{E}_A$ er den på A inducerede σ-algebra, jf. §2.4. Bemærk, at

$$\mu_A(E) = \mu(E) = \mu(A \cap E) \text{ for } E \in \mathbb{E}_A.$$

Målrummet $(A, \mathbb{E}_A, \mu_A)$ kaldes *restriktionen* af μ til A.

D

Er $(\mu_j)_{j\in J}$ en (endelig eller uendelig) familie af mål, alle defineret på samme σ-algebra $\mathbb{E}$ i en mængde X, og er $(a_j)_{j\in J}$ en familie af tal $a_j \in \overline{\mathbb{R}}_+$, da er funktionen $\sum_{j\in J} a_j\mu_j$, dvs.

$$E \mapsto \sum_{j\in J} a_j\mu_j(E), \quad E \in \mathbb{E}\,,$$

igen et mål på $(X,\mathbb{E})$.

Thi med $\mu = \sum_{j\in J} a_j\mu_j$ har vi

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{j\in J} a_j\mu_j\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_j (a_j \sum_n \mu_j(E_n)) = \sum_j \sum_n a_j\mu_j(E_n)$$
$$= \sum_{n,j} a_j\mu_j(E_n) = \sum_n \sum_j a_j\mu_j(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)\ ,$$

når $E_1, E_2, \dots$ er parvis disjunkte og tilhører $\mathbb{E}$. (Se §0.)

E

For en mængde X og et punkt $a \in X$ defineres *Dirac målet* ε_a i a på σ-algebraen $\mathcal{P}(X)$ ved

$$\varepsilon_a(E) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } a \in E, \\ 0 & \text{hvis } a \notin E. \end{cases}$$

Man ser, at ε_a er et sandsynlighedsmål i X, der ofte kaldes "den i a udartede fordeling".

3.2. "Næsten overalt"

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum.

DEFINITION 3.3. En mængde $N \subseteq X$ kaldes en *nulmængde* med hensyn til μ (kort: en μ-*nulmængde*) såfremt der findes $E \in \mathbb{E}$ så $N \subseteq E$ og $\mu(E) = 0$.

Man ser, at en delmængde af en μ-nulmængde er en μ-nulmængde, og at en forening af endeligt eller numerabelt mange μ-nulmængder er en μ-nulmængde.

I tilknytning til begrebet nulmængde benyttes sprogbrugen "næsten overalt":

Lad $P(x)$ være et prædikat (en åbent udsagn) vedrørende mængden X, eller blot vedrørende en delmængde $A \subseteq X$. (Eksempelvis kan $P(x)$ stå for "$f(x) = 0$", hvor f er en given funktion defineret på A.) Vendingen

$$\text{"for næsten alle } x \in A \text{ med hensyn til } \mu : P(x)\text{,"}$$
$$\text{"for } \mu\text{-næsten alle } x \in A : P(x)\text{"}$$

eller, når μ er underforstået kortet ned til f.eks.

$$\text{"for næsten alle } x : P(x)\text{"}\,,$$

skal da betyde:

$$\text{"}\{x \in A | \neg P(x)\} \text{ er en nulmængde m.h.t. } \mu\text{"},$$

Til sammenligning bemærkes, at "$\forall x \in A : P(x)$" jo kommer ud på et med "$\{x \in A | \neg P(x)\}$ er tom".

Undertiden skrives blot "P næsten overalt", "P p.p.", "P a.e.", eller "P n.o." (p.p. står for presque partout, a.e. for almost everywhere).

I ovennævnte eksempel har vi således udtryksmåder som "$f(x) = 0$ for næsten alle $x \in A$", "$f = 0$ næsten overalt i A", og det betyder altså, at $\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$ er en μ-nulmængde.

Eksempel 3.4. Konvergens næsten overalt. Lad $f_1, f_2, \dots$ og f være funktioner defineret på X. Udsagnet "$f_n(x) \to f(x)$ for μ-næsten alle x" eller kort

$$\text{“}f_n \to f \ \ \mu\text{-n.o.”}$$

betyder da, at der findes en μ-nulmængde N, således at

$$f_n(x) \to f(x) \ \text{ for hvert } \ x \in X \setminus N\,.$$

Der findes altså $E \in \mathbb{E}$ med $N \subseteq E$ og $\mu(E) = 0$, og idet $X \setminus E \subseteq X \setminus N$ gælder også

$$f_n(x) \to f(x) \ \text{ for hvert } \ x \in X \setminus E\,.$$

Sættes

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in X \setminus E \\ 0 & \text{for } x \in E\,, \end{cases}$$

og defineres $g_1, g_2, \dots$ på samme måde ud fra $f_1, f_2, \dots$, opnås konvergens overalt:

$$\forall x \in X : g_n(x) \to g(x)\,.$$

Er $f_1, f_2, \dots$ og f alle $\mathbb{E}$-målelige, vil $g_1, g_2, \dots$ og g ligeledes være det ifølge Sætning 2.13.

Ved

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \ \text{ næsten overalt m.h.t. } \ \mu$$

defineres en ækvivalensrelation i mængden af $\mathbb{E}$-målelige funktioner på X. I mange henseender viser ækvivalente funktioner sig at være "lige gode".

Eksempelvis harmonerer ækvivalensrelationen med konvergens næsten overalt: Hvis $f_n \to f$ μ-n.o., $f = h$ μ-n.o. og $\forall n : f_n = h_n$ μ-n.o., så gælder $h_n \to h$ μ-n.o., jf. opg. 3.13.

Med hensyn til tællemålet i en mængde X findes ikke andre nulmængder end $\varnothing$. Med hensyn til Dirac målet ε_a i X er nulmængder N karakteriseret ved at $a \notin N$.

Med hensyn til Lebesgue målet $m_k : \mathbb{B}_k \to [0, \infty]$ er ethvert punkt og dermed enhver tællelig mængde, en nulmængde. Men også Cantors mængde Z, der er ækvipotent med $\mathbb{R}$, er en nulmængde, jf. §5.6. Derimod er $\varnothing$ den eneste åbne nulmængde. (Hvorfor?)

Opgaver til §3

3.1. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum med $\mu(X) < \infty$. Vis, at funktionen $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to [0, \infty[$ givet ved

$$d(A, B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A)$$

er en pseudometrik på $\mathbb{E}$.

3.2. Lad $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ være givet ved

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{for } E = \varnothing \\ \infty & \text{ellers} \end{cases} .$$

Vis, at μ er et mål i X.

3.3. Lad $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ være givet ved

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{når } E \text{ er endelig eller numerabel} \\ \infty & \text{ellers .} \end{cases}$$

Vis, at μ er et mål i X.

3.4. Lad $(E_j)_{j \in J}$ være en familie af parvis disjunkte Borel mængder i $\mathbb{R}$, hvor $\bigcup_{j \in J} E_j$ igen er en Borel mængde.

1° Vis, at $\sum_{j \in J} m(E_j) \leq m\left(\bigcup_{j \in J} E_j\right)$.

2° Vis, at " $<$ " kan forekomme. (Begrænsningen til *numerabel* additivitet i definitionen af mål har således sine gode grunde.)

3.5. Lad B være en Borel mængde i $\mathbb{R}$.

1° Vis, at funktionen

$$x \mapsto m(B \cap] - x, x]), \quad x \in \mathbb{R}_+ ,$$

er kontinuert og voksende. Bestem funktionens grænseværdi for $x \to \infty$ og for $x \to 0$.

2° Vis, at der for ethvert $a \in \mathbb{R}$, $0 \leq a \leq m(B)$, findes en Borel mængde $A \subseteq B$ med $m(A) = a$.

3.6. Vis påstanden i Eksempel B, p.3.3 i noterne.

3.7. Vis påstanden i Eksempel C, p.3.3 i noterne.

3.8. Betragt en vilkårlig funktion $p : X \to [0, \infty]$ og sæt

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} p(x)$$

for hver delmængde $E \subseteq X$. Gør rede for, at μ er et mål på $(X, \mathcal{P}(X))$.

Man siger, at målet μ er givet ved *vægtfunktionen* p. (Sprogbrugen svarer til, at $p(x)$ tolkes som en vægt eller masse anbragt i punktet x.)

Vis, at μ svarer til konstruktionen i Eksempel D med $J = X$, $a_j = p(x)$ og $\mu_j = \varepsilon_x$.

3.9. Lad X være en tællelig mængde. Gør rede for, at ethvert mål $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ svarer til en vægtfunktion (se opg. 3.8).

3.10. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum. Bevis, at

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)\,,$$

når $E_1, E_2, \dots \in \mathbb{E}$ og $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ for $i \neq j$. (*Vink:* Se beviset for regel (4), p.3.1 i noterne.)

3.11. Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i en mængde X og lad $\lambda : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ være numerabelt additiv. Sæt

$$\lambda^+(E) = \sup\{\lambda(A) \mid A \subseteq E,\ A \in \mathbb{E}\} \quad \text{for } E \in \mathbb{E}\,,$$
$$\lambda^-(E) = -\inf\{\lambda(A) \mid A \subseteq E,\ A \in \mathbb{E}\} \quad \text{for } E \in \mathbb{E}\,.$$

1° Vis, at $\lambda(E) \le \lambda^+(E)$ og $0 \le \lambda^+(E)$ for alle $E \in \mathbb{E}$.
2° Vis, at $\lambda^+(\bigcup_n E_n) \le \sum_n \lambda^+(E_n)$, når $E_1, E_2, \dots \in \mathbb{E}$ er parvis disjunkte.
3° Vis, at $\lambda^+(X) < \infty$. (*Vink:* Antag at $\lambda^+(X) = \infty$ og begynd med at slutte, at der findes en mængde $A_1 \in \mathbb{E}$, hvor $|\lambda(A_1)| \geqq 1$ og $\lambda^+(X \setminus A_1) = \infty$.)
4° Vis, at λ^+ er et mål.
5° Vis, at λ^- er et mål med $\lambda^-(X) < \infty$.
6° Vis, at $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$.
7° Vis, at $\lambda^+ \le \mu$, $\lambda^- \le \nu$, når μ og ν er (endelige) mål defineret på $\mathbb{E}$ med $\lambda = \mu - \nu$.

Svarende til en tolkning af $\lambda(E)$ som den samlede ladning i mængden E er det naturligt at opfatte $\lambda^+(E)$ som den positive og $-\lambda^-(E)$ som den negative ladning i E.

3.12. Idet
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \in \,]-\infty, 0] \\ 1 & \text{for } x \in \,]0, \infty[\,, \end{cases}$$
skal man vise, at der ikke findes nogen kontinuert funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, således at $f(x) = g(x)$ for næsten alle $x \in \mathbb{R}$ med hensyn til Lebesgue målet.

3.13. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og antag $f_n \to f$ μ-n.o., $f = h$ μ-n.0. og $\forall n : f_n = h_n$ μ-n.o. Vis, at $h_n \to h$ μ-n.o.

3.14. Et mål $\mu : \mathbb{E} \to [0, \infty]$ i en mængde X siges at være *koncentreret* i en mængde $A \in \mathbb{E}$, hvis $\mu(\complement A) = 0$. Vis, at hvis μ er koncentreret i hver af mængderne $A_1, A_2, \dots$ fra $\mathbb{E}$, så er μ også koncentreret i $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

3.15. Et mål $\mu : \mathbb{E} \to [0, \infty]$ i en mængde X siges at være *fuldstændigt*, hvis der for $M, N \subseteq X$ gælder
$$M \subseteq N \text{ og } N \in \mathbb{E} \text{ med } \mu(N) = 0 \Rightarrow M \in \mathbb{E}\,,$$
dvs. hvis enhver μ-nulmængde tilhører $\mathbb{E}$.

Giv eksempler på

1° et fuldstændigt mål,
2° et mål, der ikke er fuldstændigt,
3° to mål defineret på samme σ-algebra, hvor det ene er fuldstændigt, det andet ikke.

(Hovedeksemplet er det fuldstændige Lebesgue mål i $\mathbb{R}^k$, se §5.8).

3.16. Lad $\mu : \mathbb{E} \to [0, \infty]$ være et *fuldstændigt* mål i en mængde X (se opg. 3.15). Med $f, g, f_1, f_2, \dots$ betegnes funktioner defineret på X og med værdier i samme mængde $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$.

1° Antag $f = g$ μ-n.o. Vis da, at f er $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis g er det.
2° Antag $f_n(x) \to f(x)$ for μ-næsten alle x. Vis, at f er $\mathbb{E}$-målelig, hvis $f_1, f_2, \dots$ alle er det.
3° Gør rede for, at forudsætningen om fuldstændighed er nødvendig i 1° og 2°.

3.17. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og sæt
$$\mathbb{F} = \{F \subseteq X \mid \exists A, B \in \mathbb{E} : A \subseteq F \subseteq B,\ \mu(B \setminus A) = 0\}\,.$$

1° Vis, at en mængde $F \subseteq X$ tilhører $\mathbb{F}$, hvis og kun hvis F kan skrives $F = A \cup M$, hvor $A \in \mathbb{E}$, og M er en μ-nulmængde.
2° Vis, at $\mathbb{F}$ er en σ-algebra i X.

3° Vis, at μ på en og kun en måde kan udvides til et mål $\overline{\mu} : \mathbb{F} \to [0, \infty]$. (Vink. Benyt 1°.)

4° Vis, at nulmængderne m.h.t. μ og $\overline{\mu}$ er de samme.

5° Vis, at $\overline{\mu}$ er et fuldstændigt mål (se opg. 3.15), og at enhver udvidelse af μ til et fuldstændigt mål i X, også er en udvidelse af $\overline{\mu}$. (Kort: $\overline{\mu}$ er den snævreste udvidelse af μ til et fuldstændigt mål i X. Ofte kaldes $\overline{\mu}$ for *fuldstændiggørelsen* af μ.) (Hovedeksempel: Se §5.8.)

3.18. Lad $\mu : \mathbb{E} \to [0, \infty]$ være et mål i en mængde $X \neq \varnothing$ og lad $\overline{\mu} : \mathbb{F} \to [0, \infty]$ være den snævreste udvidelse af μ til et fuldstændigt mål i X. (Se opg. 3.17.)

1° Vis, at der til enhver $\mathbb{F}$-målelig funktion $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ findes en $\mathbb{E}$-målelig funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, således at

$$f = g \ \mu\text{-n.o.}$$

(*Vink:* Sæt $F_r = \{x \mid g(x) > r\}$ for hvert $r \in \mathbb{Q}$ og skriv F_r på formen $A_r \bigcup M_r$, hvor $A_r \in \mathbb{E}$, og M_r er en μ-nulmængde. Videre vælges $N \in \mathbb{E}$ med $\mu(N) = 0$, således at $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} M_r \subseteq N$. Prøv så

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{for } x \in X \setminus N \\ 0 & \text{for } x \in N\,, \end{cases}$$

idet $\{\,]r, \infty] \mid r \in \mathbb{Q}\}$ frembringer $\overline{\mathbb{B}}$.)

2° Som 1°, men med $\mathbb{R}$, henholdsvis $\mathbb{C}$, i stedet for $\overline{\mathbb{R}}$.

3.10

§4. Integral

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum. I de 3 næste afsnit skal vi til visse funktioner $f : X \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) knytte et tal $\int f d\mu$ kaldet integralet af funktionen med hensyn til målet μ. Dette skal naturligvis gøres på en sådan måde, at vi genfinder det sædvanlige integral, når μ er Lebesgue målet. Den grundlæggende ide er at definere

$$\int 1_E \, d\mu = \mu(E) \text{ for } E \in \mathbb{E},$$

idet 1_E er *indikatorfunktionen* for E, dvs.

$$1_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in E, \\ 0 & \text{for } x \in X \setminus E. \end{cases}$$

Vi skal se, at denne ide fastlægger integralet, hvis vi samtidig ønsker, at afbildningen $f \mapsto \int f d\mu$ er lineær og har “passende kontinuitetsegenskaber”.

4.1. Integral af positive målelige funktioner

En funktion $s : X \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) kaldes *simpel*, hvis den kun har endelig mange forskellige funktionsværdier. Som eksempel nævnes indikatorfunktionen 1_E for en delmængde $E \subseteq X$. Den har højst to værdier.

Er $a_1, \ldots, a_n$ de forskellige funktionsværdier for en simpel funktion s, vil $A_i = \{x \in X \mid s(x) = a_i\} = s^{-1}(\{a_i\})$, $i = 1, \ldots, n$, være ikke tomme, parvis disjunkte delmængder af X med $\bigcup_1^n A_i = X$, altså en klasseinddeling af X, og

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \, 1_{A_i} .$$

Man ser, at s er $\mathbb{E}$-målelig netop hvis $A_i \in \mathbb{E}$ for $i = 1, \ldots, n$.

Lad $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ betegne mængden af målelige funktioner $f : X \to [0, \infty]$. Det understreges, at funktionerne i $\mathcal{M}^+$ må antage værdien ∞, og f.eks. er funktionen $x \mapsto \infty$ element i $\mathcal{M}^+$. For $f, g \in \mathcal{M}^+$ og $c \in [0, \infty]$ er $f + g$ og cf igen i $\mathcal{M}^+$, og hvis (f_n) er en følge fra $\mathcal{M}^+$ som konvergerer punktvis mod en funktion f, så er f i $\mathcal{M}^+$. Specielt vil grænsefunktionen for en voksende følge af simple, positive målelige funktioner tilhøre $\mathcal{M}^+$. At alle funktioner i $\mathcal{M}^+$ kan opnås på denne måde, er indeholdt i følgende:

Sætning 4.1. *For enhver funktion $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ findes en voksende følge $s_1 \le s_2 \le \cdots$ af simple, $\mathbb{E}$-målelige funktioner $s_n : X \to [0, \infty[$ med $f = \lim_{n\to\infty} s_n$ (punktvis).*

Bevis. Man kan benytte $s_n : X \to [0,n]$, $n = 1, 2, \dots$, defineret ved

$$s_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad 0 \le f(x) < \frac{1}{2^n} \\ \vdots & \\ \frac{k}{2^n} & \text{når} \quad \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n} \\ \vdots & \\ \frac{n2^n-1}{2^n} & \text{når} \quad \frac{n2^n-1}{2^n} \le f(x) < n \\ & \\ n & \text{når} \quad n \le f(x) \le \infty\,. \end{cases}$$

Funktionen s_n er defineret ved en "Tuborg" og derfor $\mathbb{E}$-målelig ifølge §2.4. Desuden gælder at $s_n(x)$ konvergerer voksende mod $f(x)$ for alle $x \in X$, hvilket kort skrives $s_n \nearrow f$. Thi er $f(x) < 1$, finder man $s_1(x), s_2(x), \dots$ ud fra $f(x)$ som nærmeste lavere multipla af $1/2$, $1/2^2, \dots$. For $1 \le p \le f(x) < p+1$ begynder talfølgen $s_1(x), s_2(x), \dots$ med $1, 2, \dots, p$, medens de resterende elementer fås ud fra $f(x)$ som nærmeste lavere multipla af $1/2^{p+1}$, $1/2^{p+2}, \dots$. Er $f(x) = \infty$ bliver talfølgen $1, 2, \dots$. $\square$

Bemærkninger. (a) En simpel funktion $s \in \mathcal{M}^+$ har per definition værdier i $[0, \infty[$, værdien ∞ tillades ikke.

(b) For et reelt tal x betegner $[x]$ den hele del af x, altså $[x]$ er det hele tal $n \in \mathbb{Z}$, der opfylder $n \le x < n+1$. Dermed kan s_n skrives

$$s_n(x) = \begin{cases} 2^{-n}[2^n f(x)] & \text{når} \quad f(x) < n\,, \\ n & \text{når} \quad f(x) \ge n\,. \end{cases}$$

Vi ønsker at tilskrive enhver funktion $f \in \mathcal{M}^+$ et integral $I_\mu(f) = \int f d\mu$, som skal være et tal i intervallet $[0, \infty]$. Følgende hovedresultat viser, at dette kan gøres på kun én måde, hvis vi ønsker nogle rimelige regneregler for afbildningen $I_\mu : f \mapsto \int f d\mu$.

Hovedsætning 4.2. *Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum. Der findes en og kun en afbildning I_μ af $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ ind i $[0, \infty]$, som har følgende egenskaber:*

(i) $I_\mu(1_E) = \mu(E)$ *for* $E \in \mathbb{E}$.

(ii) $I_\mu(f+g) = I_\mu(f) + I_\mu(g)$ *for* $f, g \in \mathcal{M}^+$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} I_\mu(f_n) = I_\mu(f)$ *når* (f_n) *er en følge fra* $\mathcal{M}^+$ *så* $f_n \nearrow f$.

For den ved (i)–(iii) fastlagte afbildning I_μ skrives $I_\mu(f) = \int f d\mu$. Den er givet ved

$$I_\mu(s) = \int s d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \; \mu(A_i)\,, \qquad (*)$$

når $s \in \mathcal{M}^+$ er simpel med de indbyrdes forskellige funktionsværdier $a_1, \ldots, a_n$ og $A_i = s^{-1}(\{a_i\})$, og ved

$$I_\mu(f) = \int f d\mu = \sup\left\{\int s d\mu \mid s \in \mathcal{M}^+ \,,\ s \text{ simpel},\ s \leq f\right\}, \qquad (**)$$

for vilkårligt $f \in \mathcal{M}^+$.

Bevis. Analyse af problemstillingen. Antag, at der findes en afbildning I_μ med de ønskede egenskaber. Af (ii) sluttes ved induktion $I_\mu(nf) = nI_\mu(f)$ for $n \in \mathbb{N}$. For et rationalt tal $r = p/q\,,\ p, q \in \mathbb{N}$ har vi da

$$p\, I_\mu(f) = I_\mu(pf) = I_\mu(q(rf)) = q\, I_\mu(rf)\,,$$

så

$$I_\mu(rf) = r\, I_\mu(f)\,.$$

Idet der til ethvert $c \in]0, \infty]$ findes en voksende følge (r_n) af positive rationale tal, der konvergerer mod c, finder vi af (iii) at

$$I_\mu(cf) = \lim_{n\to\infty} I_\mu(r_n f) = \lim_{n\to\infty} r_n\, I_\mu(f) = c\, I_\mu(f)\,,$$

altså

$$\text{(iv)} \qquad I_\mu(cf) = c\, I_\mu(f) \quad \text{for } c \in [0, \infty],\ f \in \mathcal{M}^+\,.$$

For en simpel funktion $s \in \mathcal{M}^+$ med værdierne $a_1, \ldots, a_n$, har man $s = \sum_1^n a_i 1_{A_i}$, hvor $A_i = s^{-1}(\{a_i\})$, og ved anvendelse af (ii), (iv) og (i) fås $(*)$.

For vilkårligt $f \in \mathcal{M}^+$ gælder $(**)$. Hvis nemlig $s \leq f$ og s er simpel og $\mathbb{E}$-målelig, vil $f - s \in \mathcal{M}^+$ og $f = s + (f - s)$, hvoraf $I_\mu(f) = I_\mu(s) + I_\mu(f - s) \geq I_\mu(s)$, og dermed er $I_\mu(f)$ et overtal for den betragtede talmængde. På den anden side viser (iii) og Sætning 4.1, at der findes simple $\mathbb{E}$-målelige funktioner $s_n \leq f$ med $I_\mu(s_n)$ så tæt på $I_\mu(f)$, vi ønsker.

Analysen viser, at der højst er én afbildning med de ønskede egenskaber, og hvis der findes en, må den opfylde (iv), og være givet ved $(*)$ for simple funktioner, og ved $(**)$ for vilkårlige funktioner i $\mathcal{M}^+$.

I *eksistensbeviset* definerer vi først $I_\mu(s) = \int s d\mu$ for simple funktioner i $\mathcal{M}^+$ ved $(*)$, og får brug for

LEMMA 1. *For simple $\mathbb{E}$-målelige funktioner $s, t : X \to [0, \infty[$ og $c \in [0, \infty[$ er cs og $s + t$ igen simple og $\mathbb{E}$-målelige, og der gælder*

$$\int cs d\mu = c \int s d\mu\,, \ \int (s + t) d\mu = \int s d\mu + \int t d\mu\,.$$

Bevis. Kun den sidste påstand er værd at omtale:
1° Hvis $X = \bigcup_{h=1}^{p} C_h$, hvor $C_1, \ldots, C_p \in \mathbb{E}$ er parvis disjunkte, og hvis $c_1, \ldots, c_p \in [0, \infty[$, da er

$$\int \left(\sum_{h=1}^{p} c_h 1_{C_h} \right) d\mu = \sum_{h=1}^{p} c_h \mu(C_h) \,.$$

Bemærk, at nogle af mængderne C_h kan være tomme, og at $c_1, \ldots, c_p$ ikke er forudsat indbyrdes forskellige. – Udelades tomme C_h, og erstattes led $c_{h_1}\mu(C_{h_1}), \ldots, c_{h_k}\mu(C_{h_k})$ på højre side med

$$c_{h_1} \sum_{i=1}^{k} \mu(C_{h_i}) = c_{h_1} \mu(\bigcup_{i=1}^{k} C_{h_i})$$

når $c_{h_1} = \ldots = c_{h_k}$, kommer vi imidlertid tilbage til definitionen af

$$\int (\sum_{h=1}^{p} c_h 1_{C_h}) d\mu$$

.
2° Er $a_1, \ldots, a_m$ og $b_1, \ldots, b_n$ de forskellige funktionsværdier for henholdsvis s og t, og sættes $A_i = s^{-1}(\{a_i\})$, $i = 1, \ldots, m$, og $B_j = t^{-1}(\{b_j\})$, $j = 1, \ldots, n$, har vi

$$X = X \cap X = \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j \right) = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j) \,,$$

hvor de mn mængder $A_i \cap B_j \in \mathbb{E}$ er parvis disjunkte. Da nu

$$s = \sum_{i,j} a_i 1_{A_i \cap B_j} \,, \quad t = \sum_{i,j} b_j 1_{A_i \cap B_j}$$

og dermed

$$s + t = \sum_{i,j} (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j} \,,$$

finder vi med brug af 1°

$$\int s d\mu + \int t d\mu = \sum_{i,j} a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) = \int (s + t) d\mu \,. \quad \square$$

Lemma 2. *For simple $\mathbb{E}$-målelige funktioner $s, t : X \to [0, \infty[$, hvor $s \le t$, gælder*

$$\int s d\mu \le \int t d\mu .$$

Bevis. Idet $t = s + (t - s)$ med $t - s \ge 0$, har vi

$$\int t d\mu = \int s d\mu + \int (t-s) d\mu \ge \int s d\mu . \quad \square$$

For vilkårligt $f \in \mathcal{M}^+$ defineres dernæst

$$\tilde{I}(f) = \sup \left\{ \int s d\mu \mid s \in \mathcal{M}^+ , s \text{ simpel}, s \le f \right\} \in [0, \infty] .$$

Hvis $f \in \mathcal{M}^+$ selv er *simpel*, indgår $\int f d\mu$ i talmængden på højre side, altså $\tilde{I}(f) \ge \int f d\mu$. På den anden side kan vi af Lemma 2 slutte, at $\int f d\mu \ge \int s d\mu$ for de betragtede s, altså $\int f d\mu \ge \tilde{I}(f)$. Der gælder altså $\tilde{I}(f) = \int f d\mu = I_\mu(f)$ når $f \in \mathcal{M}^+$ er simpel, og dermed er der ingen grund til at opretholde betegnelsen $\tilde{I}(f)$. Det har mening at definere $I_\mu(f) = \int f d\mu$ ved $(**)$ for alle $f \in \mathcal{M}^+$.

En umiddelbar konsekvens af definitionen er, at der for $f, g \in \mathcal{M}^+$ gælder

$$f \le g \Rightarrow \int f d\mu \le \int g d\mu .$$

Vi skal nu eftervise, at afbildningen $I_\mu : f \mapsto \int f d\mu$ har egenskaberne (i)–(iii), og her er (i) en umiddelbar konsekvens af definitionen $(*)$. Egenskaben (ii) følger af (iii) og Lemma 1 på følgende måde: Til $f, g \in \mathcal{M}^+$ kan vi ifølge Sætning 4.1 finde følger (s_n), (t_n) af simple funktioner fra $\mathcal{M}^+$ så $s_n \nearrow f$, $t_n \nearrow g$. Da $s_n + t_n \nearrow f + g$ giver (iii)

$$\begin{aligned}\int (f+g) d\mu &= \lim \int (s_n + t_n) d\mu = \lim \left(\int s_n d\mu + \int t_n d\mu \right) \\ &= \lim \int s_n d\mu + \lim \int t_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu .\end{aligned}$$

Den manglende egenskab (iii) er af fundamental betydning, så vi citerer den som en selvstændig sætning (jf. Lebesgue: Leçons sur l'intégration, Paris 1904 p.98).

Hovedsætning 4.3. (Lebesgues monotonisætning).

For enhver stigende følge $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ af funktioner fra $\mathcal{M}^+$ gælder

$$\int (\lim f_n) d\mu = \lim \int f_n d\mu \,.$$

Bevis. Vi bemærker, at $f = \lim_n f_n = \sup_n f_n \in \mathcal{M}^+$, og at talfølgen $(\int f_n d\mu)_{n=1,2,\dots}$ er stigende. Både venstre og højre side i ligningen har derfor mening.

Idet $f \geq f_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, er det endvidere klart, at

$$\int f d\mu \geq \lim_n \int f_n d\mu \,.$$

Problemet er altså at vise den modsatte ulighed.

Ifølge definitionen af $\int f d\mu$ kommer dette ud på at vise

$$\int s d\mu \leq \lim_n \int f_n d\mu$$

for en vilkårlig simpel, $\mathbb{E}$-målelig funktion $s : X \to [0, \infty[$ med $s \leq f$. – Det vil være nok for et vilkårligt tal $a \in]0,1[$ at vise

$$a \int s d\mu = \int as d\mu \leq \lim_n \int f_n d\mu \,.$$

For hvert $x \in X$, hvor $0 < f(x)$, er $as(x) < f(x) = \lim_n f_n(x)$, hvorfor $\exists n \in \mathbb{N} : as(x) < f_n(x)$. Og $f(x) = 0$ medfører $0 = s(x) = f_1(x) = f_2(x) = \dots$.

Sætter vi $E_n = \{x \in X \mid as(x) \leq f_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$ har vi derfor

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X \,.$$

Endvidere er $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$, og alle E_n tilhører $\mathbb{E}$ (§2.4, Eksempel 2.15).

Imidlertid er afbildningen $E \mapsto \nu(E) = \int as \, 1_E d\mu$ et mål på $\mathbb{E}$, thi hvis $s = \sum_{i=1}^n a_i \, 1_{A_i}$ har vi ifølge Lemma 1

$$\nu(E) = \int \sum_{i=1}^{n} a a_i \, 1_{A_i \cap E} d\mu = \sum_{i=1}^{n} a a_i \mu(A_i \cap E) \,,$$

og sidste udtryk er et mål ifølge eksemplerne C, D i §3.1. Følgelig har vi (§3.1 (5)), at

$$\nu(E_n) = \int as \, 1_{E_n} d\mu \nearrow \nu(X) = \int as \, 1_X d\mu = \int as \, d\mu \,.$$

Idet $as \cdot 1_{E_n} \le f_n$ og dermed $\int as \cdot 1_{E_n} d\mu \le \int f_n d\mu$, følger det ønskede

$$\int as \; d\mu = \lim_n \int as \cdot 1_{E_n} d\mu \le \lim_n \int f_n d\mu \; . \quad \square$$

Bemærkning 4.4. Egenskaben (5) i §3.1 er et specialtilfælde af monotonisætningen ($f_n = 1_{E_n}$). Det afgørende skridt i ovenstående bevis er at udnytte egenskaben (5), dog for et andet mål.

Sætningen viser, at integration og grænseovergang kan *ombyttes*, når man har en stigende følge fra $\mathcal{M}^+$.

Vi fremhæver to egenskaber ved integralet som er vist under henholdsvis analysedelen, og eksistensbeviset:

Tillæg til hovedsætning 4.2. *For $f, g \in \mathcal{M}^+$ og $c \in [0, \infty]$ gælder*

(iv) $\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu \,$,

(v) $\int f \, d\mu \le \int g \, d\mu$ *når* $f \le g$.

Korollar 4.5. *For $f \in \mathcal{M}^+$ gælder*

$$\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \; \mu\text{-n.o.}$$

samt

$$\int f d\mu < \infty \Rightarrow f < \infty \; \mu\text{-n.o.}$$

Bevis. Med $A = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ er $\infty \cdot f = \infty \cdot 1_A$ og dermed

$$\infty \int f d\mu = \int \infty f \; d\mu = \int \infty 1_A d\mu = \infty \mu(A) \,,$$

men dette viser $\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0$.

Med $B = \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$ er $\infty 1_B \le f$, og dermed

$$\infty \mu(B) \le \int f d\mu \,,$$

hvilket viser $\int f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(B) = 0$. $\square$

Som en anvendelse af monotonisætningen viser vi, at egenskab (ii) i Hovedsætning 4.2 gælder ikke blot for endelig mange addender, men for numerabelt mange.

SÆTNING 4.6. *For en uendelig række* $\sum_1^\infty f_n$ *af funktioner fra* $\mathcal{M}^+$ *gælder*

$$\int\left(\sum_1^\infty f_n\right)d\mu = \sum_1^\infty \int f_n d\mu\,.$$

Bevis. Af $\sum_{k=1}^n f_k \nearrow \sum_{k=1}^\infty f_k$ følger at

$$\sum_{k=1}^n \int f_k d\mu = \int\left(\sum_{k=1}^n f_k\right)d\mu \nearrow \int\left(\sum_{k=1}^\infty f_k\right)d\mu\,. \quad \square$$

Vi slutter med en anvendelse af monotonisætningen, som vi skal udnytte i beviset for Lebesgues majorant sætning i §4.2.

SÆTNING 4.7. (FATOUS LEMMA). *For en følge* (f_n) *fra* $\mathcal{M}^+$ *gælder*

$$\int(\liminf_n f_n)d\mu \le \liminf_n \int f_n d\mu\,.$$

Bevis. Med $g_p = \inf_{n\ge p} f_n$, $p = 1, 2, \ldots$ har vi $g_p \le f_n$ for $p \le n$, hvoraf

$$\int g_p d\mu \le \int f_n d\mu\,,$$

altså

$$\int g_p d\mu \le \inf_{n\ge p} \int f_n d\mu \le \liminf_n \int f_n d\mu\,.$$

Da nu $g_p \nearrow \liminf_n f_n$, giver monotonisætningen det ønskede. $\square$

BEMÆRKNING 4.8. Hvis (f_n) er voksende, giver Fatous lemma

$$\int(\lim f_n)d\mu \le \lim \int f_n d\mu\,,$$

men den modsatte ulighed er oplagt, idet $\lim f_n \ge f_n$ for alle n, og dermed genfinder vi monotonisætningen.

Uanset at Fatous lemma kun er en lille variant af monotonisætningen, er den ofte til stor nytte. (Pierre Fatou, fransk matematiker 1878–1929).

4.2. Integral af reelle funktioner

Medens det, så længe talen er om integration af positive funktioner, er overordentlig bekvemt at operere med tallet ∞, ville det for vilkårlige reelle funktioner tværtimod være en belastning at inddrage ∞ og $-\infty$. Derfor lader vi være.

Er f en reel funktion $f : X \to \mathbb{R}$, sætter vi $f^+ = f \vee 0$ og $f^- = -(f \wedge 0)$, altså

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{når} \quad 0 \le f(x) \\ 0 & \text{når} \quad f(x) < 0\,, \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad 0 \le f(x) \\ -f(x) & \text{når} \quad f(x) < 0\,. \end{cases}$$

De to funktioner kaldes *den positive* og *den negative* del af f.

Bemærk, at $f = f^+ - f^-$ og $|f| = f^+ + f^-$.

Er $\mathbb{E}$ en σ-algebra i X, vil f være $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis f^+ og f^- begge er det.

Lad nu $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum med $X \neq \varnothing$.

Definition 4.9. En funktion $f : X \to \mathbb{R}$ siges at være *integrabel* med hensyn til μ (kort: *μ-integrabel*), hvis f er $\mathbb{E}$-målelig og

$$\int f^+ d\mu < \infty, \quad \int f^- d\mu < \infty\,.$$

I bekræftende fald sættes

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\,.$$

Mængden af μ-integrable funktioner $f : X \to \mathbb{R}$ betegnes $\mathcal{L}(\mu) = \mathcal{L}(X, \mu) = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$. Bemærk at 1_A er integrabel hvis og kun hvis $A \in \mathbb{E}$ og $\mu(A) < \infty$.

Åbenbart er $-\infty < \int f d\mu < \infty$ for hvert $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Definitionen af $\int f d\mu$ er tilladelig. Thi for $f \ge 0$ er jo $f^+ = f$, $f^- = 0$.

Bemærkning 4.10. Enhver $\mathbb{E}$-målelig funktion $f : X \to [0, \infty]$ har et integral $\int f d\mu$, eventuelt med værdien ∞, men den regnes kun for integrabel m.h.t. μ, hvis alle funktionsværdier $f(x)$ er endelige og $\int f d\mu$ er endeligt.

Sætning 4.11. *En $\mathbb{E}$-målelig funktion $f : X \to \mathbb{R}$ er integrabel med hensyn til μ, hvis og kun hvis $|f|$ er det, dvs. hvis $\int |f| d\mu < \infty$. I bekræftende fald er*

$$\left| \int f d\mu \right| \le \int |f| d\mu\,.$$

Bevis. Af $|f| = f^+ + f^-$ følger $\int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu$, hvoraf

$$\int f^+ d\mu < \infty, \ \int f^- d\mu < \infty \Leftrightarrow \int |f| d\mu < \infty\,,$$

og i bekræftende fald er

$$\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \le \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu\,.$$

□

Integrabilitet godtgøres oftest ved følgende trivielle

Korollar 4.12. *Hvis $f : X \to \mathbb{R}$ er $\mathbb{E}$-målelig og hvis $|f| \le g$,hvor $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ og $\int g d\mu < \infty$, så er f integrabel m.h.t. μ.*

Bevis. $\int |f| d\mu \le \int g d\mu\,.$ □

Sætning 4.13. *Når $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $a \in \mathbb{R}$, da er også $af, f + g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og*

$$\int af\ d\mu = a \int f d\mu, \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Bevis. For $a = 0$ er påstanden triviel. For $a > 0$ benyttes $(af)^+ = af^+$, $(af)^- = af^-$. Det er nu nok at betragte tilfældet $a = -1$; her benyttes $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$.

At summen $f + g : X \to \mathbb{R}$ er μ-integrabel følger af, at den er $\mathbb{E}$-målelig, og at $|f + g| \le |f| + |g|$, hvor $|f| + |g| \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ og

$$\int (|f| + |g|)\, d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu < \infty\,.$$

At $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$, kan nu vises således: Af

$$(f + g)^+ - (f + g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

fås

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f + g)^-\,,$$

hvor alle led tilhører $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$. Men så er

$$\int (f + g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int (f + g)^- d\mu\,,$$

og da disse integraler alle er endelige tal, sluttes

$$\int (f + g)^+ d\mu - \int (f + g)^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu\,,$$

dvs.
$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$
□

KOROLLAR 4.14. *Når $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $f \leq g$, da er*
$$\int f d\mu \leq \int g d\mu\,.$$
Lighedstegnet gælder, hvis og kun hvis $f = g$ næsten overalt m.h.t. μ.

Bevis. Idet $g - f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$, er $\int (g-f)d\mu \geq 0$, med lighedstegn hvis og kun hvis $g - f = 0$ næsten overalt m.h.t. μ (Korollar 4.5). Og
$$\int (g-f)d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu\,. \ \square$$

Ovenstående kan rekapituleres således: $\mathcal{L}(X, \mu)$ *er et vektorrum og* $f \mapsto \int f d\mu$ *er en positiv linearform.*

Grænsefunktionen f for en punktvis konvergent følge $f_1, f_2, \ldots$ af integrable funktioner behøver ikke at være integrabel, end ikke hvis talfølgen $\int f_1 d\mu$, $\int f_2 d\mu, \ldots$ er konvergent. Og hvis f er integrabel, gælder ikke nødvendigvis $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$. Det er let at give trivielle modeksempler, f.eks. med $\mu =$ Lebesgue målet på $\mathbb{R}$, således $f_n = 1_{]0,n]} - 1_{]-n,0]}$, henholdsvis $f_n = 1_{]n-1,n]}$, $n = 1, 2, \ldots$.
Der gælder imidlertid følgende simple og ofte anvendelige hovedsætning, et af teoriens højdepunkter:

HOVEDSÆTNING 4.15. (LEBESGUES MAJORANTSÆTNING).
Lad funktionerne $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, være $\mathbb{E}$-målelige og lad følgen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ være konvergent i $\mathbb{R}$ for hvert $x \in X$. Hvis der findes en funktion $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med $\int g d\mu < \infty$, således at $\forall n : |f_n| \leq g$, da er funktionerne $f_1, f_2, \ldots$ og $f = \lim f_n$ alle integrable m.h.t. μ, og
$$\int f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu\,.$$

Bevis. En funktion $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med $\int g d\mu < \infty$, som opfylder $|f_n| \leq g$ for alle n, kaldes en *majorant* for funktionerne $f_1, f_2, \ldots$. En sådan funktion g tænkes givet.

1° Det er klart, at $f_1, f_2, \ldots$ og $f = \lim f_n$ er integrable m.h.t. μ, idet funktionerne alle er $\mathbb{E}$-målelige, og $|f_n| \leq g$ medfører $|f| \leq g$.

2° Antag først $\forall x \in X : g(x) < \infty$, således at majoranten g er integrabel m.h.t. μ.

Idet $g + f_n \geq 0$ og $g - f_n \geq 0$, kan vi anvende Fatous lemma (Sætning 4.7) på hver af følgerne $(g + f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(g - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da

$$\liminf(g + f_n) = \lim(g + f_n) = g + f\,,$$

får vi i første tilfælde

$$\int (g + f)d\mu \leq \liminf \int (g + f_n)d\mu\,,$$

altså ifølge Sætning 4.13

$$\begin{aligned}\int g d\mu + \int f d\mu &\leq \liminf \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu\right)\\ &= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu\,,\end{aligned}$$

dvs.

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu\,.$$

I andet tilfælde fås

$$\int (g - f)d\mu \leq \liminf \int (g - f_n)d\mu\,,$$

altså

$$\begin{aligned}\int g d\mu - \int f d\mu &\leq \liminf \left(\int g d\mu - \int f_n d\mu\right)\\ &= \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu\,,\end{aligned}$$

dvs.

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu\,.$$

Sammenholdt har vi

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu \leq \limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu\,,$$

altså

$$\liminf \int f_n d\mu = \limsup \int f_n d\mu = \int f d\mu\,,$$

dvs.

$$\int f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu\,.$$

3° Generelt: Med $N = \{x \in X \mid g(x) = \infty\}$ er $g \cdot 1_{X\setminus N}$ en μ-integrabel majorant for $f_1 \cdot 1_{X\setminus N}, f_2 \cdot 1_{X\setminus N}, \dots$. Ifølge 2° gælder derfor

$$\int f_n \cdot 1_{X\setminus N} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f \cdot 1_{X\setminus N} d\mu\,.$$

Da nu $\mu(N) = 0$ (Korollar 4.5), har vi imidlertid (jf. bemærkning nedenfor)

$$\int f_n d\mu = \int f_n \cdot 1_{X\setminus N} d\mu \ \text{ og } \ \int f d\mu = \int f \cdot 1_{X\setminus N} d\mu\,. \ \square$$

Som et specialtilfælde af Lebesgues sætning nævnes, at *majorisering med en konstant* $K \in \mathbb{R}_+$

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in X : |f_n(x)| \le K\,,$$

er en tilstrækkelig betingelse, når $\mu(X) < \infty$. (Lebesgue 1902; den almene majorantbetingelse: Lebesgue 1908.)

Bemærkning 4.16. Hvis $f = g$ næsten overalt m.h.t. μ, hvor $f : X \to \mathbb{R}$ er $\mathbb{E}$-målelig, medens $g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, da er også $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, og

$$\int f d\mu = \int g d\mu\,.$$

Bevis. Vi skriver $f = g + (f - g)$. Idet $\int |f - g| d\mu = 0$ (Korollar 4.5), sluttes af Sætning 4.11, at $f - g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ med $\int (f - g) d\mu = 0$, og Sætning 4.13 giver det ønskede. $\square$

Bemærkningen tillader en svækkelse af forudsætningerne i en række sætninger i disse noter.

I Lebesgues majorantsætning kan forudsætningen, at $f_1(x), f_2(x), \dots$ er konvergent for *hvert* $x \in X$, således ændres til

$$f_n(x) \to f(x) \ \text{ for } \mu\text{-næsten alle } x \in X\,,$$

hvor $f : X \to \mathbb{R}$ er en $\mathbb{E}$-målelig funktion. Og hvad majorantfunktionen angår, vil det være nok, at

$$\forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \le g \ \text{ næsten overalt m.h.t. } \mu\,.$$

Thi da der kun er tale om numerabelt mange undtagelsesnulmængder, kan disse forenes til en enkelt, N, hvorefter den oprindelige sætning anvendes på $f_n \cdot 1_{X \setminus N} \to f \cdot 1_{X \setminus N}$.

Vi vil også tillade os at integrere en funktion f, der kun er defineret næsten overalt, under forudsætning af at den kan udvides til en integrabel funktion $\tilde{f}$ på hele X. Vi sætter $\int f d\mu = \int \tilde{f} d\mu$, idet værdien ikke afhænger af, hvordan udvidelsen til en integrabel funktion foretages.

4.3. Integral af komplekse funktioner

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum med $X \neq \varnothing$.

Idet vi skriver en funktion $f : X \to \mathbb{C}$ på formen

$$f = f' + if'' \ \text{ med } \ f' : X \to \mathbb{R}\,, \ \ f'' : X \to \mathbb{R}\,,$$

siges f af være *integrabel* med hensyn til μ, hvis f' og f'' begge er det. I bekræftende fald sættes

$$\int f d\mu = \int f' d\mu + i \int f'' d\mu\,.$$

Mængden af μ-integrable funktioner $f : X \to \mathbb{C}$ betegnes $\mathcal{L}(\mu) = \mathcal{L}(X, \mu) = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, ganske som for reelle funktioner.

En funktion $f = f' + if''$, der er μ-integrabel, er åbenbart $\mathbb{E}$-målelig (Sætning 2.5). Det er også indlysende, at den konjugerede funktion $\overline{f} = f' - if''$ er μ-integrabel, og at $\int \overline{f} d\mu$ er konjugeret til $\int f d\mu$.

Resultaterne i §4.2 (sætninger, korollarer, bemærkninger,...) gælder ord til andet også for funktioner med komplekse værdier, idet $\mathbb{R}$ *overalt ændres til* $\mathbb{C}$. En eneste undtagelse er Korollar 4.14, der naturligvis er specifikt for reelle funktioner.

Begrundelsen er gennemgående ganske ligetil. Eksempelvis:

Når $f : X \to \mathbb{C}$ er μ-integrabel og $a \in \mathbb{C}$, da er også $af \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og

$$\int af \ d\mu = a \int f d\mu\,.$$

Thi med $f = f' + if''$ og $a = a' + ia''$ har vi

$$af = (a'f' - a''f'') + i(a'f'' + a''f')\,.$$

Altså er $af \in \mathcal{L}(\mu)$ og

$$\begin{aligned}\int af\ d\mu &= \int (a'f' - a''f'')d\mu + i\int (a'f'' + a''f')d\mu \\ &= (a'\int f'd\mu - a''\int f''d\mu + i(a'\int f''d\mu + a''\int f'd\mu) \\ &= (a' + ia'')(\int f'd\mu + i\int f''d\mu) = a\int fd\mu\,.\end{aligned}$$

En $\mathbb{E}$-målelig funktion $f : X \to \mathbb{C}$ er integrabel m.h.t. μ, hvis og kun hvis $|f|$ er det, dvs. hvis $\int |f|d\mu < \infty$.

Thi f', f'' og $|f|$ er $\mathbb{E}$-målelige, og

$$|f'| \leq |f|,\ |f''| \leq |f| \text{ samt } |f| \leq |f'| + |f''|\,.$$

Kun for ét resultat kræver begrundelsen mere opfindsomhed:

. *Når $f : X \to \mathbb{C}$ er integrabel m.h.t. μ, da er*

$$|\int fd\mu| \leq \int |f|d\mu\,.$$

Bevis. Vælg $a \in \mathbb{C}$ med $|a| = 1$, således at $a\int fd\mu \in [0, \infty[$. Da er

$$|\int fd\mu| = a\int fd\mu = \int af\ d\mu = \int g'd\mu + i\int g''d\mu\,,$$

hvor vi har $af = g' + ig''$ med $g' : X \to \mathbb{R}$, $g'' : X \to \mathbb{R}$. Idet tallet er reelt, har vi

$$|\int fd\mu| = \int g'd\mu\,.$$

Uligheden følger nu af, at $g' \leq |af| = |f|$. □

Bemærk specielt, at *Lebesgues majorantsætning* gælder ordret med $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$.

Med $f_n = f'_n + if''_n$, $n = 1, 2, \ldots$, og $f = f' + if''$ kan sætningen for reelle funktioner nemlig anvendes på $f'_n \to f'$ og $f''_n \to f''$, idet jo $|f_n| \leq g$ medfører $|f'_n| \leq g$ og $|f''_n| \leq g$.

Bemærkning 4.17. Om notationen. Er der givet et målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$, knytter vi altså til funktioner $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E}) \cup \mathcal{L}(X, \mu)$ et tal i $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, som vi har betegnet $\int fd\mu$. En anden benyttet skrivemåde er $\int f(x)d\mu(x)$, hvor x er en variabel. Denne skrivemåde har især betydning, hvis f afhænger af flere variable, idet den viser, efter hvilken variabel integrationen skal foretages. Bogstavet "d" optræder af historiske grunde. Man kunne naturligvis lige så godt have benyttet betegnelsen $\int f\mu$ eller mere neutrale betegnelser som $I_\mu(f)$, $\mu(f)$, $< \mu, f >$, der alle kan ses i litteraturen. I sandsynlighedsteori ser man endvidere skrivemåden $\int f(x)\mu(dx)$.

4.4. Integral over delmængde. Mål med tæthed

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og $V \in \mathbb{E}$ en ikke tom delmængde. Vi kan på naturlig måde organisere V til et målrum $(V, \mathbb{E}_V, \mu_V)$ idet

$$\mathbb{E}_V = \{B \in \mathbb{E} \mid B \subseteq V\}, \quad \mu_V = \mu|\mathbb{E}_V\,.$$

Vi siger, at μ_V er *restriktion af målet* μ til V.

En funktion g med definitionsmængde V vil vi udvide til en funktion $\tilde{g}$ på X ved fastsættelsen

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{for } x \in V\,, \\ 0 & \text{for } x \in X \setminus V\,. \end{cases}$$

Vi erindrer om, at $\tilde{g}$ er $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis g er $\mathbb{E}_V$-målelig, jf. §2.4.

Vi skal nu se hvorledes integraler m.h.t. μ_V kan føres tilbage til integraler m.h.t. μ.

SÆTNING 4.18. *For enhver $\mathbb{E}_V$-målelig funktion $g : V \to [0, \infty]$ er*

$$\int g\, d\mu_V = \int \tilde{g}\, d\mu\,. \tag{$*$}$$

Om en $\mathbb{E}_V$-målelig funktion $g : V \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) gælder

$$g \in \mathcal{L}(V, \mu_V) \Leftrightarrow \tilde{g} \in \mathcal{L}(X, \mu)\,,$$

og $(*)$ bevarer sin gyldighed for $g \in \mathcal{L}(V, \mu_V)$.

Bevis. Afbildningen $g \mapsto \int \tilde{g}\, d\mu$ af $\mathcal{M}^+(V, \mathbb{E}_V)$ ind i $[0, \infty]$ har egenskaberne (i)–(iii), der ifølge Hovedsætning 4.2 karakteriserer afbildningen $I_{\mu_V} : g \mapsto \int g\, d\mu_V$:

(i) $\int \tilde{1}_E\, d\mu = \mu_V(E)$ for $E \in \mathbb{E}_V$,

idet $\tilde{1}_E = 1_E$ så $\int \tilde{1}_E\, d\mu = \mu(E) = \mu_V(E)$.

(ii) $\int (f+g)^\sim d\mu = \int \tilde{f}\, d\mu + \int \tilde{g}\, d\mu$ for $f, g \in \mathcal{M}^+(V, \mathbb{E}_V)$,

idet $(f+g)^\sim = \tilde{f} + \tilde{g}$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \int \tilde{f}_n\, d\mu = \int \tilde{f}\, d\mu$ når $f_n \nearrow f$, $f_n \in \mathcal{M}^+(V, \mathbb{E}_V)$, idet $\tilde{f}_n \nearrow \tilde{f}$.

Heraf følger $(*)$.

For en $\mathbb{E}_V$-målelig funktion $g : V \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) gælder

$$g \in \mathcal{L}(V, \mu_V) \Leftrightarrow \int |g| d\mu_V < \infty$$

og

$$\tilde{g} \in \mathcal{L}(X, \mu) \Leftrightarrow \int |\tilde{g}| d\mu < \infty\,,$$

så da

$$\int |g| d\mu_V = \int |\tilde{g}| d\mu$$

ifølge $(*)$, (bemærk at $|g|^\sim = |\tilde{g}|$), har vi bevist, at

$$g \in \mathcal{L}(V, \mu_V) \Leftrightarrow \tilde{g} \in \mathcal{L}(X, \mu)\,.$$

Hvis $g : V \to \mathbb{R}$ tilhører $\mathcal{L}(V, \mu_V)$ har vi

$$\begin{aligned}\int g\ d\mu_V &= \int g^+ d\mu_V - \int g^- d\mu_V = \int (g^+)^\sim d\mu - \int (g^-)^\sim d\mu \\ &= \int (\tilde{g})^+ d\mu - \int (\tilde{g})^- d\mu = \int \tilde{g}\ d\mu\,,\end{aligned}$$

så $(*)$ gælder. Det komplekse tilfælde reduceres let til det reelle. $\square$

For $g \in \mathcal{L}(V, \mu_V)$ benytter vi sprogbrugen, at g er *μ-integrabel over V*, og vi benytter følgende skrivemåder for integralet

$$\int g\ d\mu_V = \int_V g\ d\mu \left(= \int \tilde{g}\ d\mu \right)\,.$$

Hvis g er defineret på hele X, defineres *integralet af* g over V m.h.t. μ ved

$$\int_V g\ d\mu = \int (g|V) d\mu_V\,.$$

Idet $(g|V)^\sim = g1_V$, har vi

$$\int_V g\ d\mu = \int g1_V d\mu\,.$$

Hvis man tillader sig at misbruge de matematiske symboler, kan man også i første tilfælde benytte $\int g1_V d\mu$ som definition af integralet af g over V.

Misbruget ligger i, at $g1_V$ ikke er defineret udenfor V, hvis g kun er defineret på V. På den anden side kan man ignorere dette, da der multipliceres med nul.

Eksempel 4.19. For en funktion g på et interval I af en af de fire typer $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ eller $]a,b[$ skrives

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g(x)dm(x) = \int_a^b g\ dm$$

i stedet for $\int_I g\,dm$, hvor m er Lebesgue målet. Når vi kan benytte samme symbol uanset intervaltype, er det fordi etpunktsmængder er nulmængder m.h.t. Lebesgue målet. Hvis vi derimod integrerer funktioner på et interval med hensyn til et mål μ på $(\mathbb{R},\mathbb{B})$, for hvilket $\mu(\{b\}) > 0$ for visse $b \in \mathbb{R}$, er det naturligvis vigtigt at holde rede på intervaltypen, idet

$$\int\limits_{]a,b]} f\ d\mu = \int\limits_{]a,b[} f\ d\mu + f(b)\mu(\{b\})\,,$$

hvis f er μ-integrabel over $]a,b]$.

Ud fra et målrum $(X,\mathbb{E},\mu)$ og en funktion $f \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$ kan man konstruere et nyt mål på $\mathbb{E}$ ved fastsættelsen

$$E \mapsto \int_E f\ d\mu \quad \text{for} \quad E \in \mathbb{E}\,,$$

idet

$$\int_\varnothing f\ d\mu = 0 \quad \text{og} \quad \int_{\bigcup_1^\infty E_n} f\ d\mu = \sum_1^\infty \int_{E_n} f\ d\mu\,,$$

når (E_n) er en følge af parvis disjunkte mængder fra $\mathbb{E}$. Den sidste ligning følger af Sætning 4.6, idet

$$f1_{\bigcup_1^\infty E_n} = f\left(\sum_1^\infty 1_{E_n}\right) = \sum_1^\infty f1_{E_n}\,.$$

Målet betegnes $f \cdot \mu$ (eller blot $f\mu$) og siges at have *tætheden f m.h.t. målet μ*. I symboler har vi

$$(f \cdot \mu)(E) = \int_E f\ d\mu \quad \text{for} \quad E \in \mathbb{E}\,.$$

Eksempel 4.20. Er $\mu = m$, og opfylder $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ betingelsen $\int f dm = 1$, er $f \cdot m$ et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ og f kaldes en *sandsynlighedstæthed*.

Med

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}\, x^2)\,, f(x) = 1_{]0,\infty[}(x)e^{-x}\,, f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}$$

fås henholdsvis *normalfordelingen*, *eksponentialfordelingen* og *Cauchy-fordelingen.*

Vedrørende integration m.h.t. målet $f \cdot \mu$ har man følgende

Sætning 4.21. *For $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ er*

$$\int \varphi d(f \cdot \mu) = \int \varphi f \; d\mu\,. \tag{$**$}$$

Hvis f har endelige værdier gælder der om en målelig funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$)

$$\varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, f \cdot \mu) \Leftrightarrow \varphi f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)\,,$$

og $(**)$ bevarer sin gyldighed for $\varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, f \cdot \mu)$.

Bevis. Afbildningen $\varphi \mapsto \int \varphi f \; d\mu$ af $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ ind i $[0, \infty]$ ses umiddelbart at opfylde de tre betingelser, der karakteriserer afbildningen $I_{f \cdot \mu} : \varphi \mapsto \int \varphi d(f \cdot \mu)$, og derfor gælder $(**)$. For en målelig funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ gælder ifølge $(**)$ og Sætning 4.11

$$\varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, f \cdot \mu) \Leftrightarrow \int |\varphi| f d\mu < \infty\,,$$

og hvis f har endelige værdier, er dette ensbetydende med, at $\varphi f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$. At $(**)$ gælder for $\varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, f \cdot \mu)$ ses nu umiddelbart ved at skrive $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Udvidelsen til komplekse funktioner går glat. □

4.5. Billedmål

Lad $\varphi : (X, \mathbb{E}) \to (Y, \mathbb{F})$ være en målelig afbildning. Hvis der er givet et mål μ på $\mathbb{E}$, er afbildningen

$$B \mapsto \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad B \in \mathbb{F}$$

et mål på $\mathbb{F}$, hvilket umiddelbart verificeres. Det kaldes *billedmålet af μ under φ* og betegnes $\varphi(\mu)$. (Betegnelsen for billedmålet er ikke standard. Man træffer også andre betegnelser f.eks. μ^φ). Der gælder altså

$$\varphi(\mu)(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) \quad \text{for } B \in \mathbb{F}\,.$$

Bemærk, at μ og $\varphi(\mu)$ har samme totale masse. Om integration med hensyn til billedmålet gælder:

Sætning 4.22. *For enhver $\mathbb{F}$-målelig funktion $g : Y \to [0,\infty]$ er*

$$\int g d\varphi(\mu) = \int g \circ \varphi \, d\mu \,. \qquad (*)$$

Om en $\mathbb{F}$-målelig funktion $g : Y \to \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) gælder

$$g \in \mathcal{L}(Y, \varphi(\mu)) \Leftrightarrow g \circ \varphi \in \mathcal{L}(X, \mu) \,,$$

og $(*)$ bevarer sin gyldighed for $g \in \mathcal{L}(Y, \varphi(\mu))$.

Bevis. Afbildningen af $\mathcal{M}^+(Y, \mathbb{F})$ ind i $[0,\infty]$ givet ved $g \mapsto \int (g \circ \varphi) d\mu$ ses umiddelbart at opfylde betingelserne (i)–(iii) i Hovedsætning 4.2, der karakteriserer afbildningen $I_{\varphi(\mu)}$, og derfor gælder $(*)$. At f.eks. (i) er opfyldt ses således:

$$\int 1_B \circ \varphi \, d\mu = \int 1_{\varphi^{-1}(B)} d\mu = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \varphi(\mu)(B) \ \text{ for } \ B \in \mathbb{F} \,.$$

Dernæst er $g : Y \to \mathbb{R}$ integrabel m.h.t. $\varphi(\mu)$, hvis og kun hvis $|g|$ er $\varphi(\mu)$-integrabel, og idet

$$\int |g| d\varphi(\mu) = \int |g| \circ \varphi \, d\mu = \int |g \circ \varphi| d\mu \,,$$

er dette ensbetydende med, at $g \circ \varphi$ er μ-integrabel. Hvis g er $\varphi(\mu)$-integrabel, anvendes $(*)$ på g^+ og g^-, og derved ses, at formlen $(*)$ bevarer sin gyldighed. Udvidelsen til komplekse funktioner er umiddelbar. □

Eksempel 4.23.

(a) Lad μ være et sandsynlighedsmål defineret i $(X, \mathbb{E})$. For en målelig funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ (= en stokastisk variabel) kaldes billedmålet $\varphi(\mu)$, som er et sandsynlighedsmål på Borel algebraen i $\mathbb{R}$, *fordelingen* af φ. Tallet

$$\varphi(\mu)(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \mu(\{x \in X \mid \varphi(x) \in B\})$$

er sandsynligheden for at φ's værdier ligger i mængden B. Den stokastiske variabel φ har *første moment* netop hvis

$$\int_X |\varphi| d\mu = \int_{\mathbb{R}} |x| d\varphi(\mu)(x) < \infty \,,$$

og når denne betingelser er opfyldt, er *middelværdien* $E(\varphi)$ af φ givet ved

$$E(\varphi) = \int \varphi d\mu = \int x \, d\varphi(\mu)(x) \,.$$

(b) Lad ν være et mål på en σ-algebra $\mathbb{F}$ i X, og lad μ være en udvidelse af ν til et mål på en σ-algebra $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{F}$ i X. For en $\mathbb{F}$-målelig funktion g på X kommer integration med hensyn til ν og μ da ud på et.

Dette fremgår, idet ν er billedmålet af μ under den identiske afbildning af $(X, \mathbb{E})$ ind i $(X, \mathbb{F})$, som er $\mathbb{E} - \mathbb{F}$-målelig.

4.6. Summer $\sum_{j \in J} a_j$

Hovedanvendelsen af det foregående er integration med hensyn til Lebesgue målet i $\mathbb{R}^k$. (Se Eksempel 3.2, A.)

På dette sted vil vi imidlertid – som illustration af den almene teori – betragte *integration med hensyn til tællemålet* μ i en vilkårlig mængde $J \neq \varnothing$. (Se Eksempel 3.2, B.)

Idet definitionsmængden for μ består af samtlige delmængder af J, er der ingen problemer med målelighed.

SÆTNING 4.24. *For enhver funktion $f : J \to [0, \infty]$ er*

$$\int_J f d\mu = \sum_{x \in J} f(x) .$$

Bevis. For hvert $x \in J$ er $\int_{\{x\}} f d\mu = f(x) \cdot \mu(\{x\}) = f(x)$, og følgelig gælder

$$\int_I f d\mu = \sum_{x \in I} f(x)$$

for enhver endelig eller numerabel delmængde $I \subseteq J$, jf. §4.4. Ifølge sumdefinitionen (§0) er da

$$\int_J f d\mu \geq \sum_{x \in J} f(x) ;$$

specielt gælder lighedstegn, hvis $\sum_{j \in J} f(x) = \infty$. Og hvis $\sum_{x \in J} f(x) < \infty$, vil $I = \{x \in J \mid f(x) \neq 0\}$ være tællelig (se §0), hvorfor

$$\int_J f d\mu = \int_I f d\mu + \int_{J \setminus I} f d\mu = \sum_{x \in I} f(x) + \sum_{x \in J \setminus I} f(x) = \sum_{x \in J} f(x) . \quad \square$$

En funktion $f : J \to \mathbb{R}$ eller $f : J \to \mathbb{C}$ er integrabel m.h.t. tællemålet μ i J, hvis og kun hvis

$$\sum_{x \in J} |f(x)| < \infty .$$

I bekræftende fald *definerer* vi summen $\sum_{x\in J} f(x)$ som integralet $\int_J f d\mu$. I stedet for $\mathcal{L}(J,\mu)$ skrives ofte $\ell(J)$.

Er funktionen f skrevet som en familie $(a_j)_{j\in J}$ af tal, bliver sumbetegnelsen $\sum_{j\in J} a_j$, som i §0.

Er J endelig, f.eks. $J = \{1,\dots,n\}$, har summen $\sum_{j\in J} a_j = \sum_{j\in J} f(j)$ den sædvanlige betydning, idet regningen

$$\int_J f d\mu = a_1 \cdot \mu(\{1\}) + \dots + a_n \cdot \mu(\{n\}) = a_1 + \dots + a_n$$

gælder ikke blot i tilfældet $a_j \in [0,\infty]$, men også når tallene a_j alle er reelle eller komplekse.

En sum $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ *med* $\mathbb{N}$ *som indeksmængde kan tolkes som en rækkesum* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, dvs.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \to \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \text{ for } n\to\infty\,,$$

ikke blot i tilfældet $a_j \in [0,\infty]$, *men også når tallene* a_j *alle er reelle eller komplekse og* $\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < \infty$.

Tilfældet $a_j \in [0,\infty]$ er omtalt allerede i §0, og vi har siden benyttet det gentagne gange. I sidstnævnte tilfælde kan Lebesgues majorantsætning anvendes på grænseovergangen

$$f \cdot 1_{\{1,\dots,n\}} \to f = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}\,,$$

med $|f|$ som majorantfunktion. – For $a_j \in [0,\infty]$ kan Lebesgues monotonisætning i øvrigt anvendes på samme grænseovergang.

Med ℓ betegnes mængden af (reelle eller komplekse) talfølger $f = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, hvor

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty\,,$$

altså talfølger, hvor rækken $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ er *absolut konvergent.*

Anderledes udtrykt drejer det sig om de (reelle eller komplekse) funktioner på $\mathbb{N}$, der er integrable m.h.t. tællemålet μ i $\mathbb{N}$. Altså $\ell = \mathcal{L}(\mathbb{N},\mu) = \ell(\mathbb{N})$.

Da rækkesummen $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ her, som netop vist, stemmer med integralet $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j = \int_{\mathbb{N}} f d\mu$, kan resultaterne i §§4.2, 4.3 såvel som mange senere resultater benyttes på absolut konvergente rækker, – ligesom §4.1 kan anvendes på rækker med positive led.

Eksempel 4.25. Som specialtilfælde af Lebesgues majorantsætning har vi:

Lad $\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}, \dots$ være rækker med reelle eller komplekse led og forudsæt, at følgen $a_{1j}, a_{2j}, \dots$ er konvergent for hvert $j \in \mathbb{N}$. Hvis der findes en række $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ med $0 \le b_j$ og $\sum_{j=1}^{\infty} b_j < \infty$, således at $\forall_{n,j} : |a_{nj}| \le b_j$, da er de givne rækker såvel som rækken $\sum_{j=1}^{\infty} \lim_n a_{nj}$ absolut konvergente, og om rækkesummerne gælder

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lim_n a_{nj} = \lim_n \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} .$$

Formentlig er det uhensigtsmæssigt således at opskrive specialtilfælde af vore integralsætninger. Det er nok bedre ved anvendelse på f.eks. rækker at tænke i et integralsprog.

4.7. Integral med reel parameter

Idet $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et målrum med $X \neq \varnothing$ og I et (begrænset eller ubegrænset) interval på $\mathbb{R}$, tænker vi os givet en funktion $f : X \times I \to \mathbb{R}$ eller $f : X \times I \to \mathbb{C}$.

For hvert $x \in X$ vil vi med $f(x, \cdot)$ eller f_x betegne *snitfunktionen*

$$t \mapsto f(x,t), \;\; t \in I ,$$

medens vi for hvert $t \in I$ med $f(\cdot, t)$ eller f^t betegner snitfunktionen

$$x \mapsto f(x,t), \;\; x \in X .$$

Vi antager $f^t \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ for hvert $t \in I$ og betragter funktionen F defineret på I ved

$$F(t) = \int_X f^t d\mu = \int_X f(x,t) d\mu(x), \quad t \in I .$$

Ofte omtales F som "integralet $\int_X f(x,t)d\mu(x)$ som funktion af parameteren t".

Sætning 4.26. *Antag yderligere, at alle snitfunktioner f_x er kontinuerte i samme punkt $t_0 \in I$. Findes der nu en funktion $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med $\int_X g d\mu < \infty$, således at*

$$\forall t \in I \, \forall x \in X : |f(x,t)| \le g(x) ,$$

da er også F kontinuert i t_0.

Bevis. For enhver punktfølge $t_1, t_2, \dots \to t_0, t_n \in I$, vil funktionsfølgen $f^{t_1}, f^{t_2}, \dots$ konvergere punktvis mod f^{t_0}. Vi har jo $f_x(t_n) \to f_x(t_0)$, dvs.

$f(x,t_n) \to f(x,t_0)$ eller $f^{t_n}(x) \to f^{t_0}(x)$, for hvert $x \in X$. Når $\forall t \in I$: $|f^t| \le g$, hvor $g \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$ med $\int_X g d\mu < \infty$, sluttes derfor af Lebesgues majorantsætning, at $\int_X f^{t_n} d\mu \to \int_X f^{t_0} d\mu$, dvs. $F(t_n) \to F(t_0)$. □

Bemærkning 4.27. Sætningen kan uden videre generaliseres ved at lade I være et metrisk rum.

Sætning 4.28. Differentiation under integraltegnet. *Ud over* $\forall t \in I : f^t \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ *antages her, at alle snitfunktioner* f_x *er differentiable i* I*, altså at den (partielle) afledede* $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = Df_x(t)$ *eksisterer for alle* $x \in X$ *og* $t \in I$*. Findes der nu en funktion* $g \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$ *med* $\int_X g d\mu < \infty$*, således at*

$$\forall t \in I \, \forall x \in X : \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right| \le g(x) ,$$

da vil $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ *tilhøre* $\mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ *for hvert* $t \in I$*, og* F *er differentiabel i* I *med*

$$DF(t) = \frac{d}{dt} \int_X f(x,t) d\mu(x) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) d\mu(x) .$$

Bevis. For fast $t \in I$ betragtes følgen

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_X \frac{f^{t_n} - f^t}{t_n - t} d\mu , \quad n = 1, 2, \dots ,$$

af differenskvotienter svarende til en vilkårlig talfølge $t_1, t_2, \dots \to t$ med $t_n \in I, t_n \neq t$, og det bemærkes, at funktionsfølgen $(f^{t_n} - f^t)/(t_n - t)$ konvergerer punktvis mod $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$. For hvert $x \in X$ har vi nemlig

$$\frac{f^{t_n}(x) - f^t(x)}{t_n - t} = \frac{f_x(t_n) - f_x(t)}{t_n - t} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Df_x(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) .$$

Er f reel, findes der ifølge differentialregningens middelværdisætning et tal $\tau_{n,x}$ mellem t_n og t, således at

$$\frac{f_x(t_n) - f_x(t)}{t_n - t} = Df_x(\tau_{n,x}) = \frac{\partial}{\partial t} f(x, \tau_{n,x}) .$$

Eksisterer nu en majorantfunktion g som beskrevet, har vi følgelig

$$\left| \frac{f^{t_n} - f^t}{t_n - t} \right| \le g \quad \text{for alle} \quad n \in \mathbb{N} ,$$

således at Lebesgues majorantsætning kan anvendes. Altså vil $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ tilhøre $\mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_X \frac{f^{t_n} - f^t}{t_n - t} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) d\mu(x)\,.$$

Er f kompleks, $f = f' + if''$, kan den reelle sætning anvendes på f' og f'', eller man kan modificere beviset ovenfor ved at anvende middelværdisætningen på f' og f'' og opnå majoriseringen

$$\left| \frac{f^{t_n} - f^t}{t_n - t} \right| \leq g\sqrt{2}\ .$$

$\square$

Opgaver til §4

I opgaver vedrørende integraler m.h.t. Lebesgue målet på $\mathbb{R}$ (Lebesgue integraler) er det ønskeligt straks fra starten foruden funktioner defineret på hele $\mathbb{R}$ at inddrage funktioner defineret f.eks. på et interval.

Vi bruger $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^\infty f(x)dx, \cdots$ som betegnelse for integraler m.h.t. Lebesgue målet i $]0,1]$, $]1,\infty[, \cdots$.

Det vil senere (som Korollar 5.7 til infinitesimalregningens hovedsætning, §5.2) blive vist, at

Er $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ kontinuert på et kompakt interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, og er Φ en stamfunktion til f, dvs. differentiabel i $[a,b]$ med afledet $D\Phi = f$, da er

$$\int_a^b f(x)dx = [\Phi(x)]_{x=a}^{x=b} = \Phi(b) - \Phi(a)\,.$$

Dette resultat, der jo knytter tråden til gymnasiematematikken, tænkes allerede nu anvendt i opgaver, hvor der er behov for det.

Integral af positive funktioner

4.1. *En begrænset funktion på et begrænset interval, som er Lebesgue integrabel, men ikke Riemann integrabel.*

Påvis, at Dirichlets funktion (se p.II.i.3) på intervallet $]0,1]$ er en Borel funktion, og bestem dens Lebesgue integral.

4.2. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum. Vis, at hvis hvert $x \in X$ tilhører mindst k af mængderne $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{E}$, så er

$$\mu(A_j) \geq \frac{k}{n}\mu(X) \text{ for mindst et } j\,.$$

4.3. Lad $f : \mathbb{R}_+ \to [0,\infty[$ være en Borel funktion med $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$.

1° Kan man slutte, at

$$f(x) \to 0 \text{ for } x \to \infty?$$
$$\exists a \in \mathbb{R}_+ : \sup\{f(x) \mid x > a\} < \infty?$$
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : m(\{x > a \mid f(x) > \varepsilon\}) \to 0 \text{ for } a \to \infty?$$

2° Samme spørgsmål, idet f yderligere forudsættes kontinuert, henholdsvis uniformt kontinuert.

4.4.

1° Vis, at

$$\int_1^n f(x)dx \to \int_1^\infty f(x)dx \;\text{ og }\; \int_{1/n}^1 f(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \;\text{ for }\; n \to \infty\,,$$

når $f : \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ er en Borel funktion. (*Vink:* Benyt Lebesgues monotonisætning.)

Gælder også

$$\int_1^u f(x)dx \to \int_1^\infty f(x)dx \;\text{ og }\; \int_u^1 f(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$$

for $u \to \infty$, henholdsvis $u \to 0$, $u \in \mathbb{R}_+$?

2° Find $\int_0^1 x^a dx$ og $\int_1^\infty x^a dx$ for hvert $a \in \mathbb{R}$.

(Resultaterne anvendes ofte.)

4.5.

1° Vis, at $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cdot 1_{]-\infty,n]}(x) \nearrow e^{-x}$ for hvert $x \in \mathbb{R}$ for $n \to \infty$.

(*Vink:* Benyt, at log er en konkav funktion med $D\log(1) = 1$.)

2° Vis, at $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \nearrow 1$ for $n \to \infty$.

3° Vis, at $\int_0^n x^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \nearrow \int_{\mathbb{R}_+} x^a e^{-x} dx$ for hvert $a \in \mathbb{R}$ for $n \to \infty$.

Bemærk, at man ikke behøver at bekymre sig om, hvorvidt $\int_{\mathbb{R}_+} x^a e^{-x} dx < \infty$. For hvilke $a \in \mathbb{R}$ er det i øvrigt tilfældet?

4.6. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, hvor $\mu(X) = \infty$, og lad $f : X \to]0,\infty[$ være $\mathbb{E}$-målelig. Vis, at

$$\int f d\mu < \infty \Rightarrow \int \frac{1}{f} d\mu = \infty\,.$$

(*Vink:* $1 < f + \frac{1}{f}$.)

4.7. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, hvor $\mu(X) < \infty$, og lad $f_1, f_2, \ldots$ være en følge af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_n : X \to [0,\infty[$, der konvergerer uniformt mod en funktion $f : X \to [0,\infty[$. Vis, at

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu\,.$$

4.8.

1° Udregn

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} dx\,.$$

2° Undersøg, om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$$

er uniformt konvergent for $0 < x < 1$.

4.9. Lad $a, b \in \mathbb{R}_+$.

1° Vis, at

$$\frac{x^{b-1}}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^a) x^{b-1+2na} \quad \text{for } \ 0 < x < 1$$

2° Vis, at

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}}{1+x^a} dx = \frac{1}{b} - \frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+2a} - \frac{1}{b+3a} + \ldots + \frac{1}{b+2na} - \frac{1}{b+(2n+1)a} + \ldots\ .$$

4.10. Udregn

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) dx \quad \text{og} \quad \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) dx$$

.

(Værdien af det sidste integral kan angives som en rækkesum.)

4.11.

1° Giv et eksempel på en dalende følge $f_1 \geq f_2 \geq \ldots$ af Borel funktioner $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, hvor

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n(x) dx \neq \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx\,.$$

2° Samme opgave med $]0, 1]$ i stedet for $\mathbb{R}$.

4.12. Giv et eksempel på en familie $(f_j)_{j \in J}$ af Borel funktioner $f_j :]0, 1] \to [0, \infty[$, hvor $\sum_{j \in J} f_j$ igen er en Borel funktion, men

$$\int_0^1 \sum_{j \in J} f_j(x) dx \neq \sum_{j \in J} \int_0^1 f_j(x) dx\,.$$

4.13. Vis ved eksempler, at hvert af tegnene $<$ og $=$ kan forekommer i uligheden

$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx\,,$$

og at hvert af tegnene $<$, $=$ og $>$ kan forkomme mellem

$$\int_0^1 \limsup_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{og} \quad \limsup_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx\,,$$

hvor $f_n :]0,1] \to [0,\infty[$, $n = 1,2,\dots$, er Borel funktioner.

Integral af reelle funktioner

4.14. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og lad $g : X \to \mathbb{R}$ være $\mathbb{E}$-målelig.

1° Vis, at $g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, hvis der findes funktioner $f, h \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, således at $f \leq g \leq h$.

2° Vis, at $g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ og

$$a\mu(X) \leq \int g\ d\mu \leq b\mu(X)\,,$$

hvis $\mu(X) < \infty$ og $a \leq g(x) \leq b$ for alle $x \in X$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$.

4.15. Er produktet af to integrable funktioner altid integrabelt? (Sml. opg. 4.22.1°.)

4.16. *Lebesgue under- og oversummer.*

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $\mu(X) < \infty$, og lad $f : X \to \mathbb{R}$ være $\mathbb{E}$-målelig og begrænset. Svarende til et sæt P af (dele-) punkter $y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_n$, hvor $\forall x \in X : y_0 < f(x) \leq y_n$, defineres *Lebesgue oversummen*

$$\overline{S}(P,f) = \sum_{i=1}^{n} y_i\ \mu(\{x | y_{i-1} < f(x) \leq y_i\})\,,$$

og *Lebesgue undersummen*

$$\underline{S}(P,f) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\mu(\{x | y_{i-1} < f(x) \leq y_i\})\,.$$

Vis, at $\underline{S}(P,f) \leq \int f d\mu \leq \overline{S}(P,f)$, og at

$$\sup_P \underline{S}(P,f) = \int f d\mu = \inf_P \overline{S}(P,f)\,.$$

4.17. *Lebesgue Middelsummer.* (Jf.p. i.4).

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum med $\mu(X) < \infty$, og lad $f : X \to \mathbb{R}$ være $\mathbb{E}$-målelig og begrænset. Vis, at der til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at

$$\left| \int f d\mu - \sum_{i=1}^{n} \eta_i \mu(\{x | y_{i-1} < f(x) \leq y_i\}) \right| < \varepsilon ,$$

når $y_0 \leq \eta_1 \leq y_1 \leq \eta_2 \leq y_2 \leq \cdots \leq \eta_n \leq y_n$, $\forall x \in X : y_0 < f(x) \leq y_n$, samt $y_i - y_{i-1} < \delta$, $i = 1, \ldots, n$.

4.18. Bevis, at

$$\int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2 x^2} dx \to 0 \text{ for } n \to \infty .$$

(*Vink:* Vis, at

$$\frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2 x^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} .)$$

4.19. Giv eksempler på punktvis konvergente følger $f_1, f_2, \ldots$ af Lebesgue integrable funktioner $f_n :]-1, 1] \to \mathbb{R}$, med $f = \lim f_n$, hvor henholdsvis

(a) $f \in \mathcal{L}(] - 1, 1], m)$, og talfølgen $\int_{-1}^{1} f_n(x)dx$, $n = 1, 2, \ldots$, er konvergent, men

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \neq \lim_{n} \int_{-1}^{1} f_n(x)dx .$$

(b) $f \in \mathcal{L}(] - 1, 1], m)$, men talfølgen $\int_{-1}^{1} f_n(x)dx$, $n = 1, 2, \ldots$ er divergent.

(c) talfølgen $\int_{-1}^{1} f_n(x)dx$, $n = 1, 2, \ldots$ er konvergent, men

$$f \notin \mathcal{L}(] - 1, 1], m) .$$

4.20. Samme opgave som opg. 4.19, idet dog $] - 1, 1]$ erstattes med $\mathbb{R}$, og der ønskes eksempler, hvor konvergensen af følgen $f_1, f_2, \ldots$ er uniform og numerisk majoriseret af en konstant $K \in \mathbb{R}_+$.

4.21. Vis, at hvis $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, så er $f \vee g$ og $f \wedge g$ igen integrable funktioner.

Integral af komplekse funktioner

4.22. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum.

1° Vis, at fg er μ-integrabel, når $f : X \to \mathbb{C}$ er μ-integrabel og $g : X \to \mathbb{C}$ er $\mathbb{E}$-målelig og begrænset. (Sml. opg. 4.15.)

2° Vis, at enhver begrænset, $\mathbb{E}$-målelig funktion $g : X \to \mathbb{C}$ er μ-integrabel, hvis $\mu(X) < \infty$. (Sml. opg. 4.14.2°.)

4.23.

1° Vis, at

$$\int_a^u f(x)dx \to \int_a^\infty f(x)dx \text{ for } u \to \infty\,,$$

når $f \in \mathcal{L}(]a,\infty[,m)$.

(*Vink:* Betragt en vilkårlig følge $u_1, u_2, \dots, a < u_n < \infty$, med $u_n \to \infty$ og benyt Lebesgues majorantsætning.)

(Resultatet anvendes ofte).

2° Giv et eksempel på en kontinuert funktion $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, hvor $\lim_{u\to\infty} \int_0^u f(x)dx$ eksisterer i $\mathbb{R}$, uden at f er Lebesgue integrabel over $]0,\infty[$.

4.24. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, antag $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og sæt $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq n\}$. Vis, at $n\mu(A_n) \to 0$ for $n \to \infty$.

4.25. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad $f : X \to \mathbb{C}$ være en $\mathbb{E}$-målelig funktion. For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in X$ sættes

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{når} \quad |f(x)| \leq n \\ nf(x)/\,|f(x)| & \text{når} \quad |f(x)| > n\,. \end{cases}$$

1° Gør rede for, at hver af funktionerne $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots,$ er $\mathbb{E}$-målelig.

2° Bevis, at

$$f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu) \Leftrightarrow \sup \int |f_n| d\mu < \infty\,,$$

samt i bekræftende fald, at

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \quad \text{for} \quad n \to \infty\,.$$

4.26. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, lad $f_n : X \to \mathbb{C}$ være $\mathbb{E}$-målelig, $n = 1, 2, \dots,$ og antag, at

$$\sum_{n=1}^\infty \int |f_n| d\mu < \infty\,.$$

1° Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er (absolut) konvergent for μ-næsten alle $x \in X$.

2° Med $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ for μ-næsten alle $x \in X$, hvor $f : X \to \mathbb{C}$ er $\mathbb{E}$-målelig, skal man dernæst vise, at $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu \, .$$

4.27. Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} g(2^n x)$ er (absolut) konvergent for næsten alle $x \in \mathbb{R}$, når $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, m)$.

Hvad viser opg. 4.26 om summen?

Integral over delmængde

4.28. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, lad f og g tilhøre $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ og antag, at $f = g$ næsten overalt m.h.t. μ. Vis, at

$$\int f d\mu = \int g d\mu \, .$$

(Resultatet benyttes ofte.)

4.29. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad $f : X \to \mathbb{R}$ være integrabel m.h.t. μ.

1° Vis, at

$$\int_E f d\mu \geq 0 \text{ for alle } E \in \mathbb{E}$$
$$\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \text{ for } \mu\text{-næsten alle } x \in X \, .$$

2° Vis, at

$$\int_E f d\mu = 0 \text{ for alle } E \in \mathbb{E}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ for } \mu\text{-næsten alle } x \in X \, .$$

4.30. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad $U_1, U_2, \dots \in \mathbb{E}$ være parvis disjunkte. Vis, at rækken

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{U_j} f d\mu$$

er absolut konvergent, når f er μ-integrabel over $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$.

4.31. Lad $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ være aftagende. Vis, at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_{\mathbb{R}_+} f(x)dx \quad \text{for} \quad n \to \infty\,.$$

4.32. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad $f : X \to [0, \infty]$ være $\mathbb{E}$-målelig med

$$\int f d\mu < \infty\,.$$

1° Vis, at $\mu(\{x \in X | f(x) \geq a\}) < \infty$ for hvert $a \in \mathbb{R}_+$.

2° Vis, at $\{x \in X | f(x) > 0\}$ har σ-endeligt mål, dvs. at mængden kan skrives $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, hvor $E_n \in \mathbb{E}$, og $\mu(E_n) < \infty$, $n = 1, 2, \dots$.

3° Vis, at der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en mængde $E \in \mathbb{E}$ med $\mu(E) < \infty$, således at

$$\int_{X \setminus E} f d\mu < \varepsilon\,.$$

4.33. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad f tilhøre $\mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$.

1° Vis, at $\{x \in X | f(x) \neq 0\}$ har σ-endeligt mål. (Se opg. 4.32.)

2° Vis, at der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en mængde $E \in \mathbb{E}$ med $\mu(E) < \infty$, således at

$$\int_{X \setminus E} |f| d\mu < \varepsilon\,.$$

4.34.

1° Vis, at

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)\,,$$

når $a_n, b_n \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $n = 1, 2, \dots$.

2°* Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad $f_1, f_2, \dots$ være en punktvis konvergent følge af funktioner $f_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med grænsefunktion f. Det antages, at $\int f d\mu < \infty$, og at

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \;\text{ for }\; n \to \infty\,.$$

Vis, at $\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu$ for enhver mængde $E \in \mathbb{E}$ for $n \to \infty$.

3° Vis ved et eksempel, at konklusionen i 2° ikke behøver at gælde, når forudsætningen $\int f d\mu < \infty$ udelades.

Billedmål

4.35. Lad $\varphi : (X, \mathcal{P}(X)) \to (Y, \mathcal{P}(Y))$ være en (målelig) afbildning. Vis, at $\varphi(\varepsilon_a) = \varepsilon_{\varphi(a)}$ for hver $a \in X$, idet ε_a betegner Dirac målet i a (§3.1).

4.36. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad $\varphi : (X, \mathbb{E}) \to \mathbb{R}$ være en simpel $\mathbb{E}$-målelig funktion. Vis, at billedmålet $\varphi(\mu)$ på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ er givet som

$$\varphi(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\varepsilon_{a_i} ,$$

når $a_1, \dots, a_n$ er φ's værdier og $A_i = \varphi^{-1}(\{a_i\})$, $i = 1, \dots, n$.

Summer $\sum_{j\in J} a_j$

4.37. Lad $f : J \to \mathbb{C}$ være integrabel m.h.t. tællemålet μ i mængden J, altså $f \in \ell(J)$. Vis, at der til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en endelig mængde $H^* \subseteq J$, således at

$$|\int f d\mu - \sum_{x\in I^*} f(x)| < \varepsilon$$

for enhver endelig mængde I^*, hvor $H^* \subseteq I^* \subseteq J$. (*Vink:* Man kan anvende opg. 4.33.2°.)

4.38. Gør rede for, at

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J} a_{nj} = \sum_{j\in J} \lim_{n\to\infty} a_{nj} ,$$

når $0 \le a_{1j} \le a_{2j} \le \dots$ for hver $j \in J$. (Eksempel: $J = \mathbb{N}$.)

4.39. Lad $\mu_1 \le \mu_2 \le \dots$ være en stigende følge af mål, alle defineret på samme σ-algebra $\mathbb{E}$ i en mængde X, og sæt

$$\mu(E) = \lim_n \mu_n(E), \quad E \in \mathbb{E} .$$

1° Vis, at μ er et mål. (*Vink:* Man kan benytte opg. 4.38.)
2° Vis, at

$$\int f d\mu_n \to \int f d\mu \text{ for } n \to \infty$$

for enhver funktion $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$.

4.40. Lad $(\mu_j)_{j\in J}$ være en familie af mål μ_j, alle defineret på samme σ-algebra $\mathbb{E}$ i en mængde X, antag $a_j \in [0,\infty]$, $j \in J$, og sæt $\mu = \sum_{j\in J} a_j \mu_j$. (Se Eksempel 3.2, D.)

Vis, at

$$\int f d\mu = \sum_{j\in J} a_j \int f d\mu_j$$

for enhver funktion $f \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$.

4.41. Funktionen $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ defineres ved

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx, \quad t \in \mathbb{R}_+ \,.$$

1° Gør rede for, at definitionen har mening.
2° Bevis, at $F(t) \to 0$ for $t \to \infty$.
3° Bevis, at F er differentiabel med

$$DF(t) = -\frac{1}{1+t^2}\,, \quad t \in \mathbb{R}_+ \,.$$

(*Vink:* Betragt først et interval $]a,\infty[$ i stedet for $\mathbb{R}_+$. – Undervejs kan man eventuelt benytte, at $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.)
4° Angiv $F(t)$ eksplicit, uden brug af integraltegn.

4.42. Gamma funktionen Γ defineres for $z \in \mathbb{C}$ med $\mathrm{Re} z > 0$ ved integralet

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \,.$$

1° Vis, at definitionen har mening, og at Γ er kontinuert.
2° Vis, at Γ er vilkårligt ofte differentiabel på $]0,\infty[$.
3° Vis, at $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ for $\mathrm{Re} z > 0$, og slut, at $\Gamma(n+1) = n!$ for $n \in \mathbb{N}$.
4° Idet

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}\,,$$

skal det vises, at $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

4.36

§5. Lebesgue målet i $\mathbb{R}^k$

Længderne $b_i - a_i$ af intervallerne $I_i =]a_i, b_i]$ på $\mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, kaldes *kantlængder* for intervallet $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ i $\mathbb{R}^k$. Det er naturligt at kalde

$$v_k(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_k - a_k)\,,$$

det *k-dimensionale volumen* (= længde, areal og volumen for $k = 1, 2$ og 3) af I.

Hovedsætning 5.1. *Der findes et og kun et mål m_k defineret på Borel algebraen $\mathbb{B}_k$ i $\mathbb{R}^k$, således at $m_k(I) = v_k(I)$ for ethvert standard interval I i $\mathbb{R}^k$.*

Det ved hovedsætningen bestemte mål m_k vil vi kalde det *k- dimensionale Lebesgue mål.*

Hovedsætningen indeholder et entydighedsudsagn, som vil blive bevist i §5.1. Hovedsætningen giver dermed et *signalement* af Lebesgue målet. Når vi i fremtiden møder et mål defineret på $\mathbb{B}_k$ med de anførte egenskaber, så må det være m_k.

Hovedsætningen indeholder også et eksistensudsagn. Da beviset herfor er langt, vil det ikke blive gennemgået. Ideen er, at m_k er bestemt ved følgende formel

$$m_k(B) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} v_k(I_n) \mid B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}, \quad B \in \mathbb{B}_k\,,$$

hvor vi betragter alle følger af standard intervaller der overdækker B. Målet er altså det samlede volumen af den mest "økonomiske" overdækning. (Eksistensen er vist i opg. 5.1–5.5).

5.1. Entydighedsbeviset

Lad $(X, \mathbb{E})$ være et målbart rum, og lad μ, ν være to mål på $\mathbb{E}$. Det er nærliggende at prøve at finde egenskaber ved et system $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$, der sikrer, at $\mu = \nu$ blot $\mu(A) = \nu(A)$ for alle $A \in \mathbb{K}$. I denne sammenhæng er følgende hjælpebegreb nyttigt:

Definition 5.2. Et system $\mathbb{D}$ af delmængder af en mængde X kaldes en *σ-klasse* (eller et *Dynkin system*) i X, hvis følgende tre aksiomer gælder

(i) $X \in \mathbb{D}$
(ii) $\complement A \in \mathbb{D}$, når $A \in \mathbb{D}$
(iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{D}$, når $(A_n)_{n\geq 1}$ er en følge af *parvis disjunkte* mængder fra $\mathbb{D}$.

Hvis $\mathbb{D}$ er en σ-klasse gælder $\varnothing \in \mathbb{D}$ og $A \cup B \in \mathbb{D}$, når $A, B \in \mathbb{D}$ og $A \cap B = \varnothing$.

Enhver σ-algebra i X (se §1.2) er naturligvis også en σ-klasse. Omvendt bemærkes, at en σ-klasse $\mathbb{D}$ i X vil være en σ-algebra, hvis (og kun hvis)

$$A \cap B \in \mathbb{D} \quad \text{når} \quad A, B \in \mathbb{D}\,.$$

Thi da er også $A \cup B = \complement(\complement A \cap \complement B) \in \mathbb{D}$ og $A \setminus B = A \cap \complement B \in \mathbb{D}$, når $A, B \in \mathbb{D}$. En foreningsmængde $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ med $B_n \in \mathbb{D}$ kan derfor skrives som forening $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ af parvis disjunkte mængder $A_n \in \mathbb{D}$, nemlig

$$A_1 = B_1,\ A_n = B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i, \quad n = 2, 3, \ldots\,.$$

Enhver fællesmængde af σ-klasser i X er igen en σ-klasse i X. Heraf følger, at der for enhver mængde $\mathbb{K}$ af delmængder af X findes en mindste σ-klasse $\mathbb{D}(\mathbb{K})$ i X, der indeholder $\mathbb{K}$, nemlig fællesmængden af alle σ-klasser i X der indeholder $\mathbb{K}$.

Da $\sigma(\mathbb{K})$ er en σ-klasse indeholdende $\mathbb{K}$ må den omfatte den mindste sådanne, i.e.

$$\mathbb{D}(\mathbb{K}) \subseteq \sigma(\mathbb{K})\,.$$

Bemærkelsesværdigt er det imidlertid, at der gælder lighedstegn, hvis $\mathbb{K}$ er *fællesmængde stabilt*, dvs.

$$A \cap B \in \mathbb{K} \quad \text{når} \quad A, B \in \mathbb{K}\,.$$

Det udtrykker vi i følgende

FUNDAMENTALLEMMA 5.3. *Lad $\mathbb{K}$ være et fællesmængde stabilt system af delmængder af en mængde X. Da er $\mathbb{D}(\mathbb{K}) = \sigma(\mathbb{K})$.*

Beviset fører vi ved at godtgøre, at den mindste σ-klasse $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathbb{K})$ i X, der indeholder $\mathbb{K}$, er en σ-algebra i X, for så har vi $\sigma(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{D}(\mathbb{K})$. Hertil er det som bemærket ovenfor nok at vise, at

$$A \cap B \in \mathbb{D} \quad \text{når} \quad A, B \in \mathbb{D}\,.$$

For hvert $A \in \mathbb{D}$ betragtes mængdesystemet

$$\mathbb{F}_A = \{B \subseteq X \mid A \cap B \in \mathbb{D}\}\,.$$

Vi påstår, at $\mathbb{F}_A$ er en σ-klasse i X, thi

(i) $X \in \mathbb{F}_A$ fordi $A \cap X = A \in \mathbb{D}$.

(ii) $\complement B \in \mathbb{F}_A$ når $B \in \mathbb{F}_A$ fordi $A \cap \complement B = A \cap \complement(A \cap B) = \complement(\complement A \cup (A \cap B)) \in \mathbb{D}$, idet $\complement A$ og $A \cap B$ er disjunkte og tilhører $\mathbb{D}$.

(iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathbb{F}_A$ når $B_1, B_2, \dots \in \mathbb{F}_A$ er parvis disjunkte fordi

$$A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap B_n \in \mathbb{D}\,,$$

idet $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots \in \mathbb{D}$ er parvis disjunkte.

For hvert $A \in \mathbb{K}$ er $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}_A$ ifølge forudsætning. Vi slutter nu, at $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{F}_A$. Hermed er vist, at

$$A \cap B \in \mathbb{D} \quad \text{når} \quad A \in \mathbb{K},\ B \in \mathbb{D}\,.$$

For hvert $B \in \mathbb{D}$ er altså $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}_B$ og dermed også $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{F}_B$, da $\mathbb{F}_B$ er en σ-klasse, altså

$$A \cap B \in \mathbb{D} \quad \text{når} \quad A, B \in \mathbb{D}\,.$$

□

HOVEDSÆTNING 5.4. (ENTYDIGHEDSSÆTNING FOR MÅL). *Lad μ og ν være mål på en σ-algebra $\mathbb{E}$ i X og antag, at $\mathbb{K}$ er et fællesmængde stabilt frembringersystem for $\mathbb{E}$. Antag yderligere, at X kan skrives som forening $X = \bigcup_1^\infty K_n$ med $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$, hvor $K_n \in \mathbb{K}$ og $\mu(K_n) < \infty$, $n = 1, 2, \dots$.*

Hvis $\mu(K) = \nu(K)$ for alle $K \in \mathbb{K}$, så er $\mu = \nu$.

Bevis. Vi antager, at $\mu(K) = \nu(K)$ for alle $K \in \mathbb{K}$ og sætter

$$\mathbb{D}_n = \{E \in \mathbb{E} \mid \mu(K_n \cap E) = \nu(K_n \cap E)\}\,,\ n = 1, 2, \dots\,.$$

Vi har:

1° $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{D}_n$ for $n = 1, 2, \dots$.

Lad nemlig $K \in \mathbb{K}$. At $K \in \mathbb{D}_n$ kommer ud på at vise, at $\mu(K_n \cap K) = \nu(K_n \cap K)$, men da $K_n \cap K \in \mathbb{K}$, fordi $\mathbb{K}$ er fællesmængde stabilt, er dette klart.

2° $\mathbb{D}_n$ er en σ-klasse for $n = 1, 2, \dots$.

Vi skal vise

(i) $X \in \mathbb{D}_n$. (Dette er klart.)

(ii) Når $E \in \mathbb{D}_n$, er også $\complement E \in \mathbb{D}_n$, idet $\mu(K_n \cap \complement E) = \mu(K_n) - \mu(K_n \cap E) = \nu(K_n) - \nu(K_n \cap E) = \nu(K_n \cap \complement E)$. Her benyttes, at $\mu(K_n) = \nu(K_n) < \infty$.

(iii) Når $E_1, E_2, \dots \in \mathbb{D}_n$ er parvis disjunkte, er også $\bigcup_j E_j \in \mathbb{D}_n$, idet

$$\mu(K_n \cap \bigcup_j E_j) = \sum_j \mu(K_n \cap E_j) = \sum_j \nu(K_n \cap E_j) = \nu(K_n \cap \bigcup_j E_j)\,.$$

Af 1° og 2° følger at $\mathbb{D}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{D}_n$, og ifølge lemmaet ovenfor er $\mathbb{D}(\mathbb{K}) = \sigma(\mathbb{K}) = \mathbb{E}$, altså $\mathbb{D}_n = \mathbb{E}$ for $n = 1, 2, \dots$, dvs.

$$\mu(K_n \cap E) = \nu(K_n \cap E) \quad \text{for alle} \quad E \in \mathbb{E}\,,\, n \geq 1\,.$$

Det er nu let at slutte $\mu = \nu$. For vilkårligt $E \in \mathbb{E}$ er nemlig

$$\mu(E) = \lim_n \mu(K_n \cap E) = \lim_n \nu(K_n \cap E) = \nu(E)\,,$$

idet $K_1 \cap E \subseteq K_2 \cap E \subseteq \dots$ og $\bigcup_n (K_n \cap E) = E$. □

Lad $\mathbb{K}$ være systemet af standard intervaller i $\mathbb{R}^k$ samt $\varnothing$. Så er $\mathbb{K}$ et fællesmængde stabilt frembringersystem for $\mathbb{B}_k$. Hvis der om to mål μ og ν på $\mathbb{B}_k$ gælder, at $\mu(I) = \nu(I) = v_k(I)$ for alle standard intervaller, kan vi umiddelbart af entydighedssætningen slutte, at $\mu = \nu$. Hermed er entydighedsdelen af Hovedsætning 5.1 bevist.

5.2. Lokalt Lebesgue integrable funktioner

For en ikke tom Borel mængde B i $\mathbb{R}^k$ kan vi betragte Lebesgue målets restriktion til B, dvs. målet $E \mapsto m_k(E)$ defineret for Borel mængder E i $\mathbb{R}^k$ indeholdt i B. Dette mål kaldes kort *Lebesgue målet i* B, og betegnes $(m_k)_B$ eller sædvanligvis blot m_k, med mindre der er fare for misforståelse. Rummet af funktioner på B, der er integrable med hensyn til Lebesgue målet, betegnes $\mathcal{L}(B)$, eller $\mathcal{L}(B, m_k)$. For en funktion $f \in \mathcal{L}(B)$ bruges følgende betegnelser for integralet

$$\int_B f dm_k = \int_B f(x)dx = \int_B f(x_1, \dots, x_k) d(x_1, \dots, x_k)\,.$$

For $k = 1$ skrives m i stedet for m_1.

Definition 5.5. En Borel målelig funktion $f : B \to \mathbb{C}$ kaldes *lokalt integrabel*, hvis $f|K \in \mathcal{L}(K)$ for enhver kompakt delmængde $K \subseteq B$, altså hvis

$$\int_K |f(x)| dx < \infty \quad \text{for enhver kompakt delmængde} \quad K \subseteq B\,.$$

Mængden af lokalt integrable funktioner på B er et vektorrum som betegnes $\mathcal{L}_{\text{loc}}(B)$. Der gælder $\mathcal{L}(B) \subseteq \mathcal{L}_{\text{loc}}(B)$, men også enhver kontinuert funktion $f : B \to \mathbb{C}$ er lokalt integrabel, da

$$\int_K |f(x)| dx \leq \sup_{x \in K} |f(x)| m_k(K) < \infty\,,$$

fordi en kontinuert function er begrænset på en kompakt mængde, og en kompakt mængde har endeligt Lebesgue mål.

Hvis $I \subseteq \mathbb{R}$ er et interval, og $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(I)$, er $\int_a^b f(x)dx$ veldefineret for alle $a, b \in I$ med $a \le b$. Som i Mat 1MA er det bekvemt at indføre

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,,$$

når $a > b$. Dermed gælder *indskudsreglen*, (som kendes fra Mat 1MA for kontinuerte funktioner)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,,$$

for vilkårlige punkter $a, b, c \in I$.

Differential– og integralregningens hovedsætning kan også formuleres mere generelt end i Mat 1MA:

Sætning 5.6. (Infinitesimalregningens hovedsætning). *Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og lad $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(I)$. For hvert $a \in I$ er funktionen $F : I \to \mathbb{C}$ defineret ved*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in I$$

kontinuert, og hvis f er kontinuert i $x_0 \in I$ er F differentiabel i x_0 med $F'(x_0) = f(x_0)$.

Bevis. Lad $x_0 \in I$ og antag, at (x_n) er en følge fra I, der går mod x_0. Vi skal vise, at $F(x_n) \to F(x_0)$ for $n \to \infty$. Der findes $b, c \in I$ så $b \le x_n \le c$ for alle n, og idet

$$F(x_n) = \int_a^b f(t)dt + \int_b^{x_n} f(t)dt,\ F(x_0) = \int_a^b f(t)dt + \int_b^{x_0} f(t)dt\,,$$

er det tilstrækkeligt at vise, at

$$\int f(t)1_{[b,x_n]}(t)dt \to \int f(t)1_{[b,x_0]}(t)dt\,.$$

Dette følger af Lebesgues majorantsætning, idet $|f| \cdot 1_{[b,c]}$ er en integrabel majorant, og $f(t)1_{[b,x_n]}(t) \to f(t)1_{[b,x_0]}(t)$ for alle $t \in I \setminus \{x_0\}$, altså næsten overalt med hensyn til Lebesgue målet.

Hvis $x_n \neq x_0$ for alle n og f er kontinuert i x_0 finder vi ifølge indskudsreglen

$$\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{1}{x_n - x_0}\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt\,.$$

Til $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$, så $|f(x_0) - f(t)| \leq \varepsilon$, blot $t \in I$ og $|x_0 - t| \leq \delta$. For n så stor, at $|x_n - x_0| \leq \delta$, finder vi da

$$\left|\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x_n - x_0}\int_{x_0}^{x_n} (f(t) - f(x_0))dt\right| \leq \varepsilon\,,$$

hvilket viser, at F er differentiabel i x_0 med $F'(x_0) = f(x_0)$. □

KOROLLAR 5.7. *Lad $f : I \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion. For $a, b \in I$ kan $\int_a^b f(t)dt$ udregnes ved formlen*

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[\Phi(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = \Phi(b) - \Phi(a)\,,$$

hvor Φ er en vilkårlig stamfunktion til f, dvs. en differentiabel funktion Φ på I så $\Phi' = f$.

Bevis. Hvis Φ betegner en vilkårlig stamfunktion til f, og hvis F er som i sætningen ovenfor, så er $(F - \Phi)' = 0$, og derfor er $F - \Phi$ en konstant k. Idet $F(a) = 0$ finder vi

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a)\,.$$

□

Korollaret er af stor praktisk betydning i forbindelse med udregning af konkrete integraler, og det viser, at Lebesgue integralet er en udvidelse af det klassiske integralbegreb.

Vi skal senere se (Fubinis sætning), hvordan integration med hensyn til m_k kan udføres som k successive integrationer med hensyn til m, og dermed føres integration med hensyn til m_k essentielt tilbage til stamfunktionsbestemmelse.

Hovedsætningen udtrykker, at integration efterfulgt af differentiation fører tilbage til udgangspunktet. Dette kan generaliseres, idet følgende dyberegliggende resultat af Lebesgue gælder:

SÆTNING 5.8. *For $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(I)$ og $a \in I$ er funktionen*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in I$$

differentiabel for næsten alle $x \in I$ med differentialkvotient $F'(x) = f(x)$.

(Et bevis for Sætning 5.8 kan findes i Rudin: Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill. New York 1986.)

For en differentiabel funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er f' en Borel funktion, idet f' er grænsefunktion for den punktvis konvergente følge af kontinuerte funktioner

$$x \mapsto n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)) .$$

Derimod behøver f' ikke være lokalt integrabel og formlen

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) ,$$

som gælder for C^1-funktioner, har derfor ingen mening for sådanne f. Jf. opg. 5.15.

5.3. Radon mål i $\mathbb{R}^k$

Et mål μ i $\mathbb{R}^k$ defineret på Borel algebraen $\mathbb{B}_k$ kaldes et *Borel mål* i $\mathbb{R}^k$. Blandt Borel målene betragtes en snævrere klasse af mål opkaldt efter den østrigske matematiker J. Radon (1887–1956). Et Borel mål $\mu : \mathbb{B}_k \to [0, \infty]$ kaldes et *Radon mål*, hvis det har *endelig* værdi for enhver begrænset Borel mængde. Det er selvfølgelig ensbetydende at kræve, at $\mu(I) < \infty$ for ethvert standard interval I, eller at $\mu(K) < \infty$ for enhver kompakt delmængde $K \subseteq \mathbb{R}^k$.

Bemærkning 5.9. Et mål μ defineret på Borel algebraen $\mathbb{B}(X)$ for et metrisk rum (eller et Hausdorff topologisk rum) X kaldes et *Borel mål* i X. Et Borel mål μ kaldes et *Radon mål*, hvis

(i) $\mu(K) < \infty$ for enhver kompakt mængde $K \subseteq X$,
(ii) $\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ kompakt, } K \subseteq B\}$ for alle $B \in \mathbb{B}(X)$.

Man kan vise, at (ii) automatisk er opfyldt i tilfældet $X = \mathbb{R}^k$, se opg. 5.17, og dermed harmonerer den generelle definition med definitionen i $\mathbb{R}^k$.

Eksempel 5.10
(a) Lebesgue målet er et Radon mål.
(b) Lad $f : \mathbb{R}^k \to [0, \infty[$ være en Borel funktion og lad $\mu = f \cdot m_k$ være målet med tætheden f med hensyn til Lebesgue målet. Da er μ et Radon mål hvis og kun hvis $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^k)$.

For en funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eller $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ indføres *støtten* (eng. support) som mængden

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) \neq 0\}} .$$

Støtten er altså en afsluttet mængde i $\mathbb{R}^k$, udenfor hvilken funktionen er 0, og det er den mindste afsluttede mængde med denne egenskab. F.eks. er supp(sin) $= \mathbb{R}$, supp(exp) $= \mathbb{R}$. Støtten for nulfunktionen er $\varnothing$ og ikke andre funktioner har denne støtte. Bemærk, at $f = f1_{\text{supp}(f)}$.

Mængden af kontinuerte funktioner $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ med kompakt støtte betegnes $C_c(\mathbb{R}^k)$. Idet der for funktioner $f, g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ og $\lambda \neq 0$ oplagt gælder

$$\begin{aligned} \text{supp}(f+g) &\subseteq \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \\ \text{supp}(\lambda f) &= \text{supp}(f)\,, \end{aligned}$$

ser man, at $C_c(\mathbb{R}^k)$ er et underrum af vektorrummet $\mathcal{F}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ af alle reelle funktioner på $\mathbb{R}^k$.

For et Radon mål μ i $\mathbb{R}^k$ er $C_c(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k, \mu)$. En funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$ er nemlig specielt en Borel funktion, og hvis $K = \text{supp}(f)$ er f's kompakte støtte, har vi

$$\int |f(x)| d\mu(x) = \int |f(x)| 1_K(x) d\mu(x) \leq \int \left(\sup_{x \in K} |f(x)| \right) 1_K(x) d\mu(x)$$
$$= \sup_{x \in K} |f(x)| \mu(K) < \infty\,.$$

Med betegnelsen

$$I_\mu(f) = \int f d\mu \quad \text{for} \quad f \in C_c(\mathbb{R}^k)$$

er $I_\mu : C_c(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ en lineær afbildning, som er positiv, dvs. $I_\mu(f) \geq 0$ når $f \geq 0$, altså I_μ er en *positiv linearform.*

Det følgende hovedresultat blev vist af F. Riesz i 1909 i et specialtilfælde.

SÆTNING 5.11. (RIESZ'ES REPRÆSENTATIONSSÆTNING).
Til en positiv linearform $I : C_c(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ findes et og kun et Radon mål μ i $\mathbb{R}^k$ så $I = I_\mu$, altså så

$$I(f) = \int f d\mu \quad \textit{for} \quad f \in C_c(\mathbb{R}^k)\,.$$

Sætningen kan betragtes som begyndelsen til *funktionalanalysen*, idet den giver en en-entydig korrespondance mellem en klasse af *funktionaler* (= funktioner defineret på et vektorrum) og en klasse af andre objekter, nemlig Radon målene.

Sætningen kan generaliseres ved at $\mathbb{R}^k$ erstattes af et vilkårligt lokalkompakt topologisk rum, dvs. et Hausdorff rum hvor enhver omegn indeholder en kompakt omegn. Beviset for denne generelle sætning, vil blive givet i et senere kursus. (Et bevis findes i Rudin: Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill. New York 1986.)

Vi skal nu forklare, hvordan man i tilfældet $k = 1$ kan karakterisere Radon målene ved en klasse af voksende funktioner.

Lad $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en voksende funktion. For hvert $a \in \mathbb{R}$ gælder

$$\lim_{x \to a^-} \varphi(x) = \sup\{\varphi(x) | x < a\} \leq \varphi(a) \leq \inf\{\varphi(x) | x > a\} = \lim_{x \to a^+} \varphi(x) .$$

De to midterste ulighedstegn gælder klart, og at φ har en grænseværdi fra venstre i a, som er lig med $\sup\{\varphi(x) \mid x < a\}$, ses således:

Til $\varepsilon > 0$ findes $a_0 < a$ så

$$\varphi(a_0) > \sup\{\varphi(x) \mid x < a\} - \varepsilon ,$$

og for alle $x \in]a_0, a[$ gælder så

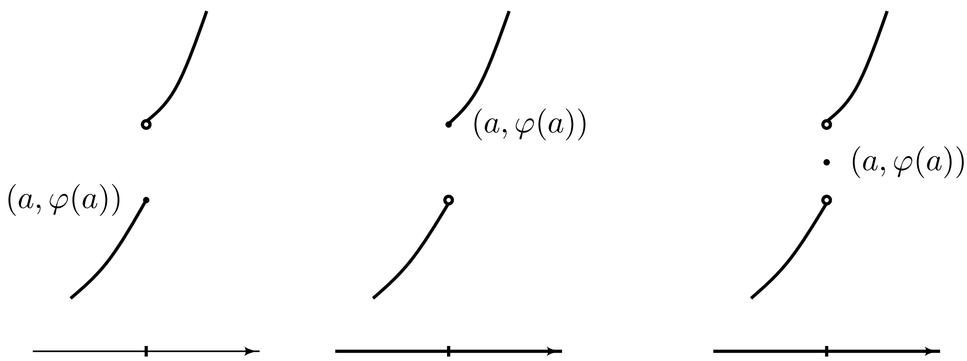
$$\sup\{\varphi(x) \mid x < a\} - \varepsilon < \varphi(x) \leq \sup\{\varphi(x) \mid x < a\} .$$

Det sidste lighedstegn ses tilsvarende.

Man siger, at φ er *kontinuert fra højre* (henh. *venstre*) i a, hvis

$$\varphi(a) = \lim_{x \to a^+} \varphi(x) \ \ (\text{henh. } \ \varphi(a) = \lim_{x \to a^-} \varphi(x) .)$$

Man bruger også betegnelserne $\varphi(a+)$ og $\varphi(a-)$ for grænseværdierne fra højre og venstre i a. Naturligvis er φ kontinuert i a, hvis og kun hvis φ er kontinuert både fra højre og venstre i a.



kont. fra venstre kont. fra højre hverken kont. fra højre eller venstre

Vi vil indse:

Mængden D af diskontinuitetspunkter for φ er tællelig.

Bevis. For $a \in \mathbb{R}$ sættes $\delta(a) = \varphi(a+) - \varphi(a-)$, og så er $D = \{a \in \mathbb{R} \mid \delta(a) > 0\}$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er mængden

$$D_n = \{a \in]-n, n[\mid \delta(a) \geq \frac{1}{n}\}$$

endelig, idet

$$\sum_{a \in D_n} \delta(a) \leq \varphi(n) - \varphi(-n)\,.$$

Da $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, er D endelig eller numerabel. □

HOVEDSÆTNING 5.12. *Lad $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være voksende og kontinuert fra højre. Der findes et og kun et mål μ på $\mathbb{B}$, så*

$$\mu(]a, b]) = \varphi(b) - \varphi(a) \quad \text{for} \quad a, b \in \mathbb{R},\ a < b\,. \tag{$*$}$$

Det ved $(*)$ bestemte mål er et Radon mål, som betegnes μ_φ. Funktionerne $\varphi + c$, $c \in \mathbb{R}$ bestemmer alle samme mål.

Til et Radon mål μ på $\mathbb{R}$ findes en og på nær addition af en konstant kun en funktion φ, som er voksende og kontinuert fra højre, så $\mu = \mu_\varphi$.

Bevis. Ifølge entydighedssætningen for mål findes højst et mål μ på $\mathbb{B}$, så $(*)$ gælder. At φ bestemmer et mål μ_φ med de ønskede egenskaber, og som derfor er et Radon mål, er ikke enkelt at vise. Det søgte mål μ_φ er ved $(*)$ fastlagt på standard intervallerne. Som ved Lebesgue målet kan vises, at

$$\mu_\varphi(B) = \inf\left\{ \sum_1^\infty \mu_\varphi(I_n) \,\middle|\, B \subseteq \bigcup_1^\infty I_n \right\} \quad \text{for} \quad B \in \mathbb{B}\,,$$

hvor der betragtes alle følger af standard intervaller i $\mathbb{R}$, der overdækker B.

Vi kan også gøre som Stieltjes, der i 1894 indførte Stieltjes integralet $I_\varphi(f)$ af en funktion $f \in C_c(\mathbb{R})$ med hensyn til φ som grænseværdien

$$I_\varphi(f) = \lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))$$

af middelsummer hørende til inddelinger $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, hvor $a < b$ er valgt så $\mathrm{supp}(f) \subseteq [a, b]$. Mere præcist gælder i analogi med resultater fra Mat 1 MA:

Til en inddeling D af $[a, b]$ som ovenfor, indføres undersummer s og oversummer S, som tal af formen

$$s = \sum_{i=1}^n g_i(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))\,, \quad S = \sum_{i=1}^n G_i(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))\,,$$

hvor $g_i \le f(x) \le G_i$ for alle $x \in \,]x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Enhver undersum er mindre end eller lig enhver oversum, så vi har $\underline{I}_\varphi(f) \le \overline{I}_\varphi(f)$, hvor $\underline{I}_\varphi(f)$ er supremum af mængden af undersummer, og $\overline{I}_\varphi(f)$ er infimum af mængden af oversummer. Da f er uniformt kontinuert på $[a, b]$, kan vi til $\varepsilon > 0$ finde $\delta > 0$, så der for $x, y \in [a, b]$ med $|x - y| \le \delta$, gælder $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon(\varphi(b) - \varphi(a))^{-1}$. For enhver inddeling af finhed $\le \delta$, gælder der om under- og oversummer s, S hørende til tallene

$$g_i = \inf\{f(x) | x \in \,]x_{i-1}, x_i]\}\,, \;\; G_i = \sup\{f(x) | x \in \,]x_{i-1}, x_i]\},$$

at

$$\begin{aligned} S - s &= \sum_{i=1}^n (G_i - g_i)\,(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) \\ &\le \frac{\varepsilon}{\varphi(b) - \varphi(a)} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

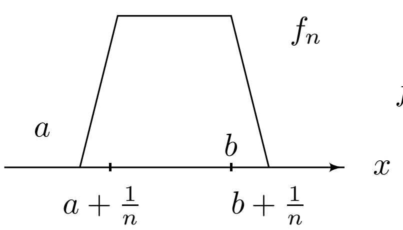
Dermed er $\underline{I}_\varphi(f) = \overline{I}_\varphi(f)$, og man ser som i Mat 1MA, at den fælles værdi $I_\varphi(f)$ er grænseværdi for ovennævnte middelsummer, når finheden går mod 0. Man ser ligeledes, at $f \mapsto I_\varphi(f)$ er en positiv linearform på $C_c(\mathbb{R})$, så ifølge Riesz'es repræsentationssætning findes et Radon mål μ_φ på $\mathbb{R}$ med egenskaben

$$I_\varphi(f) = \int f d\mu_\varphi \quad \text{for alle} \quad f \in C_c(\mathbb{R})\,.$$

Vi vil dernæst indse, at

$$\mu_\varphi(]a, b]) = \varphi(b) - \varphi(a)$$

for et vilkårligt standard interval $]a, b]$. Hertil vælges en følge (f_n) fra $C_c(\mathbb{R})$ som vist på tegningen:



$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \le a \\ n(x - a) & \text{for } a \le x \le a + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{for } a + \frac{1}{n} \le x \le b \\ 1 - n(x - b) & \text{for } b \le x \le b + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{for } b + \frac{1}{n} \le x\,. \end{cases}$$

Idet $f_n \to 1_{]a,b]}$ punktvis, og $1_{]a,b+1]}$ er en μ_φ-integrabel majorant for følgen, finder vi af Lebesgues majorantsætning

$$\mu_\varphi(]a,b]) = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu_\varphi = \lim_{n\to\infty} I_\varphi(f_n)\,.$$

Imidlertid er $\varphi(b+\frac{1}{n}) - \varphi(a)$ en oversum, og $\varphi(b) - \varphi(a+\frac{1}{n})$ en undersum for f_n, altså

$$\varphi(b) - \varphi(a+\frac{1}{n}) \le I_\varphi(f_n) \le \varphi(b+\frac{1}{n}) - \varphi(a)\,,$$

og da φ er kontinuert fra højre, får vi for $n \to \infty$

$$\mu_\varphi(]a,b]) = \varphi(b) - \varphi(a)\,.$$

Vi mangler nu blot at vise, at ethvert Radon mål μ på $\mathbb{R}$ har formen μ_φ, og at φ er entydigt bestemt på nær en konstant. Et sådant φ må nødvendigvis opfylde

$$\begin{aligned} \mu(]0,a]) &= \varphi(a) - \varphi(0) \quad \text{for } a > 0 \\ \mu(]a,0]) &= \varphi(0) - \varphi(a) \quad \text{for } a < 0\,, \end{aligned}$$

og er altså af formen $c + \varphi_0$, hvor $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er defineret ved

$$\varphi_0(a) = \begin{cases} \mu(]0,a]) & \text{for } a > 0 \\ -\mu(]a,0]) & \text{for } a < 0 \\ 0 & \text{for } a = 0\,. \end{cases}$$

Funktionen φ_0 er klart voksende og kontinuert fra højre (jf. §3.1), og man ser let, at $\mu(]a,b]) = \varphi_0(b) - \varphi_0(a)$ for $a < b$. Hvis f.eks. $a < b < 0$, ses det således:

$$\begin{aligned} &\mu(]a,b]) = \mu(]a,0]\setminus]b,0]) = \mu(]a,0]) - \mu(]b,0]) = \\ &-\varphi_0(a) - (-\varphi_0(b)). \end{aligned}$$

□

Det ved den voksende funktion φ definerede mål μ_φ og integral $\int f d\mu_\varphi$ kaldes *Stieltjes målet* og *Stieltjes integralet* bestemt ved φ. (J.T. Stieltjes, hollandsk matematiker, 1856–1894). I mange især ældre lærebøger i analyse optræder begrebet mål slet ikke, idet man indskrænker sig til at integrere med hensyn til den voksende funktion φ, og man bruger betegnelsen

$$\int f d\varphi = \int f d\mu_\varphi.$$

Idet vi sætter $\varphi(\infty) = \lim_{x\to\infty} \varphi(x) \le \infty$, $\varphi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) \ge -\infty$, noterer vi følgende formler:

$$
\begin{aligned}
&\mu_\varphi(]a,\infty]) = \varphi(\infty) - \varphi(a)\,, && \text{idet }]a,\infty[= \bigcup_{n>a}]a,n] \\
&\mu_\varphi(]-\infty,b]) = \varphi(b) - \varphi(-\infty)\,, && \text{idet }]-\infty,b] = \bigcup_{n>-b}]-n,b] \\
&\mu_\varphi(\mathbb{R}) = \varphi(\infty) - \varphi(-\infty) && \\
&\mu_\varphi(]a,b[) = \varphi(b-) - \varphi(a)\,, && \text{idet }]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]a,b-\frac{1}{n}] \\
&\mu_\varphi(\{b\}) = \varphi(b) - \varphi(b-)\,, && \text{idet } \{b\} =]a,b]\setminus]a,b[\\
&\mu_\varphi([a,b]) = \varphi(b) - \varphi(a-)\,, && \text{idet } [a,b] =]a,b] \cup \{a\}\,.
\end{aligned}
$$

Heraf ses, at μ_φ er et *endeligt mål*, netop hvis φ er begrænset. For et endeligt Radon mål μ bestemmes der ved $\varphi(x) = \mu(]-\infty,x])$, $x \in \mathbb{R}$ en voksende funktion, som er kontinuert fra højre, og som opfylder $\varphi(-\infty) = 0$. Der gælder $\mu = \mu_\varphi$ og $\mu(\mathbb{R}) = \varphi(\infty)$. Hvis μ er et sandsynlighedsmål, kaldes $\varphi(x) = \mu(]-\infty,x])$ *fordelingsfunktionen* for μ. Vi har dermed følgende hovedresultat fra sandsynlighedsregningen:

Sætning 5.13. *Der er en en-entydig korrespondance mellem sandsynlighedsmål μ på $(\mathbb{R},\mathbb{B})$ og fordelingsfunktioner $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dvs. funktioner med egenskaberne*

(i) *φ er voksende og kontinuert fra højre.*
(ii) *$\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi(\infty) = 1$.*

For givet μ er φ bestemt ved $\varphi(x) = \mu(]-\infty,x])$, og for givet φ er $\mu = \mu_\varphi$.

Eksempel 5.14. (1) Funktionen

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < a \\ 1 & \text{for} \quad x \ge a \end{cases}$$

er voksende og kontinuert fra højre. Det tilhørende Stieltjes mål μ_φ er lig med Dirac målet ε_a. Der gælder nemlig

$$\varepsilon_a(]\alpha,\beta]) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

for alle $\alpha < \beta$, som ses ved at betragte de 3 tilfælde $a \le \alpha$, $\alpha < a \le \beta$, $\beta < a$.

(2) Lad $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en voksende C^1-funktion. Det tilsvarende Stieltjes mål μ_φ er lig med målet $\varphi' \cdot m$, der har tætheden φ' m.h.t. m. Der gælder nemlig

$$\varphi' \cdot m(]\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)dt = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

for alle $\alpha < \beta$. Dermed har man for $f \in C_c(\mathbb{R})$

$$\int f d\mu_\varphi = \int f(t)\varphi'(t)dt,$$

og idet differentialet $d\varphi = \varphi'(t)dt$, kan man forstå den gammeldags betegnelse for Stieltjes integralet $\int f d\varphi$, der er blevet brugt også når φ ikke er en C^1-funktion.

5.4. Lebesgue målets invarians

Før vi med rette kan opfatte Lebesgue målet m_k i $\mathbb{R}^k$ som det fornuftige volumenbegreb, må vi endnu vise, at det har samme værdi for kongruente mængder. (Sætning 5.17 nedenfor.) Hertil benytter vi en deskriptiv karakterisering af målene cm_k, $0 \le c < \infty$, ved hjælp af additionen i $\mathbb{R}^k$ (Sætning 5.16).

Lad $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ være en bijektiv afbildning, hvor både φ og φ^{-1} er målelige, når $\mathbb{R}^k$ betragtes med Borel algebraen $\mathbb{B}_k$, dvs.

$$E \in \mathbb{B}_k \Leftrightarrow \varphi(E) \in \mathbb{B}_k \,.$$

Et Borel mål μ siges at være *invariant* ved φ, hvis billedmålet $\varphi(\mu)$ er lig med μ, dvs. hvis

$$\forall B \in \mathbb{B}_k : \mu(\varphi^{-1}(B)) = \mu(B) \,.$$

Enhver homeomorf afbildning $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ fører Borel algebraen $\mathbb{B}_k$ i $\mathbb{R}^k$ over i sig selv, og den fører et Radon mål μ over i et Radon mål $\varphi(\mu)$.

Thi at $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ er homeomorf, betyder at φ er bijektiv og tillige med φ^{-1} kontinuert. Specielt er φ og φ^{-1} Borel funktioner. For enhver kompakt mængde $K \subseteq \mathbb{R}^k$ er $\varphi^{-1}(K)$ også kompakt som billede af K ved den kontinuerte afbildning φ^{-1}. Dermed er $\varphi(\mu)(K) = \mu(\varphi^{-1}(K)) < \infty$.

Translationen τ_a bestemt ved $a \in \mathbb{R}^k$ er defineret ved

$$\tau_a(x) = x + a \,, \quad x \in \mathbb{R}^k \,.$$

Den er naturligvis en homeomorf afbildning af $\mathbb{R}^k$ på sig selv, med $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$.

SÆTNING 5.15. *Lebesgue målet m_k i $\mathbb{R}^k$ er translationsinvariant, dvs. invariant ved enhver translation af $\mathbb{R}^k$.*

Bevis. Ved translationen τ_a føres m_k over i målet $\tau_a(m_k)$, og for ethvert standard interval I i $\mathbb{R}^k$ vil $\tau_a^{-1}(I) = \tau_{-a}(I)$ pány være et standard interval med samme kantlængder, hvorfor

$$\tau_a(m_k)(I) = m_k(\tau_{-a}(I)) = m_k(I) \,.$$

Af entydighedsudsagnet i Hovedsætning 5.1 følger, at $\tau_a(m_k) = m_k$. □

Idet vi betegner $\tau_a(E)$ med $E+a$ og erstatter a med $-a$, kommer sætningen ud på, at

$$m_k(E+a) = m_k(E)$$

for ethvert $a \in \mathbb{R}^k$ og enhver Borel mængde E i $\mathbb{R}^k$. Sætningen indebærer, at der for $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ gælder

$$\int f(x)dx = \int f(x+a)dx\,,$$

således at forstå, at de to integraler samtidig har mening og i bekræftende fald samme værdi, jf. Sætning 4.22 om integration med hensyn til et billedmål.

SÆTNING 5.16. *Målene cm_k, $c \in [0,\infty[$, er de eneste translationsinvariante Radon mål i $\mathbb{R}^k$.*

Hermed har vi en ny deskriptiv karakterisering af Lebesgue målet m_k i $\mathbb{R}^k$, nemlig som det translationsinvariante Radon mål, der har værdien 1 på enhedsterningen

$$\{(x_1,\ldots,x_k) \mid 0 < x_i \leq 1\,,\ i = 1,\ldots,k\}\,.$$

Bevis.

Vi har lige vist, at m_k og dermed hvert af målene cm_k er translationsinvariant.

Lad nu omvendt μ være et translationsinvariant Radon mål i $\mathbb{R}^k$. Det har åbenbart samme værdi på alle standard intervaller med samme sæt af kantlængder. Idet vi med c betegner værdien på enhedsterningen, må værdien være c/q^k på enhver standard terning med kantlængde $1/q$, hvor $q \in \mathbb{N}$; enhedsterningen kan jo deles i q^k sådanne. For et standard interval med rationale kantlængder $r_1,\ldots,r_k = p_1/q,\ldots,p_k/q$ må værdien være $cr_1\cdots r_k$; intervallet kan jo deles i $p_1\cdots p_k$ terninger med kantlængde $1/q$. For et vilkårligt standard interval I med kantlængder $a_1,\ldots,a_k$ "klemmes" I mellem standard intervaller J' og J'' med rationale kantlængder $r'_1,\ldots,r'_k$ og $r''_1,\ldots,r''_k$ så $J' \subseteq I \subseteq J''$, hvoraf

$$c\prod_{i=1}^{k} r'_i = \mu(J') \leq \mu(I) \leq \mu(J'') = c\prod_{i=1}^{k} r''_i\,.$$

For hvert $\varepsilon > 0$ kan vi vælge J' og J'' så

$$a_i - \varepsilon < r'_i < a_i < r''_i < a_i + \varepsilon\,,\ i = 1,\ldots,k\,,$$

og dermed må der gælde $\mu(I) = c\,a_1 \cdots a_k$. Da således $\mu(I) = cm_k(I)$ for ethvert standard interval I, følger $\mu = cm_k$ af entydighedssætningen for mål (Hovedsætning 5.4). $\square$

SÆTNING 5.17. *Lebesgue målet m_k i $\mathbb{R}^k$ er invariant ved enhver isometri $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ med hensyn til den euklidiske metrik.*

Mængder $E, F \subseteq \mathbb{R}^k$ kaldes *kongruente*, hvis der findes en (euklidisk) isometri $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ med $\varphi(E) = F$. Sætning 5.17 kommer ud på, at *kongruente Borel mængder i $\mathbb{R}^k$ har samme Lebesgue mål.* Vi ved, at en isometri φ kan udtrykkes $\varphi(x) = Ax + a$, hvor A er en ortogonal $k \times k$ matrix og $a \in \mathbb{R}^k$. (Se Sætning I.3.11).

Bevis for Sætning 5.17.

Det er nok at vise, at m_k er invariant ved en vilkårlig lineær isometri $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, svarende til $a = 0$, idet vi jo allerede ved, at m_k er translationsinvariant. For at opnå simplere betegnelser vælger vi at vise, at m_k er invariant ved φ^{-1}.

Ved φ^{-1} føres m_k over i Radon målet $\nu = \varphi^{-1}(m_k)$ defineret ved

$$\nu(E) = m_k(\varphi(E)), \quad E \in \mathbb{B}_k .$$

Nu er ν translationsinvariant, thi idet $\varphi(x + a) = \varphi(x) + \varphi(a)$, har vi for hvert $E \in \mathbb{B}_k$ og $a \in \mathbb{R}^k$

$$\nu(E + a) = m_k(\varphi(E + a)) = m_k(\varphi(E) + \varphi(a)) = m_k(\varphi(E)) = \nu(E) .$$

Ifølge Sætning 5.16 er da $\nu = cm_k$ for passende $c \geq 0$.

Idet φ er en isometri, er imidlertid $\varphi(B) = B$, når

$$B = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid \sum_{i=1}^{k} x_i^2 < 1\}$$

er enhedskuglen i $\mathbb{R}^k$. Da nu

$$\nu(B) = m_k(\varphi(B)) = m_k(B), \quad 0 < m_k(B) < \infty ,$$

sluttes $c = 1$, altså $\nu = m_k$, dvs. m_k er invariant ved φ^{-1}. $\square$

5.5. Målforholdet af en isomorfi af $\mathbb{R}^k$

Med $GL(k)$ betegnes mængden af invertible $k \times k$ matricer med reelle elementer. Vi minder om, at en bijektiv lineær afbildning af $\mathbb{R}^k$ ind i $\mathbb{R}^k$ kaldes en *isomorfi* af $\mathbb{R}^k$. Det er velkendt, at matricen for en isomorfi af $\mathbb{R}^k$ tilhører $GL(k)$. Omvendt vil $x \mapsto Gx$ være en isomorfi af $\mathbb{R}^k$ når $G \in GL(k)$. En isomorfi af $\mathbb{R}^k$ er specielt en homeomorfi. Mængden $GL(k)$ er en gruppe under matrix multiplikation (kaldet den *generelle lineære gruppe*), og determinanten giver en afbildning $\det : GL(k) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, som er en gruppe homomorfi.

For $G \in GL(k)$ er billedmålet $G^{-1}(m_k)$ af Lebesgue målet under afbildningen $x \mapsto G^{-1}x$ et translationsinvariant Radon mål på $\mathbb{R}^k$, idet der for $E \in \mathbb{B}_k$ og $a \in \mathbb{R}^k$ gælder

$$\begin{aligned} G^{-1}(m_k)(E+a) &= m_k(G(E+a)) = m_k(G(E)+G(a)) \\ &= m_k(G(E)) = G^{-1}(m_k)(E). \end{aligned}$$

Ifølge Sætning 5.16 findes en konstant $c > 0$, så $G^{-1}(m_k) = cm_k$, altså så

$$m_k(G(E)) = cm_k(E) \quad \text{for alle} \quad E \in \mathbb{B}_k\,.$$

Konstanten c afhænger af G, betegnes $c = \mathrm{mfh}\,(G)$, og kaldes G's *målforhold*. Målforholdet er altså en afbildning $\mathrm{mfh} : GL(k) \to]0, \infty[$ opfyldende

$$m_k(G(E)) = \mathrm{mfh}\,(G) m_k(E) \quad \text{for alle} \quad G \in GL(k) \text{ og } E \in \mathbb{B}_k\,.$$

Sættes $E = [0,1]^k$ fås specielt

$$\mathrm{mfh}\,(G) = m_k(G([0,1]^k))\,.$$

Hvis $e_1, \ldots, e_k$ betegner den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^k$, og hvis vi sætter $v_1 = Ge_1, \ldots, v_k = Ge_k$, som altså er G's søjler, er $G([0,1]^k)$ lig med *parallelotopen* udspændt af $v_1, \ldots, v_k$:

$$G([0,1]^k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \,\middle|\, 0 \le \lambda_i \le 1\,, \;\; i = 1, \ldots, k \right\}.$$

Dermed har vi:

Målforholdet af G er lig Lebesgue målet af parallelotopen udspændt af G's søjler.

For $G_1, G_2 \in GL(k)$ har vi

$$\begin{aligned} \mathrm{mfh}\,(G_1G_2) &= m_k(G_1G_2([0,1]^k)) = m_k(G_1(G_2([0,1]^k))) \\ &= \mathrm{mfh}\,(G_1) m_k(G_2([0,1]^k)) = \mathrm{mfh}\,(G_1)\mathrm{mfh}\,(G_2)\,. \end{aligned}$$

Med andre ord er målforholdet en gruppe homomorfi af $(GL(k), \cdot)$ ind i $(]0, \infty[, \cdot)$.

Sætning 5.18. *For $G \in GL(k)$ gælder $\text{mfh}\,(G) = |\det G|$.*

Bevis. Hvis G er en ortogonal matrix gælder påstanden, idet $\text{mfh}\,(G) = 1$ ifølge Sætning 5.17, og $\det G = \pm 1$ fordi $GG^t = I$ (= enhedsmatricen).

Hvis G er en symmetrisk positivt definit matrix gælder påstanden også. Fra Mat 1 vides nemlig, at G er ortogonalt diagonaliserbar til en diagonalmatrix $D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, hvor $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ er G's egenværdier. Der findes med andre ord en ortogonal matrix $\mathcal{O}$ så $\mathcal{O}G\mathcal{O}^t = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, hvoraf

$$\text{mfh}\,(D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)) = \text{mfh}\,(\mathcal{O})\text{mfh}\,(G)\text{mfh}\,(\mathcal{O}^t) = \text{mfh}\,(G)\,,$$

men

$$D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)([0,1]^k) = [0, \lambda_1] \times \cdots \times [0, \lambda_k]$$

så

$$\text{mfh}\,(D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)) = m_k([0, \lambda_1] \times \cdots \times [0, \lambda_k]) = \lambda_1 \cdots \lambda_k = \det G = |\det G|\,.$$

Idet mfh og $|\det|$ er gruppe homomorfier, følger sætningens påstand af følgende resultat, der er analogt til fremstillingen $z = \gamma r$ af et komplekst tal $z \neq 0$ som produkt af et tal γ med $|\gamma| = 1$ og et positivt tal $r = |z|$.

Lemma 5.19. *En matrix $G \in GL(k)$ kan skrives $G = AP$, hvor A er en ortogonal matrix og P er en symmetrisk positivt definit matrix.*

Bevis. Vi minder om, at en vilkårlig $k \times k$ matrix M og dens transponerede M^t har følgende samspil med skalarproduktet

$$Mx \cdot y = x \cdot M^t y \quad \text{for } x, y \in \mathbb{R}^k.$$

Vi bemærker, at G^tG er symmetrisk idet $(G^tG)^t = G^tG^{tt} = G^tG$, og at den er positivt definit. For $x \in \mathbb{R}^k$ har vi nemlig

$$G^tGx \cdot x = Gx \cdot Gx = \|Gx\|_2^2 \geq 0\,,$$

og hvis $x \neq 0$ er $Gx \neq 0$, da G er invertibel, altså $\|Gx\|_2^2 > 0$.

Der findes en symmetrisk positivt definit matrix P så $P^2 = G^tG$. For at se dette udnytter vi, som ovenfor, at der findes en ortogonal matrix $\mathcal{O}$ så $\mathcal{O}G^tG\mathcal{O}^t = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, hvor $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ er G^tG's egenværdier. Sættes $P = \mathcal{O}^t D(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_k})\mathcal{O}$, er P symmetrisk og positivt definit og $P^2 = \mathcal{O}^t D(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_k})^2 \mathcal{O} = G^tG$, idet vi har udnyttet, at $\mathcal{O}\mathcal{O}^t = I$ og $D(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_k})^2 = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Vi definerer dernæst $A = GP^{-1}$, og lemmaet vil være vist, når det er godtgjort, at A er ortogonal, hvilket følger af at

$$Ax_1 \cdot Ax_2 = x_1 \cdot x_2\,, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k\,.$$

For at se dette sættes $y_1 = P^{-1}x_1$, $y_2 = P^{-1}x_2$, og vi finder

$$Ax_1 \cdot Ax_2 = Gy_1 \cdot Gy_2 = G^t G y_1 \cdot y_2 = P^2 y_1 \cdot y_2 = Py_1 \cdot Py_2 = x_1 \cdot x_2 \,. \; \square$$

KOROLLAR 5.20. *Lad $v_1, \ldots, v_k$ være lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^k$. Parallelotopen $[v_1, \ldots, v_k]$ udspændt af $v_1, \ldots, v_k$ har Lebesgue målet*

$$|\det(v_1, \ldots, v_k)| \,.$$

Bevis. Lad G være matricen hvis søjler er $v_1, \ldots, v_k$. Så er $G \in GL(k)$ og $m_k([v_1, \ldots, v_k]) = \text{mfh}\,(G) = |\det G|$. □

5.6. Eksempler

EKSEMPEL 5.21. *Enhver hyperplan i $\mathbb{R}^k$ er afsluttet og har Lebesgue mål* 0.

Bevis. En hyperplan H (gennem 0) er givet ved en normalvektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$ med $\|\xi\|_2 = 1$ så $H = H_\xi = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x \cdot \xi = 0\}$. Idet H er originalmængden til $\{0\}$ ved den kontinuerte afbildning $x \mapsto x \cdot \xi$ er H afsluttet. (Dette følger også af Bemærkning I.6.13.) Ved en ortogonal matrix $\mathcal{O}$ går H_ξ over i hyperplanen $\mathcal{O}(H_\xi) = H_{\mathcal{O}\xi}$, der har samme Lebesgue mål som H_ξ, da Lebesgue målet er invariant ved isometrier. Vi kan vælge $\mathcal{O}$ så $\mathcal{O}\xi = (0, 0, \ldots, 1) = e_k$. (Vælg en ortonormal basis $u_1, \ldots, u_k$ for $\mathbb{R}^k$ så $u_k = \xi$, og lad $\mathcal{O}$ være den ortogonale matrix for den lineære afbildning, der fører u_i over i standard basis vektoren e_i, $i = 1, \ldots, k$.) Dermed har vi

$$H_k := H_{\mathcal{O}\xi} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_k = 0\}.$$

Det er altså nok at vise, at $m_k(H_k) = 0$, og endvidere nok at enhver begrænset mængde

$$\{x \in \mathbb{R}^k \mid x_k = 0\,,\ x_i \in \,]a_i, b_i]\ ,\ i = 1, \ldots, k-1\}\,,$$

har Lebesgue mål 0, idet H_k er forening af numerabelt mange sådanne. Imidlertid er ovenstående mængde indeholdt i intervaller med vilkårligt lille Lebesgue mål, f.eks. for hvert $n \in \mathbb{N}$ indeholdt i

$$\{x \in \mathbb{R}^k \mid -\frac{1}{n} < x_k \le 0\,,\ x_i \in \,]a_i, b_i]\ ,\ \ i = 1, \ldots, k-1\}\,.$$

□

KONSEKVENSER. En polygon i $\mathbb{R}^2$, et polyeder i $\mathbb{R}^3$ og generelt en polytop i $\mathbb{R}^k$, har samme Lebesgue mål, hvadenten randen medregnes eller ej, idet randen er endelig foreningsmængde af delmængder af hyperplaner.

Derimod kan randen af mere indviklede afsluttede mængder have positivt Lebesgue mål. (Se opg. 5.26, 5.27).

EKSEMPEL 5.22. CANTORS MÆNGDE.

For at komme frem til Cantors mængde $Z \subseteq [0,1]$ fjernes åbne delintervaller af $[0,1]$ i tælleligt mange skridt.

I første skridt deles $[0,1]$ i tre lige store dele, og den midterste åbne tredjedel $G_1 = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ fjernes, hvorved der resterer $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. I andet skridt tredeles de to delintervaller, som F_1 består af, og den midterste åbne trediedel af hver af dem fjernes. Der fjernes altså $G_2 = \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[\cup \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[$, og $F_2 = F_1 \setminus G_2$ består af 4 intervaller, hver af længde $(\frac{1}{3})^2$. I n'te skridt fjernes en åben mængde G_n bestående af 2^{n-1} åbne intervaller af længde $(\frac{1}{3})^n$, altså

$$m(G_n) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n,$$

og $F_n = F_{n-1} \setminus G_n$ består af 2^n disjunkte afsluttede intervaller af længde $(\frac{1}{3})^n$, altså

$$m(F_n) = (\frac{2}{3})^n.$$

Vi definerer nu Cantors mængde Z som fællesmængden af den dalende følge $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ af afsluttede mængder, og dermed har vi (jf. §3.1 (6))

$$m(Z) = \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = 0,$$

hvilket stemmer med at

$$Z = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

og

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n = 1.$$

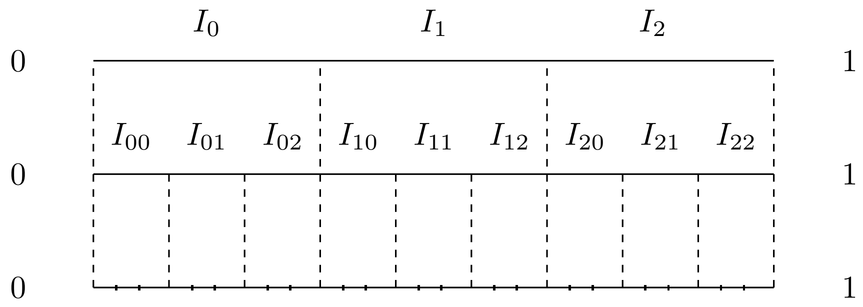
Man kunne tro, at der ikke var mange punkter tilbage, når man fra $[0,1]$ har fjernet numerabelt mange intervaller med længdesummen 1. Af nedenstående karakterisering af Z ved *trialbrøker* vil imidlertid fremgå, at Z er ækvipotent med $\mathbb{R}$.

En *trialbrøk* $^3 0, a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$, hvor hvert a_n er 0, 1 eller 2, siges at fremstille summen af rækken

$$a_1/3 + a_2/3^2 + \cdots + a_n/3^n + \ldots\,,$$

hvilket vil være et tal i intervallet $[0,1]$.

Lad os her for de *afsluttede* intervaller, der fremkommer ved successive tredelinger af $[0,1]$ benytte betegnelser som vist på figuren:



Trialbrøken ovenfor fremstiller da samme tal som intervalindsnævringen

$$I_{a_1} \supset I_{a_1 a_2} \supset \cdots \supset I_{a_1 a_2 \cdots a_n} \supset \cdots .$$

idet fællesmængden af disse intervaller består af netop et reelt tal.

Heraf fremgår for det første, at hvert $x \in [0,1]$, som ikke er tredelingspunkt, har netop én trialbrøkfremstilling, medens delepunkterne har to: en endende på lutter 0'er, en endende på lutter 2'er.

Men det fremgår også, at Cantors mængde Z består af netop de tal, der kan fremstilles ved en trialbrøk ${}^3 0, a_1 \; a_2 \ldots$ med cifrene 0 og 2. Fremstillingen er entydig. (På denne form er mængden angivet af Georg Cantor, Acta Mathematica 2 (1883), p.407.)

At Z er ækvipotent med $\mathbb{R}$ følger nu let af, at afbildningen

$${}^3 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \mapsto {}^2 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots ,$$

der fører $x \in Z$ fremstillet ved trialbrøk ${}^3 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ med cifre 0 og 2 over i tallet fremstillet ved *dualbrøken* med cifrene $b_n = a_n/2$, har hele intervallet $[0,1]$ som billedmængde, jf. opg. 5.28.

Cantors mængde er således en kompakt delmængde af $\mathbb{R}$, ækvipotent med $\mathbb{R}$, men med Lebesgue målet 0.

Bemærkning 5.23. Da enhver delmængde af Z er en nulmængde m.h.t. Lebesgue målet, ser man, at mængden af Lebesgue nulmængder i $\mathbb{R}$ har samme mægtighed som mængden af alle delmængder af $\mathbb{R}$. Man kan derimod vise, at Borel algebraen i $\mathbb{R}$ er ækvipotent med $\mathbb{R}$. Der findes altså Lebesgue nulmængder, som ikke er Borel mængder.

Eksempel 5.24. Uden at gå ind på detaljer nævner vi, at den italienske matematiker G. Peano som den første har angivet en kontinuert kurve

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, hvis punkter udfylder enhedskvadratet $[0,1] \times [0,1]$ i $\mathbb{R}^2$. (Mathematische Annalen **36** (1890), p.157–160. Man kan konstruere φ så billedet af Lebesgue målet på $[0,1]$ er Lebesgue målet på $[0,1]^2$.

Peanos kurve har multiple punkter, dvs. punkter der optræder for mere end én parameterværdi. Sådan må det nødvendigvis være på grund af Brouwer's Sætning I.3.9, der viser, at en åben mængde i $\mathbb{R}^k$ ikke kan være homeomorf med en åben mængde i $\mathbb{R}^n$, når $k \neq n$. Ved modifikation af Peanos konstruktion (W.F. Osgood, Transactions of the American Mathematical Society **4** (1903), p.107–112, – smukke figurer!) kan man imidlertid opnå en Jordan bue i $[0,1] \times [0,1]$, der ganske vist ikke udfylder hele kvadratet, men dog har Lebesgue mål så tæt ved 1 man ønsker. (En Jordan bue i $\mathbb{R}$ er billedmængde ved en injektiv, kontinuert afbildning $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.)

Eksempel 5.25. Lebesgue målet af den afsluttede enhedskugle i $\mathbb{R}^k$ betegnes V_k, altså

$$V_k = m_k(\{x \in \mathbb{R}^k \mid \sum_1^k x_i^2 \leq 1\}) .$$

(Vi bestemmer V_k i §6.4.) En ellipsoide med halvakser $a_1, \ldots, a_k > 0$ er defineret som mængden

$$E = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{i=1}^k \frac{{x_i}^2}{{a_i}^2} \leq 1\} .$$

Den lineære afbildning med matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_k \end{pmatrix}$$

afbilder enhedskuglen på E, og derfor har vi

$$m_k(E) = |\det A| V_k = V_k \cdot a_1 a_2 \cdots a_k .$$

En ellipse i planen med halvakser a_1 og a_2 har altså arealet $\pi a_1 a_2$.

5.7. Transformation af Lebesgue integraler

Vi vil nu forklare, hvordan formlen for substitution i et integral kan udvides fra en variabel til flere variable. Det drejer sig altså om at udvide formlen

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y)\,dy = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx,$$

hvor $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ er en bijektiv C^1 funktion. En sådan er enten strengt voksende, og så er $\varphi(a)=\alpha, \varphi(b)=\beta$ og $\varphi'(x) \geq 0$, eller strengt aftagende, og så er $\varphi(a)=\beta, \varphi(b)=\alpha$ og $\varphi'(x) \leq 0$. I sidste tilfælde er øvre grænse mindre end nedre grænse i det andet integral. Ved at ombytte grænserne og skifte fortegn kan vi altså skrive formlen

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y)\,dy = \int_{a}^{b} f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,dx,$$

som derved gælder uanset om φ er voksende eller aftagende.

SÆTNING 5.26. (TRANSFORMATIONSSÆTNINGEN). *Lad $\varphi : X \to Y$ være en bijektiv afbildning af en åben mængde $X \subseteq \mathbb{R}^k$ på en åben mængde $Y \subseteq \mathbb{R}^k$, hvor φ og φ^{-1} begge har kontinuerte partielle afledede. Der gælder da:*

En funktion f defineret på Y er Lebesgue integrabel over Y hvis og kun hvis $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$ er Lebesgue integrabel over X; i bekræftende fald er

$$\int_Y f(y)dy = \int_X f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|dx\,.$$

Her betegner $\det D\varphi(x)$ *Jacobi determinanten (funktionaldeterminanten) for φ i punktet x.*

Vi vil nøjes med et heuristisk bevis, idet et stringent bevis ikke er helt simpelt. (Se f.eks. E. Asplund/L. Bungart: A first course in integration, Holt, Rinehart and Winston 1966, p.179–186. Eller Tue Tjur: Probability based on Radon measures. Wiley 1980, p. 32-35.)

Lad $\varphi_1, \ldots, \varphi_k : X \to \mathbb{R}$ være koordinatfunktionerne, så $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x))$. Af Taylors formel følger, at

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + D\varphi(x)h + \varepsilon(h)\|h\|, \quad x \in X\,,\ \|h\| < r\,,$$

hvor r er så lille, at kuglen $K(x,r) \subseteq X$, og $\varepsilon(h) \in \mathbb{R}^k$ går mod 0 for $h \to 0$.

Formlen viser, at funktionstilvæksten $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ approksimeres godt af den lineære afbildning $h \mapsto D\varphi(x)h$ for små h. Intervallet

$$I(x,\ell) = \{x+h \mid 0 \leq h_1 \leq \ell_1, \ldots, 0 \leq h_k \leq \ell_k\}$$

afbildes derfor for små $\ell_1, \ldots, \ell_k > 0$ i en mængde, der approksimativt er

$$\{\varphi(x) + D\varphi(x)h \mid 0 \le h_1 \le \ell_1, \ldots, 0 \le h_k \le \ell_k\},$$

men denne mængde kan skrives

$$\left\{\varphi(x) + \lambda_1 \ell_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_k \ell_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \mid 0 \le \lambda_i \le 1,\ i = 1, \ldots, k\right\},$$

hvor $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ er søjlerne i Jacobi matricen $D\varphi(x)$, og den fremgår altså af parallelotopen $\left[\ell_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \ell_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right]$ ved translation med $\varphi(x)$. Dens k-dimensionale Lebesgue mål er (jf. Korollar 5.20)

$$\ell_1 \cdots \ell_k \ m_k\left(\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right]\right) = \ell_1 \cdots \ell_k |\det D\varphi(x)|.$$

Intuitivt har vi altså, at

$$\lim_{\ell_1, \ldots, \ell_k \to 0} \frac{m_k(\varphi(I(x, \ell)))}{\ell_1 \cdots \ell_k} = |\det D\varphi(x)|,$$

så $|\det D\varphi(x)|$ kan opfattes som *målforholdet i punktet* x.

Billedet af et infinitesimalt interval $[x_1, x_1 + dx_1] \times \cdots \times [x_k, x_k + dx_k]$ med kantlængder $dx_1, \ldots, dx_k$ er altså en mængde der approksimativt har Lebesgue målet $|\det D\varphi(x)| dx_1 \cdots dx_k$. En mængde $A \subseteq X$, der er disjunkt forening af infinitesimale intervaller, afbildes derfor i en mængde $\varphi(A)$ med Lebesgue målet

$$m_k(\varphi(A)) = \int_A |\det D\varphi(x)| \ dx_1 \cdots dx_k.$$

Denne formel kan fortolkes som $\varphi^{-1}(m_Y) = |\det D\varphi| \cdot m_X$, altså at billedmålet af Lebesgue målet m_Y på Y under φ^{-1} er målet med tætheden $|\det(D\varphi)|$ med hensyn til Lebesgue målet m_X på X.

Sætningen om integration med hensyn til et billedmål, giver nu den ønskede formel

$$\int_Y f(y) dy = \int_Y f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} dm_Y = \int_X f \circ \varphi \ d\varphi^{-1}(m_Y).$$

5.8. Det fuldstændige Lebesgue mål

Et målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ kaldes *fuldstændigt*, hvis enhver μ-nulmængde tilhører $\mathbb{E}$. Ifølge Bemærkning 5.23 er $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k, m_k)$ ikke fuldstændigt.

Det kan man råde bod på ved at indføre en større σ-algebra end $\mathbb{B}_k$, nemlig σ-algebraen $\mathbb{L}_k$ af Lebesgue målelige mængder. Lad $\mathcal{N}_k$ betegne mængden af m_k-nulmængder.

Definition 5.27. En delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^k$ kaldes *Lebesgue målelig*, hvis $A = B \cup N$, hvor $B \in \mathbb{B}_k$ og $N \in \mathcal{N}_k$.

Mængden af Lebesgue målelige mængder i $\mathbb{R}^k$ betegnes $\mathbb{L}_k$.

Sætning 5.28. *(a) Systemet $\mathbb{L}_k$ er den mindste σ-algebra, der indeholder alle Borel mængder og alle Lebesgue nulmængder, dvs. $\mathbb{L}_k = \sigma(\mathbb{B}_k \cup \mathcal{N}_k)$.*

(b) Lebesgue målet $m_k : \mathbb{B}_k \to [0, \infty]$ kan på en og kun en måde udvides til et mål $\overline{m}_k : \mathbb{L}_k \to [0, \infty]$.

Udvidelsen $\overline{m}_k$ er givet ved

$$\overline{m}_k(A) = m_k(B) \quad \textit{for} \quad A = B \cup N\,,$$

hvor $B \in \mathbb{B}_k$, $N \in \mathcal{N}_k$.

(c) Målrummet $(\mathbb{R}^k, \mathbb{L}_k, \overline{m}_k)$ er fuldstændigt.

Bevis. Påstand (a) vil være bevist, hvis vi godtgør, at $\mathbb{L}_k$ er en σ-algebra.

Hvis $A_n = B_n \cup N_n \in \mathbb{L}_k$, $n = 1, 2, \ldots$, har vi

$$\bigcup_1^\infty A_n = \bigcup_1^\infty B_n \cup \bigcup_1^\infty N_n \in \mathbb{L}_k\,,$$

idet $\bigcup_1^\infty B_n \in \mathbb{B}_k$ og $\bigcup_1^\infty N_n \in \mathcal{N}_k$ når $B_n \in \mathbb{B}_k$ og $N_n \in \mathcal{N}_k$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$.

Hvis $A = B \cup N \in \mathbb{L}_k$ findes $M \in \mathbb{B}_k$, så $N \subseteq M$ og $m_k(M) = 0$. Sættes $\tilde{B} = B \cup M$, har vi $\tilde{B} \in \mathbb{B}_k$ og $A \subseteq \tilde{B}$, altså $\complement A \supseteq \complement \tilde{B}$, og differensmængden $D = \complement A \setminus \complement \tilde{B} = \tilde{B} \setminus A \subseteq M$ er en nulmængde. Dermed er $\complement A = \complement \tilde{B} \cup D \in \mathbb{L}_k$.

(b) Antag at $\overline{m}_k : \mathbb{L}_k \to [0, \infty]$ er et mål så $\overline{m}_k(B) = m_k(B)$ for alle $B \in \mathbb{B}_k$. Vi viser først, at $\overline{m}_k(N) = 0$ for alle $N \in \mathcal{N}_k$. Til $N \in \mathcal{N}_k$ findes nemlig $M \in \mathbb{B}_k$ så $N \subseteq M$, og så $m_k(M) = 0$, men så har vi

$$\overline{m}_k(N) \le \overline{m}_k(M) = m_k(M) = 0\,.$$

For vilkårligt $A \in \mathbb{L}_k$ af formen $A = B \cup N$, $B \in \mathbb{B}_k$, $N \in \mathcal{N}_k$ viser vi dernæst, at $\overline{m}_k(A) = m_k(B)$. Vi har nemlig

$$m_k(B) = \overline{m}_k(B) \le \overline{m}_k(A) \le \overline{m}_k(B) + \overline{m}_k(N) = m_k(B)\,.$$

Efter denne analyse definerer vi $\overline{m}_k : \mathbb{L}_k \to [0,\infty]$ ved

$$\overline{m}_k(A) = m_k(B) \text{ når } A = B \cup N \text{ hvor } B \in \mathbb{B}_k \text{ og } N \in \mathcal{N}_k\,.$$

1° Definitionen har mening:

Hvis $A = B_1 \cup N_1$ er en analog opsplitning, ser man let, at $m_k(B) = m_k(B_1)$. Hvis nemlig $M \in \mathbb{B}_k$ opfylder $N \subseteq M$, $m_k(M) = 0$ har vi $B_1 \subseteq A = B \cup N \subseteq B \cup M$, hvoraf $m_k(B_1) \le m_k(B \cup M) \le m_k(B) + m_k(M) = m_k(B)$. Den modsatte ulighed vises analogt.

2° $\overline{m}_k$ udvider m_k, og $\overline{m}_k(N) = 0$ for $N \in \mathcal{N}_k$.

3° $\overline{m}_k$ er et mål:

Hvis $A_n = B_n \cup N_n$, $n = 1, 2, \dots$ er parvis disjunkte, så er også B_n, $n = 1, 2, \dots$ parvis disjunkte og $\bigcup N_n \in \mathcal{N}_k$, hvorfor

$$\overline{m}_k\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) = m_k\left(\bigcup_1^\infty B_n\right) = \sum_1^\infty m_k(B_n) = \sum_1^\infty \overline{m}_k(A_n)\,.$$

(c) Lad $N \subseteq \mathbb{R}^k$ være en nulmængde m.h.t. $\overline{m}_k$. Så findes $M \in \mathbb{L}_k$ med $\overline{m}_k(M) = 0$ og $N \subseteq M$. Om M ved vi at $M = B \cup N_1$, hvor $B \in \mathbb{B}_k$ opfylder $m_k(B) = \overline{m}_k(M) = 0$, og $N_1 \in \mathcal{N}_k$. Så er også M, og dermed N, en nulmængde m.h.t. m_k, altså $N \in \mathcal{N}_k \subseteq \mathbb{L}_k$. □

Målet $\overline{m}_k$ kaldes *det fuldstændige Lebesgue mål.* I mange fremstillinger af teorien kaldes det dog bare Lebesgue målet.

Systemet $\mathbb{L}_k$ er effektivt større end $\mathbb{B}_k$, da vi allerede har bemærket (jf. 5.23), at $\mathcal{N}_k$, og dermed $\mathbb{L}_k$ er ækvipotent med $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, medens $\mathbb{B}_k$ er ækvipotent med $\mathbb{R}$. (Det erindres, at $\mathbb{R}^k$ er ækvipotent med $\mathbb{R}$ for alle k).

For en Borel funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ kommer integration m.h.t. m_k og $\overline{m}_k$ ud på et, jf. Eksempel 4.23(b). Vi vil sædvanligvis nøjes med at betragte målrummet $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k, m_k)$. At dette er en uvæsentlig indskrænkning følger af, at der gælder:

SÆTNING 5.29. *Til en Lebesgue målelig funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, (dvs. f er $\mathbb{L}_k$-$\mathbb{B}$-målelig) findes en Borel funktion $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ så $f = g$ m_k-n.o.*

Bevis. Antag først, at $f \ge 0$, og lad (f_n) være en følge af simple, positive Lebesgue målelige funktioner, så $f_n \nearrow f$. En sådan findes iflg. Sætning 4.1. Hvert f_n er en endelig sum af formen

$$f_n = \sum_{i=1}^{p_n} a_{n,i}\, 1_{A_{n,i}}\,,$$

hvor $A_{n,i} \in \mathbb{L}_k$. Idet $A_{n,i} = B_{n,i} \cup N_{n,i}$, hvor $B_{n,i} \in \mathbb{B}_k$, og $N_{n,i} \in \mathcal{N}_k$, vil

$$g_n = \sum_{i=1}^{p_n} a_{n,i}\ 1_{B_{n,i}}$$

være en simpel Borel funktion, og mængden

$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{p_n} N_{n,i}$$

tilhører $\mathcal{N}_k$. For $x \notin N$ er $f_n(x) = g_n(x)$ for alle n, og betegner $M \in \mathbb{B}_k$ en nulmængde, så $N \subseteq M$ vil

$$g(x) = \begin{cases} \lim g_n(x)\,, & x \in X \setminus M \\ 0\,, & x \in M \end{cases}$$

være en Borel funktion, så $f(x) = g(x)$ for $x \notin M$.

Hvis f er reel anvendes det lige viste på de Lebesgue målelige funktioner f^+ og f^-. □

Også det fuldstændige Lebesgue mål er invariant ved euklidiske isometrier: Hvis $A \in \mathbb{L}_k$ og $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ er en isometri, så er $G(A) \in \mathbb{L}_k$ og $\overline{m}_k(G(A)) = \overline{m}_k(A)$.

Under brug af udvalgsaksiomet skal vi nu vise, at der findes delmængder $A \subseteq \mathbb{R}$, som ikke er Lebesgue målelige. Vi viser mere generelt, at man ikke kan udvide $\overline{m}_1$ til et translationsinvariant mål på $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

SÆTNING 5.30. (Vitali, 1905). *Lad* $(\mathbb{R}, \mathbb{E}, m)$ *være et målrum med egenskaberne*

(i) $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{E}$, $\quad m|\mathbb{B}$ *er Lebesgue målet,*
(ii) $m : \mathbb{E} \to [0, \infty]$ *er translationsinvariant, dvs.* $\forall a \in \mathbb{R}\, \forall E \in \mathbb{E} : (a + E \in \mathbb{E}) \wedge (m(a + E) = m(E))$.

Så er $\mathbb{E} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Bevis. Vi indfører en ækvivalensrelation $\sim$ i $[0, 1]$ ved fastsættelsen $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. På grund af udvalgsaksiomet, findes en mængde $A \subseteq [0, 1]$, som består af et element fra hver ækvivalensklasse. Vi påstår, at $A \notin \mathbb{E}$.

Vi bemærker først, at

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} A + q \subseteq [0, 2]\,, \quad \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A + q = \mathbb{R}\,,$$

og mængderne $A+q$, $q \in \mathbb{Q}$ er parvis disjunkte.

Antages at $A \in \mathbb{E}$, vil også $A+q \in \mathbb{E}$ for alle $q \in \mathbb{Q}$, og vi har da

$$2 \geq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} m(A+q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} m(A) = \infty \cdot m(A)$$

og

$$\infty = m(\mathbb{R}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m(A+q) = \infty \cdot m(A) \,.$$

Af første ligning sluttes $m(A) = 0$, af sidste ligning $m(A) > 0$, og vi har en modstrid. $\square$

I Solovays model for mængdelæren fra 1970 betragtes Zermelo-Fraenkels aksiomer, samt aksiomet $\mathbb{L}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Dette er naturligvis uforeneligt med udvalgsaksiomet, men dog med det numerable udvalgsaksiom.

Ethvert målrum kan udvides til et fuldstændigt målrum, jf. opg. 3.17.

5.9. Lebesgue målet i euklidiske rum. Fladeintegraler

Et *euklidisk rum* V er som bekendt et endelig dimensionalt reelt vektorrum med et indre produkt. Ved fastsættelsen

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} \,, \quad d(x,y) = \|x-y\|$$

defineres en norm og en metrik i V, og dermed kan vi definere Borel algebraen $\mathbb{B}(V)$ i V.

Vælges en ortonormal basis $\alpha = (a_1, \ldots, a_k)$ for V (idet $k = \dim V$), har vi en bijektiv lineær isometri $\phi_\alpha : \mathbb{R}^k \to V$ defineret ved $\phi_\alpha(x) = \sum_{i=1}^k x_i a_i$.

Definition 5.31. Ved *Lebesgue målet* m_V i V forstås billedmålet $\phi_\alpha(m_k)$ af Lebesgue målet m_k i $\mathbb{R}^k$ under ϕ_α.

Vi må naturligvis godtgøre, at denne definition er uafhængig af valget af ortonormal basis. Hvis $\beta = (b_1, \ldots, b_k)$ er en anden ortonormal basis, og $\phi_\beta : \mathbb{R}^k \to V$ er den tilsvarende lineære afbildning, så er $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ en bijektiv lineær afbildning, der med hensyn til den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^k$ har matricen ${}_\beta\square_\alpha$, hvis j'te søjle er a_j's koordinatsøjle med hensyn til basen β. Denne matrix er ortogonal, da baserne er ortonormale, så ifølge Sætning 5.17 er m_k invariant under $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha$, dvs. $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha(m_k) = m_k$, hvoraf følger $\phi_\alpha(m_k) = \phi_\beta(m_k)$.

Det er nu let at vise, at sætningerne 5.15-5.17 gælder uændret for Lebesgue målet i et euklidisk rum.

Hvis $\varphi : V \to V$ er en isomorfi, så er billedmålet $\varphi(m_V)$ translationsinvariant og dermed proportionalt med m_V. Som i §5.5 indføres *målforholdet* $\operatorname{mfh}(\varphi)$ som den konstant for hvilken

$$m_V(\varphi(E)) = \operatorname{mfh}(\varphi) m_V(E) \quad \text{for alle} \quad E \in \mathbb{B}(V)\,,$$

og der gælder

$$\operatorname{mfh}(\varphi) = |\det(\varphi)|\,,$$

idet determinanten af en lineær afbildning defineres som determinanten af den tilhørende matrix efter valg af basis. (Hvis φ har matricerne A hhv. B mht. baser α hhv. β, så er $B = G^{-1}AG$, idet G er basisskiftmatricen, og dermed er $\det(B) = \det(A)$, så det har mening at tale om $\det(\varphi)$.)

SÆTNING 5.32. *Lad $\beta = (b_1, \ldots, b_k)$ være et lineært uafhængigt sæt af vektorer i et euklidisk rum V af dimension k.*

Parallelotopen $P = [b_1, \ldots, b_k]$ udspændt af $b_1, \ldots, b_k$ har Lebesgue målet

$$m_V(P) = \sqrt{\det(b_i \cdot b_j)}\,.$$

Bevis. Lad $\alpha = (a_1, \ldots, a_k)$ være en ortonormal basis for V, og lad ${}_\alpha\square_\beta = (v_{ij})$ være α-koordinatmatricen for β, altså den matrix, hvis j'te søjle er b_j's koordinater mht. basen α:

$$b_j = \sum_{i=1}^{k} v_{ij} a_i\,.$$

Idet $\phi_\alpha : \mathbb{R}^k \to V$ defineres ved $\phi_\alpha(x) = \sum x_i a_i$ er $\phi_\alpha^{-1}(b_j) \in \mathbb{R}^k$ den j'te søjle i ${}_\alpha\square_\beta$, $j = 1, \ldots, k$. Ifølge Korollar 5.20 har vi da

$$\begin{aligned} |\det({}_\alpha\square_\beta)| &= m_k([\phi_\alpha^{-1}(b_1), \ldots, \phi_\alpha^{-1}(b_k)]) \\ &= m_k(\phi_\alpha^{-1}([b_1, \ldots, b_k])) = m_V([b_1, \ldots, b_k])\,. \end{aligned}$$

Imidlertid gælder

$$b_i \cdot b_j = (\sum_{r=1}^{k} v_{ri} a_r) \cdot (\sum_{s=1}^{k} v_{sj} a_s) = \sum_{r=1}^{k} v_{ri} v_{rj}\,,$$

da $a_r \cdot a_s = 1$ for $r = s$ og ellers 0, altså $(b_i \cdot b_j) = ({}_\alpha\square_\beta)^t\, {}_\alpha\square_\beta$, hvoraf følger, at $\det(b_i \cdot b_j) = (\det {}_\alpha\square_\beta)^2$. $\square$

Fladeintegraler. Lad $X \subseteq \mathbb{R}^k$ være en åben mængde og lad $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ være en C^1-afbildning, idet vi antager $k < n$. Intuitivt vil $\varphi(x)$ beskrive en

k-dimensional flade $F = \varphi(X)$ i $\mathbb{R}^n$, når x gennemløber X. Vi vil definere *flademålet* σ og *fladeintegralet* $\int_F f\, d\sigma$ for funktioner f defineret på F. Vi vil kun gøre dette under antagelsen, at differentialet er *injektivt* i hvert punkt $x \in X$, altså at søjlerne $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ i Jacobi matricen $D\varphi(x)$ er lineært uafhængige. Dermed udspænder de en parallelotop

$$P(x) = [\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}]$$

i underrummet

$$V = \operatorname{span}(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}),$$

der er et k-dimensionalt euklidisk rum med det indre produkt fra $\mathbb{R}^n$. Parallelotopen $P(x)$ har et k-dimensionalt Lebesgue mål givet ved

$$m_V(P(x)) = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

idet matricen (g_{ij}), kaldet den *metriske tensor* for fladen, er givet ved

$$g_{ij} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}.$$

Vi definerer fladeintegralet ved

$$\int_F f d\sigma = \int_X f(\varphi(x)) m_V(P(x)) dx.$$

Hvis $f = 1_E$ for en Borel mængde $E \subseteq F$ finder vi

$$\sigma(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} m_V(P(x)) dx,$$

og fladens totale k-dimensionale volumen er

$$\sigma(F) = \int_X m_V(P(x)) dx.$$

Ved hjælp af transformationssætningen (5.26) og regning med determinanter kan man se, at ovenstående formler er invariante overfor et parameter skift $x = \psi(y)$, men beviset forbigås.

Opgaver til §5

I de følgende opgaver 5.1–5.5 betegner $\mathbb{I}_k$ systemet af standard intervaller i $\mathbb{R}^k$ og $v_k : \mathbb{I}_k \to [0,\infty[$ betegner det k-dimensionale volumen.

Formålet med opgaverne, er at vise *eksistensen* af Lebesgue målet $m_k : \mathbb{B}_k \to [0,\infty]$, og beviserne skal derfor føres uden brug af dette.

5.1. Lad $I_1,\dots,I_n$ være endeligt mange standard intervaller i $\mathbb{R}^k$. Vis, at der findes endeligt mange parvis disjunkte standard intervaller $J_1,\dots,J_p$ således, at hver af mængderne $I_i \cap I_j$ og $I_i \setminus I_j$, $i,j = 1,\dots,n$, hvis de er ikke tomme, er foreningsmængde af visse af intervallerne $J_1,\dots,J_p$ ("byggeklodserne for $I_1,\dots,I_n$").

5.2. Vis, at afbildningen $v_k : \mathbb{I}_k \to [0,\infty[$ er

1° *additiv*, dvs.

$$v_k(I) = v_k(I_1) + \cdots + v_k(I_n) \ \text{ når } \ I = I_1 \cup \cdots \cup I_n \ \text{ og } \ I_1,\dots,I_n$$

er parvis disjunkte.

2° *subadditiv*, dvs.

$$v_k(I) \le v_k(I_1) + \cdots + v_k(I_n) \ \text{ når } \ I \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n\,.$$

3° *numerabelt subadditiv*, dvs.

$$v_k(I) \le \sum_{n=1}^{\infty} v_k(I_n) \ \text{ når } \ I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\,.$$

(*Vink*: Til 1° og 2° benyttes 5.1. 3° "reduceres" til 2° ved hjælp af Borels overdækningssætning, anvendt på kompakte delintervaller af I).

5.3. (*Carathéodorys sætning*). Lad $\alpha : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ være defineret på mængden af alle delmængder af X, og antag $\alpha(\varnothing) = 0$. Lad $\mathbb{M}$ betegne systemet af mængder $E \subseteq X$, hvor

$$\forall A \subseteq X : \alpha(A) = \alpha(A \cap E) + \alpha(A \cap \complement E)\,.$$

Vis, at $\mathbb{M}$ er en *mængdealgebra*, dvs.

(i) $X \in \mathbb{M}$
(ii) $\complement E \in \mathbb{M}$ når $E \in \mathbb{M}$
(iii) $E \cup F \in \mathbb{M}$ når $E, F \in \mathbb{M}$.

Vis videre, at $\alpha(E \cup F) = \alpha(E) + \alpha(F)$, når $E, F \in \mathbb{M}$ er disjunkte.

Vis, at hvis $E_1, \dots, E_n \in \mathbb{M}$ er parvis disjunkte, så gælder der for alle $A \subseteq X$, at

$$\alpha\left(\bigcup_{j=1}^{n} A \cap E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha(A \cap E_j)\,.$$

Antag, at der yderligere gælder

$$\alpha(A) \le \alpha(B) \quad \text{når} \quad A \subseteq B\,,$$
$$\alpha\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{1}^{\infty} \alpha(A_n)\,.$$

Vis, at hvis $E_1, E_2, \dots \in \mathbb{M}$ er parvis disjunkte, så gælder der for alle $A \subseteq X$, at

$$\alpha\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A \cap E_j)\,,$$

og slut, at $\bigcup_1^\infty E_j \in \mathbb{M}$.

Vis derved, at $\mathbb{M}$ er en σ-algebra, og at α's restriktion til $\mathbb{M}$ er et mål.

Vis, at $(X, \mathbb{M}, \alpha)$ er et fuldstændigt målrum (§5.8).

5.4. Lad $\kappa : \mathbb{I}_k \cup \{\varnothing\} \to [0, \infty]$ opfylde

1° $\kappa(\varnothing) = 0$
2° κ er additiv (jf. opg. 5.2)
3° κ er numerabelt subadditiv (jf. opg. 5.2).

Vis, at afbildningen $\alpha : \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) \to [0, \infty]$ defineret ved

$$\alpha(A) = \inf\left\{\sum_{1}^{\infty} \kappa(I_n) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_{1}^{\infty} I_n\,,\ I_n \in \mathbb{I}_k \cup \{\varnothing\}\,,\ n = 1, 2, \dots\right\}$$

opfylder

(i) $\alpha(I) = \kappa(I)$ når $I \in \mathbb{I}_k \cup \{\varnothing\}$
(ii) $\alpha(A) \le \alpha(B)$ når $A \subseteq B$
(iii) $\alpha\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) \le \sum_1^\infty \alpha(A_n)$
(iv) $\alpha(A) = \alpha(A \cap I) + \alpha(A \cap \complement I)$ for $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $I \in \mathbb{I}_k \cup \{\varnothing\}$.

(*Vink* til (iv): Nok at vise

$$\alpha(A \cap I) + \alpha(A \cap \complement I) \le \sum_{1}^{\infty} \kappa(I_n)$$

når $I_n \in \mathbb{I}_k$, $n = 1, 2, \ldots$ og $\bigcup_1^\infty I_n \supseteq A$.

Dette gøres ved at bemærke, at

$$A \cap I \subseteq \bigcup_1^\infty I_n \cap I$$

$$A \setminus I \subseteq \bigcup_1^\infty I_n \setminus I\,.$$

Brug dernæst "byggeklodserne" $J_{n1}, \ldots, J_{np_n}$ for parret I_n, I for hvert n, jf. opg. 5.1).

5.5. Vis følgende hovedresultat, ved at kombinere opg. 5.3 og 5.4.

Lad $\kappa : \mathbb{I}_k \to [0, \infty]$ være givet. Vis, at κ kan udvides til et mål $\mu : \mathbb{B}_k \to [0, \infty]$, hvis og kun hvis κ er additiv og numerabelt subadditiv.

(*Vink* til "hvis-delen": Lad α være som i opg. 5.4, og $\mathbb{M}$ som i opg. 5.3, idet κ først udvides til $\mathbb{I}_k \cup \{\varnothing\}$ ved $\kappa(\varnothing) = 0$. Bemærk, at $\mathbb{B}_k \subseteq \mathbb{M}$.)

5.6. Lad $(X, \mathbb{E})$ være et målbart rum, og lad μ og ν være to mål på $\mathbb{E}$, så $\mu(X) = \nu(X) < \infty$. Vis, at mængdesystemet

$$\mathbb{D} = \{E \in \mathbb{E} \mid \mu(E) = \nu(E)\}\,,$$

er en σ-klasse.

5.7. Lad $L = \{2, 4, 6, \ldots\}$ være mængden af lige tal og $P = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ mængden af primtal. Bestem den mindste σ-klasse i $\mathbb{N}$, der indeholder L og P, og vis, at den har 6 elementer. Bestem den mindste σ-algebra, der indeholder L og P, og vis, at den har 16 elementer.

Lokalt integrable funktioner

5.8. Lad I være et åbent interval, $I =]a, b[$ med $-\infty \le a < b \le \infty$, og lad $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(I)$. Man siger, at f er *integrabel i b*, såfremt

$$\int_{x_0}^{b} |f(t)|dt < \infty \text{ for et } x_0 \in\,]a, b[\;.$$

Vis, at denne betingelse er uafhængig af $x_0 \in\,]a, b[$. Integrabilitet i a defineres tilsvarende.

Vis, at der om $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(I)$ gælder

$$f \in \mathcal{L}(I) \Leftrightarrow f \text{ integrabel i } a \text{ og } b\,.$$

5.9. (Fortsættelse af 5.8). Lad $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(I)$, hvor I er som før. Vis, at f er integrabel i b, hvis og kun hvis

$$\lim_{x \to b^-} \int_{x_0}^{x} |f(t)| dt < \infty\,,$$

hvor $x_0 \in \,]a, b[$ er vilkårlig, og at der i bekræftende fald gælder

$$\int_{x_0}^{b} f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_{x_0}^{x} f(t)dt\,.$$

5.10.

1° Vis, at $\log :]0, \infty[\, \to \mathbb{R}$ er integrabel i 0, men ikke i ∞.

2° Vis, at $f :]0, 1[\, \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\log \frac{1}{x}}$$

er integrabel i 0, men ikke i 1.

3° Vis, at $f :]1, \infty[\, \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\log x}\,,$$

hverken er integrabel i 1 eller ∞.

5.11. Bestem de $\alpha \in \mathbb{R}$ for hvilken $(\sin x)^{-\alpha}$ er integrabel over $]0, \pi[$.

5.12. Bestem de $\alpha \in \mathbb{R}$ for hvilke $(\tan x)^{-\alpha}$, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ er

1° integrabel i 0.

2° integrabel i $\frac{\pi}{2}$.

3° integrabel over $]0, \frac{\pi}{2}[$.

5.13. Lad $f : G \to \mathbb{C}$ være en Borel funktion i en *åben* mængde $G \subseteq \mathbb{R}^k$. Vis, at $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(G)$, hvis og kun hvis, der til hvert $x \in G$ findes $r > 0$, så $K(x, r) \subseteq G$ og

$$\int_{K(x,r)} |f| dm_k < \infty\,.$$

5.14.

1° Vis, at funktionen $x \mapsto \sin x/x$ ikke er integrabel i ∞.
(*Vink.*

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin x \; dx \, .)$$

2° Vis, at $x \mapsto x^{-1}\sin(x^{-2})$, $x \in \,]0,\infty[$, er integrabel i ∞, men ikke i 0.

5.15. Sæt

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(x^{-2}) & \text{for} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \, . \end{cases}$$

Vis, at f er differentiabel, men at f' ikke er lokalt integrabel.
(*Vink:* Benyt opg. 5.14.)

Radon mål i $\mathbb{R}^k$

5.16. Lad (X,d) være et metrisk rum, og lad $\mu : \mathbb{B}(X) \to [0,\infty[$ være et endeligt Borel mål, i.e. $\mu(X) < \infty$.

1° Vis, at enhver afsluttet mængde i X er fællesmængde for en dalende følge af åbne mængder, og at enhver åben mængde er foreningsmængde af en stigende følge af afsluttede mængder.

2° Vis, at der for alle Borel mængder $B \in \mathbb{B}(X)$ gælder

$$\sup\{\mu(F) | F \in \mathcal{F}, F \subseteq B\} = \mu(B) = \inf\{\mu(G) | G \in \mathcal{G}, G \supseteq B\} \, ,$$

idet $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) er systemet af afsluttede (resp. åbne) mængder i X.
(*Vink:* Lad $\mathbb{D}$ betegne systemet af Borel mængder med ovenstående egenskab. Vis, at $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathbb{D}$, og at $\mathbb{D}$ er en σ-klasse. Konkludér, at $\mathbb{D} = \mathbb{B}(X)$.)

5.17. Lad $\mu : \mathbb{B}_k \to [0,\infty]$ være et Radon mål i $\mathbb{R}^k$.

1° Vis

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall B \in \mathbb{B}_k \; \exists G \in \mathcal{G} : B \subseteq G \wedge \mu(G \setminus B) < \varepsilon \, ,$$

og slut heraf, at

$$\mu(B) = \inf\{\mu(G) | G \in \mathcal{G}, G \supseteq B\} \quad \text{for alle} \quad B \in \mathbb{B}_k \, .$$

(*Vink:* Antag først, at B er begrænset, og prøv at udnytte opg. 5.16.)

2° Vis

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall B \in \mathbb{B}_k \; \exists F \in \mathcal{F} : F \subseteq B \wedge \mu(B \setminus F) < \varepsilon \,,$$

og slut heraf, at

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F) | F \in \mathcal{F}, F \subseteq B\} \text{ for alle } B \in \mathbb{B}_k \,.$$

3° Vis, at der for alle $B \in \mathbb{B}_k$ gælder

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) | K \text{ kompakt, } K \subseteq B\} \,.$$

5.18. Vis, at to Radon mål μ og ν i $\mathbb{R}^k$ er ens, blot en af følgende 3 betingelser er opfyldt:

1) $\mu(I) = \nu(I)$ for alle standard intervaller.
2) $\mu(K) = \nu(K)$ for alle kompakte mængder i $\mathbb{R}^k$.
3) $\mu(G) = \nu(G)$ for alle åbne mængder i $\mathbb{R}^k$.

5.19. Lad μ være et Radon mål i $\mathbb{R}^k$. Vis, at mængden

$$A = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \mu(\{x\}) > 0\}$$

er tællelig.

5.20. Lad μ være et Borel mål i $\mathbb{R}^k$, og lad $\mathcal{G}_\mu$ betegne systemet af åbne μ-nulmængder.

1° Vis, at der findes tælleligt mange mængder fra $\mathcal{G}_\mu$, så enhver mængde fra $\mathcal{G}_\mu$ er forening af visse af disse. (Vink. Prøv med åbne intervaller med rationale endepunkter).

2° Vis, at

$$\bigcup_{G \in \mathcal{G}_\mu} G$$

er en åben μ-nulmængde, og altså den største sådanne.

3° Vis, at mængden $F = \mathbb{R}^k \setminus \bigcup_{G \in \mathcal{G}_\mu} G$ er karakteriseret ved at der for $x \in \mathbb{R}^k$ gælder

$$x \in F \Leftrightarrow \forall r > 0 : \mu(K(x, r)) > 0 \,.$$

Mængden F kaldes μ's *støtte*, og betegnes $\mathrm{supp}(\mu)$. Find $\mathrm{supp}(\varepsilon_a)$, $\mathrm{supp}(m_k)$ og vis, at $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(f \cdot m_k)$ når $f : \mathbb{R}^k \to [0, \infty[$ er kontinuert.

5.21. *Tyngdepunkt for Radon mål.* Lad ℓ være en ret linie i $\mathbb{R}^2$ givet ved en ligning

$$ax + by + c = 0 \text{ med } a^2 + b^2 = 1\,,$$

og lad os orientere normalen til ℓ ved vektoren (a, b). For hvert $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ er $ax + by + c$ da som bekendt den med fortegn regnede afstand til (x, y) fra linien ℓ. Hvis $(x, y) \mapsto ax + by + c$ er integrabel over $\mathbb{R}^2$ med hensyn til et Radon mål μ i $\mathbb{R}^2$, siges dette at have et *moment* med hensyn til ℓ, nemlig (med den valgte orientering af normalen til ℓ):

$$\int_{\mathbb{R}^2} (ax + by + c)d\mu(x, y)\,.$$

Lad nu μ være et Radon mål i $\mathbb{R}^2$ med $0 < \mu(\mathbb{R}^2) = M < \infty$ og antag, at μ har momenter med hensyn til 2 hinanden skærende rette linier ℓ_1 og ℓ_2 i $\mathbb{R}^2$.

1° Bevis, at μ har et moment med hensyn til enhver ret linie i $\mathbb{R}^2$.

2° Bevis, at der findes et og kun et Radon mål ν, der er koncentreret i ét punkt (x_0, y_0), dvs. hvor $\nu(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\} = 0$, og som har samme moment som μ om enhver ret linie ℓ i $\mathbb{R}^2$.

(Punktet (x_0, y_0) kaldes *tyngdepunktet* for μ.)

5.22. Angiv et mål $\mu : \mathbb{B}_k \to [0, \infty]$ som ikke er af formen cm_k, $c \geq 0$, men dog er invariant ved enhver euklidisk isometri af $\mathbb{R}^k$.

5.23. Vis, at

$$\int_{K(0,R)} (x + iy)^n d(x, y) = 0\,,$$

når $K(0, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < R^2\}$ og $n \in \mathbb{N}$.

(*Vink:* Gør rede for, at

$$\int_{K(0,R)} (x + iy)^n d(x, y) = \int_{K(0,R)} c^n (x + iy)^n d(x, y)\,,$$

når $c \in \mathbb{C}$ og $|c| = 1$.)

5.24. Reelle tal r, θ, σ kaldes *sfærisk polære koordinater* for punktet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, hvor

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\sigma \\ y &= r \sin\theta \sin\sigma \\ z &= r \cos\theta\,. \end{aligned}$$

1° Illustrer formlerne i et retvinklet koordinatsystem.

2° Beregn Jacobi determinanten for afbildningen $S : (r, \theta, \sigma) \mapsto (x, y, z)$. Gør rede for, at restriktionen af S til det åbne interval

$$I = \{(r, \theta, \sigma) \mid 0 < r, 0 < \theta < \pi, 0 < \sigma < 2\pi\}$$

er en bijektiv afbildning af dette på $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y = 0\}$.

3° Hvorledes udtrykkes et integral $\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) d(x, y, z)$ i sfæriske polære koordinater?

5.25. Lad $E \subseteq]0, 1]$ være en Borel mængde med $m(E) > 0$. Til ækvivalensrelationen givet ved

$$x \sim y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$$

svarer en klasseinddeling af E. Lad A være en mængde bestående af én repræsentant fra hver klasse. (For eksistens af en sådan mængde påberåbes udvalgsaksiomet.)

1° Vis, at $E \subseteq \cup_{q \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[} (A + q) \subseteq] - 1, 2[$.

2° Vis, at A ikke er Lebesgue målelig.
(Resultatet anvendes i opg. 5.29.)

5.26. *En åben mængde i $\mathbb{R}$, hvis rand har positivt Lebesgue mål.*
Antag $0 < \varepsilon < 2$ og lad F fremgå af $[0, 1]$ på følgende måde: Midt i $[0, 1]$ fjernes det åbne interval af længde $\varepsilon/4$, midt i hvert af de to tiloversblevne intervaller fjernes det åbne interval af længde $\varepsilon/4^2$, osv.

1° Vis, at $G = [0, 1] \setminus F$ er åben og har F som rand.

2° Bestem $m(G)$ og $m(F)$.

5.27. Angiv en sammenhængende, åben mængde (dvs. et område) i $\mathbb{R}^2$, hvis rand har positivt Lebesgue mål.
(*Vink:* Søg inspiration i opg. 5.26.)

Cantor–Lebesgues funktion

5.28.

1° Lad $f : Z \to [0, 1]$ være den i Eksempel 5.22 definerede afbildning

$$f({}^{3}0, a_1 a_2 \cdots) = {}^{2}0, b_1 b_2 \cdots , \quad b_n = a_n/2.$$

Vis, at f er surjektiv.
Vis, at når

$$y = {}^{2}0, b_1 b_2 \cdots b_n 1000 \cdots , \quad b_j \in \{0, 1\}$$

er en endelig dualbrøk, så består $f^{-1}(\{y\})$ af tallene

$$^{3}0, a_1 a_2 \cdots a_n 0222 \cdots \quad \text{og} \quad ^{3}0, a_1 a_2 \cdots a_n 2000 \cdots ,$$

hvor $a_j = 2b_j$, men at $f^{-1}(\{y\})$ består af netop et tal i alle andre tilfælde.

Konstruer en bijektiv afbildning af Z på $]0, 1[$ og vis derved, at Z er ækvipotent med $\mathbb{R}$.

2° Gør rede for, at $f : Z \to [0, 1]$ på en og kun en måde kan udvides til en voksende funktion $\tilde{f} : [0, 1] \to [0, 1]$. (Denne kaldes *Cantor–Lebesgues funktion* og betegnes bare f i det følgende.)

3° Gør rede for, at Cantor–Lebesgues funktion f er kontinuert i hele intervallet $[0, 1]$, og at f er differentiabel med $Df(x) = 0$ i hvert $x \in [0, 1] \setminus Z$, men ikke differentiabel i noget $x \in Z$. (Cantor–Lebesgues funktion benyttes i opg. 5.29-5.32.)

5.29. *En Lebesgue målelig mængde, som ikke er en Borel mængde.*
Lad $f : [0, 1] \to [0, 1]$ være Cantor–Lebesgues funktion (opg. 5.28), og sæt

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}f(x), \quad x \in [0, 1].$$

1° Gør rede for, at g er en homeomorf afbildning af intervallet $[0, 1]$ på sig selv.

2° Vis, at mængden $E = g(Z)$ har Lebesgue målet $m(E) = \frac{1}{2}$ (medens jo $m(Z) = 0$).

3° Ifølge opg. 5.25 har E en delmængde A, som ikke er Lebesgue målelig.
Vis, at $g^{-1}(A)$ er Lebesgue målelig, men ikke en Borel mængde, altså at $g^{-1}(A) \in \mathbb{L}_1 \setminus \mathbb{B}$.

4° Vis, at $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$\varphi(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{for } x \in [0, 1] \\ x & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1], \end{cases}$$

er kontinuert, men ikke $\mathbb{L}_1 - \mathbb{L}_1$-målelig.

5.30. Vis, at sammensætningen $\psi \circ \varphi$ af to Lebesgue målelige funktioner $\psi, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ikke behøver at være Lebesgue målelig.
(*Vink:* Lad φ være funktionen i opg. 5.29.4°.)

5.31. Lad $f : [0, 1] \to [0, 1]$ være Cantor–Lebesgues funktion, og lad $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være udvidelsen defineret ved

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ f(x) & \text{for } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{for } x > 1. \end{cases}$$

Lad $\mu = \mu_\varphi$ være Stieltjes målet bestemt ved den voksende funktion φ.

1° Vis, at μ er koncentreret på Cantors mængde Z, dvs. $\mu(\mathbb{R} \setminus Z) = 0$, og at $\mu(Z) = 1$.

2° Vis, at $\mathrm{supp}(\mu) = Z$ (jf. opg. 5.20.)

3° Vis, at $\mu(\{x\}) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

(μ er et eksempel på et såkaldt *kontinuert singulært sandsynlighedsmål*, hvis støtte er en Lebesgue nulmængde, men som ikke har masse i nogen punkter).

5.32. Lad $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være voksende samt næsten overalt differentiabel.

1° Vis, at Df er Lebesgue integrabel i $[a, b]$, samt at

$$\int_a^b Df(x)dx \leq f(b) - f(a)\,.$$

(*Vink:* Sæt $f(x) = f(b)$ for $x > b$, og betragt funktionsfølgen $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, givet ved

$$g_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))\,.)$$

2° Vis, at

$$\int_a^b Df(x)dx < f(b) - f(a)$$

kan forekomme, endda med f kontinuert i $[a, b]$.

(*Vink:* Prøv Cantor–Lebesgues funktion, opg. 5.28.)

5.33. Bevis, at

$$\int_a^b Df(x)dx = f(b) - (a)\,,$$

når $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er differentiabel med en begrænset afledet Df.

(*Vink:* Sæt $f(x) = f(b) + (x-b)Df(b)$ for $x > b$ og betragt funktionsfølgen $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, givet ved

$$g_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))\,.)$$

5.34. Lad $\mathcal{K}^*(\mathbb{R})$ betegne mængden af ikke tomme kompakte delmængder af $\mathbb{R}$ forsynet med Hausdorff metrikken , og betragt afbildningen $F : \mathcal{K}^*(\mathbb{R}) \to \mathcal{K}^*(\mathbb{R})$ givet ved $F(K) = f_1(K) \cup f_2(K)$ for $K \in \mathcal{K}^*(\mathbb{R})$, hvor $f_1(x) = (1/3)x$ og $f_2(x) = (1/3)x + (2/3)$ for $x \in \mathbb{R}$. (Jf. opg. I.8.6.)

Vis, at Cantors mængde Z er fixpunkt for F.

5.35. Vis, at formlen for fladeintegralet er invariant overfor et C^1-parameter skift $x = \psi(y)$.

5.42

§6. Produktmål

I denne paragraf vil vi til to målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $(Y, \mathbb{F}, \nu)$ knytte et nyt målrum $(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}, \mu \otimes \nu)$ kaldet *produktet* af de givne. Ideen bag konstruktionen er, at

$$\mu \otimes \nu\ (A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{for} \quad A \in \mathbb{E},\ B \in \mathbb{F}, \tag{$*$}$$

og når paragraffen er slut, bør læseren have indset, at konstruktionen er den eneste mulige, når $(*)$ ønskes opfyldt.

En advarsel: Man kan ikke danne produktet af vilkårlige målrum. Man må indskrænke sig til σ-endelige målrum, som defineres i 6.2.

Det viser sig, at produktet af $(\mathbb{R}^p, \mathbb{B}_p, m_p)$ med $(\mathbb{R}^q, \mathbb{B}_q, m_q)$ er $(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{B}_{p+q}, m_{p+q})$.

De to italienske matematikere Guido Fubini (1879–1943) og Leonida Tonelli (1885–1946) har deres navne knyttet til sætninger, der udtaler sig om, hvordan integralet af en funktion f på $X \times Y$ med hensyn til produktmålet $\mu \otimes \nu$ kan udregnes ved successivt at integrere med hensyn til μ og ν.

6.1. Målelighed i cartesisk produkt

Lad $(X, \mathbb{E})$ og $(Y, \mathbb{F})$ være to målbare rum. Vi tænker os det cartesiske produkt $X \times Y$ forsynet med en σ-algebra $\mathbb{G}$ så projektionsafbildningerne

$$\pi_1 : X \times Y \to X \quad \text{og} \quad \pi_2 : X \times Y \to Y$$

er målelige. Idet

$$\pi_1^{-1}(A) = A \times Y,\ \ \pi_2^{-1}(B) = X \times B,\ \ \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) = A \times B$$

for $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, ser man, at $\mathbb{G}$ indeholder alle rektangler $A \times B$, hvor $A \in \mathbb{E}$, $B \in \mathbb{F}$. Dette leder til følgende:

Definition 6.1. Ved *produkt σ-algebraen* i $X \times Y$ forstås den mindste σ-algebra i $X \times Y$, der indeholder alle rektangler $A \times B$, hvor $A \in \mathbb{E}$, $B \in \mathbb{F}$. Idet produkt σ-algebraen betegnes $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ har vi altså

$$\mathbb{E} \otimes \mathbb{F} = \sigma(\{A \times B \mid A \in \mathbb{E}, B \in \mathbb{F}\}).$$

Idet $X \times Y$ udstyres som målbart rum med σ-algebraen $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$, ser man, at projektionerne π_1 og π_2 er målelige, og $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ er åbenbart den mindste σ-algebra på $X \times Y$ med denne egenskab. I almindelighed vil der være mængder i $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$, som *ikke* er rektangler.

Er g og h funktioner defineret på henholdsvis X og Y, og med værdier i samme talområde $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$, betegnes funktionen

$$(x,y) \mapsto g(x)h(y), \quad (x,y) \in X \times Y$$

med $g \otimes h$; den kaldes undertiden *tensorproduktet* af g og h. Bemærk, at for $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ gælder $1_A \otimes 1_B = 1_{A \times B}$.

LEMMA 6.2. *Er g en $\mathbb{E}$-målelig funktion på X og h en $\mathbb{F}$-målelig funktion på Y, begge med værdier i samme talområde $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$, da er $g \otimes h$ en $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$-målelig funktion på $X \times Y$.*

Bevis. For funktionerne

$$(x,y) \mapsto g(x) \quad \text{og} \quad (x,y) \mapsto h(y), \quad (x,y) \in X \times Y\,,$$

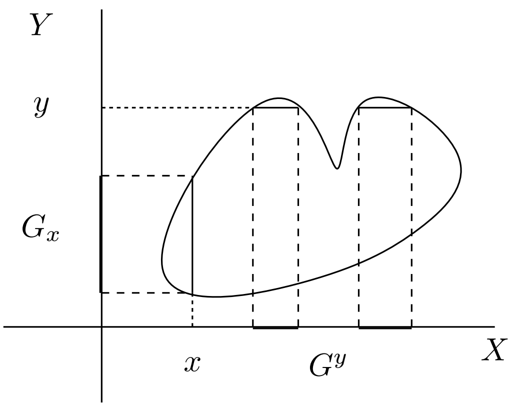
har vi betegnelserne $g \otimes 1_Y$ henholdsvis $1_X \otimes h$, og der gælder

$$g \otimes h = (g \otimes 1_Y) \cdot (1_X \otimes h)\,.$$

Da produktet af målelige funktioner igen er en målelig funktion, er det tilstrækkeligt at vise, at $g \otimes 1_Y$ og $1_X \otimes h$ er målelige, men det ses for den første funktions vedkommende således:

$$(g \otimes 1_Y)^{-1}(D) = \{(x,y) \mid g(x) \in D\} = g^{-1}(D) \times Y \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}\,,$$

idet $g^{-1}(D) \in \mathbb{E}$, når D tilhører Borel algebraen for talområdet. □



For $G \subseteq X \times Y$ og $x \in X$ sættes

$$G_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in G\};$$

mængden kaldes et *snit* i G. Er f en funktion defineret på $X \times Y$ og $x \in X$, betegner f_x eller $f(x,\cdot)$ *snitfunktionen*

$$y \mapsto f(x,y), \;\; y \in Y$$

Hvis vi indfører *indlejringen* $j_x : Y \to X \times Y$ ved

$$j_x(y) = (x,y), \quad y \in Y$$

er $G_x = j_x^{-1}(G)$ og $f(x,\cdot) = f \circ j_x$.

Tilsvarende taler vi om snit $\{x \in X \mid (x,y) \in G\}$, og snitfunktion $x \mapsto f(x,y)$, $x \in X$ bestemt ved et $y \in Y$. Her benytter vi betegnelserne G^y og $f(\cdot,y)$ eller f^y.

Indlejringen $j_x : Y \to X \times Y$ *er målelig* idet

$$j_x^{-1}(A \times B) = \begin{cases} B\,, & \text{hvis } x \in A\,, \\ \varnothing & \text{hvis } x \notin A\,, \end{cases}$$

og mængdesystemet $\{A \times B \mid A \in \mathbb{E}, B \in \mathbb{F}\}$ frembringer $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$.

Vi har dermed vist:

Sætning 6.3. *Lad* $x \in X$ *og* $y \in Y$.

For enhver mængde $G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ *vil* $G_x \in \mathbb{F}$ *og* $G^y \in \mathbb{E}$.

For enhver $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$*-målelig funktion* f *på* $X \times Y$ *vil snitfunktionen* $f(x,\cdot)$ *være* $\mathbb{F}$*-målelig, og snitfunktionen* $f(\cdot,y)$ *være* $\mathbb{E}$*-målelig.*

Hovedeksempel.

Det cartesiske produkt $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ vil vi identificere med $\mathbb{R}^k$, hvor $k = p + q$, idet vi for $x = (x_1,\ldots,x_p)$ og $(y_1,\ldots,y_q)$ tolker (x,y) som $(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)$. Dermed kan produkt σ-algebraen $\mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q$ opfattes som en σ-algebra i $\mathbb{R}^k$.

Sætning 6.4. *Med* $k = p + q$ *er* $\mathbb{B}_k = \mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q$.

Bevis. Idet projektionerne $\pi_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ og $\pi_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^q$ er kontinuerte, og dermed Borel målelige, har vi $\mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q \subseteq \mathbb{B}_k$. Produkt σ-algebraen er nemlig den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, så π_1 og π_2 er målelige.

Et standard interval I i $\mathbb{R}^k$ kan skrives $I = I_1 \times I_2$, hvor I_1 er et standard interval i $\mathbb{R}^p$, og I_2 er et standard interval i $\mathbb{R}^q$. Dermed har vi $I \in \mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q$, men da $\mathbb{B}_k$ er den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}^k$, der indeholder standard intervallerne, må $\mathbb{B}_k \subseteq \mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q$. □

Som konsekvens af inklusionen $\mathbb{B}_k \subseteq \mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q$ og Sætning 6.3 noteres, at *ethvert snit i en Borel mængde* (*Borel funktion*) *i* $\mathbb{R}^k$ *igen er en Borel mængde* (*Borel funktion*).

Som konsekvens af inklusionen $\mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q \subseteq \mathbb{B}_k$ noteres, at $A \times B$ *er en Borel mængde i* $\mathbb{R}^k$, *når* A *og* B *er Borel mængder i henholdsvis* $\mathbb{R}^p$ *og* $\mathbb{R}^q$, samt at $g \otimes h$ *er en Borel funktion på* $\mathbb{R}^k$, *når* g *og* h *er Borel funktioner på henholdsvis* $\mathbb{R}^p$ og $\mathbb{R}^q$ med værdier i samme talområde $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$.

6.2. Produktmål

DEFINITION 6.5. Et målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ kaldes *σ-endeligt*, hvis X kan skrives som forening $X = \bigcup_1^\infty A_n$ af en følge af mængder $A_n \in \mathbb{E}$ med $\mu(A_n) < \infty$.

Man overbeviser sig let om, at mængderne A_n fra definitionen kan vælges enten som en stigende følge, eller parvis disjunkte.

Et endeligt mål er σ-endeligt, og ethvert Radon mål i $\mathbb{R}^k$ er σ-endeligt, da $\mathbb{R}^k$ er foreningsmængde af numerabelt mange kompakte mængder.

Definition af produkt σ-algebraen $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ kræver ingen indskrænkende forudsætninger om målrummene $(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $(Y, \mathbb{F}, \nu)$, men indførelsen af produktmålet $\mu \otimes \nu$ kræver σ-endelighed.

SÆTNING 6.6. (HOVEDSÆTNING OM PRODUKTMÅL). *Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $(Y, \mathbb{F}, \nu)$ være to σ-endelige målrum.*

Der findes et og kun et mål π på produkt σ-algebraen $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ med egenskaben

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \textit{for} \quad A \in \mathbb{E}, B \in \mathbb{F}. \tag{1}$$

Det ved (1) *entydigt bestemte mål kaldes produktmålet af μ og ν og betegnes $\mu \otimes \nu$. Målrummet $(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}, \mu \otimes \nu)$ er σ-endeligt, og kaldes produktet af de givne målrum.*

Bevis. At der er *højst* et mål som ønsket, følger af entydighedssætningen for mål (Hovedsætning 5.4):

Systemet

$$\mathbb{K} = \{A \times B \mid A \in \mathbb{E}, B \in \mathbb{F}\} \tag{2}$$

er et fællesmængde stabilt frembringersystem for $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$, idet

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Ifølge forudsætningen om σ-endelighed findes mængder $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \in \mathbb{E}$ med $\mu(A_n) < \infty$, og mængder $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \in \mathbb{F}$ med $\nu(B_n) < \infty$, således at $X = \bigcup_1^\infty A_n$, $Y = \bigcup_1^\infty B_n$. Sættes $K_n = A_n \times B_n$, $n = 1, 2, \ldots$ gælder $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \in \mathbb{K}$ og $\bigcup_1^\infty K_n = X \times Y$. Tænker vi os mål π og ρ på $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ opfyldende (1), har vi

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \rho(A \times B) \qquad \text{for} \quad A \in \mathbb{E}, B \in \mathbb{F},$$

specielt $\pi(K_n) = \mu(A_n)\nu(B_n) < \infty$, og entydighedsætningen giver $\pi = \rho$. Desuden ses, at $(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}, \pi)$ er σ-endeligt.

Eksistensen af et mål som ønsket, viser vi ved eksplicit at angive et, nemlig funktionen $\pi : \mathbb{E} \otimes \mathbb{F} \to [0, \infty]$ bestemt ved

$$\pi(G) = \int_X \nu(G_x) d\mu(x), \tag{3}$$

jf. tegningen p.6.2. Formlen er nærliggende for den, der har beregnet arealer "ved deling i strimler" og voluminer "ved deling i skiver". Vanskeligheden består i at godtgøre, at funktionen $x \mapsto \nu(G_x)$ er $\mathbb{E}$-målelig, så integralet har mening. Det sikres af

LEMMA 6.7. *For hvert $G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ er $\varphi_G : X \to [0, \infty]$ defineret ved $\varphi_G(x) = \nu(G_x)$ en $\mathbb{E}$-målelig funktion.*

Bevis. Ifølge Sætning 6.3 er $G_x \in \mathbb{F}$, og dermed har definitionen af φ_G mening.

Vi fremhæver dernæst følgende egenskaber ved φ_G:

a) For $G = A \times B$ med $A \in \mathbb{E},\ B \in \mathbb{F}$ gælder $\varphi_G = \nu(B)1_A$.

Thi

$$G_x = \begin{cases} B & \text{når } x \in A \\ \varnothing & \text{når } x \in X \setminus A\,, \end{cases} \quad \text{altså} \quad \varphi_G(x) = \begin{cases} \nu(B) & \text{når } x \in A \\ \nu(\varnothing) = 0 & \text{når } x \in X \setminus A\,. \end{cases}$$

b) Hvis $G_1, G_2, \dots \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ er parvis disjunkte og $G = \bigcup_1^\infty G_n$, da er

$$\varphi_G = \sum_1^\infty \varphi_{G_n}\,.$$

Thi for hvert $x \in X$ er $G_x = \bigcup_1^\infty (G_n)_x$, hvor $(G_1)_x, (G_2)_x, \dots \in \mathbb{F}$ er parvis disjunkte, og dermed er

$$\varphi_G(x) = \nu(G_x) = \sum_1^\infty \nu((G_n)_x) = \sum_1^\infty \varphi_{G_n}(x)\,.$$

1° Vi viser først lemmaet under forudsætningen $\nu(Y) < \infty$.

På grund af a) vil mængdesystemet

$$\mathbb{D} = \{G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F} \mid \varphi_G \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})\}\,,$$

indeholde $\mathbb{K}$ givet ved (2).

Vi indser dernæst, at $\mathbb{D}$ er en σ-klasse.

Betingelsen $X \times Y \in \mathbb{D}$ følger af at $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{D}$.

Hvis $G_1, G_2, \dots \in \mathbb{D}$ er parvis disjunkte, da er $G = \bigcup_1^\infty G_n \in \mathbb{D}$.

Thi når $\varphi_{G_n} \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$, $n = 1, 2, \dots$ følger af sætninger om regning og grænseovergang med målelige funktioner, at $\sum_1^\infty \varphi_{G_n} \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$, men denne funktion er netop φ_G ifølge b).

Hvis $G \in \mathbb{D}$, da er også $\complement G \in \mathbb{D}$.

Thi da

$$\varphi_{X\times Y} = \varphi_G + \varphi_{\complement G} \quad \text{og} \quad \varphi_{X\times Y}(x) = \nu(Y) < \infty\,,$$

kan vi slutte, at φ_G har endelige værdier, og dermed er $\varphi_{\complement G} = \nu(Y) - \varphi_G \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$.

Vi har nu vist, at $\mathbb{D}$ er en σ-klasse.

Da $\mathbb{K}$ er et fællesmængde stabilt frembringersystem for $\mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$, kan vi af Fundamentallemma 5.3 slutte, at $\mathbb{D}(\mathbb{K}) = \sigma(\mathbb{K}) = \mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$, men da $\mathbb{D}$ er en σ-klasse indeholdende $\mathbb{K}$, må $\mathbb{D}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{D}$, altså $\mathbb{D} = \mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$, og lemmaet er bevist.

2° Vi skal nu vise, hvordan det generelle tilfælde kan udledes af 1°.

Da $(Y, \mathbb{F}, \nu)$ er σ-endeligt, findes mængder $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \in \mathbb{F}$ med $\nu(B_n) < \infty$, $Y = \bigcup_1^\infty B_n$.

For fast n betragtes målet $\nu_n : \mathbb{F} \to [0, \infty[$ defineret ved $\nu_n(B) = \nu(B \cap B_n)$. Da $\nu_n(Y) = \nu(B_n) < \infty$, kan vi af første del af beviset slutte, at

$$x \mapsto \varphi_G^{(n)}(x) = \nu_n(G_x) \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})\,.$$

Af egenskab (5) i §3.1 følger for $x \in X$ at

$$\varphi_G^{(n)}(x) = \nu(G_x \cap B_n) \nearrow \nu(G_x) = \varphi_G(x)\,,$$

og dermed sluttes, at grænsefunktionen $\varphi_G \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$. □

Det er nu godtgjort, at (3) har mening, og vi mangler at eftervise, at $\pi : \mathbb{E}\otimes\mathbb{F} \to [0, \infty]$ er et mål opfyldende (1).

Når $G_1, G_2, \cdots \in \mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$ er parvis disjunkte, og $G = \bigcup_1^\infty G_n$, da er $\varphi_G = \sum_1^\infty \varphi_{G_n}$ ifølge b), og dermed (Sætning 4.6)

$$\pi(G) = \int \varphi_G d\mu = \sum_1^\infty \int \varphi_{G_n} d\mu = \sum_1^\infty \pi(G_n)\,.$$

For $G = A \times B$ med $A \in \mathbb{E}$, $B \in \mathbb{F}$ finder vi ifølge a), at

$$\pi(A \times B) = \int \nu(B) 1_A d\mu = \nu(B) \int 1_A d\mu = \mu(A)\nu(B)\,.$$

Hvis specielt $G = \varnothing = \varnothing \times \varnothing$, har vi $\pi(\varnothing) = 0$. □

Korollar 6.8. *Lad* $(X, \mathbb{E}, \mu)$ *og* $(Y, \mathbb{F}, \nu)$ *være to* σ*-endelige målrum. Da gælder*

$$\mu \otimes \nu(G) = \int_X \nu(G_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(G^y) d\nu(y)$$

for ethvert $G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$.

Bevis. Det første lighedstegn følger af eksistens- og entydighedsbeviset for hovedsætningen. Ganske analogt vil naturligvis $y \mapsto \mu(G^y)$, $y \in Y$, tilhøre $\mathcal{M}^+(Y, \mathbb{F})$ for ethvert $G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$, og funktionen $\rho : \mathbb{E} \otimes \mathbb{F} \to [0, \infty]$ givet ved

$$\rho(G) = \int \mu(G^y) d\nu(y) \,,$$

er et mål på $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ opfyldende (1), altså $\rho = \mu \otimes \nu$ ifølge entydighedsudsagnet. $\square$

Hovedeksempel.

Sætning 6.9. *Idet* $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ *identificeres med* $\mathbb{R}^{p+q}$, *og* m_p, m_q *og* m_{p+q} *betegner Lebesgue målene i henholdsvis* $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$ *og* $\mathbb{R}^{p+q}$, *defineret på Borel algebraerne* $\mathbb{B}_p, \mathbb{B}_q$ *og* $\mathbb{B}_{p+q}$ *er*

$$m_p \otimes m_q = m_{p+q} \,.$$

Bevis. Ifølge Sætning 6.4 er $\mathbb{B}_p \otimes \mathbb{B}_q = \mathbb{B}_{p+q}$. Produktmålet $m_p \otimes m_q$ er altså defineret på Borel algebraen $\mathbb{B}_{p+q}$, og dets værdi $m_p(I) \cdot m_q(J) = v_p(I) \cdot v_q(J)$ for ethvert standard interval $I \times J = I_1 \times \cdots \times I_p \times J_1 \times \cdots \times J_q$ er åbenbart produktet af samtlige kantlængder. Men disse egenskaber karakteriserer Lebesgue målet m_{p+q}. $\square$

Korollar 6.10. *For enhver Borel mængde* B *i* $\mathbb{R}^{p+q}$ *er* $x \mapsto m_q(B_x)$ *en Borel funktion på* $\mathbb{R}^p$ *og*

$$m_{p+q}(B) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(B_x) dx \,.$$

For $p = q = 1$ kan formlen tolkes som arealbestemmelse ved deling i strimler, for $p = 1$, $q = 2$ som volumenbestemmelse ved deling i skiver.

Lad os også notere, at produktmålet $\mu \otimes \nu$ af Radon mål μ og ν i henholdsvis $\mathbb{R}^p$ og $\mathbb{R}^q$ er et Radon mål i $\mathbb{R}^{p+q}$.

6.3. Tonellis og Fubinis sætninger

SÆTNING 6.11. (TONELLIS SÆTNING). *Lad* $(X, \mathbb{E}, \mu)$ *og* $(Y, \mathbb{F}, \nu)$ *være* σ-*endelige målrum. For* $f \in \mathcal{M}^+(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F})$ *gælder*

(i) *funktionen* $x \mapsto \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ *tilhører* $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$.

(ii) $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$.

Bevis. For $f \in \mathcal{M}^+(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F})$ og $x \in X$, vil $f_x \in \mathcal{M}^+(Y, \mathbb{F})$ (Sætning 6.3), og dermed er der ved $g(x) = \int f_x d\nu$ defineret en funktion $g : X \to [0, \infty]$. Påstanden i sætningen er, at $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$, og at $\int f d\mu \otimes \nu = \int g d\mu$.

1°. For en indikatorfunktion $f = 1_G$ på $X \times Y$ med $G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ er de to påstande vist i §6.2, omend i en anden formulering. For ethvert $x \in X$ er nemlig $(1_G)_x = 1_{G_x}$, hvor 1_{G_x} betegner indikatorfunktionen på Y for snitmængden $G_x \subseteq Y$. Lemma 6.7 udsiger, at funktionen

$$x \mapsto \nu(G_x) = \int (1_G)_x \; d\nu$$

tilhører $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$, og ifølge Korollar 6.8 er dens μ-integral er lig med $\mu \otimes \nu(G) = \int 1_G d\mu \otimes \nu$.

2°. De to påstande gælder for enhver simpel funktion $f = \sum_{j=1}^n a_j \; 1_{G_j}$ på $X \times Y$ med $0 < a_j < \infty$, $G_j \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$.

Dette følger af 1°, idet det er let at eftervise, at (i) og (ii) gælder for $f_1 + f_2$ og cf_1, hvor $0 < c < \infty$, hvis de gælder for f_1 og f_2.

3°. En vilkårlig funktion $f \in \mathcal{M}^+(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F})$ kan fås som grænsefunktion for en følge $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ af simple $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$-målelige funktioner $f_n : X \times Y \to [0, \infty[$ (Sætning 4.1). Vi noterer, at

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \lim_{n \to \infty} \int_{X \times Y} f_n d(\mu \otimes \nu)$$

ifølge Lebesgues monotonisætning.

For hvert $x \in X$ har vi $(f_n)_x \nearrow f_x$ og dermed

$$g_n(x) = \int_Y (f_n)_x d\nu \nearrow g(x) = \int_Y f_x d\nu$$

ifølge Lebesgues monotonisætning. Da nu $g_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ og $g_n \nearrow g$, er $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$, samt

$$\int_X g d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X g_n d\mu$$

ifølge Lebesgues monotonisætning. Og da $\int_{X\times Y} f_n d(\mu\otimes\nu) = \int_X g_n d\mu$, $n = 1, 2, \ldots$, sluttes endelig

$$\int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) = \int_X g d\mu\,. \quad \square$$

Tilføjelse til Tonellis sætning. Der gælder naturligvis et analogt resultat med integrationerne i dobbeltintegralet ombyttet (jf. symmetrien i Korollar 6.8). Sammenholdt har vi da for enhver funktion $f \in \mathcal{M}^+(X\times Y, \mathbb{E}\otimes\mathbb{F})$:

$$\int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y)\,.$$

Resultatet rummer en ofte nyttig regel om ombytning af integrationsorden. (Opg. 6.19 viser, at σ-endeligheden er nødvendig.)

Vi tænker os stadig givet σ-endelige målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $(Y, \mathbb{F}, \nu)$.

For en $\mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$-målelig funktion $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ vil snitfunktionen $f_x : Y \to \mathbb{R}$ være $\mathbb{F}$-målelig for hvert $x \in X$, som allerede vist i Sætning 6.3. Videre er

$$A = \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{F}, \nu)\}$$

en $\mathbb{E}$-målelig mængde, og hvis $A \neq \varnothing$ vil funktionen $g : A \to \mathbb{R}$ givet ved

$$g(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x,y)d\nu(y), \quad x \in A\,,$$

være $\mathbb{E}$-målelig.

Begrundelse: Ifølge Tonellis sætning, (i), anvendt på f^+ og f^- vil funktionerne $p : X \to [0,\infty]$ og $n : X \to [0,\infty]$ givet ved

$$p(x) = \int_Y (f^+)_x d\nu \ \text{ og } \ n(x) = \int_Y (f^-)_x d\nu\,, \ \ x \in X\,,$$

tilhøre $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$. Idet $(f^+)_x = (f_x)^+$ og $(f^-)_x = (f_x)^-$, har vi derfor

$$A = \{x \in X \mid p(x) < \infty\} \cap \{x \in X \mid n(x) < \infty\} \in \mathbb{E}\,,$$

samt hvis $A \neq \varnothing$, at $g = p|A - n|A$ er $\mathbb{E}$-målelig.

Ifølge Tonellis sætning, (ii), er endvidere

$$\int_X p d\mu = \int_{X\times Y} f^+ d(\mu\otimes\nu) \quad \text{og} \quad \int_X n d\mu = \int_{X\times Y} f^- d(\mu\otimes\nu)\,.$$

I tilfælde af, at f er integrabel m.h.t. $\mu\otimes\nu$, har vi derfor $\mu(X\setminus A) = 0$, idet $\int_X p d\mu < \infty$ og dermed $\mu(\{x \in X \mid p(x) = \infty\}) = 0$, ligesom $\int_X n d\mu < \infty$ og dermed $\mu(\{x \in X \mid n(x) = \infty\}) = 0$. (Se Korollar 4.5.) Medmindre $A = \varnothing$, vil endvidere $p|A$, $n|A$ og dermed $g = p|A - n|A$ tilhøre $\mathcal{L}(A,\mu)$, og

$$\begin{aligned}\int_A g d\mu &= \int_A p d\mu - \int_A n d\mu = \int_X p d\mu - \int_X n d\mu \\ &= \int_{X\times Y} f^+ d(\mu\otimes\nu) - \int_{X\times Y} f^- d(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu)\,.\end{aligned}$$

Vi noterer:

Sætning 6.12. (Fubinis sætning). *Lad* $(X,\mathbb{E},\mu)$ *og* $(Y,\mathbb{F},\nu)$ *være* σ-*endelige målrum. For* $f \in \mathcal{L}(X\times Y, \mathbb{E}\otimes\mathbb{F}, \mu\otimes\nu)$ *gælder da*

(i) $A = \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{L}(Y,\mathbb{F},\nu)\} \in \mathbb{E}$ *og* $\mu(X\setminus A) = 0$,

(ii) *funktionen* $x \mapsto \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x,y)d\nu(y)$, $x \in A$, *er integrabel m.h.t.* μ,

(iii) $\int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) = \int_A \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x)$.

Sætningen gælder ordret også for funktioner f med komplekse værdier. Det fremgår, idet sætningen for reelle funktioner anvendes på f' og f'', hvor $f = f' + if''$. (De indledende resultater vedrørende en $\mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$-målelig, men ikke nødvendigvis $(\mu\otimes\nu)$-integrabel funktion $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ gælder ligeledes med $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$.)

I (iii) skrives ofte $\int_X$ i stedet for $\int_A$, selv om integranden kun er defineret μ-næsten overalt i X.

Tilføjelse til Fubinis sætning. Der gælder naturligvis et analogt resultat med integrationerne i dobbeltintegralet ombyttet. Sammenholdt har vi da for enhver funktion $f \in \mathcal{L}(X\times Y, \mu\otimes\nu)$:

$$\int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y)\,.$$

Resultatet rummer en ofte benyttet regel om ombytning af integrationsorden.

En $\mathbb{E}\otimes\mathbb{F}$-målelig funktion f defineret på $X\times Y$ tilhører jo $\mathcal{L}(X\times Y,\mu\otimes\nu)$, hvis $\int_{X\times Y} |f| d(\mu\otimes\nu) < \infty$. Til udregning eller vurdering af dette integral benyttes ofte med fordel Tonellis sætning.

EKSEMPEL 6.13. *Er* $g \in \mathcal{L}(X,\mu)$ *og* $h \in \mathcal{L}(Y,\nu)$, *da er* $g \otimes h \in \mathcal{L}(\mu \otimes \nu)$ *og*

$$\int_{X\times Y} g \otimes h \; d(\mu \otimes \nu) = \int_X g d\mu \; \int_Y h d\nu \,.$$

Thi $g \otimes h$ er $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$-målelig ifølge Lemma 6.2 og Tonellis sætning giver

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} |g \otimes h| d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left(\int_Y |g(x)h(y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_X \left(|g(x)| \int_Y |h| d\nu \right) d\mu(x) = \int_Y |h| d\nu \; \int_X |g| d\mu < \infty \,.\end{aligned}$$

Altså er $g \otimes h \in \mathcal{L}(X\times Y, \mu\otimes\nu)$, og regningen kan nu gentages uden numeriske tegn, i kraft af Fubinis sætning.

BEMÆRKNING 6.14. For en funktion f, der er integrabel m.h.t. $\mu \otimes \nu$ over en mængde $G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$, kan Fubinis sætning anvendes på funktionen

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} f(x,y) & \text{for } (x,y) \in G \\ 0 & \text{for } (x,y) \in X \times Y \setminus G \,. \end{cases}$$

Samme idé kan naturligvis benyttes i forbindelse med Tonellis sætning.

HOVEDEKSEMPEL 6.15. *Når* $k = p + q\,,\; p,q \in \mathbb{N}\,,$ *gælder*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k} f(z) dz &= \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y) d(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) dx \right) dy\end{aligned}$$

for enhver Borel funktion f *defineret på* $\mathbb{R}^k$, *der enten har værdier i* $[0,\infty]$ *eller har endelige (reelle eller komplekse) værdier og er Lebesgue integrabel.*

Thi ved identifikationen af $\mathbb{R}^k$ med $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ stemmer Lebesgue målet $m_k : \mathbb{B}_k \mapsto [0,\infty]$ overens med produktmålet $m_p \otimes m_q$. Tonellis og Fubinis sætninger står så til rådighed, idet integralet $\int_{\mathbb{R}^k} f(z)dz = \int_{\mathbb{R}^k} f dm_k$ opfattes som $\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f d(m_p \otimes m_q)$.

Resultatet skyldes Lebesgue, 1902, for en begrænset funktion f defineret på et begrænset interval $I \times J$. Fubini klarede tilfældet $f \in \mathcal{L}(I \times J)$; Tonelli bemærkede, at $f \in \mathcal{L}(I \times J)$, hvis $\int_I (\int_J |f(x,y)| dy) dx < \infty$; 1909.)

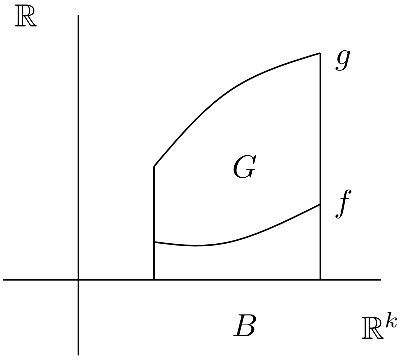
Den foregående teori kan uden vanskelighed udvides, så man kan danne produktet af endeligt mange σ-endelige målrum $(X_i, \mathbb{E}_i, \mu_i)$, $i = 1, \dots, n$. Produkt σ-algebraen $\mathbb{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{E}_n$ er den mindste σ-algebra på $X_1 \times \cdots \times X_n$, der indeholder mængderne $A_1 \times \cdots \times A_n$, $A_i \in \mathbb{E}_i$, $i = 1, \dots, n$, og produktmålet $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ er fastlagt ved

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \dots \mu_n(A_n) .$$

Desuden kan man danne produktet af en vilkårlig familie af *sandsynligheds-felter* $(X_i, \mathbb{E}_i, \mu_i)$, $i \in I$, dvs. målrum, hvor $\mu_i(X_i) = 1$ for alle $i \in I$. Dette resultat har stor betydning i teorien for stokastiske processer, men falder udenfor rammerne af dette kursus.

6.4. Eksempler

Eksempel 6.16. Lad $B \in \mathbb{B}_k$ og lad $f, g : B \to \mathbb{R}$ være Borel funktioner opfyldende $f(x) \le g(x)$ for alle $x \in B$. Mængden



$$G = \{(x, y) \in B \times \mathbb{R} \mid f(x) \le y \le g(x)\}$$

er en Borel mængde i $\mathbb{R}^{k+1}$, og dens $(k+1)$-dimensionale Lebesgue mål er givet ved

$$m_{k+1}(G) = \int_B (g(x) - f(x)) dm_k(x) .$$

Sættes nemlig $\varphi, \psi : B \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til

$$\varphi(x, y) = g(x) - y, \; \psi(x, y) = y - f(x), \quad x \in B, \; y \in \mathbb{R} ,$$

er φ, ψ Borel funktioner, og

$$G = \varphi^{-1}([0, \infty[) \cap \psi^{-1}([0, \infty[)$$

hvilket viser, at $G \in \mathbb{B}_{k+1}$. For $x \in \mathbb{R}^k$ er

$$G_x = \begin{cases} [f(x), g(x)] & \text{for } x \in B \\ \varnothing & \text{for } x \in \mathbb{R}^k \setminus B , \end{cases}$$

hvoraf formlen fremgår, idet $m_{k+1} = m_k \otimes m$.

Hvis $\Phi : G \to \mathbb{R}$ er enten integrabel over G eller en positiv Borel funktion, så gælder

$$\int_G \Phi \; dm_{k+1} = \int_B \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \Phi(x,y) dy \right) dm_k(x)$$

ifølge Fubinis og Tonellis sætninger. Snitfunktionen $(1_G \Phi)_x$ er nemlig givet ved

$$y \mapsto \begin{cases} 1_{[f(x),g(x)]}(y)\Phi(x,y) & \text{for } x \in B \\ 0 & \text{for } x \in \mathbb{R}^k \setminus B\,. \end{cases}$$

Eksempel 6.17. Udregning ved polære koordinater.

Et punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ har de *polære koordinater* (r,θ), hvor $r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ og $\theta \in \mathbb{R}$ opfylder $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. For $(x,y) \neq (0,0)$ er θ som bekendt kun bestemt på nær et multiplum af 2π. Afbildningen

$$\varphi : X(=]0,\infty[\times] - \pi, \pi[) \to Y(= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\})$$

givet ved $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ er bijektiv, og såvel φ som φ^{-1} er vilkårligt ofte differentiable. Forudsætningerne i Transformationssætningen (5.26) er derfor opfyldt, og Jacobi-determinanten udregnes til

$$\det D\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\,.$$

Hvis $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er enten integrabel eller en positiv Borel funktion, finder vi

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \; dm_2 = \int_Y f \; dm_2 = \int_X f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \; dm_2(r,\theta) =$$
$$\int_0^\infty \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) d\theta \right) r \; dr = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \; dr \right) d\theta\,,$$

idet det første lighedstegn er begrundet med, at en halvlinie i planen er en m_2-nulmængde.

Lad os som anvendelse heraf vise

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dm_2(x,y) = \pi\,.$$

Vi har nemlig

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dm_2(x,y) = \int_0^\infty \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2} d\theta \right) r \; dr = \pi \int_0^\infty e^{-r^2} 2r dr$$
$$= \pi \int_0^\infty e^{-u} du = \pi\,.$$

På den anden side finder vi ved Tonellis sætning, at

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dm_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2} dx \right) dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 ,$$

så

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\,,$$

(jf. Eksempel 4.20).

Eksempel 6.18. Enhedskuglens Lebesgue mål.

Idet V_k betegner Lebesgue målet af enhedskuglen i $\mathbb{R}^k$, gælder

$$m_k(K(a,r)) = V_k r^k \quad \text{for} \quad a \in \mathbb{R}^k,\ r > 0\,.$$

Vi har nemlig $K(a,r) = a + K(0,r)$ og $K(0,r)$ er billede af enhedskuglen under isomorfien $x \mapsto rx$ med determinant r^k, jf. §5.5. Da $\overline{K(a,r)} = \bigcap_1^\infty K(a, r+\frac{1}{n})$ ser man, at også den afsluttede kugle med radius r har Lebesgue mål $V_k r^k$, og dermed er kuglefladerne nulmængder.

Vi vil vise, at

$$V_{k+2} = \frac{2\pi}{k+2} V_k, \quad k = 1, 2, \dots\,,$$

som ud fra de kendte værdier $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$ giver en simpel beregning af de øvrige. Formlen giver $V_3 = 4\pi/3$, $V_4 = \pi^2/2$.

Vi opfatter $\mathbb{R}^{k+2}$ som $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2$, og betegner punkterne i $\mathbb{R}^{k+2}$ ved $(x_1,\dots,x_k,x,y)$. Snittet i enhedskuglen i $\mathbb{R}^{k+2}$ bestemt ved $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, er da givet som

$$\{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1^2 + \cdots + x_k^2 < 1 - x^2 - y^2\}\,,$$

hvilket er en kugle i $\mathbb{R}^k$ med radius $(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$, når

$$(x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

og den tomme mængde når $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Udnyttes $m_{k+2} = m_k \otimes m_2$ finder vi

$$\begin{aligned} V_{k+2} &= \int_D V_k (1-x^2-y^2)^{k/2} dm_2(x,y) = V_k \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 (1-r^2)^{k/2} r\ dr \right) d\theta \\ &= \pi V_k \int_0^1 u^{k/2} du = \frac{2\pi}{k+2} V_k\,, \end{aligned}$$

idet vi har benyttet polære koordinater (jf. Eks.6.17), og substitutionen $u = 1 - r^2$. Se også opg. 6.25.

EKSEMPEL 6.19. GULDINS REGEL: *Når et plant areal roteres om en dermed disjunkt akse i samme plan, er det opståede rumfang lig med arealet multipliceret med længden af tyngdepunktets bane.*

Vi tænker på "arealet" som en begrænset Borel mængde $E \subseteq]0,\infty[\times \mathbb{R}$, der drejes om y-aksen. Dermed kan omdrejningslegemet beskrives som

$$L = \{(r\cos\theta, y, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid (r,y) \in E,\ \theta \in [0,2\pi[\},$$

altså

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+z^2}, y) \in E\},$$

hvoraf ses, at $L \in \mathbb{B}_3$. Afbildningen

$$(r,y,\theta) \mapsto \varphi(r,y,\theta) = (r\cos\theta, y, r\sin\theta)$$

af $X =]0,\infty[\times \mathbb{R} \times]0,2\pi[$ på $Y = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,0) \mid x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$ ses at opfylde forudsætningerne for Transformationssætningen (5.26), og Jacobideterminanten udregnes let til r. Som i Eks. 6.17 får vi da

$$\begin{aligned} m_3(L) = m_3(L \cap Y) &= \int_X 1_{L\cap Y} \circ \varphi(r,y,\theta) r \; dm_3(r,y,\theta) \\ &= \int_X 1_E(r,y) r d(m_2 \otimes m_1)((r,y),\theta) = 2\pi \int_E r \; dm_2(r,y) = 2\pi b m_2(E), \end{aligned}$$

idet vi har indført tallet

$$b = \frac{1}{m_2(E)} \int_E r \; dm_2(r,y),$$

som netop er abscissen til E's tyngdepunkt, dvs. tyngdepunktet for $m_2|E$, jf. opg. 5.21.

(Reglen er fremsat af den schweiziske jesuit P. Guldin i værket Centrobaryca 1635–1641. Den findes dog allerede hos den græske matematiker Pappos, 3.årh.e.kr.).

6.5. Enhedskuglens overflade mål

Vi skal indføre flademålet ω_k for enhedssfæren i $\mathbb{R}^k$

$$S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_2 = 1\},$$

idet $\|x\|_2$ betegner den euklidiske norm.

Problemstillingen er nært forbundet med *polære koordinater* i $\mathbb{R}^k$. For $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ har vi en entydig fremstilling $x = r\xi$ hvor $r > 0$ og $\xi \in S^{k-1}$. Parret

$$(r, \xi) = \big(\|x\|_2\,,\, x/\|x\|_2\big)$$

kaldes de polære koordinater for x. (Sml. med Eks. 6.17 for $k = 2$.)

For $t > 0$ og $\Omega \in \mathbb{B}(S^{k-1})$ defineres *sektoren*

$$B_t(\Omega) = \{s\xi \mid 0 < s < t\,,\, \xi \in \Omega\}\,.$$

LEMMA 6.20. *Mængde systemet*

$$\mathbb{D} = \{B_t(\Omega) \mid 0 < t\,,\, \Omega \in \mathbb{B}(S^{k-1})\}$$

er fællesmængde stabilt og frembringer σ-algebraen $\mathbb{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$.

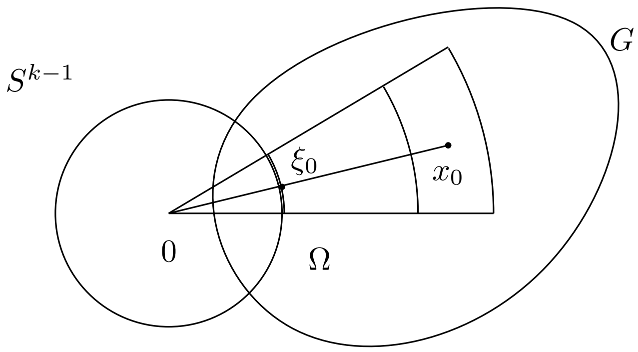
Bevis. Afbildningerne $r : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to]0, \infty[$ og $\xi : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to S^{k-1}$ givet ved $r(x) = \|x\|_2$ og $\xi(x) = x/\|x\|_2$ er kontinuerte og dermed Borel målelige. Derfor er

$$B_t(\Omega) = r^{-1}(\,]0, t\,[) \cap \xi^{-1}(\Omega)$$

en Borel mængde i $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, så $\sigma(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$. Idet

$$B_{t_1}(\Omega_1) \cap B_{t_2}(\Omega_2) = B_{t_1 \wedge t_2}(\Omega_1 \cap \Omega_2),$$

er systemet $\mathbb{D}$ fællesmængde stabilt.



Lad $G \subseteq \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ være en åben mængde og lad $x_0 \in G$ have polære koordinater (r_0, ξ_0). Da afbildningen $(r, \xi) \mapsto r\xi$ af $]0, \infty[\times S^{k-1}$ ind i $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ er kontinuert findes rationale tal $t_1 < r_0 < t_2$ og en åben omegn Ω af ξ_0 i S^{k-1} så $t_1 \le s \le t_2$ og $\eta \in \Omega$ medfører $s\eta \in G$, specielt

$$x_0 \in B_{t_2}(\Omega) \setminus B_{t_1}(\Omega) \subseteq G\,,$$

og vi kan endda vælge Ω fra det tællelige system $\mathcal{B}$ givet ved

$$\{\eta \in S^{k-1} \mid \|a-\eta\|_2 < r\}\,, \quad a \in \mathbb{Q}^k\,,\, r \in \mathbb{Q}_+\,.$$

(Systemet $\mathcal{B}$ er en tællelig basis for S^{k-1}, jf. opg. 6.7). Da $x_0 \in G$ er vilkårlig kan G skrives som foreningsmængde af mængder $B_{t_2}(\Omega) \setminus B_{t_1}(\Omega)$, hvor $0 < t_1 < t_2$ er rationale og $\Omega \in \mathcal{B}$. Da dette mængdesystem er numerabelt vil $G \in \sigma(\mathbb{D})$. Vi har dermed vist, at enhver åben delmængde G af $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ tilhører $\sigma(\mathbb{D})$, og får derfor $\mathbb{B}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \subseteq \sigma(\mathbb{D})$. □

For hvert fast $t > 0$ defineres ved

$$M_t(\Omega) = m_k\big(B_t(\Omega)\big)\,, \quad \Omega \in \mathbb{B}(S^{k-1}) \tag{4}$$

et Borel mål M_t på S^{k-1}. Hvis nemlig (Ω_n) er en følge af parvis disjunkte mængder fra $\mathbb{B}(S^{k-1})$, så er de tilhørende sektorer $B_t(\Omega_n)$ parvis disjunkte i $\mathbb{R}^k$ og

$$B_t\big(\bigcup_1^\infty \Omega_n\big) = \bigcup_1^\infty B_t(\Omega_n)\,,$$

hvoraf følger, at

$$M_t\big(\bigcup_1^\infty \Omega_n\big) = \sum_1^\infty M_t(\Omega_n)\,.$$

Målet M_t er invariant overfor gruppen $\mathcal{O}(k)$ af ortogonale $k \times k$ matricer. For $A \in \mathcal{O}(k)$ er nemlig $A\big(B_t(\Omega)\big) = B_t\big(A(\Omega)\big)$, så

$$M_t\big(A(\Omega)\big) = m_k\big(A(B_t(\Omega))\big) = m_k\big(B_t(\Omega)\big) = M_t(\Omega)$$

fordi Lebesgue målet er invariant under isometrier, specielt under $\mathcal{O}(k)$.

Idet $B_t(\Omega) = t\,B_1(\Omega)$ har vi (jf. §5.5)

$$M_t(\Omega) = t^k M_1(\Omega) \quad \text{for} \quad t > 0\,,\, \Omega \in \mathbb{B}(S^{k-1})\,. \tag{5}$$

Differentialkvotienten $\frac{d}{dt}\, M_t(\Omega) = k\,t^{k-1} M_1(\Omega)$ for $t = 1$, altså

$$\omega_k(\Omega) = k\,M_1(\Omega), \tag{6}$$

definerer et mål ω_k på S^{k-1}, og idet

$$\omega_k(\Omega) = \lim_{h\to 0^+} \frac{M_{1+h}(\Omega) - M_1(\Omega)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\, m_k\big(B_{1+h}(\Omega) \setminus B_1(\Omega)\big)\,,$$

er det naturligt at opfatte ω_k som flademålet for S^{k-1}. (Man kan vise, at ω_k stemmer overens med det generelle flademål fra §5.9 med $F = S^{k-1}$.) Den totale masse af ω_k er $\omega_k(S^{k-1}) = k\,V_k$, idet $B_1(S^{k-1}) = K(0,1) \setminus \{0\}$ har Lebesgue målet V_k (jf. Eks. 6.18).

Vi har dermed vist eksistensudsagnet i følgende sætning.

Sætning 6.21. *Der findes et og kun et mål ω_k på $(S^{k-1}, \mathbb{B}(S^{k-1}))$ som er invariant under $\mathcal{O}(k)$, og som har den totale masse $k\,V_k$.*

Bemærkning 6.22. Sætningen er analog til Sætning 5.16. Vi viser ikke entydighedsudsagnet.

Vi betragter afbildningen $j :]0,\infty[\times S^{k-1} \to \mathbb{R}^k\setminus\{0\}$ defineret ved $j(r,\xi) = r\xi$. Da

$$j^{-1}\big(B_t(\Omega)\big) =]0,t[\times\Omega, \tag{7}$$

giver Lemma 6.20, at j er målelig mht. σ-algebraerne $\mathbb{B}(]0,\infty[)\otimes\mathbb{B}(S^{k-1})$ og $\mathbb{B}(\mathbb{R}^k\setminus\{0\})$. Det har så mening at betragte billedmålet $j((r^{k-1}dr)\otimes\omega_k)$ af produktmålet af $r^{k-1}dr$ og ω_k.

Sætning 6.23. Integration i polære koordinater. *Der gælder*

$$m_k \mid \mathbb{R}^k\setminus\{0\} = j\big((r^{k-1}dr)\otimes\omega_k\big)\,. \tag{8}$$

Integralet af $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, m_k)$ eller $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k)$ kan udregnes i polære koordinater efter formlen

$$\begin{aligned}\int f\,dm_k &= \int_{S^{k-1}}\Big(\int_0^\infty f(r\xi)r^{k-1}dr\Big)\,d\omega_k(\xi)\\ &= \int_0^\infty\Big(\int_{S^{k-1}} f(r\xi)d\omega_k(\xi)\Big)\,r^{k-1}dr\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Bevis. Af entydighedssætningen for mål (Hovedsætning 5.4) kombineret med Lemma 6.20 følger, at vi blot skal vise, at

$$m_k\big(B_t(\Omega)\big) = j\big((r^{k-1}dr)\otimes\omega_k\big)\big(B_t(\Omega)\big) \quad \text{for} \quad t>0\,, \Omega\in\mathbb{B}(S^{k-1})\,,$$

hvilket gælder, da højresiden ifølge (7) er lig med

$$(r^{k-1}dr)\otimes\omega_k(]0,t[\times\Omega) = \int_0^t r^{k-1}dr\,\omega_k(\Omega) = \frac{t^k}{k}\,\omega_k(\Omega)\,,$$

og venstresiden udregnes ved hjælp af (4)-(6)

$$m_k\big(B_t(\Omega)\big) = M_t(\Omega) = t^k M_1(\Omega) = \frac{t^k}{k}\,\omega_k(\Omega)\,.$$

Formel (9) er en umiddelbar konsekvens af (8) kombineret ned Sætning 4.22 om integration mht. et billedmål og Fubini/Tonellis sætninger. $\square$

Eksempel 6.24. Om funktionen

$$x \mapsto \|x\|_2^{-\alpha} = (x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{-\frac{1}{2}\alpha} \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^k$$

har vi:

$$\int_{\|x\|_2 \le 1} \frac{dx}{\|x\|_2^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < k\,, \tag{10}$$

$$\int_{\|x\|_2 \ge 1} \frac{dx}{\|x\|_2^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > k\,. \tag{11}$$

Dette følger af udregningerne i polære koordinater

$$\begin{aligned}\int_{\|x\|_2 \le 1} \frac{dx}{\|x\|_2^\alpha} &= \int_{S^{k-1}} \int_0^1 \frac{1}{r^\alpha}\, r^{k-1} dr\, d\omega_k(\xi) \\ &= k\, V_k \int_0^1 r^{k-1-\alpha} dr\,,\end{aligned}$$

som er endeligt netop hvis $k - \alpha > 0$ (jf. opg. 4.4, 2°);

$$\int_{\|x\|_2 \ge 1} \frac{dx}{\|x\|_2^\alpha} = k\, V_k \int_1^\infty r^{k-1-\alpha} dr$$

som er endeligt netop hvis $k - \alpha < 0$ (jf. opg. 4.4, 2°).

Opgaver til §6

6.1. Gælder

$$A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2 \Rightarrow (A_1 = A_2) \wedge (B_1 = B_2) \ ?$$
$$A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2 \neq \emptyset \Rightarrow (A_1 = A_2) \wedge (B_1 = B_2) \ ?$$

6.2. Vis, at der om $G \subseteq X \times Y$ gælder

$$G = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times G_x) \, .$$

6.3. Lad $(X, \mathbb{E})$ være et målbart rum. En delmængde $G \subseteq \mathbb{N} \times X$ modsvares af en følge af delmængder af X, nemlig snittene $G_1, G_2, \dots$. En funktion f på $\mathbb{N} \times X$ modsvares af en følge af funktioner på X, nemlig snittene $f_1, f_2, \dots$.

Idet $\mathbb{N}$ udstyres med σ-algebraen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ af alle delmængder, betragtes produkt σ-algebraen $\mathbb{G} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{E}$. Vis:

$$G \in \mathbb{G} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : G_n \in \mathbb{E}$$
$$f \text{ er } \mathbb{G} - \text{målelig} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : f_n \text{ er } \mathbb{E} - \text{målelig}\, .$$

6.4. Lad X være en tællelig mængde, Y en vilkårlig mængde. Vis, at $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$.

6.5. Lad X og Y være metriske rum med Borel algebraerne $\mathbb{B}(X)$ og $\mathbb{B}(Y)$. Vis, at $\mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}(Y) \subseteq \mathbb{B}(X \times Y)$, hvor $X \times Y$ er det metriske produktrum. (I almindelighed er $\mathbb{B}(X \times Y)$ mere omfattende end $\mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}(Y)$. Se dog opg.6.7).

6.6. Lad $(X, \mathbb{E})$ og $(Y, \mathbb{F})$ være målbare rum, og antag, at $\mathbb{E}_1$ og $\mathbb{F}_1$ er frembringersystemer for henholdsvis $\mathbb{E}$ og $\mathbb{F}$, således at der findes følger af mængder $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{E}_1$, $B_1, B_2, \dots \in \mathbb{F}_1$ med $X = \bigcup A_n$, $Y = \bigcup B_n$.

Vis, at mængdesystemet $\mathbb{D} = \{E \times F \mid E \in \mathbb{E}_1, \ F \in \mathbb{F}_1\}$ frembringer produkt σ-algebraen $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$.

(*Vink:* Vis, at projektionerne π_1, π_2 er $\sigma(\mathbb{D})$-målelige.)

6.7. Et system $\mathbb{D}$ af åbne mængder i et metrisk rum X kaldes en *basis* for topologien, hvis enhver ikke tom åben mængde er foreningsmængde af mængder fra $\mathbb{D}$. Vis, at hvis et metrisk rum X har en *tællelig basis* $\mathbb{D}$ for topologien, så er $\sigma(\mathbb{D}) = \mathbb{B}(X)$.

Vis, at hvis X og Y er metriske rum med tællelig basis $\mathbb{D}_1$ henholdsvis $\mathbb{D}_2$, så har det metriske produktrum $X \times Y$ en tællelig basis

$$\{G_1 \times G_2 \mid G_1 \in \mathbb{D}_1, \ G_2 \in \mathbb{D}_2\}$$

og $\mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}(Y) = \mathbb{B}(X \times Y)$. (*Vink:* opg. 6.6).

Eksempel. $X = \mathbb{R}^k$, $\mathbb{D} =$ systemet af åbne intervaller med rationale endepunkter.

6.8.

1° Vis, at $\mathbb{L}_p \otimes \mathbb{L}_q \subseteq \mathbb{L}_{p+q}$, hvor $\mathbb{L}_p$ betegner systemet af Lebesgue målelige mængder i $\mathbb{R}^p$.

2° Vis, at $\mathbb{L}_1 \otimes \mathbb{L}_1 \neq \mathbb{L}_2$. (*Vink:* Betragt $\{0\} \times A$, hvor $A \subseteq \mathbb{R}$ ikke er Lebesgue målelig).

3° Vis, at $\overline{m}_p \otimes \overline{m}_q$ stemmer overens med restruktionen af $\overline{m}_{p+q}$ til $\mathbb{L}_p \otimes \mathbb{L}_q$.

6.9. Vis, at produktet af målrummene $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \varepsilon_a)$ og $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \varepsilon_b)$ er $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2, \varepsilon_{(a,b)})$.

6.10. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $(Y, \mathbb{F}, \nu)$ være σ-endelige målrum, og antag, at $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ og $g \in \mathcal{M}^+(Y, \mathbb{F})$ er sådan, at målene $f \cdot \mu$ og $g \cdot \nu$ igen er σ-endelige.

Vis, at

$$(f \cdot \mu) \otimes (g \cdot \nu) = f \otimes g \cdot \mu \otimes \nu \,.$$

6.11.

1° Lad $\varphi_1 : (X_1, \mathbb{E}_1) \to (Y_1, \mathbb{F}_1)$, $\varphi_2 : (X_2, \mathbb{E}_2) \to (Y_2, \mathbb{F}_2)$ være målelige afbildninger. Vis, at produktafbildningen

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : (X_1 \times X_2, \mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2) \to (Y_1 \times Y_2, \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_2)$$

er målelig, idet

$$\varphi_1 \times \varphi_2(x_1, x_2) = (\varphi_1(x_1), \varphi(x_2)) \,.$$

2° Lad nu μ_1 være et mål på $\mathbb{E}_1$, μ_2 et mål på $\mathbb{E}_2$. Vis, at hvis billedmålet $\varphi_1(\mu_1)$ er σ-endeligt, så er også μ_1 σ-endeligt.

3° Vis, at hvis $\varphi_1(\mu_1)$ og $\varphi_2(\mu_2)$ begge er σ-endelige, så er

$$\varphi_1 \times \varphi_2(\mu_1 \otimes \mu_2) = \varphi_1(\mu_1) \otimes \varphi_2(\mu_2) \,.$$

6.12. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $(Y, \mathbb{F}, \nu)$ være målrum, og antag, at funktionen $x \mapsto \nu(G_x)$, $x \in X$, er $\mathbb{E}$-målelig for enhver mængde $G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$.

Gør rede for, at den ved

$$\pi(G) = \int_X \nu(G_x) d\mu(x), \quad G \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{F} \,,$$

definerede funktion π er et mål, og at

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{for alle } A \in \mathbb{E},\ B \in \mathbb{F}.$$

6.13. Lad $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ være målet i $\mathbb{R}$ givet ved

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{når } A \text{ er endelig eller numerabel} \\ \infty & \text{ellers} \end{cases}$$

og lad $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ være tællemålet i $\mathbb{R}$.

1° Gør rede for, at der ved

$$\pi(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x), \ \ \rho(E) = \int \mu(E^y) d\nu(y)$$

defineres mål π og ρ på $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$, således at

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \pi(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) = \rho(A \times B).$$

(*Vink:* Benyt opg. 6.12.)

2° Vis, at $\pi \neq \rho$. Sammenhold med Korollar 6.8. (*Vink:* Betragt f.eks. diagonalen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.)

6.14. $\int_a^b f(x)dx$ som areal.

Lad $f : \mathbb{R}^k \to [0, \infty]$ være en Borel funktion.

1° Vis, at ordinatmængden

$$O_f = \{(x, y) = (x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

er en Borel mængde i $\mathbb{R}^{k+1}$.

2° Vis, at

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x)dx = m_{k+1}(O_f) = \int_0^\infty m_k(f^{-1}([y, \infty]))dy.$$

(Lebesgue integralet af funktioner på $\mathbb{R}^k$ kunne således være defineret ud fra Lebesgue målet i $\mathbb{R}^{k+1}$. Specielt er "begynder"-definitionen af $\int_a^b f(x)dx$ som et areal faktisk korrekt!)

6.15. Vis, at grafen

$$G_f = \{(x, y) = (x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid y = f(x)\}$$

for en Borel funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ er en Borel mængde i $\mathbb{R}^{k+1}$ med Lebesgue mål $m_{k+1}(G_f) = 0$.

6.16. Lad μ, ν og π være tællemålene i $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$ og $X \times Y$. Gør rede for, at

$$\int_{X\times Y} f d\pi = \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

for enhver funktion $f : X \times Y \to [0, \infty]$.

6.17.

1° Om en funktion $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ antages

$$\sum_{(x,y)\in X\times Y} | f(x,y) | < \infty \,.$$

Vis, at

$$\sum_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y) = \sum_x \sum_y f(x,y) = \sum_y \sum_x f(x,y)\,.$$

2° Som 1°, men med $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$.

6.18. Definer a_{mn} for $m, n \in \mathbb{N}$ ved

$$a_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{når} \quad m = n \\ -1 & \text{når} \quad m = n+1 \\ 0 & \text{ellers}\,. \end{cases}$$

Vis, at $\sum_m \sum_n a_{mn} \neq \sum_n \sum_m a_{mn}$. Sammenhold med Tilføjelse til Fubinis sætning, og med opg. 6.17.

6.19. Sæt $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ og vis, at

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_E(x,y) dm(y) d\tau(x) \neq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_E(x,y) d\tau(x) dm(y)$$

når $m : \mathbb{B} \to [0, \infty]$ er Lebesgue målet og $\tau : \mathbb{B} \to [0, \infty]$ er restriktion af tællemålet i $\mathbb{R}$.

Sammenhold med Tilføjelse til Tonellis sætning.

6.20. Find

$$\int_E (x-y)^a d(x,y)$$

for ethvert $a \in \mathbb{R}$, idet $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x < 1\}$.

6.21.

1° Beregn $\int_{K(0,R)\setminus\{0\}} r^a d(x,y)$ for hvert $a \in \mathbb{R}$, når $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

2° Undersøg, for hvilke $n \in \mathbb{Z}$ funktionen

$$(x,y) \mapsto (x+iy)^n$$

er Lebesgue integrabel i $K(0,R) \setminus \{0\}$, og find for hvert af disse n værdien af

$$\int_{K(0,R)\setminus\{0\}} (x+iy)^n d(x,y)\,.$$

6.22. Lad $f :]0,1] \times]0,1] \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2} & \text{for} \quad 0 < x < y \le 1 \\ -x^{-2} & \text{for} \quad 0 < y < x \le 1 \\ 0 & \text{for} \quad 0 < x = y \le 1\,. \end{cases}$$

1° Vis, at følgende dobbeltintegraler er veldefinerede og udregn dem:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx, \qquad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy\,.$$

2° Er f Lebesgue integrabel?

6.23. Sæt

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{for} \quad (x,y) \neq (0,0)\,.$$

Vis, at $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx = \frac{\pi}{4}$, og find $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy$. (*Vink:* For $x \neq 0$ kan integralet $\int_0^1 f(x,y)dy$ f.eks. udregnes ved substitutionerne $y = xt$ og $t = \tan \frac{u}{2}$.)

6.24. Udfyld detaljerne i følgende bevis for Sætning 5.16: Lad μ være et translationsinvariant Radon mål på $\mathbb{B}_k$, og sæt $c = \mu([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^k)$. Vis, at der for $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k)$ gælder

$$\int_{\mathbb{R}^{2k}} g(y)f(x+y)d\ \mu \otimes m_k(x,y) = \int f d\mu \int g dm_k$$
$$= \int g(-x)d\mu(x) \int f dm_k\,,$$

og sæt $g = 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^k}$, $f = 1_B$, $B \in \mathbb{B}_k$.

6.25. Idet V_k betegner Lebesgue målet af enhedskuglen i $\mathbb{R}^k$, skal man vise

$$V_{k+1} = 2V_k \int_0^{\pi/2} \cos^{k+1} t \; dt \,, \quad k = 1, 2, \dots \;.$$

6.26. Tegn for $a > 0$ simplexet

$$S_k(a) = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{i=1}^{k} x_i \le a, \; x_1 \ge 0, \dots, x_k \ge 0\}$$

i $k = 1, 2, 3$ dimensioner. Vis, at

$$m_k(S_k(a)) = \frac{a^k}{k!} \,.$$

(*Vink:* Induktion efter k).

6.27. For $B \in \mathbb{B}_k$ og $h > 0$ defineres keglen $K \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ frembragt af $B \times \{0\}$ og $(0, \dots, 0, h)$, ved

$$K = \{((1-\lambda)x, \lambda h) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \mid \lambda \in [0,1], x \in B\} \,.$$

1° Vis, at snitmængden $K^y \subseteq \mathbb{R}^k$ for $y \in \mathbb{R}$ er givet ved

$$K^y = \begin{cases} (1 - y/h)B & \text{for} \quad y \in [0,h] \\ \varnothing & \text{for} \quad y \notin [0,h] \,. \end{cases}$$

2° Idet $f : \mathbb{R}^k \times]0,h[\to \mathbb{R}^k$ defineres ved

$$f(x,y) = \Big(1 - \frac{y}{h}\Big)^{-1} x \,,$$

skal man vise, at

$$K = B \times \{0\} \cup f^{-1}(B) \cup \{(0, \dots, 0, h)\} \,,$$

og slut heraf, at $K \in \mathbb{B}_{k+1}$.

3° Vis, at

$$m_{k+1}(K) = \frac{1}{k+1} h \; m_k(B) \,.$$

(Volumen af en kegle er højde gange grundflade divideret med dimensionen).

6.28. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $(Y, \mathbb{F}, \nu)$ være σ-endelige målrum, og lad $E \in \mathbb{E}$, $F \in \mathbb{F}$. Vis, at

$$\mathbb{E}_E \otimes \mathbb{F}_F = \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}_{E \times F}$$

og

$$\mu_E \otimes \nu_F = \mu \otimes \nu_{E \times F} \, ,$$

idet $\mathbb{E}_E$ er den inducerede σ-algebra på E, og μ_E er restriktionen af μ til E, dvs. $\mu_E = \mu | \mathbb{E}_E$.

§7. Funktionsrummene $\mathcal{L}_p$

7.1. Funktionsrummet $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$

For et vilkårligt målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er mængden $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ af μ-integrable funktioner $f : X \to \mathbb{C}$ et vektorrum, idet

$$af,\ f+g \in \mathcal{L}, \text{ når } a \in \mathbb{C},\ f, g \in \mathcal{L}\,.$$

Med $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$ gælder

(i) $\|f\|_1 \geq 0$,
(ii) $\|af\|_1 = |a| \|f\|_1$
(iii) $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

for $a \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{L}$, medens

(iv) $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \ \mu -$ næsten overalt,

ifølge Korollar 4.5.

Afbildningen $f \mapsto \|f\|_1$ er med andre ord en *seminorm*, jf. §I.1.2.

I ovenstående kan $\mathbb{C}$ erstattes med $\mathbb{R}$. I begge tilfælde vil det ofte være naturligt at betragte

$$\|f - g\|_1 = \int |f - g| d\mu$$

som en afstand mellem funktionerne f og g tilhørende $\mathcal{L}$. Man bemærker, at

$$\|f - g\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = g \quad \mu - \text{næsten overalt}\,,$$

så $\|f - g\|_1$ er en pseudometrik og kun en metrik, hvis $\varnothing$ er den eneste μ-nulmængde.

Definition 7.1. Konvergens i 1-middel.
En følge af funktioner $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}$ siges at *konvergere* mod $f \in \mathcal{L}$ i 1-*middel*, hvis $\|f_n - f\|_1 \to 0$ for $n \to \infty$.

Dette konvergensbegreb for funktioner er et helt andet end punktvis konvergens, som vi hidtil udelukkende har beskæftiget os med. (Et vist samspil er der dog, se Sætning 7.10 og Korollar 7.20, 7.21.)

Med $f_n = \frac{1}{n} \cdot 1_{]0,n]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \dots$, eller $f_n = n \cdot 1_{]0,\frac{1}{n}]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \dots$, konvergerer talfølgen $f_1(x), f_2(x), \dots$ mod 0 for hvert $x \in \mathbb{R}$, dvs. $f_1, f_2, \dots$ konvergerer punktvis mod nulfunktionen. Men følgen $f_1, f_2, \dots$ er ikke konvergent i 1-middel mod nulfunktionen.

Følgen $g_1, g_2, \dots \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ af indikatorfunktioner for intervallerne $]0, 1]$, $]0, \frac{1}{2}]$, $]\frac{1}{2}, 1]$, $]0, \frac{1}{3}]$, $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $]\frac{2}{3}, 1]$, $]0, \frac{1}{4}], \cdots\cdot$ konvergerer mod nulfunktionen i 1-middel, men for hvert $x \in]0, 1]$ er talfølgen $g_1(x), g_2(x), \dots$ divergent.

7.2. Vektorrum med seminorm

Lad (M, d) være et *pseudometrisk rum*, dvs. en mængde M forsynet med en pseudometrik. Aksiomet (M1) er afsvækket, så der kan optræde punktpar (x, y) med $x \neq y$ og $d(x, y) = 0$, jf. §I.1.1.

For et *pseudometrisk rum* defineres kugler, indre punkter og randpunkter, åbne og afsluttede mængder, osv., ganske som for et metrisk rum. En følge $x_1, x_2, \dots \in M$ siges at konvergere mod $x \in M$, netop hvis $d(x_n, x) \to 0$ for $n \to \infty$.

Man ser, at systemet $\mathcal{G}$ af åbne mængder i M opfylder egenskaberne i Sætning I.2.6, således at et pseudometrisk rum bliver et topologisk rum. En vigtig forskel fra metriske rum er der: *Hausdorff egenskaber gælder ikke.* Hvis nemlig $x \neq y$ men $d(x, y) = 0$ så vil $y \in K(x, r)$ for ethvert $r > 0$, og dermed kan man *ikke* finde disjunkte åbne mængder G_1, G_2 så $x \in G_1$, $y \in G_2$.

Mere almindeligt kan man sige: Når $d(x, y) = 0$ så "følges" x og y: Af trekantsuligheden fås

$$\forall z \in M : d(x, z) = d(y, z) \,,$$

specielt kommer kugler med centrum x eller y ud på ét, $K(x, r) = K(y, r)$. Dermed vil x og y samtidig være indre punkter, ydre punkter eller randpunkter for en mængde $A \subseteq M$. *Er x grænsepunkt for en følge $x_1, x_2, \dots$ vil y også være det.*

Konvergens i 1-middel er netop konvergens i det pseudometriske rum $\mathcal{L}$.

I et vektorrum $\mathcal{V}$ med seminorm $\|\cdot\|$ indføres en pseudometrik ved definitionen

$$d(x, y) = \|x - y\| \,, \quad x, y \in \mathcal{V} \,.$$

Bemærk, at $\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ er kontinuert ligesom i et normeret rum, jf. Sætn. I.3.14, idet der gælder

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \,. \tag{1}$$

Også kompositionerne er kontinuerte, jf. Sætning I.4.4. Således kan man indse, at multiplikationen med skalarer er kontinuert i (λ_0, x_0), ved brug af

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leq |\lambda| \, \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \, \|x_0\| \,,$$

der fås af identiteten

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = \lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0) x_0 \,.$$

For additionen i $\mathcal{V}$ benyttes tilsvarende

$$\|(x + y) - (a + b)\| \leq \|x - a\| + \|y - b\| \,.$$

Ved fastsættelsen

$$x \sim y \Leftrightarrow d(x,y) = \|x-y\| = 0$$

defineres en ækvivalensrelationen i $\mathcal{V}$, jf. opg. I.1.10. Mængden $V = \mathcal{V}/\sim$ af ækvivalensklasser

$$[x] = \{y \in \mathcal{V} \mid x \sim y\} = \{y \in \mathcal{V} \mid \|x-y\| = 0\}$$

er et vektorrum med kompositioner defineret ved repræsentanter,

$$[x] + [y] = [x+y], \quad a[x] = [ax]\,.$$

Da $\|x\| = \|y\|$ når $\|x-y\| = 0$ ifølge (1), defineres en funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ ved $\|\,[x]\,\| = \|x\|$. Denne funktion er en norm i V. Vi noterer:

SÆTNING 7.2. *Et vektorrum $\mathcal{V}$ med seminorm går over i et vektorrum V med norm, når elementerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen*

$$x \sim y \Leftrightarrow \|x-y\| = 0\,.$$

(Det bemærkes, at $\mathcal{V}_0 = \{x \in \mathcal{V} \mid \|x\| = 0\}$ er et underrum af $\mathcal{V}$, og V er isomorft med kvotientrummet (eller faktorrummet) $\mathcal{V}/\mathcal{V}_0$.)

EKSEMPEL 7.3. For et vilkårligt målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ med $X \neq \varnothing$ defineres en seminorm i funktionsrummet $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ ved

$$\|f\|_1 = \int |f| d\mu\,, \quad f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)\,.$$

Funktionsrummet $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ med seminorm $\|\cdot\|_1$ går over i et vektorrum $L = L(X, \mathbb{E}, \mu)$ med norm (som vi også skriver $\|\cdot\|_1$), *når funktionerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen $\sim$ givet ved*

$$f \sim g \Leftrightarrow \|f-g\|_1 = 0\,,$$

dvs.

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \textit{næsten overalt m.h.t. } \mu\,.$$

Overgangen fra funktionsrummet $\mathcal{L}$ til Lebesgue rummet L består løst sagt i, at vi ophører at skelne mellem funktioner f og g, eller regner dem for lige gode, når $f = g$ næsten overalt m.h.t. μ. Præcist: de opfattes som repræsentanter for en og samme ting (nemlig for samme klasse).

En funktion defineret på et funktionsrum, eller eventuelt blot på et vektorrum, kaldes ofte en *funktional.* I nogle fremstillinger af integralteorien lægges der megen vægt på, at man skal opfatte integralet m.h.t. μ som funktionalen

$$f \mapsto \int_X f d\mu\,, \quad f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)\,.$$

Denne funktional er lineær, og den er kontinuert, idet

$$|\int_X g d\mu - \int_X f d\mu| = |\int_X (g-f) d\mu| \leq \int_X |g-f| d\mu = \|g-f\|_1\,.$$

Specielt er $\int_X g d\mu = \int_X f d\mu$, når $\|g-f\|_1 = 0$. Integralet m.h.t. μ giver derfor anledning til en kontinuert, lineær funktional $[f] \mapsto \int_X f d\mu$ på $L(X, \mathbb{E}, \mu)$, og man ser, at dens norm er ≤ 1, jf. §I.4.3. (Se også opg.7.21.)

7.3. Funktionsrummene $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum med $X \neq \varnothing$, medens p er et reelt tal, $1 \leq p < \infty$.

En reel (eller kompleks) funktion f defineret på X siges at være *p-dobbelt integrabel* med hensyn til μ, hvis f er $\mathbb{E}$-målelig og

$$\int |f|^p d\mu < \infty\,.$$

Mængden af p-dobbelt integrable funktioner $f : X \to \mathbb{R}$ (eller $f : X \to \mathbb{C}$) betegnes $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\mu) = \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Bemærk, at $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(X, \mathbb{E}, \mu)$ netop er mængden $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ af μ-integrable funktioner på X. – I stedet for 2-dobbelt integrabel siges også *kvadratisk integrabel.*

SÆTNING 7.4. *Mængden $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et funktionsvektorrum over $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$).*

Bevis. Lad a være en skalar og $f, g \in \mathcal{L}_p$. Da er $af \in \mathcal{L}_p$ og $f + g \in \mathcal{L}_p$. Funktionerne af og $f + g$ er nemlig $\mathbb{E}$-målelige og

$$\int |af|^p d\mu = |a|^p \int |f|^p d\mu\,,$$

$$\int |f+g|^p d\mu \leq \int (|f| + |g|)^p d\mu \leq 2^p \int |f|^p d\mu + 2^p \int |g|^p d\mu\,.$$

Den sidste ulighed følger af, at der for $b, c \in [0, \infty[$ gælder

$$(b+c)^p \leq 2^p (b \vee c)^p = 2^p (b^p \vee c^p) \leq 2^p (b^p + c^p)\,,$$

med $b \vee c = \max\{b, c\}$. $\square$

Ovenstående gælder uden videre for ethvert $p > 0$, men for det følgende er det væsentligt at $\underline{p \geq 1}$. Vi skal se, at der ved

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} , \quad f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$$

defineres en seminorm $\| \cdot \|_p$ i $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Problemet ligger i trekantsuligheden. For $p = 1$ er også den triviel, således at kun tilfældet $1 < p < \infty$ står tilbage. Her benytter vi

Sætning 7.5. (Hölders ulighed). *Når $f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $g \in \mathcal{L}_q(X, \mathbb{E}, \mu)$, hvor $p, q > 1$ og $p^{-1} + q^{-1} = 1$, da er $fg \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og*

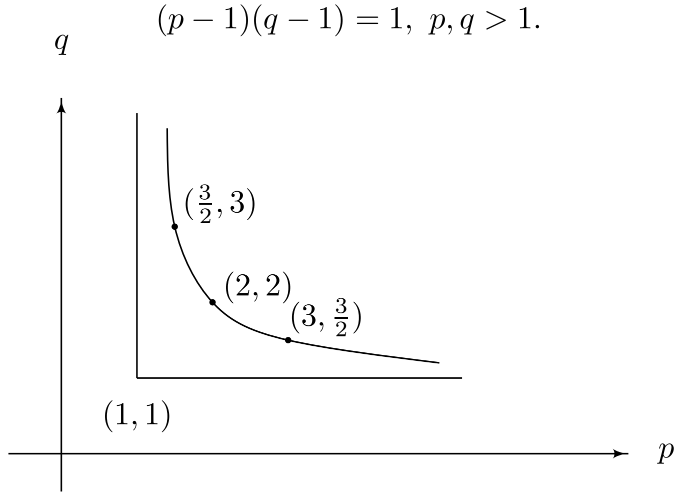
$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \, .$$

Bemærkning 7.6. Talpar $(p, q) \in \,]1, \infty[^2$ opfyldende $p^{-1} + q^{-1} = 1$ kaldes *duale eksponenter*. Ligningen $p^{-1} + q^{-1} = 1$ er ensbetydende med

$$\text{dels } \ (p-1)(q-1) = 1, \quad \text{dels } \ (p-1)q = p \, .$$

De duale eksponenter ligger altså på hyperbelgrenen

$$(p-1)(q-1) = 1, \ \ p, q > 1.$$

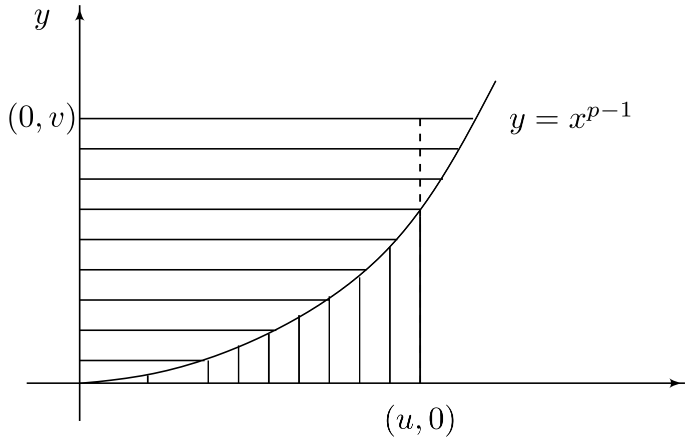


Bevis for Hölder ulighed.

Under forudsætningen $p, q > 1, \ p^{-1} + q^{-1} = 1$, viser vi først *Youngs ulighed:*

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \ \text{ for } \ u, v \in [0, \infty[\ . \tag{2}$$

(For $p = q = 2$ er uligheden den velkendte $2uv \leq u^2 + v^2$.)



Arealet af de to med skravering angivne punktmængder i $\mathbb{R}^2$ er

$$\int_0^u x^{p-1} dx = \frac{u^p}{p}, \quad \int_0^v y^{q-1} dy = \frac{v^q}{q}.$$

I sidste tilfælde er brugt

$$y = x^{p-1} \Leftrightarrow x = y^{q-1}.$$

Uligheden (2) fås nu straks, idet uv tolkes som arealet af et rektangel.

Ved beviset for Hölders ulighed kan vi antage $\|f\|_p \neq 0$ og $\|g\|_q \neq 0$, thi ellers er $fg = 0$ næsten overalt, altså $\|fg\|_1 = 0$. Vi kan så yderligere antage $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, idet f, g ellers erstattes med $f/\|f\|_p$, $g/\|g\|_q$. Ifølge (2) er nu

$$|f(x)|\,|g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$

for alle $x \in X$, og dermed

$$\begin{aligned}\int |fg| d\mu &\leq \frac{1}{p}\int |f|^p d\mu + \frac{1}{q}\int |g|^q d\mu \\ &= \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q < \infty.\end{aligned}$$

Heraf fremgår påstandene i Hölders ulighed. (Ved beviset er stiltiende benyttet, at fg er $\mathbb{E}$-målelig.) $\square$

KOROLLAR 7.7. (CAUCHY-SCHWARZ' ULIGHED). *Når $f, g \in \mathcal{L}_2(X, \mathbb{E}, \mu)$, da er $fg \in \mathcal{L}_1(X, \mathbb{E}, \mu)$ og*

$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Sætning 7.8. (Minkowskis ulighed). *Når $f, g \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, hvor $1 \leq p < \infty$, da er $f + g \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ og*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \,.$$

Vi ved allerede at $f+g \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, således at det kun er selve uligheden, vi skal vise. Vi kan antage $p > 1$ og lader q være givet ved $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Vi begynder med vurderingen

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_p^p = \int |f + g|^p d\mu &= \int |f + g| \, |f + g|^{p-1} d\mu \\
&\leq \int |f| \, |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| \, |f + g|^{p-1} d\mu \,.
\end{aligned}$$

Funktionen $|f + g|^{p-1}$ er $\mathbb{E}$-målelig, og

$$\int |f + g|^{(p-1)q} d\mu = \int |f + g|^p d\mu < \infty \,,$$

idet $f + g \in \mathcal{L}_p$. Altså er $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}_q$ med

$$\| |f + g|^{p-1} \|_q = \left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{1/q} = \|f + g\|_p^{p/q} = \|f + g\|_p^{p-1} \,.$$

Hölders ulighed giver så

$$\begin{aligned}
\int |f| \, |f + g|^{p-1} d\mu &\leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{p-1} \,, \\
\int |g| \, |f + g|^{p-1} d\mu &\leq \|g\|_p \|f + g\|_p^{p-1} \,.
\end{aligned}$$

Sammenholdt har vi

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1} \,,$$

hvoraf Minkowskis ulighed fås ved multiplikation med $\|f + g\|_p^{1-p}$, forudsat at $\|f + g\|_p > 0$. I modsat fald er uligheden triviel. $\square$

Vi samler det viste i følgende:

Sætning 7.9. *Lad $1 \le p < \infty$. Ved fastsættelsen*

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}, \quad f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu),$$

defineres en seminorm i funktionsrummet $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Det til seminormen $\| \cdot \|_p$ svarende konvergensbegreb kaldes *konvergens i p-middel* (for $p = 2$ også *konvergens i kvadratisk middel*).

En følge $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ konvergerer således mod $f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ i p-middel, netop hvis

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \text{ for } n \to \infty,$$

dvs. hvis

$$\int |f_n - f|^p d\mu \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Dette konvergensbegreb er et helt andet end punktvis konvergens (jf. §7.1). Der gælder dog

Sætning 7.10. *Lad $f_n \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, $n = 1, 2, \dots$, og lad f være en målelig funktion så $\lim_n f_n(x) = f(x)$ for μ-næsten alle $x \in X$. Hvis der findes $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med $\int g^p d\mu < \infty$, – (vi regner $\infty^p = \infty$) – , således at $|f_n| \le g$ μ-n.o. for ethvert $n \in \mathbb{N}$, da er $f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ og*

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \ \ n \to \infty.$$

Bevis. Idet $|f| \le g$ μ-n.o. ser man, at $\int |f|^p d\mu \le \int g^p d\mu < \infty$ så $f \in \mathcal{L}_p$. Idet $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ for μ-næsten alle x, og $|f_n - f|^p \le 2^p g^p$ μ-n.o., giver udvidelsen af Lebesgues majorantsætning (pp.4.13-14)

$$\int |f_n - f|^p d\mu \to \int 0 d\mu = 0 \text{ for } n \to \infty. \ \square$$

For flere resultater om samspil med punktvis konvergens, se Korollar 7.20, 7.21.

Seminormen $\| \cdot \|_p$ er ikke i almindelighed en norm i $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, idet

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \mu - \text{næsten overalt}.$$

Men ved at samle funktionerne i $\mathcal{L}_p$ i klasser kan man, ifølge §7.2, føre seminormen over i en norm:

Funktionsrummet $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ *med seminormen* $\|\cdot\|_p$ *går over i et vektorrum* $L_p = L_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ *med norm* (som vi også skriver $\|\cdot\|_p$), *når funktionerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen*

$$f \sim g \Leftrightarrow \|f - g\|_p = 0\,,$$

dvs.

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \ \textit{ næsten overalt m.h.t. } \mu\,.$$

Hermed er *Lebesgue rummene* $L_p = L_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ indført for $1 \leq p < \infty$. Bemærk, at $L_1(X, \mathbb{E}, \mu) = L(X, \mathbb{E}, \mu)$.

SÆTNING 7.11. *Hvis* $\mu(X) < \infty$, *så er* $\mathcal{L}_r(X, \mathbb{E}, \mu) \supseteq \mathcal{L}_s(X, \mathbb{E}, \mu)$ *for* $1 \leq r < s$ *og*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s \mu(X)^{1/r - 1/s} \ \textit{ for } f \in \mathcal{L}_s(X, \mathbb{E}, \mu)\,.$$

Hvis $\mu(X) = 1$, *gælder specielt* $\|f\|_r \leq \|f\|_s$ *for* $f \in \mathcal{L}_s(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Bevis. Antag $\mu(X) < \infty$ og $f \in \mathcal{L}_s$. Anvendelse af Hölders ulighed på $|f|^r \in \mathcal{L}_{s/r}$ og den konstante funktion $1 \in \mathcal{L}_{s/(s-r)}$ giver da $|f|^r \in \mathcal{L}$, altså $f \in \mathcal{L}_r$, samt

$$\int |f|^r \cdot 1 \, d\mu \leq \left(\int |f|^{r \cdot s/r} d\mu \right)^{r/s} \left(\int 1 \, d\mu \right)^{(s-r)/s},$$

dvs. $\|f\|_r \leq \|f\|_s \mu(X)^{1/r - 1/s}$. □

I tilfældet $\mu(X) = \infty$ gælder ikke i almindelighed resultater af lignende karakter. For Lebesgue målet på $\mathbb{R}$ er det således let at give eksempler på funktioner tilhørende henholdsvis $\mathcal{L}_r \setminus \mathcal{L}_s$, $\mathcal{L}_r \cap \mathcal{L}_s$ og $\mathcal{L}_s \setminus \mathcal{L}_r$ når $r < s$.

EKSEMPEL 7.12. Er $f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $g \in \mathcal{L}_p(Y, \mathbb{F}, \nu)$, hvor $1 \leq p < \infty$, medens $\mu : \mathbb{E} \to [0, \infty]$ og $\nu : \mathbb{F} \to [0, \infty]$ er σ-endelige mål i mængder $X \neq \varnothing$ og $Y \neq \varnothing$, da er $f \otimes g \in \mathcal{L}_p(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}, \mu \otimes \nu)$ med

$$\|f \otimes g\|_p = \|f\|_p \|g\|_p\,.$$

Thi $f \otimes g$ er $\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$-målelig, og ifølge Tonellis sætning er

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} |f \otimes g|^p d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \int_Y |f(x)|^p |g(y)|^p d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int_X |f(x)|^p \|g\|_p^p d\mu(x) = \|f\|_p^p \|g\|_p^p < \infty\,. \end{aligned}$$

Eksempel 7.13. (Vigtige tilfælde).

a) For $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k, m_k)$ og $L_p(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k, m_k)$ skriver vi kort $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$, $L_p(\mathbb{R}^k)$. Ligeledes skrives $\mathcal{L}_p(A)$, $L_p(A)$ for $\mathcal{L}_p(A, m_k)$, $L_p(A, m_k)$, hvor A er en Borel mængde i $\mathbb{R}^k$.

b) Betegnelsen $\ell_p(J)$ bruges for $\mathcal{L}_p(J, \mu)$, når μ er tællemålet i $J \neq \varnothing$. Er en funktion på J skrevet som en familie $(a_j)_{j\in J}$ af reelle (eller komplekse) tal, har vi

$$(a_j)_{j\in J} \in \ell_p(J) \Leftrightarrow \sum_{j\in J} |a_j|^p < \infty\,,$$

og i bekræftende fald

$$\|(a_j)_{j\in J}\|_p = \left(\sum_{j\in J} |a_j|^p\right)^{1/p}\,.$$

Her er $\|\cdot\|_p$ en norm (og ikke blot en seminorm).

c) For $\ell_p(\mathbb{N})$ skrives også ℓ_p. Altså

$$\ell_p = \{a = (a_1, a_2, \dots) \mid \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty\}$$

$$\|a\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{1/p} \quad \text{når } a = (a_1, a_2, \dots) \in \ell_p\,.$$

d) Bemærk, at $\ell_p(\{1, \dots, k\})$ netop er $\mathbb{R}^k$ (eller $\mathbb{C}^k$), med

$$\|(x_1, \dots, x_k)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p\right)^{1/p}\,.$$

Som specialtilfælde af Hölders og Minkowskis uligheder har vi her

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j y_j| \le \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^q\right)^{1/q}$$

når $x_j, y_j \in \mathbb{C}$, $1 < p, q < \infty$ og $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, henholdsvis

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^p\right)^{1/p}$$

når $x_j, y_j \in \mathbb{C}$ og $1 \le p < \infty$. Det er disse uligheder, der skyldes henholdsvis Otto Hölder (1889) og Hermann Minkowski (1896).

7.14. HISTORISKE KOMMENTARER. Ligesom $\|\cdot\|_p$ i $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{C}^k$ er en generalisation af tilfældet $p = 2$, således er rummene ℓ_p og $\mathcal{L}_p([a, b])$ først indført og studeret for $p = 2$. (David Hilbert, Erhard Schmidt, Frédéric Riesz, Ernst Fischer, 1906-1908.) Tilfældet $p = 2$ er også langt det mest interessante, idet $L_2(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et *Hilbert rum*, dvs. et fuldstændigt normeret vektorrum, hvor normen udspringer af et skalarprodukt $(x, y) = x{\cdot}y$ ved formlen $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$. I dette tilfælde er skalarproduktet givet ved

$$([f], [g]) = \int f(x)\overline{g(x)}d\mu(x) \text{ for } [f], [g] \in L_2(X, \mathbb{E}, \mu)\,.$$

For vilkårligt p, $1 < p < \infty$, er $\mathcal{L}_p([a, b])$ indført af den ungarske matematiker Frédéric Riesz (Mathematische Annalen **69** (1910), p.449 ff.).

7.4. Fischers fuldstændighedssætning

Begreberne Cauchy følge og fuldstændighed defineres i et pseudometrisk rum på nøjagtig samme måde som i et metrisk rum.

I et vektorrum $\mathcal{V}$ med seminorm $\|\cdot\|$ kan man indføre begreberne konvergent og absolut konvergent uendelig række.

DEFINITION 7.15. En uendelig række $\sum_1^\infty x_k$ med elementer fra $\mathcal{V}$ kaldes *konvergent* med sum s såfremt afsnitsfølgen $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ konvergerer mod s. Rækken kaldes *absolut konvergent* såfremt rækken af positive tal $\sum \|x_k\|$ er konvergent, altså såfremt $\sum_1^\infty \|x_k\| < \infty$.

Fra Mat 1 MA vides, at for rækker med komplekse led, vil absolut konvergens medføre konvergens. Dette skyldes fuldstændigheden af $\mathbb{C}$, og mere generelt gælder følgende fundamentale resultat:

SÆTNING 7.16. *Et vektorrum $\mathcal{V}$ med seminorm er fuldstændigt, hvis og kun hvis "absolut konvergens medfører konvergens", altså hvis og kun hvis enhver række $\sum_1^\infty x_k$ med led fra $\mathcal{V}$, hvor $\sum_1^\infty \|x_k\| < \infty$, er konvergent i $\mathcal{V}$.*

Bevis. 1° Antag først, at $\mathcal{V}$ er fuldstændigt, og at rækken $\sum x_k$ er absolut konvergent. Sættes $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$, har man

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|\,,$$

og da rækken $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|$ er konvergent følger af udsnitskriteriet, at (s_n) er en Cauchy følge, altså konvergent. Dermed er $\sum_1^\infty x_k$ konvergent.

2° Antag dernæst at "absolut konvergens medfører konvergens" og lad (x_n) være en Cauchy følge i $\mathcal{V}$. Vi kan vælge $n_1 < n_2 < \dots$ således at $\|x_n - x_m\| \le 2^{-k}$ for $n, m \ge n_k$, og dermed har vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty \, .$$

(Rækkens sum er faktisk ≤ 1.) Rækken

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\big)$$

er altså absolut konvergent, og dermed konvergent, så der findes $x \in \mathcal{V}$, så afsnitsfølgen $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ konvergerer mod x. Men så vil også (x_n) konvergere mod x, hvilket ses af uligheden

$$\|x - x_n\| \le \|x - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x_n\| \, ,$$

jf. opg. I.5.1. $\square$

Spørgsmålet om fuldstændighed af et vektorrum med seminorm, kan føres tilbage til det tilsvarende spørgsmål for normerede rum, idet der gælder:

SÆTNING 7.17. *Lad $\mathcal{V}$ være et vektorrum med seminorm, V det tilsvarende normerede rum af ækvivalensklasser ved relationen $x \sim y \Leftrightarrow \|x - y\| = 0$. Så er $\mathcal{V}$ fuldstændigt, hvis og kun hvis V er fuldstændigt, altså et Banach rum.*

Bevis. Idet der for $x, y \in \mathcal{V}$ gælder

$$\|x - y\| = \|[x] - [y]\| = \|[x - y]\| \, ,$$

så følger, at (x_n) er konvergent (henholdsvis en Cauchy følge) i $\mathcal{V}$, hvis og kun hvis $([x_n])$ er konvergent (henholdsvis en Cauchy følge) i V. $\square$

Med $\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p \, dx)^{1/p}$, hvor $1 \le p < \infty$, er det ofte langt mere hensigtsmæssigt at benytte Lebesgue rummet $L_p([a,b])$ i stedet for f.eks. rummet $C([a,b])$ af kontinuerte funktioner, idet $L_p([a,b])$ er fuldstændigt, medens $C([a,b])$ ikke er fuldstændigt ved $\|\cdot\|_p$, (jf. opg. 7.18). Forholdet er som mellem $\mathbb{R}$ og $\mathbb{Q}$.

Der gælder nemlig følgende hovedsætning:

Sætning 7.18. (Fischers fuldstændighedssætning). *Lad* $(X, \mathbb{E}, \mu)$ *være et målrum og* $1 \le p < \infty$. *Funktionsrummet* $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ *er fuldstændigt. Anderledes sagt: Lebesgue rummet* $L_p = L_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ *er et Banach rum.*

For $\mathcal{L}_2([a,b])$ skyldes sætningen den østrigske matematiker Ernst Fischer (1875- 1959). (Sur la convergence en moyenne, C.R.A.S. **144**, Paris 1907, p.1023. Han benyttede straks resultatet til et elegant bevis (ibid.p.1024) for Riesz-Fischers sætning om Fourier rækker, – en af Lebesgue integralets største triumfer. Denne sætning behandles i Mat 2 MA kap.IV.)

Bevis. Vi benytter Sætning 7.16 og betragter altså en række $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ med led $g_k \in \mathcal{L}_p$, hvor $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty$, og søger en funktion $f \in \mathcal{L}_p$, således at

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} g_k\|_p \to 0 \text{ for } n \to \infty .$$

Eftersøgningen viser sig at lykkes ved, at rækken $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ er punktvis konvergent næsten overalt med en sumfunktion, der kan bruges:

1° Med

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|, \quad x \in X ,$$

vil $h : X \to [0, \infty]$ tilhøre $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$, og rækken $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ er (absolut) konvergent i hvert punkt $x \in X$, hvor $h(x) < \infty$.

2° For $n \to \infty$ har vi $\sum_{k=1}^{n} |g_k(x)| \nearrow h(x)$ for alle $x \in X$ og dermed

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |g_k(x)| \right)^p \nearrow (h(x))^p ,$$

idet vi regner $\infty^p = \infty$. Lebesgues monotonisætning giver da

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} |g_k| \right)^p d\mu \nearrow \int h^p d\mu ,$$

altså

$$\| \sum_{k=1}^{n} |g_k| \|_p \nearrow \left(\int h^p d\mu \right)^{1/p} .$$

Idet $\| \sum_{k=1}^{n} |g_k| \|_p \le \sum_{k=1}^{n} \|g_k\|_p$ for alle $n \in \mathbb{N}$, finder vi som resultat:

$$\left(\int h^p d\mu \right)^{1/p} \le \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty .$$

3° Da $\int h^p d\mu < \infty$, slutter vi af Korollar 4.5, at

$$N = \{x \mid h(x) = \infty\} = \{x \mid (h(x))^p = \infty\} \in \mathbb{E}$$

har mål $\mu(N) = 0$. Rækken $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ er altså absolut konvergent for μ-næsten alle $x \in X$, og dermed kan vi definere $f : X \to \mathbb{C}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) & \text{for } x \in X \setminus N\,, \\ 0 & \text{for } x \in N\,. \end{cases}$$

4° $f \in \mathcal{L}_p$ og $\|f\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p$.

At f er målelig følger af "Tuborg-resultatet" Sætning 2.13 og sætninger om regning og grænseovergang med målelige funktioner. Videre har vi $|f(x)| \leq h(x)$, $x \in X$, hvoraf

$$\left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int h^p d\mu\right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty\,.$$

5° $\|f - \sum_{k=1}^{n} g_k\|_p \to 0$ for $n \to \infty$.

Dette følger umiddelbart af Sætning 7.10, idet $\sum_1^n g_k \to f$ μ-n.o., og h er en majorant af den ønskede type. □

Bemærkning 7.19. *Vi har faktisk vist følgende:*

En række $\sum_1^{\infty} g_k$ med led fra $\mathcal{L}_p$, så $\sum_1^{\infty} \|g_k\|_p < \infty$, konvergerer punktvis absolut næsten overalt og i p-middel mod en funktion $f \in \mathcal{L}_p$, som opfylder

$$\|f\|_p \leq \sum_1^{\infty} \|g_k\|_p\,.$$

Denne ulighed kan lidt farligt skrives

$$\|\sum_1^{\infty} g_k\|_p \leq \sum_1^{\infty} \|g_k\|_p\,,$$

og fremtræder derved som en generalisation af Minkowskis ulighed.

Korollar 7.20. *Enhver følge $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, der konvergerer i p-middel mod $f \in \mathcal{L}_p$, har en delfølge $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots$, der konvergerer punktvis* *mod f næsten overalt. Det er endda muligt at opnå, at (f_{n_p}) har en majorant $g \in \mathcal{M}^+$ med $\int g^p d\mu < \infty$, altså så $|f_{n_p}| \leq g$ for $p = 1, 2, \cdots$.*

Thi vælges $n_1 < n_2 < \ldots$, således at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \infty$$

(jf. 2°, p.7.12), da vil følgen $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$, – som afsnitsfølge for rækken $f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$, – konvergere både næsten overalt og i p-middel mod en funktion $\tilde{f} \in \mathcal{L}_p$. Da også $f_{n_k} \to f$ i $\mathcal{L}_p$, sluttes, at $\|\tilde{f} - f\|_p = 0$, altså $f = \tilde{f}$ næsten overalt. Som majorant kan benyttes

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \, .$$

KOROLLAR 7.21. *Hvis en følge $f_1, f_2, \cdots \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ konvergerer i p-middel mod $\varphi_1 \in \mathcal{L}_p$ og punktvis mod φ_2 næsten overalt, da er $\varphi_1 = \varphi_2$ næsten overalt.*

Thi en passende delfølge konvergerer næsten overalt mod φ_1, foruden naturligvis tillige mod φ_2.

7.5. Funktionsrummet $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$

Betragtet med den uniforme norm

$$\|f\|_u = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

er funktionsrummet $\mathcal{B}(X)$ af begrænsede funktioner $f : X \to \mathbb{R}$ (eller $f : X \to \mathbb{C}$) på en mængde $X \neq \varnothing$ fuldstændigt, altså et Banach rum. (Jf. Sætning I.5.7). Ifølge §§2.2 og 2.3 er mængden $\mathcal{M}_b(X, \mathbb{E})$ af begrænsede $\mathbb{E}$-målelige funktioner et afsluttet underrum af $\mathcal{B}(X)$, altså også et Banach rum. Vi vil nu definere rummet $\mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$, der vil komme til at omfatte $\mathcal{M}_b(X, \mathbb{E})$.

Et tal $a \in [0, \infty]$ siges at være et *μ-essentielt overtal* for funktionen $f : X \to [0, \infty]$, hvis

$$f(x) \leq a \text{ for } \mu\text{-næsten alle } x \in X \, .$$

Enhver funktion $f : X \to [0, \infty]$ har et mindste essentielt overtal $M \in [0, \infty]$. Det kaldes det *μ-essentielle supremum* for f og betegnes $\operatorname{ess.sup} f$.

Thi f har i hvert fald et essentielt overtal, nemlig ∞, og

$$M = \inf\{a \in [0,\infty] \mid f(x) \le a \text{ for } \mu\text{-næsten alle } x \in X\}$$

er selv et essentielt overtal for f, – og dermed det mindste. For hvert $k \in \mathbb{N}$ findes jo en mængde $N_k \in \mathbb{E}$ med $\mu(N_k) = 0$, således at

$$f(x) \le M + \frac{1}{k} \text{ for } x \notin N_k\,,$$

men så er

$$f(x) \le M \text{ for } x \notin \bigcup_k N_k\,,$$

og $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k) = 0$.

En funktion f defineret på X, med værdier i $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$, siges at være *μ-essentielt begrænset*, hvis der findes et $a \in [0,\infty[$, således at

$$|f(x)| \le a \text{ for } \mu\text{-næsten alle } x \in X\,,$$

dvs. hvis $\operatorname{ess.sup}|f| < \infty$.

Med $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ betegnes mængden af μ-essentielt begrænsede, $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f: X \to \mathbb{R}$ eller $f: X \to \mathbb{C}$. Man verificerer umiddelbart, at $\mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ er et funktionsvektorrum, og at der ved

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess.sup}|f|, \quad f \in \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$$

defineres en seminorm $\|\cdot\|_\infty$ i $\mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$. Bemærk, at $\mathcal{M}_b(X,\mathbb{E}) \subseteq \mathcal{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$, og for $f \in \mathcal{M}_b(X,\mathbb{E})$ gælder $\|f\|_\infty \le \|f\|_u$, men i almindelighed gælder der ikke lighedstegn.

Det til $\|\cdot\|_\infty$ svarende konvergensbegreb er uniform konvergens næsten overalt: *Med $f_1, f_2, \dots$ og f tilhørende $\mathcal{L}_\infty$ vil $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, hvis og kun hvis der findes en mængde $N \in \mathbb{E}$ med $\mu(N) = 0$, således at $f_n(x) \to f(x)$ uniformt for $x \in X \setminus N$.*

Thi for hvert $n \in \mathbb{N}$ findes en mængde $N_n \in \mathbb{E}$ med $\mu(N_n) = 0$, således at uligheden

$$|f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_\infty$$

er opfyldt for alle $x \notin N_n$. Med $N = \bigcup_n N_n$ vil der så være uniform konvergens i $X \setminus N$, hvis $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Omvendt: Uniform konvergens i $X \setminus N$ kommer ud på, at

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in X \setminus N\} \to 0 \text{ for } n \to 0\,,$$

og når $\mu(N) = 0$, er

$$\|f_n - f\|_\infty \le \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in X \setminus N\}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

SÆTNING 7.22. *Funktionsrummet $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$ forsynet med seminormen $\|f\|_\infty = \text{ess.}\sup|f|$ er fuldstændigt.*

Funktionsrummet $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$ går altså over i et Banach rum, betegnet $L_\infty = L_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$, når funktionerne samles i klasser ved ækvivalensrelationen

$$f \sim g \Leftrightarrow \|f - g\|_\infty = 0\,,$$

dvs.

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ næsten overalt m.h.t. } \mu\,.$$

Bevis. Lad $f_1, f_2, \dots$ være en Cauchy følge i $\mathcal{L}_\infty$.

For hvert $m, n \in \mathbb{N}$ kan vi tænke os valgt en mængde $N_{mn} \in \mathbb{E}$ med $\mu(N_{mn}) = 0$, således at

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le \|f_m - f_n\|_\infty \text{ for } x \notin N_{mn}\,.$$

Vi vælger yderligere en mængde $N_1 \in \mathbb{E}$ med $\mu(N_1) = 0$, således at restriktionen $f_1|(X \setminus N_1)$ er begrænset, og sætter $N = N_1 \cup \bigcup_{mn} N_{mn}$. Så er $N \in \mathbb{E}$ med $\mu(N) = 0$, og

$$f_1|(X \setminus N), \quad f_2|(X \setminus N), \dots$$

er en Cauchy følge i $\mathcal{B}(X \setminus N)$, betragtet med den uniforme norm. (Det er klart, at $X \setminus N \neq \varnothing$, medmindre vi er i det trivielle tilfælde $\mu(X) = 0$.) Følgen konvergerer da uniformt mod en funktion i $\mathcal{B}(X \setminus N)$. Med

$$f(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x) & \text{for } x \in X \setminus N \\ 0 & \text{for } x \in N \end{cases}$$

er så $f \in \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. □

BEMÆRKNING 7.23. HÖLDERS ULIGHED (Sætning 7.5) gælder også med $p = 1$, $q = \infty$:

Når $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $g \in \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$, da er $fg \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og

$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu \le \|f\|_1 \|g\|_\infty\,.$$

Thi $|f(x)g(x)| \le |f(x)| \|g\|_\infty$ for μ-næsten alle $x \in X$.

SÆTNING 7.24. *Lad* $1 \le p < \infty$. *Hvis* $\mu(X) < \infty$, *så er* $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu) \supseteq \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$ *og*

$$\|f\|_p \le \|f\|_\infty \mu(X)^{1/p} \quad \textit{for} \quad f \in \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)\,.$$

Hvis $\mu(X) = 1$, *gælder specielt* $\|f\|_p \le \|f\|_\infty$ *for* $f \in \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Thi når $f \in \mathcal{L}_\infty$, er $|f(x)|^p \le \|f\|_\infty^p$ for μ-næsten alle $x \in X$ og dermed har vi

$$\int |f|^p d\mu \le \int \|f\|_\infty^p d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(X)\,.$$

På grund af ovenstående kaldes tallene 1 og ∞ for *duale eksponenter*.

EKSEMPEL 7.25: ℓ_∞(J).

Idet $\ell_\infty(J)$ står for $\mathcal{L}_\infty(J, \mu)$, hvor μ er tællemålet i $J \neq \varnothing$, har vi $\ell_\infty(J) = \mathcal{B}(J)$ og

$$\|(a_j)_{j\in J}\|_\infty = \|(a_j)_{j\in J}\|_u = \sup_{j\in J} |a_j|\,.$$

Det følger af, at $\varnothing$ er den eneste mængde med $\mu(\varnothing) = 0$. Bemærk, at $\ell_p(J) \subseteq \ell_\infty(J)$ for $1 \le p < \infty$.

Specielt er $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ rummet af begrænsede talfølger.

EKSEMPEL 7.26: $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^k) = \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k, m_k)$.

En *kontinuert* funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (eller $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$) tilhører $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^k)$, hvis og kun hvis den er begrænset. I bekræftende fald er

$$\|f\|_\infty = \|f\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}^k} |f(x)|\,.$$

Thi er $|f(x_0)| > a$, så er $|f(x)| > a$ for alle x i en omegn af x_0, og dermed $m_k(\{x \mid |f(x)| > a\}) > 0$. Der er derfor ikke flere essentielle overtal for $|f|$, end der er overtal.

Ved til $f \in C_b(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^k)$ at knytte ækvivalensklassen $[f] \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ defineres en *isometrisk* afbildning af $C_b(\mathbb{R}^k)$ ind i $L_\infty(\mathbb{R}^k)$. Der gælder nemlig

$$\|[f] - [g]\|_\infty = \|[f - g]\|_\infty = \|f - g\|_\infty = \|f - g\|_u \ \text{ for } \ f, g \in C_b(\mathbb{R}^k)\,.$$

Afbildningen $f \mapsto [f]$ af $C_b(\mathbb{R}^k)$ ind i $L_\infty(\mathbb{R}^k)$ er specielt injektiv, og man tillader sig derfor ofte at skrive $C_b(\mathbb{R}^k) \subseteq L_\infty(\mathbb{R}^k)$. Sagt med andre ord: Ækvivalensklassen $[f]$ indeholdende $f \in C_b(\mathbb{R}^k)$ indeholder ikke andre funktioner fra $C_b(\mathbb{R}^k)$ end f.

7.6. Approksimation i middel

Sætningerne i denne paragraf er nyttige ved, at de ofte gør det muligt at vise egenskaber for alle funktioner i et Banach rum, blot disse egenskaber er kendt for simple eller særligt pæne funktioner.

En delmængde A af et pseudometrisk rum (M,d) siges, ganske som i et metrisk rum, at være *overalt tæt* i M hvis $\overline{A}=M$, dvs. hvis

$$\forall x \in M\, \forall \varepsilon > 0\, \exists a \in A : d(x,a) < \varepsilon\,.$$

I ord betyder det, at ethvert element i M skal kunne approksimeres vilkårligt godt med elementer fra A.

En delmængde A af et vektorrum $\mathcal{V}$ med seminorm, siges at være *total* i $\mathcal{V}$, hvis det af A udspændte underrum $\operatorname{span} A$ er tæt i $\mathcal{V}$. Der kræves altså at ethvert element i $\mathcal{V}$ kan approksimeres vilkårligt godt med linearkombinationer af elementer fra A.

Lad os betragte $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ for $1 \le p < \infty$. Mængden af simple $\mathcal{L}_p$-funktioner, altså $\mathcal{L}_p$-funktionerne med kun endeligt mange funktionsværdier, er lig med

$$\operatorname{span}\{1_A | A \in \mathbb{E},\ \mu(A) < \infty\}\,.$$

Sætning 7.27. *For ethvert målrum $(X,\mathbb{E},\mu)$ og $1 \le p < \infty$ er mængden af simple $\mathcal{L}_p$-funktioner overalt tæt i $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$.*

Bevis. Vi viser først, at $f \in \mathcal{L}_p$, $f \ge 0$, kan approksimeres vilkårligt godt med simple $\mathcal{L}_p$-funktioner. Der findes en følge $0 \le g_1 \le g_2 \le \dots$ af simple målelige funktioner, så $g_n \nearrow f$ (jf. Sætning 4.1). Idet $0 \le g_n \le f$ og $f \in \mathcal{L}_p$, sluttes $g_n \in \mathcal{L}_p$, og $\|f-g_n\|_p \to 0$ (Sætning 7.10).

En reel funktion $f \in \mathcal{L}_p$ kan spaltes $f = f^+ - f^-$, og $f^+, f^- \in \mathcal{L}_p$ er ≥ 0. Til givet $\varepsilon > 0$, kan vi ifølge det netop viste, finde positive simple $\mathcal{L}_p$-funktioner g_1 og g_2, så $\|f^+ - g_1\|_p < \varepsilon/2$, $\|f^- - g_2\|_p < \varepsilon/2$. Funktionen $g = g_1 - g_2$ er da en simpel $\mathcal{L}_p$-funktion, og

$$\|f-g\|_p \le \|f^+ - g_1\|_p + \|f^- - g_2\|_p < \varepsilon\,.$$

Det komplekse tilfælde reduceres let til det reelle. □

En version af Sætning 7.27 for $p=\infty$ findes i opg. 7.28.

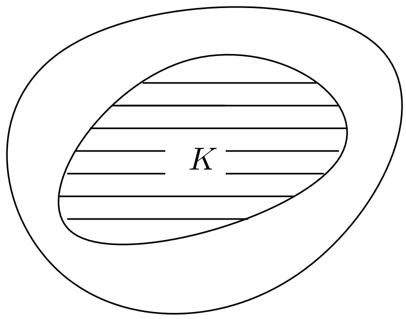
I resten af paragraffen antages at $X = \mathbb{R}^k$, $\mathbb{E} = \mathbb{B}_k$ og μ antages at være et Radon mål, altså et mål på $\mathbb{B}_k$, som er endeligt på begrænsede Borel mængder.

Sætning 7.28. *For ethvert Radon mål μ på $\mathbb{R}^k$ og $1 \le p < \infty$ er rummet $C_c(\mathbb{R}^k)$ af kontinuerte funktioner med kompakt støtte tæt i $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k, \mu)$.*

Bevis. Til $B \in \mathbb{B}_k$ med $\mu(B) < \infty$ og $\varepsilon > 0$, kan man ifølge egenskab (ii) i Bemærkning 5.9 finde en kompakt mængde $K \subseteq B$, så $\mu(B \setminus K)^{1/p} < \varepsilon^{1/p}$. Dette kombineret med Sætning 7.27 viser, at $\{1_K \mid K \text{ kompakt i } \mathbb{R}^k\}$ er total i $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k, \mu)$. Derfor er det nok til en kompakt mængde $K \subseteq \mathbb{R}^k$ og til $\varepsilon > 0$ at finde $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$, så $\|f - 1_K\|_p < \varepsilon$. Mængderne

$$G_n = \left\{x \in \mathbb{R}^k \mid d(x, K) < \frac{1}{n}\right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

udgør en dalende følge af åbne mængder (jf. opg. I.3.6) med $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = K$. Idet G_1 er begrænset, vil $\mu(G_n) \searrow \mu(K)$, så der findes $n \in \mathbb{N}$, så $\mu(G_n) < \mu(K) + \varepsilon^p$.



G_n

Funktionen (jf. opg.I.3.7)

$$f(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^k \setminus G_n)}{d(x, \mathbb{R}^k \setminus G_n) + d(x, K)}, \quad x \in \mathbb{R}^k,$$

er kontinuert, og opfylder $0 \le f \le 1$, $f(x) = 1$ for $x \in K$,

$$\{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) \neq 0\} = G_n \subseteq \{x \in \mathbb{R}^k \mid d(x, K) \le \tfrac{1}{n}\},$$

og da højresiden er kompakt, ser man, at f's støtte er kompakt. Under brug af uligheden

$$0 \le f - 1_K \le 1_{G_n \setminus K}$$

finder man $\|f - 1_K\|_p \le \mu(G_n \setminus K)^{1/p} < \varepsilon$. □

Advarsel. Sætning 7.28 kan ikke opretholdes for $p = \infty$, jf. opg. 7.22.

Rummet $C_c(\mathbb{R}^k)$ er et normeret rum under 1-normen

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^k} |f(x)| dm_k(x) ,$$

men det er *ikke* fuldstændigt. Ved at gå til det større rum $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k, m_k)$ opnår vi et fuldstændigt rum, men rummet er ikke større end, at $C_c(\mathbb{R}^k)$ ligger overalt tæt deri. Situationen er altså helt analog til udvidelsen fra $\mathbb{Q}$ til $\mathbb{R}$, jf. p. II.i.6.

For at se, at $C_c(\mathbb{R}^k)$ ikke er fuldstændigt, kan vi betragte f.eks. indikatorfunktionen f for enhedskuglen $K(0,1)$. På grund af Sætning 7.28, findes en følge (f_n) fra $C_c(\mathbb{R}^k)$, så $\|f - f_n\|_1 \to 0$. Dermed er (f_n) en Cauchy følge i $C_c(\mathbb{R}^k)$, og antog vi, at $C_c(\mathbb{R}^k)$ var fuldstændigt, så kunne vi finde $g \in C_c(\mathbb{R}^k)$, så $\|g - f_n\|_1 \to 0$. Vi har da $\|f - g\|_1 = 0$, altså

$$m_k(\{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0 .$$

Specielt er

$$\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| < 1, g(x) \neq 1\} \quad \text{og} \quad \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| > 1, g(x) \neq 0\}$$

begge Lebesgue nulmængder, men de er åbne, fordi g er kontinuert. Da $\varnothing$ er den eneste åbne Lebesgue nulmængde, har vi

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad \|x\| < 1 \\ 0 & \text{for} \quad \|x\| > 1 , \end{cases}$$

men det strider mod kontinuiteten af g.

Opgaver til §7

7.1. Lad $\mathcal{V}$ være et vektorrum med seminorm $\|\cdot\|$ og antag, at rækken $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ med led $g_k \in \mathcal{V}$ er konvergent med sum $f \in \mathcal{V}$. Vis, at

$$\|f\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\| .$$

7.2. Betragt målrummet $(X, \mathcal{P}(X), \varepsilon_a)$, hvor ε_a er Dirac målet i $a \in X$. Vis, at $\mathcal{L}_p(X, \mathcal{P}(X), \varepsilon_a) = \mathbb{C}^X$ for alle $p \in [1, \infty[$, og at $\|f\|_p = |f(a)|$.

Beskriv det til $\|\cdot\|_p$ svarende konvergensbegreb. Gør rede for, at det normerede rum $L_p(X)$ er isometrisk isomorft med $\mathbb{C}$ ved afbildningen $[f] \mapsto f(a)$.

7.3. Lad $f_1, f_2, \ldots$ og f tilhøre $\mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$. Vis implikationen

$$f_n \to f \text{ i 1-middel } \Rightarrow \int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu .$$

7.4. Vis, at

$$f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu) \Leftrightarrow |f|^{p-1} f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu) ,$$

når $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et målrum, $p \in]1, \infty[$ og $f : X \to \mathbb{C}$. (Glem ikke at vise, at

$$|f|^{p-1} f \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig } \Rightarrow f \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig.})$$

7.5.

1° Lad $0 < p < 1$ være fast.

Vis uligheden

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \quad \text{for} \quad a, b \geq 0 .$$

Idet man for $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sætter $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$, skal man finde to talpar $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, så

$$\|x + y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p .$$

2° For et målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $0 < p < 1$, defineres $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ som mængden af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f : X \to \mathbb{C}$ opfyldende

$$\int |f|^p d\mu < \infty .$$

Vis, at $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et funktionsvektorrum, og at

$$d_p(f,g) = \int |f-g|^p d\mu$$

er en pseudometrik på $\mathcal{L}_p$.

3° Angiv funktioner $f, g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, så

$$\|f+g\|_p > \|f\|_p + \|g\|_p \,,$$

idet $\|f\|_p = (\int |f|^p dm)^{1/p}$.

7.6. Hölders ulighed for positive funktioner.

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, og antag at $p, q > 1$ opfylder $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Vis, at

$$\int fg d\mu \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q d\mu\right)^{1/q}$$

for vilkårlige $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$. – Vi regner $\infty^s = \infty$ for $s \in \mathbb{R}_+$.

7.7. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum med $X \neq \varnothing$, og antag $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{\ell} = 1$, med $0 < k < 1$, $\ell < 0$. Vis

$$\int fg d\mu \geq \left(\int f^k d\mu\right)^{1/k} \left(\int g^\ell d\mu\right)^{1/\ell}$$

for vilkårlige $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$. – Her regnes $\infty^s = \infty$, $\infty^{-s} = 0$ og $0^{-s} = \infty$ for $s > 0$.

Bemærk, at Hölders ulighed er vendt.

(*Vink:* Antag $\mu(\{x \mid f(x) > 0\}) > 0$, $\mu(\{x \mid g(x) = 0\}) = 0$, samt $\mu(\{x \mid f(x) > 0, g(x) = \infty\}) = 0$, og anvend opg. 7.6 med $p = 1/k$ og $(fg)^k$, g^{-k} i stedet for f, g.)

7.8. Minkowskis ulighed for positive funktioner.

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, og antag $1 < p < \infty$. Vis, at

$$\left(\int (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p} \,,$$

for vilkårlige $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$. – Vi regner $\infty^s = \infty$ for $s > 0$.

7.9. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum med $X \neq \varnothing$, og antag $0 < k < 1$. Vis, at

$$\left(\int (f+g)^k d\mu\right)^{1/k} \geq \left(\int f^k d\mu\right)^{1/k} + \left(\int g^k d\mu\right)^{1/k} \,,$$

for vilkårlige $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$. – Vi regner $s^\infty = \infty$ for $s > 0$.

Bemærk, at Minkowskis ulighed er vendt.

(*Vink:* Antag $0 < \int (f+g)^k d\mu < \infty$, og anvend opg. 7.7.)

7.10. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, og antag at $p, q > 1$ opfylder $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ samt at $f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$. For $z \in \mathbb{C}$ defineres $\operatorname{sgn} z$ (læses signum z) ved

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} z/|z|, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

1° Sæt $g = |f|^{p-1} \operatorname{sgn} f$ og vis, at $g \in \mathcal{L}_q(X, \mathbb{E}, \mu)$,

$$f = |g|^{q-1} \operatorname{sgn} g, f\overline{g} = |f|^p = |g|^q,$$

og

$$\int f\overline{g} d\mu = \|f\|_p \|g\|_q.$$

2° Vis, at

$$\|f\|_p = \max \left| \int f h d\mu \right|,$$

hvor maksimum tages over alle $h \in \mathcal{L}_q(X, \mathbb{E}, \mu)$ med $\|h\|_q \leq 1$.

3° Vis, at $T_f : L_q(X, \mathbb{E}, \mu) \to \mathbb{C}$ givet ved $T_f([h]) = \int f h d\mu$ er en kontinuert linearform med $\|T_f\| = \|f\|_p$.

7.11. Antag $k \in \mathcal{L}_p(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}, \mu \otimes \nu)$, hvor $\mu : \mathbb{E} \to [0, \infty]$ og $\nu : \mathbb{F} \to [0, \infty]$ er σ-endelige mål i mængder X og Y, medens $p \in]1, \infty[$. Vi forudsætter $\mu(X) > 0$.

1° Vis, at snitfunktionen $y \mapsto k(x, y)$, $y \in Y$, tilhører $\mathcal{L}_p(Y, \mathbb{F}, \nu)$ for μ-næsten alle $x \in X$.

Idet $g \in \mathcal{L}_q(Y, \mathbb{F}, \nu)$, hvor $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, sætter vi

$$f(x) = \int_Y k(x, y) g(y) d\nu(y)$$

for hvert $x \in X$, hvor funktionen $y \mapsto k(x, y) g(y)$, $y \in Y$, er integrabel med hensyn til ν.

2° Begrund, at $f(x)$ er defineret for μ-næsten alle $x \in X$. Vis, at enhver $\mathbb{E}$-målelig udvidelse af f til hele X, tilhører $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, og opfylder

$$\|f\|_p \leq \|k\|_p \|g\|_q,$$

(idet udvidelsen stadig kaldes f).

3° Vis, at der ved $[g] \mapsto [f]$ defineres en kontinuert lineær afbildning $T : L_q(Y) \to L_p(X)$ med $\|T\| \leq \|k\|_p$.

7.12. Vis, at der hverken gælder $\mathcal{L}_r(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$ eller $\mathcal{L}_s(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}_r(\mathbb{R})$, når $0 < r < s$.

7.13. Antag $J \neq \varnothing$. Vis, at $\ell_r(J) \subseteq \ell_s(J)$ for $0 < r < s$, samt at $\|x\|_r \geq \|x\|_s$, når $x = (x_j)_{j \in J} \in \ell_r(J)$. (*Vink:* Antag $\|x\|_r = 1$.)

7.14. Vis: (a) $\ell_1 \subset \bigcap_{s>1} \ell_s$, (b) $\forall r \in \mathbb{R}_+ : \ell_r \subset \bigcap_{s>r} \ell_s$ ($\subset$ betyder $\subseteq$ og $\neq$.)

7.15. Antag $f \in \mathcal{L}_q(X, \mathbb{E}, \mu) \cap \mathcal{L}_s(X, \mathbb{E}, \mu)$, hvor $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et målrum og $0 < q < s$.

Vis, at $f \in \mathcal{L}_r(X, \mathbb{E}, \mu)$ for ethvert $r \in]q, s[$.

7.16. For hvilke $p > 0$ er $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)$, når

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{for} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{for} \quad 1 < x < \infty ? \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1/x & \text{for} \quad 1 < x < \infty ? \end{cases}$$

7.17. Vis, at $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow p = 2$, når

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1 + |\log x|)}, \quad x \in \mathbb{R}_+ .$$

7.18. Vis, at funktionsrummet $C([0,1])$ af kontinuerte funktioner $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ med normen $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ ikke er fuldstændigt.

(*Vink:* Lad $(a_n)_{n \geq 1}$ være en følge fra $]0, \frac{1}{2}[$, der konvergerer mod $\frac{1}{2}$ for $n \to \infty$, og betragt funktionsfølgen

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x \in [0, a_n[\\ \dfrac{x - a_n}{1/2 - a_n} & \text{for} \quad x \in [a_n, \frac{1}{2}[\\ 1 & \text{for} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1].) \end{cases}$$

Funktionsrummet $\mathcal{L}_\infty$

7.19. Vis:

$$\forall p \in \mathbb{R}_+ : \log \in \mathcal{L}_p(]0,1]), \qquad \text{men } \log \notin \mathcal{L}_\infty(]0,1]),$$
$$\forall p \in \mathbb{R}_+ : \frac{1}{\log} \notin \mathcal{L}_p(]1,\infty[), \quad \text{men } \frac{1}{\log} \in \mathcal{L}_\infty(]2,\infty[).$$

7.20. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, og antag $f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ for alle $p \in [p_0, \infty[$, hvor $p_0 \in \mathbb{R}_+$. Vis, at

$$\|f\|_p \to \ \text{ess.sup}\,|f| \ \text{ for } \ p \to \infty\,.$$

(Heri ligger én motivering for definitionen af $\mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$ og $\|\cdot\|_\infty$.)

(*Vink:* Vis, at $\|f\|_p \geq a\mu(A)^{1/p}$, når $a <$ ess. sup $|f|$, og $A = \{x \mid |f(x)| > a\}$. Vis desuden, at $\|f\|_p \leq (\int |f|^{p_0} d\mu)^{1/p}$, når ess. sup $|f| = 1$.)

7.21.

1° Antag $f \in \mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$, hvor $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et σ-endeligt målrum. Vis, at

$$\|f\|_\infty = \sup \left| \int f h d\mu \right|,$$

hvor supremum tages over alle $h \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ med $\|h\|_1 \leq 1$.

2° Vis, at $[h] \mapsto \int f h d\mu$ er en kontinuert lineær afbildning $T : L(X, \mathbb{E}, \mu) \to \mathbb{C}$ med $\|T\| = \|f\|_\infty$.

7.22. Er $C_b(\mathbb{R})$ afsluttet i $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R})$? Er $\{[f] \mid f \in C_b(\mathbb{R})\}$ afsluttet i $L_\infty(\mathbb{R})$?

7.23. Vis, at et delrum $\mathcal{U}$ af et separabelt, pseudometrisk rum $\mathcal{V}$ igen er separabelt. (Et pseudometrisk rum kaldes *separabelt*, hvis det har en tællelig overalt tæt delmængde.)

(*Vink:* Lad følgen $y_1, y_2, \ldots$ ligge overalt tæt i $\mathcal{V}$ og sæt

$$d_n = \inf_{x \in \mathcal{U}} d(y_n, x)\,.$$

Hvis $d_n > 0$, vælges $x_n \in \mathcal{U}$, så $d(y_n, x_n) < 2d_n$, og hvis $d_n = 0$, vælges $x_{n1}, x_{n2}, \dots \in \mathcal{U}$, så $d(y_n, x_{nk}) \to 0$ for $k \to \infty$.)

7.24. Vis, at et vektorrum med seminorm, der har en tællelig total delmængde, er separabelt.

7.25.

1° Idet $J \neq \varnothing$, vil vi med $k(J)$ betegne mængden af familier $(a_j)_{j \in J}$ med $a_j \in \mathbb{R}$ (eller $a_j \in \mathbb{C}$), hvor $a_j \neq 0$ for højst endelig mange $j \in J$. Vis, at $k(J)$ er tæt i $\ell_p(J)$ ved $\|\cdot\|_p$, for ethvert $p \in [1, \infty[$.

2° Vis, at $\ell_p = \ell_p(\mathbb{N})$ er separabelt for ethvert $p \in [1, \infty[$.

7.26.

1° Lad $\mathcal{V}$ være et pseudometrisk rum og antag, at der findes et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ og en ikke tællelig delmængde $A \subseteq \mathcal{V}$, således at

$$d(x, y) > \varepsilon \ \text{ når } \ x \neq y\,, x, y \in A\,.$$

Vis, at $\mathcal{V}$ ikke er separabelt.

2° Vis, at $\mathcal{L}_\infty([0,1])$ ikke er separabelt ved $\|\cdot\|_\infty$.

3° Vis, at $\ell_p(J)$ ikke er separabelt ved $\|\cdot\|_p$, når J ikke er tællelig og $1 \le p \le \infty$. Vis, at $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ ikke er separabelt ved $\|\cdot\|_\infty$.

7.27. Med k, c_0 og c betegner vi mængden af reelle (eller komplekse) talfølger $x = (x_1, x_2, \dots)$, hvor henholdsvis

(1) $x_n \neq 0$ for højst endelig mange $n \in \mathbb{N}$,

(2) $x_n \to 0$ for $n \to \infty$,

(3) $x_1, x_2, \dots$ er konvergent i $\mathbb{R}$ (eller i $\mathbb{C}$).

1° Bestem afslutningen af k, c_0 og c i ℓ_∞ betragtet med $\|\cdot\|_\infty$.

2° Hvilke af rummene k, c_0 og c er Banach rum ved $\|\cdot\|_\infty$?

3° Hvilke af rummene k, c_0 og c er separable ved $\|\cdot\|_\infty$?

7.28. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et vilkårligt målrum. Vis, at mængden $\{1_A | A \in \mathbb{E}\}$ er total i $\mathcal{L}_\infty(X)$.

7.28

§8. Fourier transformationen.

Som en vigtig anvendelse af Lebesgue integralet vil vi nu indføre Fourier transformationen, der har stor betydning i fysik, kemi og statistik, bl.a. til løsning af partielle differentialligninger.

Som sædvanlig betegner $\xi \cdot x$ skalarproduktet $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_k x_k$ for $\xi, x \in \mathbb{R}^k$. Som norm på $\mathbb{R}^k$ benyttes den euklidiske $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$. (Da der ikke kommer andre normer på $\mathbb{R}^k$ på tale skriver vi $\|x\|$ i stedet for $\|x\|_2$.)

8.1. Fourier transformation af integrable funktioner

DEFINITION 8.1 Når $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ tilhører $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$, defineres $\hat{f} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ ved

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-i\xi \cdot x} f(x)dx \ , \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^k. \tag{1}$$

Funktionen $\hat{f}$ (læses f-hat) kaldes den *Fourier transformerede* af f, og afbildningen $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ kaldes *Fourier transformationen.*

For hvert $\xi \in \mathbb{R}^k$ er $\hat{f}(\xi)$ veldefineret og $\hat{f}$ er en kontinuert funktion. Dette følger umiddelbart af Sætning 4.26 og Bemærkning 4.27 med $(X, \mathbb{E}, \mu) = (\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k, m_k)$ og I erstattet af $\mathbb{R}^k$, idet $g(x) = |f(x)|$ er en integrabel majorant for alle funktionerne $x \mapsto e^{-i\xi \cdot x} f(x)$, $\xi \in \mathbb{R}^k$. Af (1) fås desuden

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \le \int \left|e^{-i\xi \cdot x} f(x)\right| dx = \|f\|_1 \ , \ \xi \in \mathbb{R}^k \ ,$$

som viser, at $\hat{f}$ er begrænset med $\|\hat{f}\|_u \le \|f\|_1$. Fourier transformationen er dermed en lineær afbildning $\mathcal{F}\colon \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k) \to C_b(\mathbb{R}^k)$. Da $\hat{f}(\xi)$ åbenbart ikke ændres, hvis f ændres på en nulmængde, induceres en afbildning af $L_1(\mathbb{R}^k)$ ind i $C_b(\mathbb{R}^k)$, som vi ligeledes vil kalde Fourier transformationen og betegne ved $\mathcal{F}$, dvs.

$$\mathcal{F}([f]) = \hat{f} \quad \text{for} \quad f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k),$$

idet $[f] \in L_1(\mathbb{R}^k)$ betegner ækvivalensklassen bestemt ved f.

Vi har dermed vist følgende:

SÆTNING 8.2. *Fourier transformationen $\mathcal{F}$ er en kontinuert lineær afbildning af $L_1(\mathbb{R}^k)$ ind i $C_b(\mathbb{R}^k)$, og der gælder*

$$\|\hat{f}\|_u \le \|f\|_1 \quad \textit{for} \quad f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)\,. \tag{2}$$

EKSEMPEL 8.3. Lad $k = 1$. Funktionen $e^{-x^2/2}$ tilhører $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Man kan vise, f.eks. ved brug af kompleks funktionsteori (jf.kap.III og opg.8.4), at den Fourier transformerede af $\psi_1(x) = e^{-x^2/2}$ er

$$\hat{\psi}_1(\xi) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2}.$$

Formlen udvides til vilkårlig dimension $k \geq 1$ ved brug af Fubinis sætning: Lad

$$\psi_k(x_1, \dots, x_k) = e^{-(x_1^2+\cdots+x_k^2)/2} = e^{-\|x\|^2/2}$$

så er $\psi_k \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$, og

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_k(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-i\xi\cdot x}\psi_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-i\xi_1 x_1-\cdots-i\xi_k x_k} e^{-x_1^2/2-\cdots-x_k^2/2}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_1 x_1} e^{-x_1^2/2}dx_1 \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_k x_k} e^{-x_k^2/2}dx_k \\ &= (2\pi)^{k/2} e^{-\xi_1^2/2} \cdots e^{-\xi_k^2/2} = (2\pi)^{k/2} e^{-\|\xi\|^2/2}.\end{aligned}$$

Denne funktion, der altså har den usædvanlige egenskab at være lig med sin egen Fouriertransformerede, pånær en konstant faktor, spiller en særlig rolle i teorien. Af (2) følger, at normen $\|\mathcal{F}\|$ af $\mathcal{F}$ som kontinuert lineær afbildning af Banach rummet $L_1(\mathbb{R}^k)$ ind i Banach rummet $C_b(\mathbb{R}^k)$ er ≤ 1. Idet

$$\left\|(2\pi)^{-\frac{k}{2}}\psi_k\right\|_1 = 1\,, \quad \left\|e^{-\|\xi\|^2/2}\right\|_u = 1,$$

sluttes, at $\|\mathcal{F}\| = 1$.

8.2. Fourier transformation af Schwartz funktioner

For partielle differentialoperatorer bruger vi multi-index notation. Et multi-index er et sæt af k hele tal ≥ 0 (et k-tupel)

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^k.$$

Man sætter $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$, og regner med multi-indices på følgende måde, idet $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$:

$$\begin{aligned} \alpha \leq \beta \quad &\text{betyder} \quad \alpha_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_k \leq \beta_k; \\ n\alpha \quad &= \quad (n\alpha_1, \dots, n\alpha_k)\,, \quad \text{når } n \in \mathbb{N}_0; \\ \alpha + \beta \quad &= \quad (\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_k+\beta_k); \\ \alpha - \beta \quad &= \quad (\alpha_1-\beta_1, \dots, \alpha_k-\beta_k) \quad \text{(defineret, når } \beta \leq \alpha); \\ \alpha! \quad &= \quad \alpha_1! \cdots \alpha_k!; \\ \binom{\alpha}{\beta} \quad &= \quad \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\,\beta!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_k}{\beta_k} \quad \text{(defineret, når } \beta \leq \alpha). \end{aligned}$$

Når $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, defineres monomiet x^α ved

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}.$$

Notationen benyttes f.eks. i følgende formel

$$(1+\|x\|^2)^m = (1+x_1^2+\cdots+x_k^2)^m = \sum_{|\alpha|\le m} C_{m,\alpha}\, x^{2\alpha}, \tag{3}$$

der gælder for et bestemt sæt af hele positive koefficienter $C_{m,\alpha}$, for hvert $m\in\mathbb{N}$. (Se opg.8.3.)

For partiel differentiation i x_j-retningen har vi jo betegnelsen $\frac{\partial}{\partial x_j}$, som også skrives ∂_{x_j} eller ∂_j.

Vi skriver

$$\partial = \partial_x = (\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_k}) = (\partial_1,\ldots,\partial_k)\,.$$

Når α er et multi-index, sætter vi

$$\partial^\alpha = \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_k}^{\alpha_k} = \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_k^{\alpha_k}\,,$$

der er en differentialoperator *af orden* $|\alpha|$. For $\alpha=(0,\ldots,0)$ er ∂^α identitetsoperatoren.

Med disse notationer har man Leibniz' formel for differentiation af et produkt

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta\le\alpha} C_{\alpha,\beta}\partial^\beta u\partial^{\alpha-\beta}v,$$

hvor konstanterne $C_{\alpha,\beta}$ kan vises at være lig $\binom{\alpha}{\beta}$.

Definition 8.4. Med $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ betegnes mængden af funktioner $f\in C^\infty(\mathbb{R}^k)$, for hvilke

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^k} |x^\alpha\partial_x^\beta f(x)| < \infty \quad \text{for alle } \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^k.$$

Funktionerne i $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ kaldes *Schwartz funktioner* (efter den franske matematiker Laurent Schwartz, distributionsteoriens skaber). Bemærk, at for at vise, at en C^∞-funktion f er en Schwartz funktion, er det tilstrækkeligt (og nødvendigt) at vise, at

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^k} |(1+\|x\|^2)^m\partial_x^\beta f(x)| < \infty \quad \text{for alle } m\in\mathbb{N}_0 \text{ og alle } \beta\in\mathbb{N}_0^k\,. \tag{4}$$

Thi da $|t|\le 1+t^2$ for alle $t\in\mathbb{R}$ har vi på grund af (3) at

$$|x^\alpha| \le 1+x^{2\alpha} \le (1+\|x\|^2)^m \text{ for } m\ge|\alpha|, m\in\mathbb{N},$$

da 1 og $x^{2\alpha}$ begge optræder i højre side af (3) med koefficient ≥ 1. På den anden side viser (3), at (4) er opfyldt for enhver Schwartz funktion.

Formlen (4) viser, at Schwartz funktioner er karakteriseret blandt C^∞-funktionerne ved, at enhver partiel afledet $\partial_x^\beta f$ går hurtigere mod 0 for $\|x\| \to \infty$ end enhver potens af $\frac{1}{1+\|x\|^2}$. Schwartz funktionerne kaldes derfor også *hurtigt aftagende funktioner.*

Eksempel 8.5. Funktioner af formen $x^\alpha e^{-c\|x\|^2}$ med $\alpha \in \mathbb{N}_0^k$ og $c > 0$ er Schwartz funktioner. Man ser nemlig, at $\partial_x^\beta \left(x^\alpha e^{-c\|x\|^2}\right)$ er af formen $p(x)e^{-c\|x\|^2}$, hvor p er et polynomium, og derfor skal man blot vise, at $\left(1+\|x\|^2\right)^m e^{-c\|x\|^2}$ er begrænset på $\mathbb{R}^k$, altså at $(1+t)^m e^{-ct}$ er begrænset på $[0,\infty[$, hvilket er opfyldt når $c > 0$ og $m \in \mathbb{N}_0$.

Mængden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ (også betegnet $\mathcal{S}$) kaldes *Schwartz rummet.* Det er et lineært underrum af $C^\infty(\mathbb{R}^k)$. Man kan vise, at det er et metrisk rum med metrikken
$$d(f,g) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{2^m} \min(1, p_m(f-g)),$$
hvor
$$p_m(f) = \sup\{\, (1+\|x\|^2)^m |\partial^\alpha f(x)| \mid x \in \mathbb{R}^k, |\alpha| \le m \,\};$$
og at det er fuldstændigt med hensyn til denne metrik. Vi vil ikke komme nærmere ind på dette, blot vise nogle simple egenskaber i relation til Fourier transformationen.

I det følgende vil vi ofte benytte, at $(1+\|x\|^2)^{-m}$ er integrabel i $\mathbb{R}^k$, når m er tilstrækkeligt stor. Til beregning af integralet af denne funktion benyttes "polære koordinater", idet man repræsenterer punkterne $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ ved (r,ξ), hvor $r = \|x\|$, og ξ gennemløber enhedskugleoverfladen
$$S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| = 1\}.$$
Ifølge §6.5 finder vi
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k} \frac{dx}{(1+\|x\|^2)^m} &= \int_{S^{k-1}} \left(\int_0^\infty \frac{r^{k-1}}{(1+r^2)^m} dr\right) d\omega_k(\xi)\\ &= kV_k \int_0^\infty \frac{r^{k-1}}{(1+r^2)^m} dr = c_k\,,\end{aligned}$$
hvor c_k er $< \infty$ når $2m > k$, da funktionen r^{k-1-2m} er integrabel i ∞ når $2m > k$, jf. Eksempel 6.24 og opg. 4.4.2°. Udregningerne viser altså, at $(1+\|x\|^2)^{-m}$ tilhører $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$ hvis og kun hvis $2m > k$.

Da enhver Schwartz funktion f opfylder
$$|f(x)| \le \frac{C_m}{(1+\|x\|^2)^m} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}^k \text{ og } m \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

med konstanter C_m, der afhænger af f, er $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$. Endvidere ses (ved brug af Leibniz' formel), at når $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$, er $x^\alpha \partial^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$ for alle multi-indices α og β.

Vi skal nu undersøge sammenhængen mellem differentiation og Fourier transformation og begynder for simpelheds skyld i en dimension:

Sætning 8.6. *Lad $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ og $\xi \in \mathbb{R}$.*

(i) *Hvis $xf(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ så er $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ og*

$$\mathcal{F}(xf(x))(\xi) = i\,\hat{f}\,'(\xi)\,.$$

(ii) *Hvis $f \in C^1(\mathbb{R})$ og $f' \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ så er*

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = i\,\xi\,\hat{f}(\xi)\,.$$

Bevis. (i) Af Sætning 4.28 følger umiddelbart, at $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ og

$$\hat{f}'(\xi) = \int \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{e^{-i\xi x} f(x)\right\} dx = \int -ixe^{-i\xi x} f(x) dx = -i\mathcal{F}(xf(x))(\xi)\,,$$

idet $g(x) = |xf(x)|$ er en integrabel majorant for funktionerne

$$x \mapsto -ixe^{-i\xi x} f(x)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) Vi bemærker først, at *en C^1-funktion f, for hvilken $f' \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, har grænseværdier for $x \to \pm\infty$.*

For at se dette udnyttes, at $\int_{|x|\geq n} |f'(t)|dt \to 0$ for $n \to \infty$ ifølge Lebesgues majorantsætning. Til $\varepsilon > 0$ findes altså $N \in \mathbb{N}$ så

$$\int_{|x|\geq N} |f'(t)|dt \leq \varepsilon\,,$$

hvoraf for $x_1, x_2 \geq N$ eller $x_1, x_2 \leq -N$,

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f'(t)dt\right| \leq \int_{|x|\geq N} |f'(t)|dt \leq \varepsilon\,,$$

hvilket viser, at $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ eksisterer. (For enhver følge (x_n) med $x_n \to \infty$ er $(f(x_n))$ en Cauchy følge og dermed konvergent med en grænseværdi, der er uafhængig af følgen $x_n \to \infty$, jf. beviset for Sætning I.6.18).

Vi påstår dernæst, at der for den forelagte funktion, som tillige er i $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, gælder

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,. \tag{6}$$

Hvis vi nemlig antager, at $\lim_{x\to\infty} f(x) = a \neq 0$ findes $N > 0$ så $|f(x)| \geq \frac{1}{2}|a|$ for $x \geq N$, men det strider mod, at f er integrabel. På samme måde ses, at $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

For $x_1 < x_2$ finder vi nu ved partiel integration

$$\int_{x_1}^{x_2} e^{-i\xi x} f'(x)dx = \left[e^{-i\xi x} f(x)\right]_{x=x_1}^{x=x_2} + i\xi \int_{x_1}^{x_2} e^{-i\xi x} f(x)dx\,.$$

Lader vi dernæst $x_1 \to -\infty$, $x_2 \to \infty$, finder vi ved Lebesgues majorantsætning (da $f, f' \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$) og (6)

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi\, \hat{f}(\xi)\,.$$

□

Sætning 8.7. *Fourier transformationen afbilder $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ ind i $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$, og for $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$, $\xi \in \mathbb{R}^k$ gælder*

(i) $\mathcal{F}(x_j f(x))(\xi) = i\partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi)$,
(ii) $\mathcal{F}(\partial_{x_j} f(x))(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$,
(iii) $\mathcal{F}(x^\alpha \partial_x^\beta f(x))(\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|}\partial_\xi^\alpha(\xi^\beta\, \hat{f}(\xi))$,
(iv) $\mathcal{F}(\partial_x^\beta(x^\alpha f(x)))(\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|}\xi^\beta \partial_\xi^\alpha\, \hat{f}(\xi)$.

Bevis. For $f \in \mathcal{S}$ er f og $x_j f(x)$ begge integrable, og af Sætning 4.28 følger da, at $\hat{f}$ har en kontinuert partiel afledet efter ξ_j, så (i) gælder. Da nu $x^\alpha f(x) \in \mathcal{S}$ for alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^k$ kan vi ved gentagen anvendelse af argumentet slutte, at $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ og

$$\mathcal{F}(x^\alpha f(x))(\xi) = i^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha\, \hat{f}(\xi)\,. \tag{7}$$

For at se (ii) bemærkes, at når de variable $x' = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ fastholdes, vil snitfunktionen $x_j \mapsto f(x)$ tilhøre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, og dermed gælder forudsætningerne for (ii) i Sætning 8.6. Altså har vi

$$\int e^{-i\xi_j x_j} \partial_{x_j} f(x) dx_j = i\xi_j \int e^{-i\xi_j x_j} f(x) dx_j\,.$$

Multipliceres med $e^{-i\xi'\cdot x'}$, hvor $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_k)$, og integreres mht. $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k$ finder vi ved brug af Fubinis sætning

$$\mathcal{F}\left(\partial_{x_j} f(x)\right)(\xi) = i\xi_j\, \hat{f}(\xi)\,.$$

Da $\partial_x^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ for alle $\beta \in \mathbb{N}_0^k$, ses ved successiv anvendelse af denne regel, at

$$\mathcal{F}\left(\partial_x^\beta f\right)(\xi) = i^{|\beta|}\xi^\beta \hat{f}(\xi)\,. \tag{8}$$

Anvendes (7) på funktionen $\partial_x^\beta f$ fås (iii) og anvendes (8) på funktionen $x^\alpha f(x)$ fås (iv). Da funktionen $\partial_x^\beta(x^\alpha f(x))$ er integrabel, følger af Sætning 8.2 og (iv) at $\xi^\beta \partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi) \in C_b(\mathbb{R}^k)$ for alle α og β, altså har vi $\hat{f} \in \mathcal{S}$. □

Vi kan nu også vise *Fouriers inversionsformel.*

SÆTNING 8.8. *Når $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ og $\hat{f} = \mathcal{F}f$, så er*

$$f(x) = (2\pi)^{-k}\int e^{i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Bevis. Vi ønsker at beregne $(2\pi)^{-k}\int e^{i\xi\cdot x}(\int e^{-i\xi\cdot y}f(y)dy)d\xi$ med $f \in \mathcal{S}$. Funktionen $e^{i\xi\cdot(x-y)}f(y)$ er ikke integrabel på $\mathbb{R}^{2k}$, så vi kan ikke ombytte integrationsrækkefølgen. Vi introducerer derfor en integrationsfaktor $\psi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$, som fjernes ved grænseovergang senere. Mere præcist indføres en funktion $\psi(\varepsilon\xi)$, hvor $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ og $\varepsilon > 0$. Vi har da for hvert fast x, ved anvendelser af Fubinis sætning og variabelskiftet $(\eta, z) = (\varepsilon\xi, (y-x)/\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^k} e^{i\xi\cdot x}\psi(\varepsilon\xi)\hat{f}(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\xi\cdot x}\psi(\varepsilon\xi)\Big(\int_{\mathbb{R}^k} e^{-i\xi\cdot y}f(y)dy\Big)\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2k}} e^{-i\xi\cdot(y-x)}\psi(\varepsilon\xi)f(y)d(\xi,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2k}} e^{-i\eta\cdot z}\psi(\eta)f(x+\varepsilon z)d(\eta,z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \hat{\psi}(z)f(x+\varepsilon z)dz\,,
\end{aligned} \tag{9}$$

idet Jacobi determinanten er 1.

For $\varepsilon \to 0$ vil $e^{i\xi\cdot x}\psi(\varepsilon\xi)\hat{f}(\xi) \to \psi(0)e^{i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)$, med $|e^{i\xi\cdot x}\psi(\varepsilon\xi)\hat{f}(\xi)| \le C|\hat{f}(\xi)|$ hvor $C = \sup_\xi|\psi(\xi)|$, medens $\hat{\psi}(z)f(x+\varepsilon z) \to \hat{\psi}(z)f(x)$, med $|\hat{\psi}(z)f(x+\varepsilon z)| \le C'|\hat{\psi}(z)|$ hvor $C' = \sup_y|f(y)|$. Lebesgues majorantsætning giver da i grænsen:

$$\psi(0)\int e^{i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)d\xi = f(x)\int \hat{\psi}(z)dz.$$

Specielt kan man bruge $\psi(\xi) = e^{-\|\xi\|^2/2}$. I så fald er $\psi(0) = 1$, og $\hat{\psi}(z) = (2\pi)^{k/2}e^{-\|z\|^2/2}$, jf. Eks. 8.3, samt $\int\hat{\psi}(z)dz = (2\pi)^k$. Heraf følger sætningen. □

Bemærkning 8.9. Det er bekvemt at indføre den *co-Fourier transformerede* $\overline{\mathcal{F}}f$ og *co-Fourier transformationen* $\overline{\mathcal{F}}$ ved

$$\overline{\mathcal{F}}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\xi\cdot x} f(x)dx\,.$$

Idet $\overline{\mathcal{F}}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi) = \overline{\mathcal{F}\,\overline{f}(\xi)}$ har vi:

Korollar 8.10. *$\mathcal{F}$ afbilder $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ bijektivt på $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ med $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-k}\overline{\mathcal{F}}$.*

Bevis. Det ses af Sætning 8.8, at $f = (2\pi)^{-k}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)$, som viser, at $\mathcal{F}$ er injektiv og $\overline{\mathcal{F}}$ er surjektiv. Da $\mathcal{S}$ føres over i sig selv ved kompleks konjugering, og da

$$\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}\overline{f}} \quad \text{og} \quad \mathcal{F}f = \overline{\overline{\mathcal{F}}\,\overline{f}}\,,$$

ses, at $\mathcal{F}$ og $\overline{\mathcal{F}}$ er bijektive, og at $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-k}\overline{\mathcal{F}}$. □

Det er nu let at vise

Sætning 8.11. (Parseval's ligning for $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$). *For $f, g \in \mathcal{S}$ gælder*

$$\int f(x)\overline{g(x)}dx = (2\pi)^{-k}\int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi\,,$$
$$\int |f(x)|^2dx = (2\pi)^{-k}\int |\hat{f}(\xi)|^2d\xi\,.$$

Bevis. Lad $f, g \in \mathcal{S}$. Ifølge Sætning 8.8 gælder

$$g(x) = (2\pi)^{-k}\int e^{i\xi\cdot x}\hat{g}(\xi)d\xi\,,$$

og under udnyttelse af Fubinis sætning finder vi

$$\begin{aligned}\int f(x)\overline{g(x)}dx &= (2\pi)^{-k}\int f(x)\int e^{-i\xi\cdot x}\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi\,dx \\ &= (2\pi)^{-k}\iint f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx\,\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = (2\pi)^{-k}\int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi\,.\end{aligned}$$

Den anden formel opnås for $f = g$. □

8.3. Foldning

Mængden $\mathcal{F}(M, \mathbb{C})$ af funktioner på en mængde M er organiseret ved de punktvise regneoperationer $+$ og $\cdot$, der udspringer af regneoperationerne i

$\mathbb{C}$. Hvis mængden M er forsynet med en komposition $+$ er der som regel mulighed for at indføre en ny komposition $*$ i $\mathcal{F}(M,\mathbb{C})$ kaldet *foldning*.

Hvis $(M,+)$ f.eks. er en *endelig abelsk gruppe*, defineres foldningen af $f,g \in \mathcal{F}(M,\mathbb{C})$ som funktionen

$$f * g(x) = \sum_{s+t=x} f(s)g(t)\,, \qquad x \in M\,,$$

idet der summeres over alle par af elementer $(s,t) \in M \times M$ for hvilke $s+t=x$. Idet disse par kan opskrives som parrene $\{(x-t,t) \mid t \in M\}$ eller som $\{(s,x-s) \mid s \in M\}$ har vi

$$f * g(x) = \sum_{t\in M} f(x-t)g(t) = \sum_{s\in M} f(s)g(x-s)\,. \tag{10}$$

Talrummet $\mathbb{R}^k$ er en abelsk gruppe under addition, men med uendeligt mange elementer. Vi erstatter derfor sum med integration og forsøger at definere

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x-t)g(t)dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}^k \tag{11}$$

for funktioner $f,g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$.

For at (11) skal have mening for et $x \in \mathbb{R}^k$ skal funktionen $t \mapsto f(x-t)g(t)$ være integrabel. Det er derfor nærliggende at indskrænke sig til at betragte Borel funktioner f og g.

Definition 8.12. Ved foldningen $f*g$ af to Borel funktioner $f,g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ forstås funktionen (11), hvis definitionsområde er mængden $\mathcal{D}(f*g)$ af de $x \in \mathbb{R}^k$ for hvilke $t \mapsto f(x-t)g(t)$ er integrabel, altså:

$$\mathcal{D}(f*g) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \int |f(x-t)g(t)|dt < \infty\}\,.$$

Bemærkning 8.13. Foldningen er *kommutativ*, dvs. $\mathcal{D}(f*g) = \mathcal{D}(g*f)$ og for x heri er $f*g(x) = g*f(x)$.

Thi for $x \in \mathbb{R}^k$ er Lebesgue målet invariant under isometrien $\varphi_x(t) = x-t$, altså $\varphi_x(m_k) = m_k$, og dermed har vi

$$\int |f(x-t)g(t)|dm_k(t) = \int |f(x-t)g(t)|d\varphi_x(m_k)(t) =$$
$$\int |f(x-\varphi_x(t))g(\varphi_x(t))|dm_k(t) = \int |g(x-t)f(t)|dm_k(t)\,,$$

som viser, at $x \in \mathcal{D}(f*g) \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(g*f)$, og ovenstående regning uden numerisk værdi giver at $f*g(x) = g*f(x)$ for $x \in \mathcal{D}(f*g)$.

Sætning 8.14. *Hvis* $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$ *og* $g \in C_b(\mathbb{R}^k)$ *så er* $f * g$ *defineret for alle* $x \in \mathbb{R}^k$, $f * g \in C_b(\mathbb{R}^k)$ *og*

$$\|f * g\|_u \le \|f\|_1 \, \|g\|_u \, . \tag{12}$$

Bevis. Da Lebesgue målet er invariant under isometrien φ_x fra Bemærkning 8.13 har vi

$$\int |f(x-t)g(t)|dt \le \|g\|_u \int |f(x-t)|dt = \|g\|_u \, \|f\|_1 \, ,$$

som viser, at $\mathcal{D}(f * g) = \mathbb{R}^k$ og at $\|f * g\|_u \le \|f\|_1 \, \|g\|_u$.

For at vise, at $f * g$ er kontinuert går vi frem i 3 skridt.

1° *Enhver funktion* $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$ *er uniformt kontinuert.*

Lad $K = \operatorname{supp}(f)$ være f's kompakte støtte og lad

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \operatorname{dist}(x, K) \le 1\} \, ,$$

idet $\operatorname{dist}(x, K) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in K\}$ er afstanden fra x til K, jf. opg. I.3.6. Så er K_1 kompakt, og dermed er $f|K_1$ uniformt kontinuert, jf. Sætning I.6.17. Til $\varepsilon > 0$ findes altså $0 < \delta < 1$, så der for $x, y \in K_1$ med $\|x - y\| < \delta$ gælder $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dermed har vi

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^k : \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon 1_{K_1}(x) \le \varepsilon \, , \tag{13}$$

thi hvis x eller y tilhører K og $\|x - y\| < \delta < 1$ så vil $x, y \in K_1$ og (13) er klar, og hvis hverken x eller y tilhører K er $f(x) = f(y) = 0$, og (13) er triviel.

2° *For* $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$ *er* $f * g$ *kontinuert.*

Lad $\varepsilon > 0$ være givet og lad $\delta > 0$ være så (13) er opfyldt. For $x, y \in \mathbb{R}^k$ med $\|x - y\| < \delta$ har vi da

$$f * g(x) - f * g(y) = \int (f(x-t) - f(y-t))g(t)dt \, ,$$

hvoraf

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(y)| &\le \int \varepsilon \, 1_{K_1}(x-t)\|g\|_u \, dt \\ &= \varepsilon \|g\|_u \, m_k(K_1) \, , \end{aligned}$$

hvilket viser, at $f * g$ er (uniformt) kontinuert.

3° *For* $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$, $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^k)$ *har vi* $\|f * g - \varphi * g\|_u \le \|f - \varphi\|_1 \, \|g\|_u$.

Dette følger umiddelbart af (12) idet $f*g-\varphi*g=(f-\varphi)*g$. Da vi ifølge Sætning 7.28 kan vælge φ, så $\|f-\varphi\|_1$ er så lille, vi ønsker, viser 3°, at $f*g$ kan approksimeres uniformt med kontinuerte funktioner $\varphi*g$, og dermed er $f*g$ kontinuert. □

BEMÆRKNING 8.15. Sætning 8.14 kan uden videre generaliseres til følgende: *For $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$, $g\in\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^k)$ er $f*g$ defineret for alle $x\in\mathbb{R}^k$, $f*g\in C_b(\mathbb{R}^k)$ og*

$$\|f*g\|_u\le\|f\|_1\,\|g\|_\infty\,.$$

For en udvidelse af dette resultat se opg. 8.8.

SÆTNING 8.16. *For $f,g\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$ er foldningen*

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^k}f(x-t)g(t)dt$$

defineret for næsten alle $x\in\mathbb{R}^k$ og bestemmer et element i $L_1(\mathbb{R}^k)$, også betegnet $f*g$, for hvilket

$$\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1\,. \tag{14}$$

Bevis. Da $f\otimes g$, dvs. funktionen $(x,y)\mapsto f(x)g(y)$, er Borel målelig på $\mathbb{R}^{2k}$ (se Lemma 6.2), gælder dette også funktionen, der fås ved sammensætning med $(x,t)\mapsto(x-t,t)$, dvs.

$$(x,t)\mapsto f(x-t)g(t)\,,\quad x,t\in\mathbb{R}^k\,.$$

Denne funktion tilhører $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{2k})$, idet vi med brug af Tonellis sætning og translationsinvariansen af Lebesgue målet i $\mathbb{R}^k$ finder

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2k}}|f(x-t)g(t)|d(x,t)&=\int_{\mathbb{R}^k}\left(|g(t)|\int_{\mathbb{R}^k}|f(x-t)|dx\right)dt\\&=\int_{\mathbb{R}^k}\left(|g(t)|\int_{\mathbb{R}^k}|f(x)|dx\right)dt=\|f\|_1\,\|g\|_1<\infty\,.\end{aligned}$$

Af Fubinis sætning følger nu, at $t\mapsto f(x-t)g(t)$ er integrabel for næsten alle $x\in\mathbb{R}^k$, og at den næsten overalt i $\mathbb{R}^k$ definerede funktion

$$x\mapsto\int_{\mathbb{R}^k}f(x-t)g(t)dt\,,$$

som jo netop er $f*g$, bestemmer et element i $L_1(\mathbb{R}^k)$. Da

$$|(f*g)(x)|\le\int_{\mathbb{R}^k}|f(x-t)g(t)|\,dt\,,$$

finder vi endelig

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 &\le \int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^k} |f(x-t)g(t)|dtdx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2k}} |f(x-t)g(t)|d(x,t) = \|f_1\|g\|_1\,.\end{aligned}$$

□

BEMÆRKNING 8.17. Vi kan definere en foldning $*$ i $L_1(\mathbb{R}^k)$ ved $[f]*[g] = [f*g]$, idet $f*g$ ikke ændres, når f eller g fra $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$ erstattes med en ækvivalent funktion. Dermed opnås, at foldning er en komposition i $L_1(\mathbb{R}^k)$, hvilket ikke er tilfældet med $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$, hvor kun 8.16 gælder. Rummet $L_1(\mathbb{R}^k)$ er et vigtigt eksempel på en *Banach algebra*, dvs. et Banach rum E med en "*multiplikation*" $(u,v)\mapsto uv$, der gør E til en ring med egenskaben $\|uv\|\le \|u\|\,\|v\|$. Banach algebraen $L_1(\mathbb{R}^k)$ under foldning kaldes *gruppealgebraen* for $\mathbb{R}^k$.

SÆTNING 8.18. *For $f,g\in L_1(\mathbb{R}^k)$ gælder*

$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f\cdot\mathcal{F}g\,.$$

Bevis. Fubinis sætning samt Lebesgue målets translationsinvarians giver

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-i\xi\cdot x}\left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x-y)g(y)dy\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2k}} e^{-i\xi\cdot x} f(x-y)g(y)d(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^k} e^{-i\xi\cdot x} f(x-y)dx\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^k} e^{-i\xi\cdot(x+y)} f(x)dx\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx \int_{\mathbb{R}^k} e^{-i\xi\cdot y} g(y)dy \\ &= \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi)\,.\end{aligned}$$

□

Dette kan benyttes ved løsning af partielle differentialligninger, hvilket vi blot vil illustrere her ved et simpelt eksempel.

EKSEMPEL 8.19. Differentialligningen i $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$

$$(I-\Delta)u = f\,,$$

hvor Δ er Laplace operatoren, $\Delta = \partial^2_{x_1} + \cdots + \partial^2_{x_k}$, overføres ved Fourier transformation til ligningen

$$(1 + \|\xi\|^2)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)\,,$$

der er ensbetydende med

$$\hat{u}(\xi) = (1 + \|\xi\|^2)^{-1}\hat{f}(\xi)\,. \tag{15}$$

Ved løsning af opg. 8.2 og opg. 8.6, finder man for $k = 1$ og 3, at $(1 + \|\xi\|^2)^{-1} = \mathcal{F}g_k$, hvor $g_1(x) = a_1 e^{-|x|}$ hhv. $g_3(x) = a_3\|x\|^{-1}e^{-\|x\|}$; begge er $\mathcal{L}_1$-funktioner på de respektive rum. I disse tilfælde overføres (15) ved Sætning 8.18 umiddelbart i løsningsformlen

$$u = g_k * f\,.$$

For andre værdier af k er formlerne for g_k mere komplicerede og involverer Bessel-funktioner.

Ved en videreudvikling af teorien for foldninger og for Fourier transformationen (specielt ved inddragelse af distributionsteori) kan man på lignende måde opstille løsningsformler for langt mere generelle differentialligningsproblemer.

8.4 Fourier-Plancherel transformationen

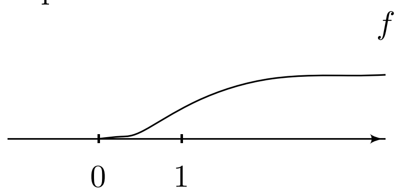
Vi vil vise, at Fourier transformationen kan defineres også på $L_2(\mathbb{R}^k)$ på en sådan måde, at definitionen stemmer overens med den forrige på $L_1(\mathbb{R}^k) \cap L_2(\mathbb{R}^k)$. Hertil har vi brug for at vise, at $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ er overalt tæt i $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^k)$. Dette gælder også for $\mathcal{L}_p$ med $p \neq 2$ ($p \in [1, \infty[$), og det gælder endda, når $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ erstattes af underrummet $C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ bestående af C^∞ funktionerne med kompakt støtte:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^k) = C^\infty(\mathbb{R}^k) \cap C_c(\mathbb{R}^k).$$

At $C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ er ikke-tom, fremgår af følgende eksempel.

Eksempel 8.20. Funktionen

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{for} \quad t > 0\,, \\ 0 & \text{for} \quad t \le 0\,, \end{cases}$$



er C^∞ på $\mathbb{R}$. Funktionen er klart C^∞ på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ og på den positive akse er $f^{(k)}(t) = p_k(1/t)e^{-1/t}$ for et passende polynomium p_k, $k = 0, 1, \cdots$. Det er derfor tilstrækkeligt at vise, at enhver funktion af formen

$$\begin{cases} p(1/t)e^{-1/t} & \text{for} \quad t > 0, \\ 0 & \text{for} \quad t \le 0, \end{cases}$$

er differentiabel for $t = 0$ med afledet 0, altså at

$$\lim_{t \to 0^+} (1/t)p(1/t)e^{-1/t} = 0\,,$$

men dette følger af at

$$\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0 \quad \text{for ethvert} \quad n \geq 0\,.$$

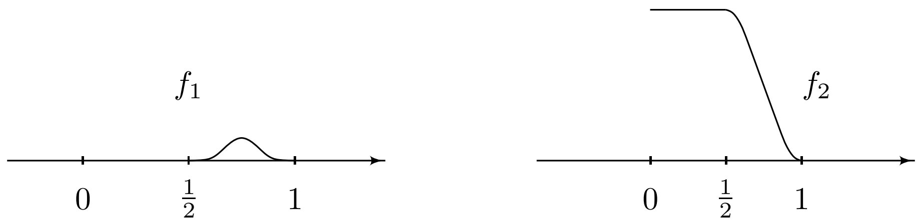
Funktionen

$$f_1(t) = f(t - \tfrac{1}{2})f(1-t)$$

er i $C^\infty(\mathbb{R})$, og er positiv for $t \in]\frac{1}{2}, 1[$, nul ellers. Funktionen

$$f_2(t) = \frac{1}{c}\int_t^1 f_1(s)ds \quad , \quad \text{hvor } c = \int_{1/2}^1 f_1(s)ds,$$

er C^∞. Den er 1 for $t \leq \frac{1}{2}$, er 0 for $t \geq 1$, og ligger mellem 0 og 1 for $t \in]\frac{1}{2}, 1[$.



Endelig er

$$\chi(x) = f_2(\|x\|)\ ,\ x \in \mathbb{R}^k,$$

en funktion i $C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ med

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\chi) = \{\, x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leq 1 \,\},\ \ \chi(x) \in]0,1] \ \text{ for } \|x\| < 1,\\ \text{og } \chi(x) = 1 \ \text{ for } \ \|x\| \leq \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Man kan nu også let konstruere en funktion $h(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ med

$$\operatorname{supp}(h) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leq 1\}, \quad h \geq 0, \quad \int h(x)dx = 1, \tag{16}$$

f.eks. ved at tage $h(x) = \chi(x)/c_1$, hvor $c_1 = \int \chi(y)dy$. For hvert $\varepsilon \in]0,1]$ definerer vi funktionen $h_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ ved

$$h_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-k} h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^k\,,$$

hvor h er givet ved (16). Vi har da

$$\operatorname{supp}(h_\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leq \varepsilon\}, \quad h_\varepsilon \geq 0, \quad \int h_\varepsilon(x)dx = 1. \tag{17}$$

Vi kalder $(h_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ en *Dirac familie.*

SÆTNING 8.21. *For ethvert $p \in [1, \infty[$ er $C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ og dermed $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ en overalt tæt delmængde af $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$.*

Bevis. Lad $p \in [1, \infty[$. Vi skal vise, at der for ethvert $u \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$ og ethvert tal $\delta > 0$ findes en funktion $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ så at $\|u - w\|_p \leq \delta$. Lad u og δ være givne.

Ifølge Sætning 7.28 findes $v \in C_c(\mathbb{R}^k)$ så $\|u - v\|_p \leq \delta/2$. Lad $K = \operatorname{supp}(v)$. For hvert $\varepsilon \in]0, 1]$ danner vi funktionen

$$v_\varepsilon(x) = v * h_\varepsilon(x) = \int_K h_\varepsilon(x - y)v(y)dy\,,$$

hvor h_ε er givet ved (17). Man ser ved brug af sætningen om differentiation under integraltegnet, at $v_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$. Endvidere er

$$\operatorname{supp}(v_\varepsilon) \subseteq K_\varepsilon := \{\, x \in \mathbb{R}^k \mid \operatorname{dist}(x, K) \leq \varepsilon \,\} \subseteq K_1\,, \tag{18}$$

thi når $\operatorname{dist}(x, K) > \varepsilon$, er $\|x - y\| > \varepsilon$ for $y \in K$, og dermed $h_\varepsilon(x - y) = 0$ for $y \in K$, hvoraf følger at $v_\varepsilon(x) = 0$. Da K_ε er kompakt, er $v_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$.

Da $\int h_\varepsilon(y)dy = 1$, kan vi skrive

$$\begin{aligned} v(x) - v_\varepsilon(x) &= \int v(x)h_\varepsilon(y)dy - \int v(x - y)h_\varepsilon(y)dy \\ &= \int_{\|y\| \leq \varepsilon} (v(x) - v(x - y))h_\varepsilon(y)dy. \end{aligned}$$

Vi ved fra beviset for Sætning 8.14, at v er *uniformt kontinuert.* Til $\zeta > 0$ findes altså $0 < \varepsilon \leq 1$ så $|v(x) - v(x - y)| \leq \zeta$ for $\|y\| \leq \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}^k$, og deraf ses

$$\begin{aligned} |v(x) - v_\varepsilon(x)| &\leq \int_{\|y\| \leq \varepsilon} |v(x) - v(x - y)|h_\varepsilon(y)dy \\ &\leq \zeta \int h_\varepsilon(y)dy = \zeta. \end{aligned}$$

Det følger, at

$$\begin{aligned} \|v - v_\varepsilon\|_p &= \Big(\int |v(x) - v_\varepsilon(x)|^p dx\Big)^{1/p} \\ &= \Big(\int_{K_1} |v(x) - v_\varepsilon(x)|^p dx\Big)^{1/p} \leq \zeta\, m_k(K_1)^{1/p}. \end{aligned}$$

Vælges $\zeta \le \delta/(2m_k(K_1)^{1/p})$, og dernæst ε som angivet ovenfor, får vi ialt

$$\|u - v_\varepsilon\|_p \le \|u - v\|_p + \|v - v_\varepsilon\|_p \le \delta/2 + \delta/2 \le \delta,$$

så med $w = v_\varepsilon$ fås det ønskede. □

Ved at gå over til ækvivalensklasser ser vi, at mængden $\{[f] \mid f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)\}$ er overalt tæt i $L_p(\mathbb{R}^k)$ for $1 \le p < \infty$. Idet en ækvivalensklasse $[f]$ af funktioner på $\mathbb{R}^k$, der er ens m_k-n.o., kun kan indeholde én kontinuert funktion, har afbildningen $f \mapsto [f]$ af $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$ ind i $L_p(\mathbb{R}^k)$ en injektiv restriktion til $C(\mathbb{R}^k) \cap \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$, og derfor vil vi tillade os at opfatte $C(\mathbb{R}^k) \cap \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$ som underrum af $L_p(\mathbb{R}^k)$. Som følge heraf kan vi sige, at $C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ og $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ er tæt i $L_p(\mathbb{R}^k)$. Vi vil desuden benytte den almindeligt anvendte "abuse of notation", der består i at bruge f som betegnelse både for funktionen $f \in \mathcal{L}_p$ og den tilhørende ækvivalensklasse $[f]$.

SÆTNING 8.22. *Fourier transformationen $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ kan på entydig måde udvides til en isometrisk isomorfi $\mathcal{F}_2$ af $L_2(\mathbb{R}^k, m_k)$ på $L_2(\mathbb{R}^k, (2\pi)^{-k} m_k)$. For $f, g \in L_2(\mathbb{R}^k)$ gælder Parsevals ligninger*

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx = (2\pi)^{-k} \int \mathcal{F}_2 f(\xi)\overline{\mathcal{F}_2 g(\xi)}\,d\xi\,, \tag{19}$$

$$\int |f(x)|^2 dx = (2\pi)^{-k} \int |\mathcal{F}_2 f(\xi)|^2 d\xi\,. \tag{20}$$

Bevis. Af Sætning 8.11 fremgår, at $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \to L_2(\mathbb{R}^k, (2\pi)^{-k} m_k)$ er en lineær isometri fra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ opfattet som tæt underrum i $L_2(\mathbb{R}^k, m_k)$. Da afbildningen går ind i et fuldstændigt rum giver Sætning I.6.20, at $\mathcal{F}$ på entydig måde kan udvides til en kontinuert afbildning $\mathcal{F}_2 : L_2(\mathbb{R}^k, m_k) \to L_2(\mathbb{R}^k, (2\pi)^{-k} m_k)$, som er en lineær isometri. Billedrummet $\mathcal{F}_2(L_2(\mathbb{R}^k, m_k))$ er fuldstændigt som isometrisk billede af et fuldstændigt rum (Sætning I.5.6). Heraf følger, at $\mathcal{F}_2(L_2(\mathbb{R}^k, m_k))$ er afsluttet (Sætning I.5.3), men det er også overalt tæt, da det ifølge Korollar 8.10 omfatter $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$, og altså er $\mathcal{F}_2(L_2(\mathbb{R}^k, m_k)) = L_2(\mathbb{R}^k, (2\pi)^{-k} m_k)$. □

BEMÆRKNING 8.23.

(a) Rummene $L_2(\mathbb{R}^k, m_k)$ og $L_2(\mathbb{R}^k, (2\pi)^{-k} m_k)$ indeholder naturligvis de samme elementer. Normerne er forskellige, men proportionale, altså specielt ækvivalente.

(b) Også co-Fourier transformationen $\overline{\mathcal{F}}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ kan udvides til en isometrisk isomorfi $\overline{\mathcal{F}}_2$ af $L_2(\mathbb{R}^k, m_k)$ på $L_2(\mathbb{R}^k, (2\pi)^{-k} m_k)$. Som i Korollar 8.10 gælder $\mathcal{F}_2^{-1} = (2\pi)^{-k}\overline{\mathcal{F}}_2$. Dette er *Fouriers inversionsformel* for $L_2(\mathbb{R}^k)$.

(c) Udvidelsen $\mathcal{F}_2$ af Fourier transformationen fra $\mathcal{S}$ til L_2 kaldes ofte *Fourier-Plancherel transformationen.* Sætning 8.22 skyldes den schweiziske matematiker M. Plancherel 1910.

(d) Isometriegenskaben kan også udtrykkes på den måde, at *operatoren*

$$F = (2\pi)^{-k/2}\mathcal{F}_2 \colon L_2(\mathbb{R}^k, m_k) \to L_2(\mathbb{R}^k, m_k)$$

er en isometrisk isomorfi.

SÆTNING 8.24. 1° *For $f \in L_2(\mathbb{R}^k) \cap L_1(\mathbb{R}^k)$ gælder*

$$\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F} f\,. \tag{21}$$

2° *Lad K_N betegne den afsluttede kugle med radius N; $K_N = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \le N\}$. For hvert $f \in L_2(\mathbb{R}^k)$ er $1_{K_N} f \in L_1(\mathbb{R}^k)$, og følgen af kontinuerte funktioner $\mathcal{F}(1_{K_N} f)$,*

$$\mathcal{F}(1_{K_N} f)(\xi) = \int_{K_N} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx,$$

konvergerer i $L_2(\mathbb{R}^k)$ mod $\mathcal{F}_2 f$ for $N \to \infty$.

Bevis. For $f \in L_2(\mathbb{R}^k)$ er $1_{K_N} f \in L_1(\mathbb{R}^k)$ ifølge Cauchy-Schwarz' ulighed, da $1_{K_N} \in L_2(\mathbb{R}^k)$, og naturligvis tilhører $1_{K_N} f$ også $L_2(\mathbb{R}^k)$. Vi viser først (21) for $1_{K_N} f$. Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ er overalt tæt i $L_2(\mathbb{R}^k)$, findes der en følge $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$, så at $\varphi_j \to 1_{K_N} f$ i $L_2(\mathbb{R}^k)$ for $j \to \infty$. For enhver målelig begrænset funktion g gælder $g\varphi_j \to g\,1_{K_N} f$ i $L_2(\mathbb{R}^k)$ fordi

$$\|g\varphi_j - g1_{K_N}\|_2 \le \|g\|_u \|\varphi_j - 1_{K_N}\|_2.$$

Benyttes $g = 1_{\complement K_N}$ fås specielt, at $1_{\complement K_N}\varphi_j \to 0$ i $L_2(\mathbb{R}^k)$. Med $\chi(x)$ som defineret i Eksempel 8.20 lader vi

$$\eta(x) = \chi(x/(2N));$$

så har η støtte i K_{2N} og $\eta(x) = 1$ på K_N. Da vil også følgen $\psi_j = \eta\varphi_j$ konvergere mod $\eta 1_{K_N} f = 1_{K_N} f$ i $L_2(\mathbb{R}^k)$.

Da $1_{K_N} f$ og ψ_j har støtte i K_{2N}, har vi ved Cauchy-Schwarz' ulighed

$$\|1_{K_N} f - \psi_j\|_1 \le m_k(K_{2N})^{1/2} \|1_{K_N} f - \psi_j\|_2,$$

så ψ_j konvergerer også mod $1_{K_N} f$ i $L_1(\mathbb{R}^k)$ for $j \to \infty$.

Da $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{S}$ konvergerer mod $1_{K_N} f$ i både $L_1(\mathbb{R}^k)$ og $L_2(\mathbb{R}^k)$, giver Sætningerne 8.2 og 8.22, at

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\psi_j &\to \mathcal{F}(1_{K_N} f) \quad \text{i } C_b(\mathbb{R}^k), \\ \mathcal{F}\psi_j &\to \mathcal{F}_2(1_{K_N} f) \quad \text{i } L_2(\mathbb{R}^k, (2\pi)^{-k} m_k)\,. \end{aligned}$$

Ifølge Korollar 7.21 gælder da, at $\mathcal{F}_2(1_{K_N} f) = \mathcal{F}(1_{K_N} f)$ næsten overalt, dvs. sagt præcist: den kontinuerte funktion $\mathcal{F}(1_{K_N} f)$ er en repræsentant for ækvivalensklassen $\mathcal{F}_2(1_{K_N} f) \in L_2(\mathbb{R}^k, (2\pi)^{-k} m_k)$. Dette viser (21) for $1_{K_N} f$.

Nu fås 2° let ved brug af Parsevals ligning (20) samt Lebesgues majorantsætning:

$$(2\pi)^{-k} \|\mathcal{F}_2 f - \mathcal{F}_2(1_{K_N} f)\|_2^2 = \|f - 1_{K_N} f\|_2^2 \to 0 \quad \text{for } N \to \infty.$$

Endelig kan vi vise (21) i almindelighed: Når $f \in L_1(\mathbb{R}^k) \cap L_2(\mathbb{R}^k)$, vil $1_{K_N} f \to f$ i $L_1(\mathbb{R}^k)$ såvel som i $L_2(\mathbb{R}^k)$ ved Lebesgues majorantsætning. Da vil $\mathcal{F}_2\,(1_{K_N} f) \to \mathcal{F}_2 f$ i $L_2(\mathbb{R}^k, (2\pi)^{-k} m_k)$ og $\mathcal{F}\,(1_{K_N} f) \to \mathcal{F} f$ i $C_b(\mathbb{R}^k)$, og Korollar 7.21 viser som overfor at $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F} f$. $\square$

Bemærkning 8.25. På grund af Sætning 8.24 er det ikke nødvendigt at opretholde en særlig betegnelse $\mathcal{F}_2$ for Fourier-Plancherel transformationen, og man bruger sædvanligvis bare betegnelsen $\mathcal{F}$.

Joseph Fourier, fransk matematiker, 1768–1830

Opgaver til §8

8.1. Lad $a > 0$, og lad $f_1(x)$ og $f_2(x)$ være funktionerne på $\mathbb{R}$ defineret ved

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x \le 0; \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \ge 0, \\ e^{ax} & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

Vis, at

$$\hat{f}_1(\xi) = \frac{1}{a + i\xi} \quad , \quad \hat{f}_2(\xi) = \frac{1}{a - i\xi}.$$

8.2. Lad $b > 0$, og lad f være funktionen på $\mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + b^2}.$$

Find $\hat{f}(\xi)$. (*Vink*: Man kan skrive f som

$$f(x) = \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{b + ix} + \frac{1}{b - ix}\right)$$

og benytte den foregående opgave samt Fouriers inversionsformel på $L_2(\mathbb{R})$, jf. Bemærkning 8.23(b).)

8.3.

1° Vis, at koefficienten $C_{m,\alpha}$ i formel (3) er givet ved

$$C_{m,\alpha} = \frac{m!}{\alpha!(m - |\alpha|)!} \quad \text{for} \quad |\alpha| \le m\,.$$

2° Vis Leibniz' formel for differentiation af et produkt, herunder at $C_{\alpha,\beta} = \binom{\alpha}{\beta}$.

8.4. Lad $\sigma > 0$. Når formlen $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ antages kendt, kan man beregne den Fourier transformerede af funktionen $f(x) = e^{-\sigma x^2/2}$ ($x \in \mathbb{R}$) på følgende måde:

i) Vis, at

$$\sigma \frac{d\hat{f}(\xi)}{d\xi} = -\xi \hat{f}(\xi)\,,$$

og vis endvidere, at denne ligning medfører, at $\hat{f}(\xi) = ce^{-\xi^2/2\sigma}$ for en vis konstant c.

ii) Vis, f.eks. ved at betragte $\hat{f}(0)$, at $c = \sqrt{2\pi/\sigma}$.

8.5. Vis, at når f og $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$, så er $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$.

8.6. Lad
$$g(\xi) = \frac{1}{\|\xi\|^2 + \nu^2}\ ,\ \xi \in \mathbb{R}^3,$$
hvor $\nu > 0$. Vis, at g er den Fourier transformerede af funktionen
$$f(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\nu\|x\|}}{\|x\|}.$$

(*Vink:* Bemærk først, at $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(A\xi)$ for enhver ortogonal 3×3 matrix A, og slut at $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(0, 0, \|\xi\|)$. Udregn dernæst $\hat{f}(0, 0, \|\xi\|)$ ved sfærisk polære koordinater, jf. opg. 5.24.)

8.7. Vis, at udsagnet i Sætning 8.24, 2° også gælder, når følgen K_N erstattes af en vilkårlig følge af kompakte mængder M_N, der opfylder
$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_N \subseteq \ldots, \qquad \bigcup_{N \in \mathbb{N}} M_N = \mathbb{R}^k.$$

8.8. 1° Vis, at hvis $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $p, q > 1$ og hvis $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$, $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^k)$, så er $f * g$ defineret for alle $x \in \mathbb{R}^k$, og der gælder
$$\|f * g\|_u \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

2° Vis, at $f * g$ er kontinuert, hvis f og g er som i 1°.

(*Vink:* Vis først påstanden for $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$, og benyt dernæst, at $C_c(\mathbb{R}^k)$ er overalt tæt i $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$.)

8.9. Vis, at når $a > 0$ og $2m > k$ så er
$$\int_{\mathbb{R}^k} \frac{dx}{(a^2 + \|x\|^2)^m} = a^{k-2m} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{dx}{(1 + \|x\|^2)^m}\, .$$

8.10. (RIEMANN-LEBESGUES LEMMA.) (a) Vis, at når $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$, så vil $\hat{f}(\xi) \to 0$ for $\|\xi\| \to \infty$. (*Vink*: Man kan benytte, at f kan approksimeres i $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$ med funktioner fra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$.)

(b) Vis, at når $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k)$, så er $\hat{f}$ uniformt kontinuert på $\mathbb{R}^k$.

INDEX

Appendix

Denne fremstilling er baseret på s. 28–34 i G.B. Folland's "Real Analysis" og på noter udarbejdet af Uffe Haagerup.

1 Eksistensen af Lebesguemålet på $\mathbb{R}$

Konstruktionen af Lebesguemålet går via ydre mål. Disse er knapt så fine som mål, ved det, at de ikke nødvendigvis er tælleligt additive, men blot tælleligt subadditive:

Definition 1 *Et* ydre mål μ^* *på en mængde* X *er en funktion* $\mu^*\colon P(X) \to [0,\infty]$, *som opfylder*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$, *hvis* $A, B \in P(X)$ *og* $A \subseteq B$,

(iii) $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ *for enhver følge* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(X)$.

Til et ydre mål betragtes en særlig familie af delmængder af X:

Definition 2 *Lad* μ^* *være et ydre mål på mængden* X. *En delmængde* E *af* X *kaldes* μ^*-målelig, *hvis der for alle* $A \in P(X)$ *gælder*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E). \tag{1}$$

Definition 1 (iii) giver $\mu^*(A) \le \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E)$ for ethvert par $A, E \in P(X)$. Vi har derfor, at E er μ^*-målelig hvis og kun hvis den anden ulighed,

$$\mu^*(A) \ge \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E), \tag{2}$$

gælder for alle $A \in P(X)$.

Definition 3 *En familie* $\mathcal{A}$ *af delmængder af en mængde* X *kaldes en* algebra, *hvis*

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A}$ *medfører* $\complement A \in \mathcal{A}$,

(iii) $A, B \in \mathcal{A}$ *medfører* $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Enhver σ-algebra er en algebra. Det modsatte gælder ikke, men vi har følgende lemma, hvis bevis overlades til læseren (= Opgave 1, som regnes til øvelserne):

Lemma 4 *Lad $\mathcal{A}$ være en algebra på mængden X, og antag $\mathcal{A}$ er afsluttet under tællelige disjunkte foreninger, dvs. for alle følger $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ af parvis disjunkte mængder i $\mathcal{A}$ gælder $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

Da er $\mathcal{A}$ en σ-algebra.

Theorem 5 (Carathéodory's Sætning) *Lad μ^* være et ydre mål på en mængde X. Lad $\mathbb{E}$ være familien af alle μ^*-målelige delmængder af X. Lad μ være restriktionen af μ^* til $\mathbb{E}$, dvs. $\mu\colon \mathbb{E} \to [0,\infty]$ og $\mu(E) = \mu^*(E)$ for $E \in \mathbb{E}$.*

Da er $(X, \mathbb{E}, \mu)$ et målrum.

Bevis: Det skal vises, at $\mathbb{E}$ er en σ-algebra, og at μ er et mål på $\mathbb{E}$. Det følger umiddelbart af (1), at $E \in \mathbb{E}$ medfører $\complement E \in \mathbb{E}$, og at $\emptyset$ og X begge ligger i $\mathbb{E}$.

For $E, F \in \mathbb{E}$ og $A \in P(X)$ har vi

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E) \\
&= \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap \complement F) + \mu^*(A \cap \complement E \cap F) + \mu^*(A \cap \complement E \cap \complement F) \\
&\geq \mu^*\left((A \cap E \cap F) \cup (A \cap E \cap \complement F) \cup (A \cap \complement E \cap F)\right) + \mu^*(A \cap \complement E \cap \complement F) \\
&= \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap \complement(E \cup F)).
\end{aligned}$$

Dette viser, at $E, F \in \mathbb{E}$ medfører $E \cup F \in \mathbb{E}$. Det er nu vist, at $\mathbb{E}$ er en algebra.

Lad nu $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge af parvis disjunkte mængder beliggende i $\mathbb{E}$. Sæt $F_n = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$, og bemærk, at $F_n \in \mathbb{E}$, da $\mathbb{E}$ er en algebra. Sæt $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ $(= \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)$. Hovedslaget, der skal udkæmpes i dette bevis, består i at vise:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap \complement F) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F), \tag{3}$$

for alle $A \in P(X)$.

For at se (3), bemærk først

$$A = (A \cap F) \cup (A \cap \complement F) = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap E_j \right) \cup (A \cap \complement F).$$

Sammen med Definition 1 (iii) giver dette

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap \complement F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F). \tag{4}$$

Omvendt, for alle $n \geq 2$ har vi

$$\mu^*(A \cap F_n) = \mu^*(A \cap F_n \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_n \cap \complement E_n) = \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_{n-1}).$$

Det følger heraf ved induktion, at

$$\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j),$$

for alle $n \geq 1$. (Til grundtrinnet $n = 1$ benyttes at $F_1 = E_1$.) Ved at benytte $\complement F \subseteq \complement F_n$ og (ii) i Definition 1 får vi

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap \complement F_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F_n) \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F).
\end{aligned}$$

Da dette gælder for alle $n \in \mathbb{N}$, har vi $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap \complement F) \leq \mu^*(A)$. Sammen med (4) viser dette (3).

Det følger umiddelbart af (3), at $F \in \mathbb{E}$. Derfor er $\mathbb{E}$ afsluttet under tællelige disjunkte foreninger, så $\mathbb{E}$ er en σ-algebra jvf. Lemma 4. Sættes $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ $(= F)$ i (3), får vi

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

(Husk at $\mu(E) = \mu^*(E)$ for $E \in \mathbb{E}$.) Dette viser, at μ er et mål på σ-algebraen $\mathbb{E}$. $\square$

Vi vender os nu til konstruktionen af Lebesguemålet på den reelle akse.

Definition 6 *Et* h-interval *er et delinterval af* $\mathbb{R}$ *af formen* $(a, b]$, (a, ∞), *eller* $\emptyset$, *hvor* $-\infty \leq a < b < \infty$. *Mængden af alle* h*-intervaller benævnes med* $\mathbb{I}$.

Bemærk, at hvis I er et h-interval, så er $\complement I$ enten igen et h-interval eller en disjunkt forening af to h-intervaller. Thi i tilfældet hvor $I = (a, b]$ og $-\infty < a < b < \infty$, da er $\complement I$ en disjunkt forening af to h-intervaller, og i alle andre tilfælde er $\complement I$ et h-interval. Snitmængden af to h-intervaller er igen et h-interval.

Definition 7 *Definer* $\ell \colon \mathbb{I} \to [0, \infty]$ *ved*

$$\ell((a, b]) = b - a, \quad \ell((a, \infty)) = \ell((-\infty, b]) = \ell(\mathbb{R}) = \infty, \quad \ell(\emptyset) = 0.$$

Definer $m^* \colon P(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ *ved*

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) \mid I_j \in \mathbb{I}, \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}. \tag{5}$$

Strategien er nu at vise, at m^* er et ydre mål, at alle h-intervaller er m^*-målelige, og at $m^*(I) = \ell(I)$ for alle h-intervaller I. Dette gøres i nedenstående lemmaer. Herefter giver Carathéodory's sætning det ønskede resultat om eksistensen af Lebesguemålet (Theorem 13).

Lemma 8 *m^* er et ydre mål.*

Bevis: Det skal vises, at (i), (ii) og (iii) i Definition 1 holder. (ii) er en umiddelbar konsekvens af definitionen af m^* (overvej dette!). (i) indses let ved f.eks. at vælge $I_1 = I_2 = I_3 = \cdots = \emptyset$.

For at vise (iii), lad $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en vilkårlig følge i $P(\mathbb{R})$. Hvis $m^*(A_n) = \infty$ for mindst et n, så gælder uligheden $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$ trivielt. Antag derfor gerne, at $m^*(A_n) < \infty$ for alle n. Lad $\varepsilon > 0$. Find for alle n følger $\{I_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ i $\mathbb{I}$, så

$$A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{n,j}) \leq m^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

Da er $\{I_{n,j}\}_{j,n=1}^{\infty}$ en tællelig familie i $\mathbb{I}$, og

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{j,n=1}^{\infty} I_{n,j}, \quad \sum_{j,n=1}^{\infty} \ell(I_{n,j}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (m^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon.$$

Dette viser, at $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon$. Da dette holder for alle $\varepsilon > 0$ følger det ønskede: $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$. $\square$

Lemma 9 *Alle h-intervaller er m^*-målelige.*

Bevis: Lad I være et h-interval. Vi viser, at I er m^*-målelig ved at eftervise (2).

Lad $A \in P(\mathbb{R})$, og betragt hertil en vilkårlig følge $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ af h-intervaller så $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Som tidligere bemærket er $\complement I$ foreningen af to disjunkte h-intervaller I' og I'' (det ene af disse h-intervaller kunne være den tomme mængde). Sæt

$$K_n = I \cap J_n, \qquad K_n' = I' \cap J_n, \qquad K_n'' = I'' \cap J_n.$$

Da er K_n, K_n', K_n'' parvis disjunkte h-intervaller, og $J_n = K_n \cup K_n' \cup K_n''$. Derfor er $\ell(J_n) = \ell(K_n) + \ell(K_n') + \ell(K_n'')$ (overvej). Endvidere gælder

$$A \cap I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \qquad A \cap I' \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n', \qquad A \cap I'' \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n''.$$

Samlet har vi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n') + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n'') \\ &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I') + m^*(A \cap I''), \end{aligned}$$

hvor $\geq$ skyldes (5). Da overdækningen $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ af A var vilkårlig, kan vi igen ifølge (5) konkludere, at

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I') + m^*(A \cap I'') \\ &\geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap (I' \cup I'')) \\ &= m^*(A \cap I) + m^*(A \cap \complement I). \end{aligned}$$

Det ses nu, at (2) er opfyldt, så I er m^*-målelig. $\square$

Lemma 10 *Hvis*

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j),$$

hvor $a \leq b$ og $a_j < b_j$ for $j = 1, 2, \ldots, n$, så er

$$b - a \leq \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Bevis: Beviset føres ved induktion efter n. Overvej selv situationen for $n = 1$. Antag $n \geq 2$, at $[a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j)$, og at påstanden i lemmaet er vist for alle overdækninger med færre end n intervaller. Find $j_0 \in \{1, 2, \ldots n\}$ så $a \in (a_{j_0}, b_{j_0})$. Hvis $b_{j_0} > b$, så er $[a,b] \subseteq (a_{j_0}, b_{j_0})$, og sagen er klar!

Antag $b_{j_0} \leq b$. Da er

$$[b_{j_0}, b] = [a,b] \setminus (a_{j_0}, b_{j_0}) \subseteq \bigcup_{j \neq j_0} (a_j, b_j).$$

Induktionsantagelsen giver derfor $b - b_{j_0} \leq \sum_{j \neq j_0} (b_j - a_j)$. Dermed har vi

$$\begin{aligned} b - a &= (b - b_{j_0}) + (b_{j_0} - a) \leq (b - b_{j_0}) + (b_{j_0} - a_{j_0}) \\ &\leq \sum_{j \neq j_0} (b_j - a_j) + (b_{j_0} - a_{j_0}) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j). \end{aligned}$$ $\square$

Lemma 11 *Lad $I, I_1, I_2, I_3, \ldots$ være h-intervaller, således at $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Da gælder*

$$\ell(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

Bevis: Hvis $I = \emptyset$, så er der intet at vise. Antag derfor gerne, at $I \neq \emptyset$. Endvidere, hvis $\ell(I_n) = \infty$ for mindst et n, så er der heller intet at vise. Vi kan derfor også antage, at $\ell(I_n) < \infty$ for alle n. Dvs. $I_n = (a_n, b_n]$, hvor $-\infty < a_n < b_n < \infty$ (idet vi også smider alle tomme mængder blandt intervallerne $I_1, I_2, \ldots$ ud).

Bemærk, at

$$\ell(I) = \sup\{b' - a' \mid a', b' \in I,\ a' < b'\}, \tag{6}$$

når $I \neq \emptyset$. Lad $a', b' \in I$ med $a' < b'$ være givet.

Lad $\varepsilon > 0$, og sæt $a'_n = a_n$, og $b'_n = b_n + \varepsilon 2^{-n}$. Da er $I_n = (a_n, b_n] \subseteq (a'_n, b'_n)$, så $[a', b'] \subseteq I \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}(a'_j, b'_j)$. Da $[a', b']$ er kompakt giver Heine-Borel's sætning $[a', b'] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n}(a'_j, b'_j)$ for et passende stort n.

Det følger nu fra Lemma 10, at

$$\begin{aligned} b' - a' &\leq \sum_{j=1}^{n}(b'_j - a'_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty}(b_j + \varepsilon 2^{-j} - a_j) = \sum_{j=1}^{\infty}(\ell(I_j) + \varepsilon 2^{-j}) = \sum_{j=1}^{\infty}\ell(I_j) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ var vilkårlig, får vi $b' - a' \leq \sum_{j=1}^{\infty}\ell(I_j)$, og da a', b' også var vilkårlige følger det ønskede af (6). $\square$

Lemma 12 *For ethvert h-interval I er $m^*(I) = \ell(I)$.*

Bevis: Sæt $I_1 = I$, $I_2 = I_3 = \cdots = \emptyset$. Da er $I_1, I_2, I_3, \ldots$ h-intervaller og $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, så

$$m^*(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n) = \ell(I)$$

ifølge definitionen af m^*. Omvendt, hvis $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en følge af h-intervaller med $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, da er $\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n) \geq \ell(I)$ ifølge Lemma 11. Dette viser, at $m^*(I) \geq \ell(I)$. $\square$

Theorem 13 *Der findes et målrum $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$, som opfylder $\mathbb{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{L}$ og*

$$m((a, b]) = b - a,$$

for alle a, b med $-\infty \leq a < b < \infty$.

Bevis: Lad $\mathbb{L}$ være mængden af alle m^*-målelige mængder, og lad m være restriktionen af m^* til $\mathbb{L}$. Carathéodory's sætning giver, at $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$ er et målrum. Lemma 9 giver $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{L}$. Da σ-algebraen frembragt af $\mathbb{I}$ er lig med Borel-σ-algebraen $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ (jvf. Opgave 1.2), så giver Sætning 1.2 i noterne, at $\mathbb{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathbb{I}) \subseteq \mathbb{L}$.

Endelig, hvis $-\infty \leq a < b < \infty$, så er $(a, b]$ et h-interval, og ved at udnytte Lemma 12 får vi

$$m((a, b]) = m^*((a, b]) = \ell((a, b]) = b - a. \qquad \square$$

Ved at tage restriktionen af målet m til Borel-σ-algebraen $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ får vi følgende korollar til Theorem 13:

Korollar 14 *Der findes et mål m defineret på σ-algebraen $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, som opfylder*

$$m((a,b]) = b - a,$$

for alle a, b med $-\infty \leq a < b < \infty$.

Hovedsætning 5.1 i noterne siger, at målet m i Korollar 14 tillige er entydigt.

Eksistensen af Lebesguemålet på $\mathbb{R}^k$ kan vises på en tilsvarende, men mere besværlig, måde. Istedet vil vi, når tiden er moden, konstruere Lebesguemålet på $\mathbb{R}^k$ ved at bruge teorien for produktmål, som udvikles i noternes §6.

2 Fuldstændige mål

Målet i Carathéodory's Sætning — og dermed også Lebesguemålet m defineret på σ -algebraen $\mathbb{L}$ — har en særlig fin og nyttig egenskab kaldet fuldstændighed. Denne egenskab defineres formelt således:

Definition 15 *Et målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ kaldes* fuldstændigt*, hvis alle μ-nulmængder ligger i $\mathbb{E}$.*

Bemærk, at $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er fuldstændig, hvis og kun hvis det for alle $E \in \mathbb{E}$ med $\mu(E) = 0$, og alle $N \subseteq E$ gælder, at $N \in \mathbb{E}$. Af og til vil man sige, at μ er fuldstændig i betydningen $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er fuldstændig, når X og $\mathbb{E}$ fremgår af sammenhængen.

Fuldstændige mål er diskuteret i opgaverne 3.15–3.18 i noterne. Fuldstændige mål er bekvemme at arbejde med, bl.a. p.g.a. følgende sætning, som til dels er bevist i Opgave 3.18.

Sætning 16 *Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et fuldstændigt målrum, og lad $(Y, \mathbb{F}, \nu)$ være et vilkårligt andet målrum (ikke nødvendigvist fuldstændigt). Hvis $f \colon X \to Y$ er $\mathbb{E}$-$\mathbb{F}$-målelig, og hvis $g \colon X \to Y$ opfylder $g = f$ μ-n.o., så er g også $\mathbb{E}$-$\mathbb{F}$-målelig.*

Til ethvert målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ kan man konstruere et nyt målrum $(X, \bar{\mathbb{E}}, \bar{\mu})$, som er fuldstændigt, og som opfylder $\mathbb{E} \subseteq \bar{\mathbb{E}}$ og $\bar{\mu}|_{\mathbb{E}} = \mu$ (se Opgave 3.17 eller Opgave 4 nedenfor). Dette nye målrum kaldes en *fuldstændiggørelse* af $(X, \mathbb{E}, \mu)$. Lebesguesmålet konstrueret i Theorem 13 er, som vist nedenfor, automatisk fuldstædigt, så vi får ikke brug for denne fuldstændiggørelsesmaskine.

Sætning 17 *Målrummet $(X, \mathbb{E}, \mu)$ fra Carathéodory's Sætning (Theorem 5) er fuldstændigt.*

Bevis: Vi benytter notationen fra Theorem 5, hvor bl.a. μ^* er et ydre mål på mængden X, $\mathbb{E}$ er mængden af μ^*-målelige mængder, og μ er restriktionen af μ^* til $\mathbb{E}$.

Lad $E \in \mathbb{E}$ og $N \subseteq E$ med $\mu(E) = 0$ være givet, og lad $A \in P(X)$. Da er

$$\mu^*(A \cap N) + \mu^*(A \cap \complement N) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) = \mu^*(A).$$

Betingelsen (2) er således opfyldt for N, så $N \in \mathbb{E}$. Dette viser, at μ er fuldstændig. $\square$

Korollar 18 *Lebesguemålet m defineret på σ-algebraen $\mathbb{L}$ (defineret i Theorem 13) er fuldstændigt.*

Bevis: Dette følger umiddelbart af Sætning 17, idet målrummet $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$ kommer fra et ydre mål via Carathéodory's Sætning. $\square$

Mængderne i σ-algebraen $\mathbb{L}$ kaldes *Lebesguemålelige mængder*. Alle Borel-delmængder af $\mathbb{R}$ er således Lebesguemålelige. Det omvendte gælder ikke. Faktisk har vi

$$\mathbb{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{L} \subsetneq P(\mathbb{R}). \tag{7}$$

Den første af disse ægte inklusioner kan ses ved en kardinalitetsbetragtning, idet

$$\mathrm{card}(\mathbb{L}) = \mathrm{card}(P(\mathbb{R})), \qquad \mathrm{card}(\mathbb{B}(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathbb{R}). \tag{8}$$

Den første identitet i (8) kan indses ved at benytte Cantor's mængde Z (se Eksempel 5.22 i noterne). Mængden Z er kompakt (og dermed $Z \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{L}$), $m(Z) = 0$, og $\mathrm{card}(Z) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$. Da $(\mathbb{R}, \mathbb{L}, m)$ er fuldstændig, har vi $P(Z) \subseteq \mathbb{L}$. Dette giver $\mathrm{card}(P(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(P(Z)) \leq \mathrm{card}(\mathbb{L}) \leq \mathrm{card}(P(\mathbb{R}))$. Den anden kardinalitetsidentitet i (8) er en del mere kompliceret, og vil ikke blive vist her.

Den anden ægte inklusion i (7) følger umiddelbart af Vitali's Sætning (Sætning 5.30 i noterne).

En funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hhv. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, kaldes *Lebesguemålelig*, hvis den er $\mathbb{L}$-$\mathbb{B}(\mathbb{R})$-målelig, hhv. $\mathbb{L}$-$\mathbb{B}(\mathbb{C})$-målelig.

Alle Borelfunktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er således Lebesguemålelige (da $\mathbb{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{L}$). Endvidere, hvis $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvis f er Lebesguemålelig, og hvis $f = g$ m-n.o., så er g Lebesguemålelig ifølge Sætning 16.

Lad $[a, b]$ være et kompakt delinterval af $\mathbb{R}$, og sæt

$$\mathbb{L}([a, b]) = \{E \cap [a, b] \mid E \in \mathbb{L}\} \quad (= \mathbb{L}_{[a,b]}).$$

Det kan (ret nemt) vises, at $([a, b], \mathbb{L}([a, b]), m)$ er et fuldstændigt målrum, og at $\mathbb{B}([a, b]) \subseteq \mathbb{L}([a, b])$. I Opgave 3 nedenfor vises det, at $\mathcal{L}([a, b], \mathbb{L}([a, b]), m)$ indeholder alle Riemannintegrable funktioner $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, og at Lebesgueintegralet stemmer overens med Riemannintegralet, når Riemannintegralet er defineret.

Der findes eksempler på Riemannintegrable funktioner, som ikke er Borelmålelige (se Opgave 4).

3 Opgaver

Opgave 1 Bevis Lemma 4.

Opgave 2 Lad X være en ikke-tom mængde, og definer $\mu^*\colon P(X) \to \mathbb{R}^+$ ved $\mu^*(\emptyset) = 0$ og $\mu^*(E) = 1$ for alle $E \in P(X) \setminus \{\emptyset\}$. Vis at μ^* er et ydre mål, og bestem alle μ^*-målelige delmængder af X.

Opgave 3 Lad $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ være en Riemannintegrabel funktion, hvor Riemannintegralet er defineret på sædvanlig vis ved hjælp af over- og undersummer.

(i) Vis at der findes følger af funktioner

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq f \leq \cdots \leq t_3 \leq t_2 \leq t_1,$$

hvor funktionerne s_j og t_j er på formen $\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{[x_{i-1},x_i)}$, for passende inddelinger, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ af intervallet $[a,b]$, og for passende reelle tal $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, således at

$$\sup_n \int_{[a,b]} s_n dm = \int_a^b f(x)dx = \inf_n \int_{[a,b]} t_n dm.$$

(ii) Vis at der findes $g_1, g_2 \in \mathcal{L}([a,b], \mathbb{B}([a,b]), m)$, så $g_1 \leq f \leq g_2$ og

$$\int_{[a,b]} g_1 dm = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} g_2 dm.$$

(iii) Vis at $g_1 = f = g_2$ m-n.o.

(iv) Vis at $f \in \mathcal{L}([a,b], \mathbb{L}([a,b]), m)$, og at

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_a^b f(x)dx.$$

Opgave 4 Lad Z være Cantormængden (jvf. Eksempel 5.22 i noterne). Det erindres herfra, at Z er en kompakt delmængde af intervallet $[0,1]$, at Z er overtællelig, og at $m(Z) = 0$.

(i) Vis at $1_A\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ er Riemannintegrabel, og at $\int_0^1 1_A(x)dx = 0$ for enhver delmængde A af Cantormængden Z.

(ii) Find et eksempel på en Riemannintegrabel funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, som ikke er en Borelfunktion. [Vink: Mængden af Borel-delmængder af $\mathbb{R}$ er tællelig]

Opgave 5 Lad $(X, \mathbb{F}, \lambda)$ være et målrum. I analogi med definitionen af m^* (i Definition 7) defineres $\mu^* \colon P(X) \to [0, \infty]$ ved

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(F_j) \mid F_j \in \mathbb{F}, \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right\}.$$

Formålet med denne opgave er at undersøge hvad denne definition fører til, og at sætte undersøgelsen af m^* i relief. Som et biprodukt får vi en fuldstændiggørelse af λ, men dette kan opnås betydeligt enklere ved at følge Opgave 3.17.

(i) Vis at

$$\mu^*(A) = \inf\{\lambda(F) \mid F \in \mathbb{F}, \quad A \subseteq F\},$$

for alle $A \in P(X)$, og vis, at der til ethvert $A \in P(X)$ findes $F \in \mathbb{F}$ således, at $A \subseteq F$ og $\mu^*(A) = \lambda(F)$.

(ii) Vis at μ^* er et ydre mål.

Benævn med $\mathbb{E}$ mængden af μ^*-målelige delmængder af X, og lad μ betegne restriktionen af μ^* til $\mathbb{E}$.

(iii) Gør rede for, at $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et fuldstændigt målrum.

(iv) Vis at $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$, dvs. at alle mængder F i $\mathbb{F}$ er μ^*-målelige.

(v) Vis at $\mu(E) = \lambda(E)$ for alle $E \in \mathbb{E}$.

(vi) Gør rede for, at $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er en fuldstændiggørelse af $(X, \mathbb{F}, \lambda)$.

(vii) Beskriv $(X, \mathbb{E}, \mu)$ i tilfældet, hvor $\mathbb{F} = \{\emptyset, X\}$ og hvor $\lambda(X) = 1$.

(viii) Antag at λ er σ-endelig. Vis at $E \in \mathbb{E}$ hvis og kun hvis der findes $F \in \mathbb{F}$ således at den symmetriske difference $(E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ er en λ-nulmængde.

(ix) Beskriv $(X, \mathbb{E}, \mu)$ i tilfældet, hvor $\lambda(F) = \infty$ for alle ikke-tomme $F \in \mathbb{F}$. Vis at resultatet fra spørgsmål (viii) ikke holder generelt uden antagelsen om, at λ er σ-endelig.